# Kaksikasvuisen variaatio-ongelman minimoijan säännöllisyydestä

Arttu Karppinen

Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2017

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

KARPPINEN, ARTTU: Kaksikasvuisen variaatio-ongelman ratkaisun säännöllisyydestä
Pro gradu -tutkielma, 52 s.
Matematiikka
Huhtikuu 2017

---

Tässä työssä tutkitaan kaksikasvuisen variaatio-ongelman minimoijan olemassaoloa ja säännöllisyyttä. Erityisesti osoitetaan, että minimoiva funktio on Hölder-jatkuva ja sen gradientille parempi integroituvuus.

Kaksi ensimmäistä lukua käsittelevät esitietoja, läpi työn käytettäviä merkintöjä sekä kahta iteraatiolemmaa. Ensimmäisessä luvussa esitellään myös yleisimmin käytettävät epäyhtälöt sekä läpi tutkielman voimassa olevat oletukset.

Kolmannessa luvussa esitetään todistus lokaalin minimoijan olemassaololle tarkastelemalla variaatio-ongelman funktionaalia $\mathcal{F}$. Olettamalla, että $\mathcal{F}$ on rajoitettu, koersiivinen ja sileä, nähdään lokaalin minimoijan olemassa olo funktionaalianalyysin keinoja käyttäen.

Luvut neljä ja viisi käsittelevät lokaalin minimoijan säännöllisyyttä. Luvussa neljä osoitetaan eräs Sobolev–Poincaré-epäyhtälö ja gradientin parempi integroituvuus. Tähän tarvitaan Sobolev–Poicanré -epäyhtälön lisäksi Gehringin lemmaa. Luvussa viisi käydään läpi minimoijan Hölder-jatkuvuuden todistus de Giorgin metodin kaltaisella päättelyllä.

Asiasanat: variaatio-ongelmat, ratkaisun olemassaolo, ratkaisun sännöllisyys, Sobolev-avaruudet, de Giorgin metodi.

# Sisältö

## Johdanto

1900-luvun alussa saksalainen matemaatikko David Hilbert esitteli muille matemaatikoille hänen mielestään 23 tärkeintä ratkaisematonta matemaattista ongelmaa [1]. Näiden ongelmien ratkaisuyritykset ohjasivat koko 1900-luvun matemaattista kehitystä ympäri maailman, ja esimerkiksi kahdeksas ongelma, niin kutsuttu Riemannin hypoteesi, on yhä vailla ratkaisua. Hilbertin ongelmien merkittävyyttä kuvastaa myös se, että vuosituhannen vaihteessa Clay-instituutti julkaisi samassa hengessä 7 matemaattista ongelmaa, jotka ovat saaneet nimen ”Millenium-ongelmat”. Lisäksi instituutti on luvannut jokaisesta ongelmasta miljoonan dollarin palkinnon sen ratkaisijalle.

Tässä tutkielmassa käsitellään Hilbertin ongelmiin 19 ja 20 liittyviä tuloksia. Nämä liittyvät variaatiolaskennaksi kutsuttuun matematiikan haaraan, jonka tavoitteena on löytää funktio, joka minimoi annetunlaisen integraalin. Variaatiolaskenta liittyy hyvin läheisesti osittaisdifferentiaaliyhtälöiden matemaattiseen teoriaan, sillä integraaleja minimoivat funktiot ovat jonkin osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisuja.

19. ongelman tarkempi muotoilu on *”Ovatko kaikki säännöllisten variaatio-ongelmien ratkaisut aina välttämättä analyyttisiä?”* Ongelman ratkaisivat ensimmäisinä toisistaan riippumatta italialainen Ennio de Giorgi ja yhdysvaltalainen John Nash täysin erilaisilla menetelmillä. Näistä kahdesta menetelmästä de Giorgin metodi osoittautui helpommin yleistettäväksi, ja sitä onkin sovellettu myös muiden variaatio-ongelmien säännöllisyystulosten saavuttamiseksi. Tämän tutkielman päätuloksena esitellään todistus kaksikasvuisen variaatio-ongelman ratkaisun Hölder-jatkuvuudelle, ja se perustuu juuri de Giorgin menetelmään. Nashin ja de Giorgin lisäksi myös Jürgen Moser ratkaisi säännöllisyysongelman menetelmällä, jota nykyään kutsutaan Moserin iteraatioksi. Tämän menetelmän lähtökohtana on osittaisdifferentiaaliyhtälö ja sen ratkaisu, kun taas de Giorgin metodi aloittaa yhtälöä vastaavasta funktionaalista. Nämä kaksi menetelmää ovat ainoat yleisessä käytössä olevat menetelmät osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisun Hölder-jatkuvuuden osoittamiseksi.

Ennen säännöllisyystodistuksen käsittelyä tässä tutkielmassa osoitetaan ensin, että kaksikasvuisella variaatio-ongelmalla on ylipäänsä ratkaisu tiettyjen oletusten vallitessa. Tämä liittyy Hilbertin 20. ongelmaan, joka voidaan kääntää vapaammin tulkittuna muotoon *”Reuna-arvojen yleinen ongelma”.*

Täsmällisemmin ilmaistuna kysymys kuuluu, onko variaatio-ongelmalla aina ratkaisua, kun ratkaisun reuna-arvot on etukäteen annettu. Tähänkin kysymyksen vastaus on myönteinen, kunhan ratkaisun määritelmässä hieman joustetaan perinteisen pisteittäin määritellyn funktion sijasta, ja hyväksytään niin kutsutut heikot ratkaisut.

Edellä mainittu kaksikasvuinen variaatio-ongelma viittaa ongelmaan, jossa on tavoitteena löytää funktio $u$, joka minimoi funktionaalin

$$v \mapsto \int_{\Omega} |\nabla v|^p + a(x)|\nabla v|^q \, dx.$$

Ongelma vastaa elliptisen osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$-\nabla \cdot (p|\nabla v|^{p-2}\nabla v + qa(x)|\nabla v|^{q-2}\nabla v) = 0$$

ratkaisemista, joka on variaatio-ongelman Euler–Lagrange-yhtälö [2, Luku 5]. Funktionaali sopii kuvaavaamaan esimerkiksi materiaaleja, jotka ovat sekoituksia kahdesta eri aineesta. Kerroinfunktio $a$ kuvaa aineiden konsentraatioita paikan suhteen, ja aineilla voi olla eri kovuuseksponentit $p$ ja $q$. Ongelmalliseksi funktionaalin käsittelyn tekee joukko $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a(x) = 0\}$, sillä siellä funktionaalin kasvu vaihtuu $(p, q)$-vaiheesta $p$-vaiheeseen.

Tutkielmassa on kaksi päätulosta. Ensimmäiseksi luvussa 3 todistetaan, että kaksikasvuisen variaatio-ongelman malliesimerkille on olemassa minimoiva funktio. Tämä tulos antaa pohjan tarkastella ratkaisufunktion säännöllisyyttä luvuissa 4 ja 5, jossa ratkaisulle osoitetaan gradientin parempi integroituvuus sekä itse minimoijan Hölder-jatkuvuus. Paremman integroituvuuden todistus perustuu Sobolev–Poincaré-epäyhtälöön sekä Gehringin lemmaan, kun taas Hölder-jatkuvuuden osoittaminen mukailee de Giorgin metodia. Nämä säännöllisyystulokset perustuvat Maria Colmbon ja Giuseppe Mingionen vuonna 2014 julkaistuun artikkeliin [3].

Lukijan oletetaan tuntevan Sobolev-avaruuksien perusteoriaa, mutta tärkeimmät määritelmät ja tulokset käydään läpi luvussa 1. Tässä luvussa esitettyjen tulosten todistukset sivuutetaan, mutta niistä jokaiseen annetaan kirjallisuusviittaus. Tutkielman kaikkia aputuloksia ei mainita tässä luvussa, vaan osa esitetään todistusten lomassa. Myös näille annetaan kirjallisuusviite.

# 1 Esitiedot ja merkinnät

Käydään ensimmäiseksi läpi tutkielmassa useimmin toistuvat merkinnät sekä muutama aputulos, joiden todistukset sivuutetaan. Nämä aputulokset koskevat pääasiassa $L^p$- ja Sobolev-avaruuksien $W^{1,p}$, perusteoriaa, ja jokaisen tuloksen todistukseen on annettu kirjallisuusviite.

Aloitetaan merkintöjen esittely tutkielman variaatiointegraalista

$$\mathcal{P}(w, \Omega) = \int_\Omega |\nabla w|^p + a(x)|\nabla w|^q \, dx. \tag{1.1}$$

Tässä $w \in W^{1,1}(\Omega)$ on Sobolev-funktio ja $\Omega$ avoin sekä rajoitettu alue avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Dimensiosta ei oleteta muuta kuin, että $n \geq 2$. Tässä tutkielmassa funktion $u$ heikosta gradientista merkintää

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = (D_1 u, D_2 u, \dots D_n u).$$

Integraalissa esiintyvä funktio $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on ei-negatiivinen Hölder-jatkuva funktio eli

$$a(x) \geq 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n \text{ ja } |a(x) - a(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \tag{1.2}$$

missä $\alpha \in (0, 1]$. Lisäksi funktion $a$ Hölder-seminormille käytetään merkintää

$$[a]_{0,\alpha} = \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|a(x) - a(y)|}{|x - y|^\alpha}. \tag{1.3}$$

Tämä ei kuitenkaan ole normi, sillä millä tahansa vakiofunktiolla $a \equiv k$ nähdään, että $[a]_{0,\alpha} = 0$. Lausekkeesta kuitenkin saadaan normi, kun määritellään

$$\|a\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |a(x)| + [a]_{0,\alpha}.$$

Tutkielman loppuosassa käytetään myös niin kutsuttua jäädytettyä funktionaalia

$$\mathcal{P}_0(w, \Omega) = \int_\Omega |\nabla w|^p + a_0 |\nabla w|^q \, dx, \tag{1.4}$$

missä $a_0 = a(x_0)$ jollakin kiinteällä $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Siirrytään seuraavaksi lisäoletuksiin funktionaalista $\mathcal{P}$. Ensinäkin eksponenttien $p$ ja $q$ on oltava likimain yhtä suuret, ja näiden suhdetta sitoo epäyhtälö

$$\frac{q}{p} < 1 + \frac{\alpha}{n}, \tag{1.5}$$

missä $\alpha$ on funktion $a$ Hölder-eksponentti. Tämä ehto on lisäksi paras mahdollinen, sillä tutkielman päätulokselle löytyy vastaesimerkki mikäli epäyhtälö ei ole voimassa [3, Luku 4].

Kuten yleisestikin varaatio-ongelmissa, integrandin täsmällinen muoto ei ole välttämätön tieto. Käytetään kuitenkin merkintöjen selkeyttämiseksi funktionaalin $\mathcal{P}$ integrandille merkintää

$$H(x, z) = |z|^p + a(x)|z|^q. \tag{1.6}$$

Tarkan suljetun muodon sijaan yksi variaatio-ongelman oletuksista integrandille on sen kasvunopeus. Tässä tutkielmassa tarkastellaan funktionaalia

$$\mathcal{F}(w, \Omega) = \int_\Omega F(x, w, \nabla w)\, dx, \tag{1.7}$$

jolle pätee

$$\nu H(x, z) \leq F(x, v, z) \leq LH(x, z) \tag{1.8}$$

joillakin reaaliluvuilla $\nu$ ja $L$.

Variaatio-ongelmissa tarkastellaan usein lokaaleja minimejä. Tämä yleistää esimerkiksi differentiaaliyhtälöissä käytettävät alkuarvot, joilla sidotaan kaikista mahdollisista ratkaisuista ympäristöön sopivaksi. Lokaali minimi voi sisältää kuitenkin muutakin informaatiota kuin niin kutsutut reuna-arvot. Lisäksi käsittelemällä lokaaleja minimejä voidaan pysyä nimensämukaisesti lokaaleissa tuloksissa, eli tarkastelut eivät koske alueen reunaa $\partial\Omega$. Täsmällisesti tämä muotoillaan seuraavassa määritelmässä.

**Määritelmä 1.1.** Funktio $u \in W^{1,1}(\Omega)$ on funktionaalin $\mathcal{F}$ *lokaali minimoija*, jos $H(\cdot, \nabla u) \in L^1(\Omega)$ sekä $\mathcal{F}(u, \operatorname{supp}(u - v)) \leq \mathcal{F}(v, \operatorname{supp}(u - v))$ pätee kaikilla sellaisilla $v \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, joilla $\operatorname{supp}(u - v) \subset \Omega$.

Tässä $\operatorname{supp}(f)$ on funktion $f$ kantaja eli

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Ennen aputuloksiin siirtymistä annetaan vielä funktion integraalikeskiarvolle lyhyempi merkintä

$$(u)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)\, dx = \fint_\Omega u(x)\, dx,$$

ja todetaan, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ $x$-keskisille ja $r$-säteisille palloille käytetään merkintää $B_r(x)$. Jos keskipiste on kontekstista selvä tai muutoin kiinnitetty, merkintä lyhentyy muotoon $B_r$. Näiden lisäksi huomautetaan, että tutkielmassa esiintyvät vakiot kuten $c$ tai $C$ oletetaan aina suuremmpiksi kuin 1, ja niiden arvo voi vaihtua jokaisesessa arviossa ilman erillistä mainintaa.

Aloitetaan aputulosten läpikäynti funktionaalianalyysin tuloksista. Näistä erityisesti Mazurin lause osoittautuu keskeiseksi työkaluksi variaatio-ongelman ratkaisun olemassaolon todistuksessa. Nämä tulokset käsittelevät jonon heikkoa suppenemista, joten annetaan ensiksi heikon suppenemisen määritelmä.

**Määritelmä 1.2.** Jono $(x_k)$ *suppenee heikosti* kohti pistettä $x$ avaruudessa $X$, jos

$$\lim_{k\to\infty} T(x_k) \to T(x)$$

kaikilla rajoitetuilla lineaarioperaattoreilla $T \in X^*$. Kun lineaarioperaattoria ei haluta merkitä erikseen näkyviin, käytetään myös merkintää $x_k \rightharpoonup x$, kun $k \to \infty$.

Esitellään sitten kaksi heikosti suppeneviin jonoihin liittyvää tulosta. Ensimmäinen lemma yleistää suppenevien jonojen ominaisuuden.

**Lemma 1.3** ([4, Sivu 56])**.** *Jos $(x_n)$ on heikosti suppeneva jono normiavaruudessa $X$, niin se on rajoitettu.*

Toisena funktioanalyysin tuloksena esitellään edellä mainittu Mazurin lause. Tätä käytetään silloin, kun halutaan osoittaa, että heikko raja-arvo kuuluu johonkin haluttuun avaruuteen.

**Lause 1.4** (**Mazurin lause** [5, Theorem 3.12])**.** *Olkoon $E$ suljettu ja konveksi joukko. Tällöin $E$ on myös heikosti suljettu joukko.*

Käydään seuraavaksi läpi reaalianalyysin ja Sobolev-avaruuksien perustuloksia. Ensimmäisenä mainittava Hölderin epäyhtälö on yksi yleisimmistä tavoista arvioida tulon integraalia, ja sitä käytetäänkin tässä tutkielmassa toistuvasti.

**Lause 1.5** (**Hölderin epäyhtälö** [6, Lause 1.35])**.** *Olkoot $1 < p < \infty$ ja $q$ sellaiset luvut, että $1/p + 1/q = 1$. Oletetaan lisäksi, että $f \in L^p(\Omega)$ ja*

$g \in L^q(\Omega)$. *Tällöin*

$$\int_\Omega fg\,dx \le \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

*Mikäli* $p = 1$, *niin yllä oleva epäyhtälö tulkitaan muodossa* $\|fg\|_{L^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^1(\Omega)} \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Tyypillisesti Hölderin epäyhtälöä käytetään myös funktion integraalin arviointiin, kun integroimisalue $\Omega$ on rajoitettu. Tällöin funktioksi $g$ valitaan joukon $\Omega$ karakteristinen funktio $\chi_\Omega$.

Seuraavaksi esitettävä Egoroffin lause osoittautuu myös tärkeäksi tulokseksi variaatio-ongelman ratkaisun olemassaolon todistamisessa. Sitä tarvitaan, kun osoitetetaan funktionaalin heikkoa alhaalta puolijatkuvuutta.

**Lause 1.6** (**Egoroffin lause** [7, Luku 1.3, Theorem 3])**.** *Olkoon* $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, k = 1, 2, \dots$ *jono mitallisia funktioita, jotka suppenevat kohti funktiota* $g$ *äärellismittaisessa joukossa* $A \subset \mathbb{R}^n$. *Tällöin jokaisella* $\varepsilon > 0$ *on olemassa sellainen mitallinen joukko* $B \subset A$, *että*

*1)* $|A \backslash B| < \varepsilon$,

*2)* $f_k \to g$ *tasaisesti joukossa* $B$.

Tässä tutkielmassa tärkein funktioavaruus on Sobolev-avaruus $W^{1,p}(\Omega)$.

**Määritelmä 1.7.** Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $1 \le p < \infty$. Funktio $u : \Omega \to \mathbb{R}$ kuuluu *Sobolev-avaruuteen* $W^{1,p}(\Omega)$, jos funktio $u$ ja sen heikot osittaisderivaatat kuuluvat avaruuteen $L^p(\Omega)$. Toisin ilmaistuna

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \\ &= \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty.\end{aligned}$$

Lisäksi merkitään $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, jos

$$u \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}.$$

Koska Sobolev-funktion määritelmässä esiintyvät funktion ja sen gradientin normit, on luonnollista saada joitakin arvioita näiden $L^p$-normien välille. Yksi yleisimmistä työkaluista on jokin seuraavista epäyhtälöistä, joita kaikkia saatetaan kutsutaan lähteestä riippuen Poincarén epäyhtälöksi.

**Lause 1.8** (**Poincarén epäyhtälö** [8, Luku 5.8, Theorem 1 ja Luku 5.6, Theorem 3]). *Olkoon* $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Jos* $\Omega$ *on konveksi ja rajoitettu alue joukossa* $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$, *niin*

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{1.9}$$

*missä* $C \equiv C(n, p, \Omega)$ *on vakio. Lisäksi jos* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *ja* $p < n$, *niin*

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.10}$$

*kaikilla* $1 \leq q \leq p^*$, *missä* $C$ *riippuu myös vakiosta* $q$. *Jos* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *niin*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.11}$$

*kaikilla* $1 \leq p \leq \infty$.

Sobolev-avaruuden vakioiden $p$ ja $n$ keskinäinen suhde vaikuttaa merkittävästi funktioiden säännöllisyyteen. Seuraava Morreyn epäyhtälö osoittaa, että tapauksessa $p > n$ jokaisella Sobolev-funktiolla $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on Hölder-jatkuva edustaja.

**Lause 1.9** ([8, Luku 5.6, Theorem 5]). *Olkoon* $n < p < \infty$ *sekä* $\Omega$ *rajoitettu ja avoin alue, jonka reuna* $\partial\Omega$ *on luokkaa* $C^1$. *Tällöin on olemassa sellainen vakio* $c \equiv c(n, p, \Omega)$, *että jokaisella* $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

*missä* $\alpha = 1 - n/p$ *ja funktio* $u$ *on ekvivalenssiluokkansa jatkuva edustaja.*

Annetaan seuraavaksi yksinkertainen geometrinen kriteeri alueelle $\Omega$. Alueen $\Omega$ reuna $\partial\Omega$ on luokkaa $C^1$, jos jokaisella $x \in \partial\Omega$ on sellaiset palloympäristö $B_r(x)$ ja $C^1$-funktio $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, että mahdollisen koordinaattien uudelleenjärjestelyn ja rotaatioiden jälkeen

$$\Omega \cap B_r(x) = \{x \in B_r(x) \mid x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

Intuitiivinen tulkinta on, että reuna on lokaalisti jatkuvasti derivoituva pinta.

Lisäksi merkitään $A \subset\subset B$, jos joukon $A$ sulkeuma on kompakti joukossa $B$.

**Lause 1.10** (**Rellich–Kondrachov-kompaktisuuslause** [8, Luku 5.7, Theorem 1]). *Olkoon* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *missä* $1 \leq p < n$, *ja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sellainen avoin ja rajoitettu joukko, että* $\partial\Omega$ *on luokkaa* $C^1$. *Tällöin*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

*on kompakti upotus kaikilla* $1 \leq q < p^*$.

Koska Sobolev- ja $L^q$-avaruudet ovat täydellisiä metrisiä avaruuksia, kompakti upotus on ekvivalenttia seuraavalle ehdolle: Jokaisella Sobolev-avaruuden $W^{1,q}(\Omega)$ rajoitetulla jonolla on osajono, joka suppenee avaruudessa $L^q(\Omega)$, kunhan $1 \leq q \leq p^*$.

Esitellään luvun lopuksi eräs versio Gehringin lemmasta. Lemma antaa eräänlaisen käänteisen Hölderin epäyhtälön, jonka avulla suuremmasta eksponentista voidaan siirtyä pienempään. Toinen ja tärkeämpi tulkinta Gehringin lemmalle on sen antama parempi integroituvuus. Avaruuden $L^1$- funktio saadaan integroituvaksi avaruudessa, jonka eksponentti on aidosti lukua 1 suurempi. Tulos kuitenkin vaatii muutosta integroimisalueessa, mutta käsiteltäessä lokaaleja tuloksia, on paremmasta integroituvuudesta saatava hyöty suurempi kuin integroimisalueen muutoksesta syntyvä haitta.

Seuraavassa lauseessa esitetty muotoilu Gehringin lemmalle on yksinkertaistus lähteestä esitetystä versiosta, sillä lähteessä esiintyvä funktio $g$ oletetaan tässä esityksessä nollafunktioksi.

**Lause 1.11** ([9, Theorem 6.6]). *Olkoon* $f \in L^1(\Omega)$. *Jos jokaisella samankeskisellä pallolla* $B_\rho \subset B_R \subset \Omega$, *missä* $\rho = R/2$, *pätee*

$$\fint_{B_\rho} f(x)\,dx \leq c \left( \fint_{B_R} f(x)^d\,dx \right)^{1/d},$$

*kun* $0 < d < 1$. *Tällöin on olemassa sellainen luku* $r > 1$, *että* $f \in L^r(B_{R/2})$ *ja että*

$$\left( \fint_{B_{R/2}} f(x)^r\,dx \right)^{1/r} \leq c \fint_{B_R} f(x)\,dx.$$

## 2 Iteraatiolemmat

Ennen variaatio-ongelmien käsittelyä esitellään kaksi iteraatiolemmaa. Iteraatiolemmat eivät nimestään huolimatta anna iteratiivista tulosta, vaan nimi viittaa enemmän niiden todistuksiin. Molemmat todistukset perustuvat nimittäin lukujonoihin ja induktiotodistukseen.

Ensimmäinen näistä lemmoista tulee käyttöön Caccioppoli-epäyhtälöiden todistuksissa (katso esimerkiksi Lause 4.4). Lisäksi tästä lemmasta on useita versioita, joiden todistukset eivät olennaisesti eroa toisistaan. Katso esimerkiksi [10, Lemma 1.1].

**Lemma 2.1.** *Olkoot* $h : [\rho_0, \rho_1] \to \mathbb{R}$ *ei-negatiivinen rajoitettu funktio,* $\theta \in (0,1)$ *ja* $A, B, \alpha, \beta \geq 0$ *vakioita. Jos*

$$h(t) \leq \theta h(s) + \frac{A}{(s-t)^\alpha} + \frac{B}{(s-t)^\beta}$$

*kaikilla* $\rho_0 \leq t < s \leq \rho_1$*, niin tällöin on olemassa sellainen vakio* $c(\theta, \alpha, \beta)$*, että epäyhtälö*

$$h(\rho_0) \leq \frac{cA}{(\rho_1 - \rho_0)^\alpha} + \frac{cB}{(\rho_1 - \rho_0)^\beta}$$

*pätee.*

*Todistus.* [9, Lemma 6.1] Määritellään lukujono $(t_i) \subset [\rho_0, \rho_1]$ asettamalla

$$t_{i+1} - t_i = (1-\lambda)\lambda^i(\rho_1 - \rho_0), \tag{2.1}$$

kun $\lambda \in (0,1)$ ja $t_0 = \rho_0$. Osoitetaan ensin, että jonon $(t_i)$ kaikki jäsenet kuuluvat välille $[\rho_0, \rho_1]$, ja todistetaan sitten induktiolla, että

$$h(\rho_0) \leq \theta^k h(t_k) + \left[\frac{A}{(1-\lambda)^\alpha(\rho_1-\rho_0)^\alpha} + \frac{B}{(1-\lambda)^\beta(\rho_1-\rho_0)^\beta}\right] \sum_{i=0}^{k-1} \theta^i \lambda^{-i\alpha},$$

missä voidaan rajoituksetta olettaa, että $\alpha \geq \beta$.

Siirtymällä teleskooppisummaan, nähdään, että

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=0}^{n} t_k - t_{k-1} + t_0 = \sum_{k=1}^{n} (1-\lambda)\lambda^{k-1}(\rho_1 - \rho_0) + t_0 \\ &= (1-\lambda)(\rho_1-\rho_0)\lambda\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} + t_0. \end{aligned}$$

Koska $t_0 = \rho_0$ ja $\lambda \in (0,1)$, niin nähdään, että $t_n \leq \rho_1$. Lisäksi, koska erotus $t_{i+1} - t_i > 0$, niin $(t_i) \subset [\rho_0, \rho_1]$.

Osoitetaan seuraavaksi yläarvio arvolle $h(\rho_0)$ induktiolla.

**Alkuaskel:** Osoitetaan, että kaava pätee, kun $k = 1$. Oletuksen ja yhtälön (2.1) nojalla

$$\begin{aligned} h(\rho_0) = h(t_0) &\leq \theta h(t_1) + \frac{A}{(t_1 - t_0)^\alpha} + \frac{B}{(t_1 - t_0)^\beta} \\ &= \theta h(t_1) + \frac{A}{(1-\lambda)^\alpha(\rho_1 - \rho_0)^\alpha} + \frac{B}{(1-\lambda)^\beta(\rho_1 - \rho_0)^\beta}. \end{aligned}$$

**Induktio-oletus:** Oletetaan, että väite pätee, kun $k = j$. Siis

$$h(\rho_0) \leq \theta^j h(t_j) + \left[\frac{A}{(1-\lambda)^\alpha(\rho_1 - \rho_0)^\alpha} + \frac{B}{(1-\lambda)^\beta(\rho_1 - \rho_0)^\beta}\right] \sum_{i=0}^{j-1} \theta^i \lambda^{-i\alpha}.$$

**Induktioaskel:** Osoitetaan, että väite pätee, kun $k = j + 1$. Induktio-oletuksesta saadaan ensin

$$h(t_0) \leq \theta^j h(t_j) + \left[\frac{A}{(1-\lambda)^\alpha(\rho_1 - \rho_0)^\alpha} + \frac{B}{(1-\lambda)^\beta(\rho_1 - \rho_0)^\beta}\right] \sum_{i=0}^{j-1} \theta^i \lambda^{-i\alpha}.$$

Kun tätä arvioidaan siirtymällä lukuun $t_{j+1}$, niin oletuksen nojalla

$$\begin{aligned} h(t_0) &\leq \theta^j \left[\theta h(t_{j+1}) + \frac{A}{(t_{j+1} - t_j)^\alpha} + \frac{B}{(t_{j+1} - t_j)^\beta}\right] \\ &\quad + \left[\frac{A}{(1-\lambda)^\alpha(\rho_1 - \rho_0)^\alpha} + \frac{B}{(1-\lambda)^\beta(\rho_1 - \rho_0)^\beta}\right] \sum_{i=0}^{j-1} \theta^i \lambda^{-i\alpha} \\ &= \theta^{j+1} h(t_{j+1}) + \frac{\theta^j A}{(1-\lambda)^\alpha \lambda^{j\alpha}(\rho_1 - \rho_0)^\alpha} + \frac{\theta^j B}{(1-\lambda)^\beta \lambda^{j\beta}(\rho_1 - \rho_0)^\beta} \\ &\quad + \left[\frac{A}{(1-\lambda)^\alpha(\rho_1 - \rho_0)^\alpha} + \frac{B}{(1-\lambda)^\beta(\rho_1 - \rho_0)^\beta}\right] \sum_{i=0}^{j-1} \theta^i \lambda^{-i\alpha}. \end{aligned}$$

Koska oletusten nojalla $\alpha \geq \beta$ ja $\lambda \in (0,1)$ niin $\lambda^{-i\beta} \leq \lambda^{-i\alpha}$. Yksinkertaistetaan saatua arviota ottamalla viimeisimmän rivin murtolauseke tekijäksi ja arvioimalla $\lambda^{-i\beta} \leq \lambda^{-i\alpha}$, jolloin todetaan, että

$$\begin{aligned} h(t_0) \leq& \theta^{j+1} h(t_{j+1}) \\ &+ \left[\frac{A}{(1-\lambda)^\alpha(\rho_1 - \rho_0)^\alpha} + \frac{B}{(1-\lambda)^\beta(\rho_1 - \rho_0)^\beta}\right] \sum_{i=0}^{j} \theta^i \lambda^{-i\alpha}, \end{aligned}$$

jolloin induktiotodistus on valmis.

Nyt arvioimalla $(1-\lambda)^{-\beta} \leq (1-\lambda)^{-\alpha}$ ja valitsemalla vakio $\lambda$ siten, että $\theta\lambda^{-\alpha} < 1$, saadaan vakioksi

$$c = \frac{1}{(1-\lambda)^{\alpha}(1-\theta\lambda^{-\alpha})},$$

kun $j \to \infty$. Tässä $\theta^{j+1}h(t_{j+1}) \to 0$, sillä oletuksen nojalla $h$ on rajoitettu ja $\theta \in (0,1)$. □

Toisena esiteltävä iteraatiolemma on hieman edellistä yksinkertaisempi. Lemma antaa ehdon, milloin tiettyä muotoa oleva iteratiivisesti määritelty lukujono suppenee, ja tulosta käytetään myöhemmin, kun osoiteteaan variaatio-ongelman minimoijan rajoittuneisuus.

**Lemma 2.2.** *Olkoon $\alpha > 0$ ja $(x_i)$ jono sellaisia positiivisia reaalilukuja, että*

$$x_{i+1} \leq CB^i x_i^{1+\alpha}, \tag{2.2}$$

*missä $C > 0$ ja $B > 1$. Jos $x_0 \leq C^{-\frac{1}{\alpha}} B^{-\frac{1}{\alpha^2}}$, niin*

$$x_i \leq B^{-\frac{i}{\alpha}} x_0 \tag{2.3}$$

*ja täten $\lim_{i\to\infty} x_i = 0$.*

*Todistus.* [9, Lemma 7.1] Todistetaan väite induktiolla indeksin $i$ suhteen.
**Alkuaskel:** Väite pätee selvästi, kun $i = 0$, sillä

$$x_0 \leq B^{-\frac{0}{\alpha}} x_0 = x_0.$$

**Induktio-oletus:** Oletetaan, että väite pätee, kun $i = k$. Siis

$$x_k \leq B^{-\frac{k}{\alpha}} x_0.$$

**Induktioaskel:** Osoitetaan, että väite pätee, kun $i = k+1$. Oletuksen (2.2) nojalla

$$x_{k+1} \leq CB^k x_k^{1+\alpha},$$

josta saadaan induktio-oletuksen avulla

$$\begin{aligned} x_{k+1} &\leq CB^k \left(B^{-\frac{k}{\alpha}} x_0\right)^{\alpha+1} = CB^{k-k\frac{1+\alpha}{\alpha}} x_0^{1+\alpha} = CB^{k\left(1-\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)} x_0^{1+\alpha} \\ &= \left(CB^{\frac{1}{\alpha}} x_0^{\alpha}\right) B^{-\frac{k+1}{\alpha}} x_0. \end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa havainnosta

$$k\left(1-\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)=\frac{-k}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}-\frac{k+1}{\alpha}.$$

Koska oletuksen nojalla sulkulauseke

$$CB^{\frac{1}{\alpha}}x_0^{\alpha}\leq 1,$$

niin

$$x_{k+1}\leq B^{-\frac{k+1}{\alpha}}x_0,$$

ja väite on todistettu. Lisäksi koska $B>1$, niin myös raja-arvoväite seuraa.

$\square$

# 3 Lokaalin minimoijan olemassaolo

Lokaalin minimoijan olemassaolo todistetaan tilateesta riippuen eri tavoin. Tässä kappaleessa esitellään eräs todistus, kun funktionaalin $\mathcal{F}$ integrandi $F$ on koersiivinen, konveksi, jatkuvasti derivoituva gradienttimuuttujan $p$ suhteen sekä alueen $\Omega$ reuna on vähintään luokkaa $C^1$ (yksi Rellich–Kondrachovin upotuslauseen oletuksista). Nämä ehdot toteutuvat esimerkiksi kun $F(x, v, \nabla v) = H(x, \nabla v)$ ja $\Omega = B_R(x_0)$ joillakin $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ja $R \in (0, \infty)$. Tämä luku seuraa Evansin kirjan [8, Luku 8.2] esitystä.

Aloitetaan todistuksen läpikäynti määrittelemällä edellä mainitut käsitteet.

**Määritelmä 3.1.** Funktionaali $\mathcal{F}(v)$ on *koersiivinen*, jos

$$\mathcal{F}(v) \geq \alpha \|\nabla v\|^q_{L^q(\Omega)}$$

jollakin vakiolla $\alpha \geq 0$.

Koersiivisuuden tarkotuksena on kontrolloida funktionaalin käyttätymistä normin mielessä suurilla arvoilla. Esimerkiksi usean muuttujan funktioiden tapauksessa koersiivisuuden avulla minimin etsintä voidaan siirtää koko avaruudesta rajoitettuun eli kompaktiin joukkoon, jolloin globaalin minimin olemassaolo saadaan topologian perustuloksista.

Toinen ehto, joka funktionaalille oletetaan, on konveksisuus. Tavallisten reaalifunktioiden tapauksessa konveksisuudella varmistetaan olemassaolevan globaalin minimin yksikäsitteisyys.

**Määritelmä 3.2.** Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on *konveksi*, jos

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

kaikilla $x, y \in A$ ja $t \in [0, 1]$.

Usean muuttujan funktio saattaa olla konveksi vain joidenkin muuttujiensa suhteen erikseen. Esimerkiksi pian seuraavissa todistuksissa riittää olettaa, että funktio on konveksi vain kolmannen muuttujansa suhteen.

Todistetaan seuraavaksi variaatiointegraalin minimoijan olemassaolo kahdessa osassa. Osoitetaan ensin, että yllämainitut ehdot täyttävä funktionaali on heikosti alhaalta puolijatkuva, jonka jälkeen toisessa osassa funktionaalianalyysin tuloksia apunakäyttäen todistetaan minimoijan olemassaolo Sobolev-avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$.

**Lemma 3.3.** *Jos funktionaalin* $\mathcal{F}(x, v, \nabla v)$ *integrandi* $F(x, v, \nabla v) \in C^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *on ei-negatiivinen ja konveksi kolmannen muuttujan suhteen, niin se on heikosti alhaalta puolijatkuva avaruudessa* $W^{1,p}(\Omega)$ *eli*

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{j \to \infty} \mathcal{F}(u_k),$$

*kun* $u_k \rightharpoonup u$ *avaruudessa* $W^{1,p}(\Omega)$.

*Todistus.* Valitaan sellainen jono $(u_k)$, että $u_k \rightharpoonup u$ avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$ ja merkitään $l = \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k)$. Osoitetaan siis, että $\mathcal{F}(u) \leq l$. Siirtymällä tarvittaessa osajonoon, voidaan olettaa, että

$$l = \lim_{k \to \infty} \mathcal{F}(u_k).$$

Koska jono $(u_k)$ suppenee heikosti, se on rajoitettu avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$ Lemman 1.3 nojalla. Lisäksi koska $\partial\Omega$ on luokkaa $C^1$, niin Rellich–Kondrachov-kompaktiuslauseen (Lause 1.10) nojalla jono $(u_k)$ suppenee avaruudessa $L^p(\Omega)$. Nyt siirtymällä mahdollisesti uuteen osajonoon nähdään, että $u_k \to u$ pisteittäin melkein kaikilla $x \in \Omega$.

Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Tällöin pisteittäisestä suppenemisesta ja Egoroffin lauseesta (Lause 1.6) seuraa, että on olemassa sellainen mitallinen joukko $E_\varepsilon$, että $u_k \to u$ tasaisesti joukossa $E_\varepsilon$ ja $|\Omega \backslash E_\varepsilon| \leq \varepsilon$. Määritellään lisäksi

$$F_\varepsilon = \{x \in \Omega \,|\, |u(x)| + |\nabla u(x)| \leq 1/\varepsilon\}. \tag{3.1}$$

Koska joukot $\{F_\varepsilon\}$ muodostavat kasvavan jonon, niin joukot $\{\Omega \backslash F_\varepsilon\}$ muodostavat vähenevän jonon. Lisäksi koska $|\Omega| < \infty$, niin mitan konvergenssista [11, Theorem 10.2] nähdään, että $|\Omega \backslash F_\varepsilon| \to 0$, kun $\varepsilon \to 0^+$. Lopuksi merkitään $G_\varepsilon = E_\varepsilon \cap F_\varepsilon$ ja todetaan, että $|\Omega \backslash G_\varepsilon| \to 0$, kun $\varepsilon \to 0^+$.

Koska funktio $F(x, v, \nabla v) \geq 0$ kaikilla $x \in \Omega$, niin

$$\mathcal{F}(u_k) = \int_\Omega F(x, u_k, \nabla u_k)\, dx \geq \int_{G_\varepsilon} F(x, u_k, \nabla u_k)\, dx.$$

Käyttämällä lisäksi funktion $F$ konveksisuutta derivaattamuuttujan suhteen saadaan

$$\mathcal{F}(u_k) \geq \int_{G_\varepsilon} F(x, u_k, \nabla u)\, dx + \int_{G_\varepsilon} D_3 F(x, u_k, \nabla u) \cdot (\nabla u_k - \nabla u)\, dx. \tag{3.2}$$

Koska jono $u_k$ suppenee kohti funktiota $u$ rajoitetussa joukossa $G_\varepsilon$ ja $F(x, u_k, \nabla u) \geq 0$ sekä jatkuva, niin Fatou'n lemman [12, Luku 4, Theorem 8] nojalla

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{G_\varepsilon} F(x, u_k, \nabla u)\, dx \geq \int_{G_\varepsilon} F(x, u, \nabla u)\, dx. \tag{3.3}$$

Nyt, koska jono $u_k \to u$ tasaisesti joukossa $G_\varepsilon \subset E_\varepsilon$ ja funktio $D_3F(x, u_k, \nabla u)$ on jatkuva, niin

$$|D_3F(x, u_k, \nabla u) - D_3F(x, u, \nabla u)| \leq M|u_k(x) - u(x)| < 1$$

kaikilla $x \in G_\varepsilon$, kun $k$ on riittävän suuri ja $M$ on yläraja funktion $F$ toisen kertaluvun derivaatoille. Luku $M$ on äärellinen, sillä $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Täten $D_3F(x, u_k, \nabla u)$ on enintään yhden päässä rajoitetusta funktiosta $D_3F(x, u, \nabla u)$ ($|u(x)| + |\nabla u(x)| \leq 1/\varepsilon$), kun $k$ on riittävän suuri, joten

$$\lim_{k\to\infty} \int_{G_\varepsilon} D_3F(x, u_k, \nabla u) \cdot (\nabla u_k - \nabla u)\, dx = 0, \tag{3.4}$$

sillä $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$. Nyt yhdistämällä kohdat (3.3) ja (3.4) epäyhtälöön (3.2) nähdään, että

$$l = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k) \geq \int_{G_\varepsilon} F(x, u, \nabla u)\, dx$$

kaikilla $\varepsilon > 0$. Nyt antamalla $\varepsilon \to 0^+$ ja käyttämällä monotonisen konvergenssin lausetta [13, Theorem 1.26]

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)\, dx \leq l = \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k).$$

Monotonisen konvergenssin lauseen käyttö on perusteltua, sillä $F(x, v, \nabla v) \geq 0$ ja $E_{\varepsilon'} \subset E_\varepsilon$, kun $0 < \varepsilon < \varepsilon'$. $\square$

Heikko alhaalta puolijatkuvuus takaa, että funktionaalin $\mathcal{F}$ minimoiva jono suppenee riittävästi kohti funktionaalin minimoivaa funktiota myös avaruuden $W^{1,p}(\Omega)$ topologiassa.

Otetaan käyttöön merkintä

$$\mathcal{A}(g) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u - g \in W_0^{1,p}(\Omega)\}.$$

Funktioluokkaan $\mathcal{A}(g)$ koostuu siis intuitiivisesti niistä Sobolev-funktioista, joilla on samat reuna-arvot kuin funktiolla $g$.

**Lause 3.4.** *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu, funktionaali $\mathcal{F}$ koersiivinen sekä sen integrandifunktio $F(x, v, \nabla v) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ei-negatiivinen ja konveksi muuttujan $\nabla v$ suhteen. Tällöin on olemassa ainakin yksi funktio $u \in \mathcal{A}(g)$, joka minimoi funktionaalin*

$$\mathcal{F}(v) = \int_\Omega F(x, v, \nabla v)\, dx.$$

*Todistus.* Merkitään $m = \inf_{v \in \mathcal{A}(g)} \mathcal{F}(v)$. Jos $m$ olisi ääretön, väite on triviaali, joten voidaan olettaa, että $m$ on äärellinen. Infimumin ominaisuuksien nojalla on olemassa minimoiva jono $(u_k) \subset \mathcal{A}(g)$, jolle pätee

$$\mathcal{F}(u_k) \to m. \tag{3.5}$$

Koska $\mathcal{F}$ on koersiivinen, niin

$$\mathcal{F}(v) \geq \alpha \int_\Omega |\nabla v|^p\, dx. \tag{3.6}$$

Nyt koska $m$ on äärellinen, niin minimoivan jonon jäsenet ovat äärellisiä, ja täten kohdista (3.5) ja (3.6) seuraa

$$\sup_k \|\nabla u_k\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \sup_k \frac{\mathcal{F}(u_k)}{\alpha} < \infty. \tag{3.7}$$

Kiinnitetään funktio $w \in \mathcal{A}(g)$. Koska myös $u_k \subset \mathcal{A}(g)$, niin

$$u_k - w = (u_k - g) + (g - w) \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Nyt käyttämällä kolmioepäyhtälöä ja Poincarén epäyhtälöä (1.11)

$$\|u_k\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_k - w\|_{L^p(\Omega)} + \|w\|_{L^q(\Omega)} \leq c\|\nabla u_k - \nabla w\|_{L^p(\Omega)} + c' \leq c,$$

joten $\sup_k \|u_k\|_{L^p(\Omega)} < \infty$. Kun tämä yhdistetään kohdan (3.7) kanssa, todetaan, että $(u_k)$ on rajoitettu jono avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$.

Koska jono $(u_k)$ on rajoitettu, niin sillä on heikosti suppeneva osajono [14, Luku 12D, Corollary 1] eli $u_{k_j} \rightharpoonup u$, missä $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Koska $W_0^{1,p}(\Omega)$ on avaruuden $W^{1,p}(\Omega)$ suljettu aliavaruus ja täten myös konveksi joukko, niin se on heikosti suljettu Mazurin lauseen (Lause 1.4) nojalla. Siis, koska $u_{k_j} - w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, niin myös $u - w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Tästä päätellään, että $u \in \mathcal{A}(g)$, joten

$$\mathcal{F}(u) \geq m = \min_{v \in \mathcal{A}(g)} \mathcal{F}(v).$$

Lisäksi Lauseen 3.3 ehdot ovat voimassa, joten funktionaali $\mathcal{F}$ on heikosti alhaalta puolijatkuva. Siis

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{j \to \infty} \mathcal{F}(u_{k_j}) = m,$$

ja täten lause on todistettu. $\square$

Lokaalin minimoijan yksikäsitteisyyden todistaminen ei onnistu vielä edellisen todistuksen oletuksilla. Esimerkiksi olettamalla lisäksi, että funktio $F(x, v, \nabla v)$ on uniformisti konveksi muuttujan $x$ suhteen eikä riipu muuttujasta $v$, saadaan minimoijan yksikäsitteisyyskin todistettua. Katso esimerkiksi [8, Luku 8.2, Theorem 3].

# 4 Gradientin parempi integroituvuus

Siirrytään seuraavaksi säännöllisyystuloksiin. Tässä luvussa todistetaan ensin niin kutsuttu Sobolev–Poincaré -lemma ja sitten funktion $H(x, \nabla u)$ parempi integroituvuus. Sobolev–Poincaré-lemman avulla voidaan pienentää integroimiseksponenttia funktiolle $H$. Tämän avulla voidaan myöhemmin käyttää Gehringin lemmaa, kun integroimiseksponentti on aidosti lukua 1 pienempi, ja näin todeta, että $H(x, \nabla u) \in L^{1+\delta}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Todistetaan ensin arvio, kun funktiossa $H(x, z)$ muuttujan $z$ paikalla on integraalikeskiarvo funktiosta $f$. Todistuksesta huomataan, että vakioita $n, p, q$ ja $\alpha$ sitova epäyhtälö on välttämätön väitteen kannalta. Erityisesti epäyhtälöä ei saada pallon säteestä $R$ riippumattomaksi ilman ehtoa (1.5).

**Lemma 4.1.** *Olkoon $f \in L^p(B_R(x))$, missä $B_R(x) \subset \mathbb{R}^n$ on pallo, jossa $R \leq 2$. Jos ehto (1.5) pätee, niin on olemassa sellainen vakio $c(n, p, q)$, että*

$$H(x, (f)_{B_R(x)}) \leq c \left(1 + [a]_{0,\alpha} \|f\|^{q-p}_{L^p(B_R(x))}\right) (H(\cdot, f(\cdot)))_{B_R(x)}.$$

*Todistus.* Määritellään aluksi

$$a_R(x) = \inf_{y \in B_R(x)} a(y) \quad \text{ja} \quad H_R(x, z) = |z|^p + a_R(x)|z|^q,$$

jolloin additiivisella laventamisella ja kolmioepäyhtälöllä voidaan arvioida

$$\begin{aligned} H(x, (f)_{B_R(x)}) &= |(f)_{B_R(x)}|^p + a(x)|(f)_{B_R(x)}|^q \\ &= |(f)_{B_R(x)}|^p + (a(x) - a_R(x) + a_R(x))|(f)_{B_R(x)}|^q \\ &\leq |a(x) - a_R(x)||(f)_{B_R(x)}|^q + H_R(x, (f)_{B_R(x)}). \end{aligned}$$

Lisäksi Hölder-seminormin määritelmän nojalla sekä arvioimalla $|x - y|^\alpha < R^\alpha$ saadaan luvulle $H(x, (f)_{B_R(x)})$ yläarvio

$$H(x, (f)_{B_R(x)}) \leq [a]_{0,\alpha} R^\alpha |(f)_{B_R(x)}|^{q-p} |(f)_{B_R(x)}|^p + H_R(x, (f)_{B_R(x)}). \quad (4.1)$$

Toisaalta Hölderin epäyhtälön nojalla voidaan funktion $f$ integraalikeskiarvolle antaa arvio

$$\begin{aligned} |(f)_{B_R(x)}| &\leq \fint_{B_R(x)} |f(y)| \, dy \leq \frac{1}{|B_R(x)|} \|f\|_{L^p(B_R(x))} |B_R(x)|^{1-1/p} \\ &\leq c R^{-n/p} \|f\|_{L^p(B_R(x))}. \end{aligned}$$

Käyttämällä saatua arvioita epäyhtälössä (4.1) suureeseen $|(f)_{B_R(x)}|^{q-p}$ päädytään epäyhtälöön

$$H(x,(f)_{B_R(x)}) \leq c[a]_{0,\alpha}\|f\|^{q-p}_{L^p(B_R(x))}R^{\frac{p\alpha-n(q-p)}{p}}|(f)_{B_R(x)}|^p + H_R(x,(f)_{B_R(x)}).$$

Kun käytetään ehtoa (1.5), saadaan eksponentille seuraava ala-arvio

$$\frac{p\alpha - n(q-p)}{p} = \alpha - n\cdot\frac{q}{p} + n \geq \alpha - n\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) + n = 0,$$

ja täten arvioimalla $R \leq 2$ ja $|(f)_{B_R(x)}|^p \leq H_R(x,(f)_{B_R(x)})$ huomataan, että

$$H(x,(f)_{B_R(x)}) \leq c\left(1+[a]_{0,\alpha}\|f\|^{q-p}_{L^p(B_R(x))}\right)H_R(x,(f)_{B_R(x)}).$$

Lopuksi, koska $t \mapsto at^p$ on konveksi funktio ja kahden konveksin funktion summa on konveksi, Jensenin epäyhtälöstä [15, Theorem 1.8.1] saadaan

$$H_R(x,(f)_{B_R(x)}) \leq \fint_{B_R(x)} H_R(x,f(y))\,dy \leq \fint_{B_R(x)} H(y,f(y))\,dy,$$

ja väite on todistettu. □

**Lause 4.2** (Sobolev – Poincaré -epäyhtälö)**.** *Olkoot* $1 < p \leq q$ *ja* $\alpha \in (0,1]$*, jotka lisäksi toteuttavat ehdon (1.5). Tällöin on olemassa vakio* $c(n,p,q,[a]_{0,\alpha},\|\nabla w\|_{L^p(B_{R_0}(x_0))})$ *ja sellaiset eksponentit* $d_1 > 1 > d_2 > 0$*, jotka riippuvat vakioista* $n,p,q$ *ja* $\alpha$*, että*

$$\left(\fint_{B_R(x_0)}\left[H\left(x,\frac{w-(w)_{B_R(x_0)}}{R}\right)\right]^{d_1}dx\right)^{1/d_1} \leq c\left(\fint_{B_R(x_0)}[H(x,\nabla w)]^{d_2}\,dx\right)^{1/d_2}$$

*kaikilla* $w \in W^{1,p}(B_{R_0}(x_0))$*, missä* $B_R(x_0) \subset B_{R_0}(x_0) \subset \Omega$ *ja* $R_0 \leq 1$.

Todistetaan sitten varsinainen Sobolev–Poincaré-epäyhtälö. Todistus on jaettu kolmeen osaan, joista ensimmäisessä tehdään arvio maksimaalifunktiolle. Maksimaalifunktion avulla voidaan hyödyntää edellisen lemman arviota integraalikeskiarvolle. Lisäksi tässä vaiheessa otetaan käyttöön lisämuuttuja $\gamma$. Tämä lisäys ensinäkemältä monimutkaistaa todistusta, mutta sitä tarvitaan maksimaalifunktion rajoittuneisuuteen sekä todistuksen kolmannessa vaiheessa, kun osoittautuu, että $1/\gamma$ on sopiva lukua 1 pienempi eksponentti lauseen väitteelle. Lisäksi, koska $\gamma > 1$, niin maksimaalifunktion vahva estimaatti on voimassa todistuksen ensimmäisessä osassa.

Todistuksen toinen osa todistaa Sobolev–Poincaré-epäyhtälölle muodon, joka viimeistellään lauseen väitteen muotoon kolmannessa osassa. Todistuksessa apufunktio $\tilde{w}$ arvioidaan Rieszin potentiaalin kautta integraalikeskiarvoiksi yli sisenevien kiekkojen. Nämä keskiarvot arvioidaan ylöspäin haluttuun muotoon maksimaalifunktiolla ja siihen liittyvällä arviolla todistuksen ensimmäisestä vaiheesta.

*Todistus.* **Vaihe 1: Maksimaalifuntion arviointi.** Osoitetaan ensin, että jokaisella $f \in L^p(\Omega)$, missä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ja $t \geq 1$

$$\int_\Omega [H(x, M(f))]^t \, dx \leq c \left(1 + [a]_{0,\alpha}^t \|f\|_{L^p(\Omega)}^{t(q-p)}\right) \int_\Omega [H(x, f)]^t \, dx, \tag{4.2}$$

kun

$$M(f)(x) = M_\Omega(f)(x) = \sup_{B_\rho(x) \subset \Omega, \rho \leq 2} \fint_{B_\rho(x)} |f(y)| \, dy. \tag{4.3}$$

Määritellään apufunktiot

$$\tilde{a}(x) = [a(x)]^{1/\gamma} \quad \text{ja} \quad \tilde{H}(x, z) = |z|^{p/\gamma} + \tilde{a}(x)|z|^{q/\gamma},$$

kun $\gamma = \gamma(n, p, q, \alpha) \in (1, p)$ valitaan siten, että

$$\frac{q/\gamma}{p/\gamma} = \frac{q}{p} < 1 + \frac{\alpha}{\gamma n}, \tag{4.4}$$

kuten ehdossa (1.5). Havaitaan, että $\tilde{a}(x)$ on edelleen Hölder-jatkuva ja $[a^{1/\gamma}]_{0,\alpha/\gamma} \leq [a]_{0,\alpha}^{1/\gamma}$. Lopuksi todetaan, että

$$[H(x, z)]^{1/\gamma} \leq \tilde{H}(x, z) \leq 2^{1-1/\gamma} [H(x, z)]^{1/\gamma}. \tag{4.5}$$

Epäyhtälön (4.4) nojalla Lemman 4.1 on voimassa funktiolle $\tilde{H}(\cdot)$. Kun muistetaan, että funktio $t \mapsto H(\cdot, t)$ on kasvava, saadaan

$$H(x, (f)_{B_R(x)})^{1/\gamma} \leq H(x, Mf(x))^{1/\gamma}.$$

Nyt käyttämällä vasemmanpuoleista epäyhtälöä kaavasta (4.5) ja Lemmaa 4.1 (ottamalla lisäksi supremum yli pallojen $B_R$) saadaan

$$\begin{aligned} H(x, Mf(x))^{1/\gamma} &\leq \tilde{H}(x, Mf(x)) \\ &\leq c \left(1 + [a]_{0,\alpha}^{1/\gamma} \|f\|_{L^p(\Omega)}^{(q-p)/\gamma}\right) M(\tilde{H}(\cdot, f(\cdot))(x). \end{aligned}$$

Integroimalla yli alueen $\Omega$ ja käyttämällä maksimaalifunktion subadditiivisuutta [16, Sivu 78] sekä rajoittuneisuutta avaruudessa $L^{t\gamma}(\Omega)$ [17, Theorem 4.1] saadaan

$$\begin{aligned}\int_\Omega [H(x, M(f)(x))]^t\,dx &\le \int_\Omega [\tilde{H}(x, M(f)(x))]^{t\gamma}\,dx \\ &\le c\left(1 + [a]_{0,\alpha}^t \|f\|_{L^p(\Omega)}^{t(q-p)}\right) \int_\Omega [M(\tilde{H}(\cdot, f(\cdot))(x))]^{t\gamma}\,dx \\ &\le c\left(1 + [a]_{0,\alpha}^t \|f\|_{L^p(\Omega)}^{t(q-p)}\right) \int_\Omega [\tilde{H}(x, f(x))]^{t\gamma}\,dx,\end{aligned}$$

jolloin epäyhtälö (4.2) seuraa arvion (4.5) oikeasta puolesta. Tässä eksponentti $t\gamma > 1$, sillä oletusten nojalla $t \ge 1$ ja $\gamma \in (1, p)$, joten vahva estimaatti on voimassa. Funktioon $\tilde{H}$ palataan vaiheessa 3.

**Vaihe 2: Sobolev–Poincaré-epäyhtälön ensimmäinen versio.** Osoitetaan seuraavaksi välituloksena seuraava muoto Sobolev – Poincaré - epäyhtälöstä

$$\begin{aligned}\left(\fint_{B_R(x_0)} \left[H\left(x, \frac{w - (w)_{B_R(x_0)}}{R}\right)\right]^{\frac{p+q(n-1)}{q(n-1)}} dx\right)^{\frac{q(n-1)}{p+q(n-1)}} \\ \le c\left(1 + [a]_{0,\alpha} \|\nabla w\|_{L^p(B_R(x_0))}^{q-p}\right) \fint_{B_R(x_o)} H(x, \nabla w)\,dx, \quad (4.6)\end{aligned}$$

missä $c(n, p, q)$ on vakio ja $B_R(x_0) \subset \Omega$ on mielivaltainen pallo, jonka säde $R \le 1$. Lisäksi voidaan olettaa, että epäyhtälön oikea puoli on äärellinen, sillä muutoin väite on triviaali. Kun määritellään apufunktio $\tilde{w}$ ja arvioidaan tätä funktiota Rieszin potentiaalin avulla [18, Lemma 7.16], niin melkein jokaisella $x \in B_R(x_0)$

$$|\tilde{w}(x)| = \left|\frac{w(x) - (w)_{B_R(x_0)}}{R}\right| \le \frac{c(n)}{R} \int_{B_R(x_0)} \frac{|\nabla w(y)|}{|x - y|^{n-1}}\,dy. \qquad (4.7)$$

Määritellään apufunktio

$$\tilde{D}(y) = \begin{cases} \nabla w(y), & \text{kun } y \in B_R(x_0), \\ 0, & \text{kun } y \in \mathbb{R}^n \setminus B_R(x_0). \end{cases}$$

Kun valitaan ensin $\varepsilon \in (0, 1]$ ja merkitään sitten renkaita $A_i(x) = B_{2^{-i}\varepsilon R}(x) \setminus B_{2^{-(i+1)}\varepsilon R}(x)$, missä $i$ on luonnollinen luku, voidaan epäyhtälö (4.7) hajoittaa seuraavasti

$$|\tilde{w}(x)| \le \frac{c}{R} \int_{B_{\varepsilon R}(x)} \frac{|\tilde{D}(y)|}{|x - y|^{n-1}}\,dy + \frac{c}{R} \int_{B_R(x_0) \setminus B_{\varepsilon R}(x)} \frac{|\tilde{D}(y)|}{|x - y|^{n-1}}\,dy.$$

Kirjoittamalla ensimmäinen termi sarjana integraaleina yli renkaiden $A_i$ ja arvioimalla jälkimmäisen integraalin integroimisalue pallolla $B_{2R}(x)$ sekä arvioimalla termi $|x-y|^{n-1}$ säteen alarajalla saadaan

$$|\tilde{w}(x)| \leq \frac{c}{R}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2^i}{\varepsilon R}\right)^{n-1}\int_{A_i(x)}|\tilde{D}(y)|\,dy + \frac{1}{(\varepsilon R)^{n-1}}\int_{B_{2R}(x)}|\tilde{D}(y)|\,dy\right].$$

Siirtymällä integraalikeskiarvoihin

$$|\tilde{w}(x)| \leq c\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}\fint_{B_{2^{-i}\varepsilon R}(x)}|\tilde{D}(y)|\,dy + \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\fint_{B_{2R}(x)}|\tilde{D}(y)|\,dy\right],$$

missä $2^i$ jää jakajaksi, sillä edellisellä rivillä potenssina on $n-1$, mutta $n$ kappaletta siirtyy integraalikeskiarvoon. Kun vielä arvioidaan sarjassa esiintyvä integraalikesiarvo maksimaalifunktiolla, saadaan lopulliseksi epäyhtälöksi

$$|\tilde{w}(x)| \leq c\varepsilon M(\tilde{D})(x) + \frac{c}{\varepsilon^{n-1}}\fint_{B_{2R}(x)}|\tilde{D}(y)|\,dy, \tag{4.8}$$

missä $M = M_{B_{3R}(x)}$ on maksimaalifunktio (kaava 4.3). Kuvassa 1 on esitetty arvioissa käytetyt palloympäristöt.

Käyttämällä kolmioepäyhtälöä havaitaan helposti, että skalaareilla $0 < \alpha \leq 1$ ja $\beta \geq 1$

$$\begin{aligned}
H(x,\alpha s+\beta t) &= |\alpha s+\beta t|^p + a(x)|\alpha s+\beta t|^q \\
&\leq 2^{p-1}\left(|\alpha|^p|s|^p + |\beta|^p|t|^p\right) + 2^{q-1}a(x)\left(|\alpha|^q|s|^q + |\beta|^q|t|^q\right) \\
&\leq 2^{q-1}\left(|\alpha|^p|s|^p + a(x)|\alpha|^q|s|^q + |\beta|^p|t|^p + a(x)|\beta|^q|t|^q\right) \\
&\leq c\left[|\alpha|^p H(x,s) + |\beta|^q H(x,t)\right]. 
\end{aligned} \tag{4.9}$$

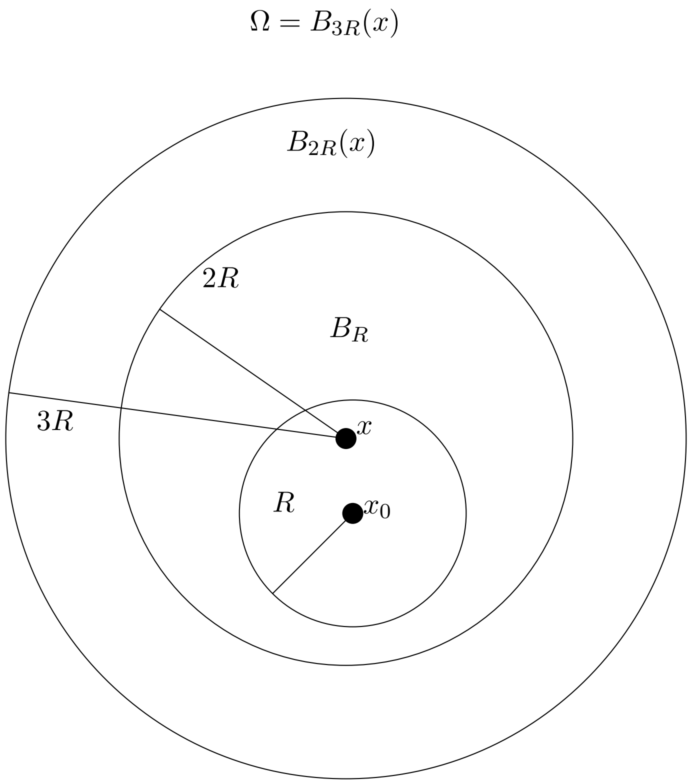
Valitaan sitten

$$\varepsilon = \left(\frac{H(x,(|\tilde{D}|)_{B_{2R}(x)})}{H(x,M(\tilde{D})(x))}\right)^{1/(p+q(n-1))}.$$

Valittu $\varepsilon \in (0,1]$, sillä

$$H(x,(|\tilde{D}|)_{B_{2R}(x)}) \leq H(x,M(\tilde{D})(x)),$$

kun muistetaan, että $t \mapsto H(\cdot,t)$ on kasvava funktio ja että oletuksen nojalla $2R \leq 2$, jolloin maksimaalifunktio majoroi funktion keskiarvoa. Lisäksi koska $c\varepsilon^{q(1-n)} \geq 1$ ja $t \mapsto H(\cdot,t)$ on kasvava funktio, niin se säilyttää epäyhtälön




Kuva 1: Havainnollistus todistuksen eri palloympäristöistä.

suunnan, jolloin käyttämällä funktiota $H(x,\cdot)$ epäyhtälön (4.8) molempiin puoliin ja arvioimalla lisäksi epäyhtälön (4.9) mukaisesti, saadaan

$$H(x,\tilde{w}(x)) \leq c\varepsilon^p H(x, M(\tilde{D})(x)) + c\varepsilon^{q(1-n)} H(x, (|\tilde{D}|)_{B_{2R}(x)}). \tag{4.10}$$

Sijoittamalla valittu $\varepsilon$ epäyhtälöön (4.10) saadaan

$$\begin{aligned}
H(x,\tilde{w}(x)) \leq & c\frac{H(x,(|\tilde{D}|)_{B_{2R}(x)}))^{p/(p+q(n-1))}}{H(x,M(\tilde{D})(x))^{p/(p+q(n-1))}} H(x,M(\tilde{D})(x)) \\
& + c\frac{H(x,(|\tilde{D}|)_{B_{2R}(x)})^{q(1-n)/(p+q(n-1))}}{H(x,M(\tilde{D})(x))^{q(1-n)/(p+q(n-1))}} H(x,(|\tilde{D}|)_{B_{2R}(x)}) \\
= & c\frac{H(x,(|\tilde{D}|)_{B_{2R}(x)}))^{p/(p+q(n-1))}}{H(x,M(\tilde{D})(x))^{p/(p+q(n-1))-1}} \\
& + c\frac{H(x,(|\tilde{D}|)_{B_{2R}(x)})^{q(1-n)/(p+q(n-1))+1}}{H(x,M(\tilde{D})(x))^{q(1-n)/(p+q(n-1))}} \\
= & c[H(x,M(\tilde{D})(x))]^{\frac{q(n-1)}{p+q(n-1)}} [H(x,(|\tilde{D}|)_{B_{2R}(x)})]^{\frac{p}{p+q(n-1)}}.
\end{aligned}$$

Korottamalla saatu epäyhtälö puolittain potenssiin $[p+q(n-1)]/[q(n-1)]$ ja käyttämällä sitten epäyhtälön oikeaan puoleen Lemmaa 4.1, saadaan

$$\begin{aligned}
&H(x,\tilde{w}(x))^{\frac{p+q(n-1)}{q(n-1)}} \\
&\le cH(x,M(\tilde{D})(x)) \\
&\quad\cdot\left[\left(1+[a]_{0,\alpha}\|\tilde{D}\|^{q-p}_{L^p(B_{2R}(x))}\right)\fint_{B_{2R}(x)} H(y,\tilde{D}(y))\,dy\right]^{\frac{p}{q(n-1)}}.
\end{aligned}$$

Lopuksi funktion $\tilde{D}$ määritelmästä päädytään epäyhtälöön

$$\begin{aligned}
H(x,&\tilde{w}(x))^{\frac{p+q(n-1)}{q(n-1)}} \le cH(x,M(\tilde{D})(x)) \\
&\cdot\left[\left(1+[a]_{0,\alpha}\|\nabla w\|^{q-p}_{L^p(B_R(x_0))}\right)\fint_{B_R(x_0)} H(y,\nabla w(y))\,dy\right]^{\frac{p}{q(n-1)}}.
\end{aligned}$$

Ottamalla puolittain integraalikeskiarvo yli alueen $B_R(x_0)$ ja hyödyntämällä kaavaa (4.2) tulon ensimmäiseen termiin parametrin $t$ arvolla 1 ja integroimisalueella $\Omega = B_{3R}(x)$ (Maksimaalifunktion määritelmä vaiheessa 1) voidaan arvioida

$$\begin{aligned}
\fint_{B_R(x_0)} H(x,\tilde{w})^{\frac{p+q(n-1)}{q(n-1)}}\,dx &\le c\left(1+[a]_{0,\alpha}\|\tilde{D}\|^{q-p}_{L^p(B_{3R(x)})}\right)\fint_{B_{3R}(x)} H(x,\tilde{D}(y))\,dx \\
&\cdot\left[\left(1+[a]_{0,\alpha}\|\nabla w\|^{q-p}_{L^p(B_R(x_0))}\right)\fint_{B_R(x_0)} H(x,\nabla w)\,dx\right]^{\frac{p}{q(n-1)}}.
\end{aligned}$$

Lopuksi käyttämällä uudestaan tietoa, että $\tilde{D}(y)=0$ kun $y\notin B_R(x_0)$, saadaan lopulta

$$\begin{aligned}
&\fint_{B_R(x_0)} H(x,\tilde{w})^{\frac{p+q(n-1)}{q(n-1)}}\,dx \\
&\quad\le c\left(1+[a]_{0,\alpha}\|\nabla w\|^{q-p}_{L^p(B_R(x_0))}\right)^{\frac{p+q(n-1)}{q(n-1)}}\left(\fint_{B_R(x_0)} H(x,\nabla w)\,dx\right)^{\frac{p+q(n-1)}{q(n-1)}},
\end{aligned}$$

jolloin epäyhtälö (4.6) on todistettu juuren oton jälkeen.

**Vaihe 3: Epäyhtälön parannus.** Tarkastellaan taas funktiota $\tilde{H}(x,z) = |z|^{p/\gamma}+\tilde{a}(x)|z|^{q/\gamma}$ ja valitaan vakioksi $\gamma(n,p,q,\alpha)\in(1,p)$, niin, että sekä (4.4) että

$$d_1 = \frac{p+q(n-1)}{\gamma q(n-1)} > 1$$

ovat voimassa. Näin voidaan käyttää juuri todistettua Sobolev–Poincare-epäyhtälöä (4.6) funktioon $\tilde{H}$. Tällöin vasemmanpuoleisesta epäyhtälöstä (4.5) saadaan

$$\begin{aligned}
&\left(\fint_{B_R(x_0)} H\left(x, \frac{w-(w)_{B_R(x_0)}}{R}\right)^{d_1} dx\right)^{1/d_1} \\
&\leq c\left(\fint_{B_R(x_0)} \tilde{H}\left(x, \frac{w-(w)_{B_R(x_0)}}{R}\right)^{\frac{p+q(n-1)}{q(n-1)}} dx\right)^{\frac{\gamma q(n-1)}{p+q(n-1)}} \\
&\leq c\left(1+[a]_{0,\alpha}\|\nabla w\|^{q-p}_{L^p(B_R(x_0))}\right)^{\gamma}\left(\fint_{B_R(x_0)} \tilde{H}(x,\nabla w)\,dx\right)^{\gamma} \\
&= c\left(\fint_{B_R(x_0)} \tilde{H}(x,\nabla w)\,dx\right)^{\gamma}.
\end{aligned}$$

Käyttämällä lopuksi epäyhtälön (4.5) oikeaa puolta, muistamalla, että $d_1 > 1$, ja valitsemalla $d_2 = 1/\gamma < 1$

$$\begin{aligned}
&\left(\fint_{B_R(x_0)} \left[H\left(x, \frac{w-(w)_{B_R(x_0)}}{R}\right)\right]^{d_1} dx\right)^{1/d_1} \\
&\qquad\leq c\left(\fint_{B_R(x_0)} [H(x,\nabla w)]^{d_2}\,dx\right)^{1/d_2},
\end{aligned}$$

jolloin väite on todistettu. □

**Huomautus 4.3.** Edellinen lause pätee myös muodossa

$$\begin{aligned}
&\left(\fint_{B_R(x_0)} \left[H\left(x, \frac{w}{R}\right)\right]^{d_1} dx\right)^{1/d_1} \\
&\qquad\leq c\left(1+[a]_{0,\alpha}\|\nabla w\|^{q-p}_{L^p(B_R(x_0))}\right)\left(\fint_{B_R(x_0))} [H(x,\nabla w)]^{d_2}\,dx\right)^{1/d_2},
\end{aligned}$$

kun $w \in W_0^{1,1}(B_R(x_0))$. Tämä seuraa siitä, että epäyhtälö (4.7) pätee myös, kun $w \in W_0^{1,1}(B_R(x_0))$, kun käytetään apufunktiota $\tilde{w}(x) = w(x)/R$ [18, Lemma 7.14].

Parempi integroituvuus saavutetaan todistamalla ensin Caccioppoli-epäyhtälö, jossa funktion $H(x, \nabla u)$ integraalia arvioidaan ilman derivaattaa. Kun tähän yläarvioon sovelletaan edellä todistettua Sobolev–Poincaré-epäyhtälöä palataan takaisin funktion $H(x,\nabla u)$ integraaliin tällä kertaa lukua 1 pienemällä integrointieksponentilla. Tästä Gehringin lemma antaa halutun lopputuloksen.

**Lause 4.4.** *Olkoot $u \in W^{1,p}(\Omega)$ funktionaalin $\mathcal{F}$ lokaali minimoija ja ehdot (1.2), (1.5) sekä (1.8) voimassa. Tällöin on olemassa sellainen integroimiseksponentti $\delta(n,p,q,\nu,L,\alpha,[a]_{0,\alpha},\|a\|_{L^\infty},\|\nabla u\|_{L^p}) > 0$, että*

*i)* $H(x,\nabla u) \in L^{1+\delta}_{loc}(\Omega)$.

*ii) Seuraava käänteinen Hölderin epäyhtälö pätee*

$$\left(\fint_{B_{R/2}} H(x,\nabla u)^{1+\delta}\,dx\right)^{1/(1+\delta)} \leq c\fint_{B_R} H(x,\nabla u)\,dx,$$

*missä $c$ on vakio, joka riippuu samoista vakioista kuin $\delta$.*

*Todistus.* Olkoon $B_R \subset\subset \Omega$ pallo, jonka säde $R \leq 1$. Kaikki pallot tässä todistuksessa ovat samankeskisiä pallon $B_R$ kanssa. Määritellään $\rho \leq t < s \leq R$ ja sellainen leikkausfunktio $\eta \in C_0^\infty(B_s)$, että $|\nabla\eta| \leq 4/(s-t), 0 \leq \eta \leq 1$ sekä $\eta(x) = 1$, kun $x \in B_t$. Asetetaan lisäksi $w = u - \eta(u-(u)_{B_R})$.

Koska oletuksen nojalla $u$ minimoi funktionaalin $\mathcal{F}$, niin $H(\cdot,\nabla u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, joten

$$a(x)|\nabla u|^q \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega). \tag{4.11}$$

Lisäksi, koska oletuksen nojalla $u \in W^{1,p}(\Omega)$, niin Sobolevin upotuslauseen [8, Luku 5.6, Theorem 2] nojalla $u \in L^{p^*}(\Omega)$. Täten ehdon (1.5) nojalla

$$p^* - q > \frac{np}{n-p} - p - \frac{p\alpha}{n} = p\left(\frac{p}{n-p} - \frac{\alpha}{n}\right) \geq p\left(\frac{p}{n-p} - \frac{1}{n}\right) \geq 0,$$

josta seuraa Hölderin epäyhtälön nojalla, että $u \in L^q(\Omega)$.

Koska $u$ minimoi funktionaalin $\mathcal{F}$, eli $\mathcal{F}(u,B_s) \leq \mathcal{F}(w,B_s)$, niin ehdon (1.8) nojalla $\nu\mathcal{P}(u,B_s) \leq L\mathcal{P}(w,B_s)$. Tämän lisäksi $\eta \equiv 1$ pallossa $B_t$, joten

$\nabla w \equiv 0$ pallossa $B_t$, ja täten

$$
\begin{aligned}
\int_{B_s} H(x, \nabla u)\, dx &\leq C \int_{B_s} H(x, \nabla w)\, dx = C \int_{B_s \setminus B_t} H(x, \nabla w)\, dx \\
&= C \int_{B_s \setminus B_t} |\nabla u - (u - (u)_{B_R}) \nabla \eta - \eta, \nabla u|^p \\
&\quad + a(x) |\nabla u - (u - (u)_{B_R}) \nabla \eta - \eta \nabla u|^q \, dx \\
&\leq C \int_{B_s \setminus B_t} |\nabla u - \eta \nabla u|^p + a(x) |\nabla u - \eta, \nabla u|^q \, dx \\
&\quad + C \int_{B_s \setminus B_t} |(u - (u)_{B_R}) \nabla \eta|^p + a(x) |(u - (u)_{B_R}) \nabla \eta|^q \, dx \\
&\leq C \int_{B_s \setminus B_t} H(x, \nabla u)\, dx \\
&\quad + \frac{c}{(s-t)^p} \int_{B_s} |u - (u)_{B_R}|^p \, dx + \frac{c}{(s-t)^q} \int_{B_s} a(x) |u - (u)_{B_R}|^q \, dx.
\end{aligned}
$$

Tässä vakiot $C$ ja $c$ riippuvat vakikoista $n, p, q, \nu$ ja $L$, ja epäyhtälön oikea puoli on äärellinen, sillä $u \in L^p(B_s) \cap L^q(B_s)$ ja jatkuvana funktiona $a \in L^\infty(B_s)$.

Nyt arvioimalla integraalia alaspäin pienentämällä pallon sädettä ja "täyttämällä reikä", eli lisäämällä edelliseen epäyhtälöön puolittain

$$
C \int_{B_t} H(x, \nabla u)\, dx,
$$

ja tämän jälkeen jakamalla puolittain termillä $(C+1)$ saadaan

$$
\begin{aligned}
\int_{B_t} H(x, \nabla u)\, dx \leq \int_{B_s} H(x, \nabla u)\, dx &\leq \theta \int_{B_s} H(x, \nabla u)\, dx \\
&+ \frac{c}{(s-t)^p} \int_{B_s} |u - (u)_{B_R}|^p \, dx + \frac{c}{(s-t)^q} \int_{B_s} a(x) |u - (u)_{B_R}|^q \, dx,
\end{aligned}
$$

missä vakio $\theta = C/(C+1) < 1$. Nyt voidaan käyttää Lemmaa 2.1 merkinnöillä

$$
h(t) \equiv \int_{B_t} H(x, \nabla u)\, dx, \quad \beta \equiv p, \alpha \equiv q,
$$
$$
A = \int_{B_s} |u - (u)_{B_R}|^p \, dx \text{ ja } B = \int_{B_s} a(x) |u - (u)_{B_R}|^q \, dx,
$$

jolloin saadaan arvio

$$
\begin{aligned}
h(\rho) = \int_{B_\rho} H(x, \nabla u)\, dx &\leq \frac{cA}{(R-\rho)^p} + \frac{cB}{(R-\rho)^q} \\
&= c \int_{B_s} H\left(x, \frac{u - (u)_{B_R}}{R - \rho}\right) dx.
\end{aligned}
$$

On siis saatu seuraava Caccioppoli-arvio

$$\int_{B_\rho} H(x,\nabla u)\,dx \le c\int_{B_R} H\left(x,\frac{u-(u)_{B_R}}{R-\rho}\right)dx. \tag{4.12}$$

Kun tässä valitaan $\rho = R/2$ ja siirrytään integraalikeskiarvoihin, niin

$$\fint_{B_{R/2}} H(x,\nabla u)\,dx \le c\fint_{B_R} H\left(x,\frac{u-(u)_{B_R}}{R}\right)dx. \tag{4.13}$$

Tässä vakio $c$ ei riipu säteestä $R$, vaikka integraalikeskiarvon integroimisalue muuttuu, sillä Lebesguen mitta on tuplaava.

Vähennetään integroimiseksponenttia 1 käyttämällä ensin Hölderin epäyhtälöä ja sitten Lausetta 4.2. Hölderin epäyhtälöstä nähdään, että

$$\begin{aligned}\fint_{B_R} H\left(x,\frac{u-(u)_{B_R}}{R}\right)dx &= \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} H\left(x,\frac{u-(u)_{B_R}}{R}\right)dx\\ &\le \frac{1}{|B_R|}\left(\int_{B_R} H\left(x,\frac{u-(u)_{B_R}}{R}\right)^{d_1}dx\right)^{1/d_1}|B_R|^{1-1/d_1}.\end{aligned}$$

Nyt kertomalla ja jakamalla luvulla $|B_R|^{1/d_1}$ voidaan siirtyä takaisin integraalikeskiarvoon

$$\begin{aligned}&\fint_{B_R} H\left(x,\frac{u-(u)_{B_R}}{R}\right)dx \qquad (4.14)\\ &\le \frac{|B_R|^{1/d_1}|B_R|^{1-1/d_1}}{|B_R|}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} H\left(x,\frac{u-(u)_{B_R}}{R}\right)^{d_1}dx\right)^{1/d_1}\\ &= \left(\fint_{B_R} H\left(x,\frac{u-(u)_{B_R}}{R}\right)^{d_1}dx\right)^{1/d_1}.\end{aligned}$$

Nyt käyttämällä Lausetta 4.2 todetaan

$$\fint_{B_R} H\left(x,\frac{u-(u)_{B_R}}{R}\right)dx \le c\left(\fint_{B_R} H(x,\nabla u)^{d_2}\,dx\right)^{1/d_2}.$$

Kun tämä yhdistetään epäyhtälöön (4.13) saadaan lopulta

$$\fint_{B_{R/2}} H(x,\nabla u)\,dx \le c\left(\fint_{B_R} H(x,\nabla u)^{d_2}\,dx\right)^{1/d_2},$$

ja todetaan, ettei vakio $c$ edelleenkään riipu säteestä $R$. Toisin sanoen päättely pätee kaikilla palloilla $B_R \subset\subset \Omega$, joiden säde $R \le 1$ ja $c$ riippuu vakioista $n, p, q, \nu, L, \alpha, [a]_{0,\alpha}$ ja $\|\nabla u\|_{L^p}$. Koska $d_2 < 1$, niin väite seuraa Gehringin lemmasta (Lause 1.11).

□

# 5 Lokaalin minimoijan Hölder-jatkuvuus

Viimeisenä päätuloksena osoitetaan, että funktionaalin $\mathcal{F}$ lokaali minimoija $u$ on Hölder-jatkuva ensin tapauksessa $p > n/(1+\delta)$ ja sitten pienemmille eksponentin $p$ arvoille. Ensimmäisessä tapauksessa Hölder-jatkuvuus tässä tapauksessa seuraa suoraviivaisesti Morreyn epäyhtälöstä.

Tämän jälkeen todistetaan, että funktionaalin $\mathcal{F}$ minimoija on aina lokaalisti rajoitettu sekä Hölder-jatkuva myös tapauksessa $p \leq n/(1+\delta)$. Nämäkin todistukset käyttävät luvussa 2 esitettyjä iteraatiolemmoja, mutta vaativat myös monta uutta aputulosta. Todistuksen idea noudattelee de Giorgin metodia, jossa tarkastellaan lokaalin minimoijan tasojoukkojen avulla rajoittuneisuutta sekä heilahtelua. Lisäksi, koska variaatio-ongelma on kaksikasvuinen, kerroinfunktion $a$ arvot vaikuttavat funktionaalin käyttäytymiseen. Tämän vuoksi täytyy tarkastella erikseen tapauksia, joissa $a$ saa joko pieniä tai suuria arvoja.

**Lause 5.1.** *Olkoot $u \in W^{1,p}(\Omega)$ funktionaalin $\mathcal{F}$ lokaali minimoija ja ehdot (1.2), (1.5) sekä (1.8) voimassa. Jos $p > n/(1+\delta)$, niin jokaisella avoimella $\Omega' \subset\subset \Omega$ on olemassa sellainen Hölder-eksponentti $\beta(n, p, q, \nu, L[a]_{0,\alpha}, \|u\|_{L^\infty}) \in (0, 1)$, että*

$$u \in C^{0,\beta}_{loc}(\Omega').$$

*Tässä vakio $\delta$ on sama kuin Lauseen 4.4 väitteessä.*

*Todistus.* Väite seuraa Morreyn epäyhtälöstä seuraavasti. Lauseen 4.4 kohdan *i)* nojalla $|\nabla u| \in L^{p(1+\delta)}(\Omega)$ ja Poincarén epäyhtälön (1.10) nojalla

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u - (u)_\Omega\|_{L^q(\Omega)} + \|(u)_\Omega\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^r(\Omega)} + \|(u)_\Omega\|_{L^q(\Omega)} < \infty,$$

kun $r = p(1+\delta)$ ja $q \leq r^*$. Siis $u \in L^{p(1+\delta)}(\Omega)$, ja täten myös $u \in W^{1,p(1+\delta)}$. Tällöin Morreyn epäyhtälön (Lause 1.9) nojalla

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p(1+\delta)}(\Omega)}.$$

Tässä

$$\gamma = 1 - \frac{n}{p(1+\delta)} = \frac{p - n + p\delta}{p + p\delta},$$

joten Hölder-jatkuvuus on todistettu. $\square$

Aloitetaan de Giorgin metodin läpikäynti lokaalin rajoittuneisuuden todistamisesta, ja otetaan funktioiden positiivi- ja negatiiviosille käyttöön merkinnät

$$(u-k)_+ = \max\{u-k, 0\} \quad \text{ja} \quad (u-k)_- = \max\{k-u, 0\}.$$

Otetaan käyttöön myös vastaavat tasojoukot

$$A(k,s) = B_s \cap \{x \in \Omega \,|\, u(x) > k\} \quad \text{ja} \quad B(k,s) = B_s \cap \{x \in \Omega \,|\, u(x) < k\}.$$

Ideana on todistaa, joukko $A(2T, R/2)$ on nollamittainen jollakin reaaliluvulla $T$.

Ensimmäiseksi todistetaan Caccioppoli-epäyhtälö myös funktiolle $(u-k)_+$. Tämä todistus on samankaltainen kuin edellisessä luvussa, mutta sen yksityiskohdat katkaisufunktion muotoa lukuunottamatta on jätetty lähdemateriaalissa esittämättä.

**Lause 5.2.** *Olkoot $u \in W^{1,p}(\Omega)$ funktionaalin $\mathcal{F}$ lokaali minimoija ja ehdot (1.2), (1.5) sekä (1.8) voimassa. Tällöin seuraava Caccioppoli-epäyhtälö*

$$\int_{B_t} H(x, \nabla(u-k)_\pm)\,dx \le c \int_{B_s} H\left(x, \frac{(u-k)_\pm}{s-t}\right) dx \tag{5.1}$$

*on voimassa kaikilla $k \in \mathbb{R}$ ja $t < s$, kun $c \equiv c(n,p,q,\nu,L)$ on vakio sekä $B_t \subset B_s$ ovat samankeskisiä palloja.*

*Todistus.* Olkoon $B_s$ pallo, jonka säde $s \le 1$. Olkoon $t < s$ ja määritellään leikkausfunktio $\eta \in C_0^\infty(B_s)$, jolle

a) $|\nabla \eta| \le 4/(s-t)$

b) $0 \le \eta \le 1$

c) $\eta \equiv 1$ pallossa $B_t$.

Määritellään lopuksi apufunktio $w = u - \eta(u-k)_+$. Samoin kuin Lauseen 4.4 todistuksessa päätellään, että $a(x)|\nabla w|^q \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ja $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Koska $u$ minimoi funktionaalin $\mathcal{F}$, eli $\mathcal{F}(u, A(k,s)) \le \mathcal{F}(w, A(k,s))$, niin ehdon (1.8) nojalla $\nu\mathcal{P}(u, A(k,s)) \le L\mathcal{P}(w, A(k,s))$. Kun käytetään tulon derivointikaavaa, nähdään

$$\begin{aligned}\int_{B_s} H(x, \nabla(u-k)_+)\,dx &= \int_{A(k,s)} H(x, \nabla(u-k)_+)\,dx \\ &\leq C\int_{A(k,s)} H(x, \nabla w)\,dx \\ &= \int_{A(k,s)} |\nabla u - (u-k)_+\nabla\eta - \eta\nabla(u-k)_+|^p \\ &\quad + a(x)|\nabla u - (u-k)_+\nabla\eta - \eta\nabla(u-k)_+|^q\,dx.\end{aligned}$$

Erottelemalla integrandit kolmioepäyhtälön avulla ja jakamalla integroimisalue sisä- ja ulko-osaan, saadaan yläarvioksi

$$\begin{aligned}&\int_{A(k,s)} H(x, \nabla(u-k)_+)\,dx \\ &\quad\leq C\int_{A(k,s)\setminus A(k,t)} |\nabla u - \eta\nabla(u-k)_+|^p + a(x)|\nabla u - \eta\nabla(u-k)_+|^q\,dx \\ &\quad + C\int_{A(k,t)} |\nabla u - \eta\nabla(u-k)_+|^p + a(x)|\nabla u - \eta\nabla(u-k)_+|^q\,dx \\ &\quad + C\int_{A(k,s)} |(u-k)_+\nabla\eta|^p + a(x)|(u-k)_+\nabla\eta|^q\,dx.\end{aligned}$$

Nyt funktion $\eta$ ominaisuuksista ja havainnosta, että $\nabla u = \nabla(u-k)_+$ joukossa $A(k,s)$, saadaan epäyhtälö muotoon

$$\begin{aligned}\int_{A(k,s)} H(x, \nabla(u-k)_+)\,dx &\leq C\int_{A(k,s)\setminus A(k,t)} H(x, \nabla u)\,dx \\ &+ \frac{c}{(s-t)^p}\int_{A(k,s)} |(u-k)_+|^p\,dx + \frac{c}{(s-t)^q}\int_{A(k,s)} a(x)|(u-k)_+|^q\,dx\end{aligned}$$

Vakiot $C$ ja $c$ riippuvat vakioista $n, p, q, \nu$ ja $L$ sekä epäyhtälön oikea puoli on äärellinen, sillä $u \in L^p(B_s) \cap L^q(B_s)$ ja jatkuvana funktiona $a \in L^\infty(B_s)$ koska $B_s \subset\subset \Omega$.

Nyt arvioimalla integraalia alaspäin pienentämällä pallon sädettä ja "täyttämällä reikä", eli lisäämällä edelliseen epäyhtälöön puolittain

$$C\int_{A(k,t)} H(x, \nabla u)\,dx,$$

ja lopuksi jakamalla puolittain termillä $(C+1)$ saadaan

$$\begin{aligned}\int_{A(k,t)} H(x, \nabla(u-k)_+)\,dx \leq \int_{A(k,s)} H(x, \nabla u)\,dx &\leq \theta\int_{A(k,s)} H(x, \nabla u)\,dx \\ &+ \frac{c}{(s-t)^p}\int_{A(k,s)} |(u-k)_+|^p\,dx + \frac{c}{(s-t)^q}\int_{A(k,s)} a(x)|(u-k)_+|^q\,dx,\end{aligned}$$

missä vakio $\theta = C/(C+1) < 1$. Nyt voidaan käyttää Lemmaa 2.1 merkinnöillä

$$h(t) \equiv \int_{A(k,t)} H(x, \nabla(u-k)_+)\,dx, \quad \alpha \equiv p, \beta \equiv q,$$

$$A = \int_{A(k,s)} |(u-k)_+|^p\,dx \text{ ja } B = \int_{A(k,s)} a(x)|(u-k)_+|^q\,dx$$

ja saadaan arvio

$$\begin{aligned} h(t) = \int_{A(k,t)} H(x, \nabla(u-k)_+)\,dx &\le \frac{cA}{(s-t)^p} + \frac{cB}{(s-t)^q} \\ &= c\int_{A(k,s)} H\left(x, \frac{(u-k)_+}{s-t}\right)\,dx. \end{aligned}$$

Lopuksi siirtymällä integroimisalueissa takaisin palloihin nähdään, että

$$\int_{B_t} H(x, \nabla(u-k)_+)\,dx \le C\int_{B_s} H\left(x, \frac{(u-k)_+}{s-t}\right)\,dx.$$

Tapaus $(u-k)_-$ käsitellään samoin kunhan lisäksi todetaan, että funktio $-u$ minimoi funktionaalin $\mathcal{F}'$, missä integrandina on $F(x,-v,-z)$. Uusi funktionaali täyttää ehdon (1.8), joten todistus on samanlainen kuin edellä. □

Osoitetaan seuraavaksi lokaalin minimoijan lokaali rajoittuneisuus. Koska todistuksessa käytetään luvussa 4 todistettua Sobolev-Poincaré-lemmaa, ehto (1.5) on välttämätön myös tässä todistuksessa.

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi seuraavassa todistuksessa käytetään säteen skaalausta. Ideana on, että kaikki tarkastelut tehdään origokeskisessä pallossa, jonka säde $R = 1$. Tämä tapahtuu siirtymällä funktioihin

$$\tilde{u}(x) = \frac{u(x_0 + Rx) - (u)_{B_R}}{R} \quad \text{ja} \quad \tilde{a}(x) = a(x_0 + Rx). \tag{5.2}$$

Muunnoksista nähdään, että

$$\begin{aligned} [\tilde{a}]_{0,\alpha,B_1(0)} &= \sup_{x,y\in B_1(0)} \frac{|\tilde{a}(x) - \tilde{a}(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &= \sup_{x,y\in B_1(0)} \frac{|a(x_0+Rx) - a(x_0+Ry)|}{|x_0 + Rx - x_0 - Ry|^\alpha} \\ &= \sup_{\tilde{x},\tilde{y}\in B_R(x_0)} \frac{|a(\tilde{x}) - a(\tilde{y})|}{R^{-\alpha}|\tilde{x}-\tilde{y}|} \\ &= R^\alpha [a]_{0,\alpha,B_R(x_0)}; \end{aligned} \tag{5.3a}$$

$$\|\nabla \tilde{u}\|_{L^p(B_1(0))} = \left( \int_{B_1(0)} |\nabla \tilde{u}(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \left( \int_{B_1(0)} |\nabla u(x_0 + Rx)|^p \, dx \right)^{1/p}$$
$$= \left( \int_{B_R(x_0)} |\nabla u(\tilde{x})|^p R^{-n} \, d\tilde{x} \right)^{1/p} = \frac{\|\nabla u\|_{L^p(B_R(x_0))}}{R^{n/p}}; \quad (5.3b)$$

$$\|\tilde{u}\|_{L^p(B_1(0))} = \left( \int_{B_1(0)} |\tilde{u}(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$
$$= \left( \int_{B_1(0)} \left| \frac{u(x_0 + Rx) - (u)_{B_R(x_0)}}{R} \right|^p dx \right)^{1/p}$$
$$= \left( \int_{B_R(x_0)} |u(\tilde{x}) - (u)_{B_R(x_0)}|^p R^{-n-1} \, d\tilde{x} \right)^{1/p}$$
$$= \frac{\|u - (u)_{B_R(x_0)}\|_{L^p(B_R(x_0)}}{R^{n/p+1}}, \quad (5.3c)$$

missä $\tilde{x} = x_0 + Rx$ eli $x = (\tilde{x} - x_0)/R$. Samankaltaiset laskut osoittavat myös, että funktio $u$ minimoi funktionaalin $\mathcal{P}(\cdot, B_R(x_0))$, niin funktio $\tilde{u}$ minimoi funktionaalin

$$v \mapsto \int_{B_1(0)} |\nabla v|^p + \tilde{a}(x) |\nabla v|^q \, dx,$$

ja vastaava päätelmä pätee myös funktionaalille $\mathcal{F}$.

**Lause 5.3.** *Olkoot $u \in W^{1,p}(\Omega)$ funktionaalin $\mathcal{F}$ lokaali minimoija ja ehdot (1.2), (1.5) sekä (1.8) voimassa. Tällöin funktio $u$ on lokaalisti rajoitettu eli*

$$\|u\|_{L^\infty(B_{R/2})} \leq c(n, p, q, \nu, L\alpha, [a]_{0,\alpha}, R, \|\nabla u\|_{L^p(B_R)}, \|H(\cdot, u)\|_{L^1(B_R)}) \quad (5.4)$$

*kaikilla palloilla $B_R \subset\subset \Omega$.*

*Todistus.* **Vaihe 1: Iteraation valmistelu.** Oletetaan, että säde $R = 1$ ja muussa tapauksessa käytetään säteen skaalausta (5.2). Valitaan luvut $0 \leq h < k$ ja $1/2 \leq \rho < s \leq 1$ sekä samankeskiset pallot $B_\rho \subset B_t \subset B_s$, missä $t = (s + \rho)/2$ on säteiden $s$ ja $\rho$ keskiarvo. Määritellään lisäksi sellainen katkaisufunktio $\eta \in C_0^\infty(B_t)$, että $\eta \equiv 1$ pallosa $B_\rho$ ja $|\nabla \eta| \leq c/(s - \rho)$. Käyttämällä Hölderin epäyhtälöä eksponentin kasvattamiseen kuten kohdassa (4.14) saadaan

$$\begin{aligned}\int_{B_t} H(x,\eta(\tilde u-k)_+)\,dx &= |B_t| \fint_{B_t} H(x,\eta(\tilde u-k)_+)\,dx \\ &\le |B_t| \left( \fint_{B_t} H(x,\eta(\tilde u-k)_+)^{d_1}\,dx \right)^{1/d_1}.\end{aligned}$$

Nyt hyödyntämällä aiemmin todistettua versiota Sobolev–Poincaré -lauseesta (Huomautus 4.3)

$$\begin{aligned}\int_{B_t} H(x,\eta(\tilde u-k)_+)\,dx \le c|B_t| &\Big(1+[a]_{0,\alpha}\|\nabla(\eta(\tilde u-k)_+)\|^{q-p}_{L^p(B_t)}\Big) \\ &\cdot \left( \fint_{B_t} H(x,\nabla(\eta(\tilde u-k)_+))^{d_2}\,dx \right)^{1/d_2}.\end{aligned}$$

Epäyhtälö on voimassa, sillä $\eta \in C_0^\infty(B_t)$, jolloin $\eta(\tilde u-k)_+ \in W_0^{1,p}(B_t)$.

Käsitellään viimeisen lausekkeen termejä erikseen. Aluksi todetaan, että

$$\begin{aligned}\|\nabla(\eta(\tilde u-k)_+)\|^{q-p}_{L^p(B_t)} &= \|(\tilde u-k)_+\nabla\eta+\eta\nabla(\tilde u-k)_+\|^{q-p}_{L^p(B_t)} \\ &\le \frac{c}{(s-\rho)^{q-p}}\|\tilde u\|^{q-p}_{L^p(B_t)}+c\|\nabla\tilde u\|^{q-p}_{L^p(B_t)},\end{aligned}$$

kun huomioidaan, että $|\nabla\eta|$ on rajoitettu ja $\eta\le 1$. Lisäksi, koska $d_2\in(0,1)$, niin siirtymällä pois integraalikeskiarvosta saadaan pallon $B_t$ mitan eksponentiksi negatiivinen luku $1-1/d_2$. Näin pallon $B_t$ mitta voidaan arvioida vakiolla ylöspäin, sillä säde $t$ on rajoitettu alhaalta luvulla 1/2. Tekemällä mainitut arviot, saadaan lopulta

$$\int_{B_t} H(x,\eta(\tilde u-k)_+)\,dx \le \frac{c}{(s-\rho)^{q-p}} \left( \int_{B_t} H(x,\nabla(\eta(\tilde u-k)_+))^{d_2}\,dx \right)^{1/d_2}$$

missä $d_2(n,p,q,\alpha)\in(0,1)$ ja vakio $c$ riippuu vain vakioista $n,p,q,\alpha,[a]_{0,\alpha},R^{-n/p}\|\nabla u\|_{L^p}$ ja $R^{-n/p-1}\|u\|_{L^p}$ kaavojen (5.3) mukaisesti.

Käytetään seuraavaksi käänteistä Hölderin epäyhtälöä

$$\|fg\|_1 \ge \|f\|_{1/p}\|g\|_{-1/(p-1)},$$

missä $f=H(\cdot,\nabla(\eta(\tilde u-k)_+))$, $g=\chi_{A(k,t)}$ ja $1/p=d_2$. Ratkaisemalla $\|f\|_{1/p}$ ja tekemällä edellämainitut sijoitukset saadaan epäyhtälö

$$\int_{B_t} H(x,\eta(\tilde u-k)_+)\,dx \le \frac{c}{(s-\rho)^{q-p}} \int_{B_t} H(x,\nabla(\eta(\tilde u-k)_+))\,dx\cdot|A(k,t)|^{d_3}, \tag{5.5}$$

missä $d_3 = (1 - d_2)/d_2 > 0$.

Toisaalta, koska $t \mapsto H(\cdot, t)$ on kasvava, sublineaarinen toisen muuttujan suhteen (epäyhtälö (4.9), kun $\alpha = \beta = 1$) ja $\eta$ on valittu sopivasti, niin

$$\begin{aligned}
\int_{B_t} H(x, \nabla(\eta(\tilde{u} - k)_+))\, dx &= \int_{B_t} H(x, (\tilde{u} - k)_+ \nabla\eta + \eta\nabla(\tilde{u} - k)_+)\, dx \\
&\leq c \int_{B_t} H(x, (\tilde{u} - k)_+ \nabla\eta) + c \int_{B_t} H(x, \eta\nabla(\tilde{u} - k)_+)\, dx \\
&\leq c \int_{B_t} H\left(x, \frac{(\tilde{u} - k)_+}{s - \rho}\right) dx + c \int_{B_t} H(x, \nabla(\tilde{u} - k)_+)\, dx.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla saatu epäyhtälö ja Lauseesta 5.2 saatu Caccioppoli -epäyhtälö (5.1) lausekkeeseen (5.5) sekä pitämällä kirjaa positiiviosasta integroimisalueessa päädytään arvioon

$$\begin{aligned}
\int_{A(k,\rho)} H(x, \tilde{u} - k)\, dx &\leq \int_{A(k,t)} H(x, \eta(\tilde{u} - k))\, dx \\
&\leq \frac{c}{(s - \rho)^{q-p}} \int_{A(h,s)} H\left(x, \frac{\tilde{u} - h}{s - \rho}\right) dx \cdot |A(k, s)|^{d_3}, \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

missä $c$ riippuu vakioista $n, p, q, \alpha, [a]_{0,\alpha}$ ja $R^{-n/p-1}\|u\|_{W^{1,p}}$. Siirtyminen luvusta $k$ lukuun $h$ ja Caccioppoli-epäyhtälön (Lause 5.1) käyttö on perusteltua, sillä oletuksen nojalla $h < k$, kuvaus $t \mapsto H(\cdot, t)$ on kasvava ja funktio $\tilde{u}$ minimoi funktionaalin $\mathcal{F}(\cdot, B_1)$.

**Vaihe 2: Iteraatio.** Iteroidaan seuraavaksi epäyhtälöä (5.6). Tätä varten olkoon $\{B_{\rho_i}\}$ jono $x_0$-keskisiä palloja, joiden säteille pätee $\rho_i = (1 + 2^{-i})/2$ kaikilla $i = 0, 1, 2, \ldots$. Olkoon lisäksi $T > 0$ vakio, jonka tarkka arvo selvitetään myöhemmin, ja määritellään tasot $k_i = 2T(1 - 2^{-(i+1)})$. Sijoitetaan epäyhtälöön (5.6) arvot $\rho = \rho_{i+1}, s = \rho_i, k = k_{i+1}$ ja $h = k_i$, jolloin

$$\begin{aligned}
\int_{A(k_{i+1},\rho_{i+1})} H(x, \tilde{u} - k_{i+1})\, dx \leq c4^{iq} \int_{A(k_i,\rho_i)} H(x, \tilde{u} - k_i)\, dx \qquad (5.7) \\
\cdot |A(k_{i+1}, \rho_i)|^{d_3}. \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Määritellään ja arvioidaan lisäksi

$$\begin{aligned}
\Psi_i = T^{-p} \int_{A(k_i,\rho_i)} H(x, \tilde{u} - k_i)\, dx &\geq T^{-p} \int_{A(k_{i+1},\rho_i)} H(x, \tilde{u} - k_i)\, dx \\
&\geq T^{-p}[(k_{i+1} - k_i)^p + a(x)(k_{i+1} - k_i)^q]|A(k_{i+1}, \rho_i)| \\
&\geq T^{-p}(k_{i+1} - k_i)^p |A(k_{i+1}, \rho_i)|, \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

missä toinen epäyhtälö seuraa, kun arvioidaan funktiota $\tilde{u}$ alaspäin lukuun $k_{i+1}$. Toisaalta epäyhtälön (5.7) avulla saadaan yläarvio

$$\begin{aligned}\Psi_{i+1} &= T^{-p}\int_{A(k_{i+1},\rho_{i+1})} H(x,\tilde{u}-k_{i+1})\,dx \\ &\le T^{-p}c4^{iq}\int_{A(k_i,\rho_i)} H(x,\tilde{u}-k_i)\,dx\cdot|A(k_{i+1},\rho_i)|^{d_3} \\ &= c4^{iq}\Psi_i|A(k_{i+1},\rho_i)|^{d_3}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Todetaan lopuksi, että

$$T^{-p}(k_{i+1}-k_i)^p4^{qi} = 2^p\left(\frac{1}{2^{i+1}}-\frac{1}{2^{i+2}}\right)4^{qi} = 2^{2qi+p-i-1}\ge 1,$$

joten käyttämällä epäyhtälöä (5.9) yläarvioon huomataan, että

$$\Psi_{i+1}\le c4^iq\Psi_i(T^{-p}(k_{i+1}-k_i)^p)^{d_3}|A(k_{i+1},\rho_i)|^{d_3}\le c4^{(1+d_3)qi}\Psi_i^{1+d_3}$$

kaikilla $i\in\mathbb{N}_0$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\Psi_i\to 0$ iteraatiolemman 2.2 avulla. Tätä varten täytyy kuitenkin ensin varmistaa, että

$$\Psi_0\le c^{-1/d_3}\left(4^{(1+d_3)q}\right)^{-1/d_3^2}.$$

Koska

$$\Psi_0 = T^{-p}\int_{A(k_0,\rho_0)} H(x,\tilde{u}-k_0)\,dx = T^{-p}\int_{A(T,1)} H(x,\tilde{u}-T)\,dx,$$

niin valitsemalla

$$T = \frac{\|H(\cdot,\tilde{u}_+)\|_{L^1(B_1)}^{1/p}}{c^{-1/d_3}\left(4^{(1+d_3)q}\right)^{-1/d_3^2}}, \tag{5.11}$$

saadaan

$$\Psi_0 = \frac{c^{-1/d_3}\left(4^{(1+d_3)q}\right)^{-1/d_3^2}\int_{A(T,1)} H(x,\tilde{u}-T)\,dx}{\|H(\cdot,\tilde{u}_+)\|_{L^1(B_1)}}\le c^{-1/d_3}\left(4^{(1+d_3)q}\right)^{-1/d_3^2},$$

sillä $\tilde{u}>T$ joukossa $A(T,1)$. Nyt $\Psi_i\to 0$ eli

$$\Psi_i = T^{-p}\int_{A(k_i,\rho_i)} H(x,\tilde{u}-k_i)\,dx\to T^{-p}\int_{A(2T,1/2)} H(x,\tilde{u}-2T)\,dx = 0$$

joten $\tilde{u}\le 2T$ melkein kaikkialla pallossa $B_{1/2}$. Täten valinnan (5.11) nojalla

$$\|\tilde{u}_+\|_{L^\infty(B_{1/2})}^p\le c\|H(\cdot,\tilde{u}_+)\|_{L^1(B_1)}.$$

Toistamalla edellä oleva päättely funktiolle $-\tilde{u}$, joka on funktionaalin $\mathcal{F}'$ lokaali minimi, väite seuraa mahdollisen skaalauksen jälkeen. $\square$

Koska todistuksessa käytettiin säteen skaalausta, funktion $u$ oleellinen supremum riippuu säteesä $R$. Tämä pakottaa rajoittuneisuuden ja myöhemmin myös Hölder-jatkuvuuden lokaaleiksi tuloksiksi. Lisäksi, koska oletettiin, että $B_R \subset\subset \Omega$, voivat minimoivan funktion $u$ arvot lähestyä ääretöntä lähellä alueen $\Omega$ reunaa. Jokaisella pisteellä $x \in \Omega$ on kuitenkin palloympäristö, jossa $\|u\|_{L^\infty(B_{R/2})}$ on äärellinen.

Koska minmoijafunktio $u$ on rajoitettu, voidaan tarkastella sen heilahtelua esimerkiksi joukossa $B_R$. Otetaan tätä varten käyttöön merkinnät

$$M(R) = \operatorname*{ess\,sup}_{B_R} u, \quad m(R) = \operatorname*{ess\,inf}_{B_R} u \quad \text{ja} \quad \operatorname{osc}(u, R) = M(R) - m(R),$$

missä $B_R \subset\subset \Omega$. Koska päätavoitteena on osoittaa lokaali Hölder-jatkuvuus, täytyy tarkastella palloja, joiden sulkeuma on kompakti avaruudessa $\Omega$. Tulokset eivät siis välttämättä ole voimassa alueen $\Omega$ reunalla $\partial\Omega$.

Hölder-jatkuvuuden todistus perustuu minimoijan heilahtelun tarkasteluun. Osoitetaan tämä ensin, kun funktionaali $\mathcal{P}$ on niin sanotussa $p$-kasvuvaiheessa. Funktionaalin $\mathcal{P}$ sanotaan olevan $p$-kasvuvaiheessa, kun kerroinfunktio $a$ saa riittävän pieniä arvoja (katso ehto (5.12)), ja täten termi $a(x)|\nabla u|^q$ on hallittavissa termillä $|\nabla u|^p$. Tällöin tilanne palautuu tavallisempaan $p$-kasvuehtoon kaksikasvuisen kasvuehdon sijaan, ja todistus noudattaakin $p$-kasvuehdon kaltaista rakennetta. Todistus on jaettu useaan lemmaan, joista ensimmäinen palauttaa käsittelyn $p$-kasvuun. Lisäksi tästä eteenpäin oletetaan, että $p \leq n/(1+\delta)$.

**Lemma 5.4.** *Olkoot $u \in W^{1,p}(\Omega)$ funktionaalin $\mathcal{F}$ lokaali minimoija, ehdot (1.2), (1.5) sekä (1.8) voimassa ja olkoon $B_{2R} \subset\subset \Omega$ pallo, jonka säde $R \leq 1$. Oletetaan lisäksi, että ehto*

$$\sup_{B_R} a(x) \leq 4[a]_{0,\alpha} R^\alpha \tag{5.12}$$

*pätee. Tällöin samankeskisille palloille $B_t \subset B_s \subset B_R$, missä $0 < t < s \leq R$ sekä kaikille sellaisille $k \in \mathbb{R}$, joille $|k| \leq 2\|u\|_{L^\infty(B_R)}$, pätee seuraava Caccioppoli-epäyhtälö*

$$\int_{B_t} |\nabla(u-k)_\pm|^p \, dx \leq c \left(\frac{R}{s-t}\right)^q \int_{B_s} \left|\frac{(u-k)_\pm}{R}\right|^p dx.$$

*Tässä $c$ riippuu vakioista $n, p, q, \nu, L, [a]_{0,\alpha}$ ja $\|u\|_{L^\infty(B_R)}$.*

*Todistus.* Koska funktio $H$ sisältää sekä $p$- että $q$-osan, niin

$$\int_{B_t} |\nabla(u-k)_\pm|^p \, dx \leq \int_{B_t} H(x, \nabla(u-k)_\pm) \, dx.$$

Lauseen 5.2 Caccioppoli-epäyhtälön nojalla voidaan arvioida

$$\begin{aligned}\int_{B_t} |\nabla(u-k)_\pm|^p \, dx &\leq c \int_{B_s} H\left(x, \frac{(u-k)_\pm}{s-t}\right) dx \\ &= c\int_{B_s} \left|\frac{(u-k)_\pm}{s-t}\right|^p dx + c\int_{B_s} a(x)\left|\frac{(u-k)_\pm}{s-t}\right|^q dx.\end{aligned}$$

Laventamalla säteellä $R$ nähdään, että

$$\begin{aligned}&\int_{B_t} |\nabla(u-k)_\pm|^p \, dx \qquad (5.13)\\ &\quad\leq c\left(\frac{R}{s-t}\right)^p \int_{B_s} \left|\frac{(u-k)_\pm}{R}\right|^p dx + c\left(\frac{R}{s-t}\right)^q \int_{B_s} a(x)\left|\frac{(u-k)_\pm}{R}\right|^q dx.\end{aligned}$$

Seuraavaksi todetaan, että oletusten ja Lauseesta 5.3 saadun funktion $u$ rajoittuneisuuden ja oletuksen (5.12) nojalla

$$\begin{aligned}a(x)\left|\frac{(u-k)_\pm}{R}\right|^q &\leq \frac{4[a]_{0,\alpha} R^\alpha \left(|u|+|k|\right)^{q-p} |(u-k)_\pm|^p}{R^q} \\ &\leq \frac{c[a]_{0,\alpha} \|u\|^{q-p}_{L^\infty(B_R)} |(u-k)_\pm|^p}{R^{q-\alpha}},\end{aligned}$$

sillä $|k| \leq 2\|u\|_{L^\infty(B_R)}$. Koska oletuksen nojalla $p \leq n/(1+\delta)$, niin erityisesti $p < n$, ja ehdon (1.5) nojalla

$$0 < q - \alpha < p + p\alpha/n - \alpha < p.$$

Koska $R \leq 1$, niin $R^{-(q-\alpha)} \leq R^{-p}$ ja siis

$$a(x)\left|\frac{(u-k)_\pm}{R}\right|^q \leq c\left|\frac{(u-k)_\pm}{R}\right|^p.$$

Sijoittamalla tämä arvio epäyhtälöön (5.13) päätellään

$$\begin{aligned}&\int_{B_t} |\nabla(u-k)_\pm|^p \, dx \\ &\quad\leq c\left(\frac{R}{s-t}\right)^p \int_{B_s} \left|\frac{(u-k)_\pm}{R}\right|^p dx + \tilde{c}\left(\frac{R}{s-t}\right)^q \int_{B_s} \left|\frac{(u-k)_\pm}{R}\right|^p dx \\ &\quad= \left[c\left(\frac{R}{s-t}\right)^p + \tilde{c}\left(\frac{R}{s-t}\right)^q\right] \int_{B_s} \left|\frac{(u-k)_\pm}{R}\right|^p dx.\end{aligned}$$

Koska $p < q$ ja $t < s \leq R$, niin hakasuluissa olevaa kerrointa voidaan arvioida yksinkertaisesti eksponentin kasvattamisella, jolloin

$$\int_{B_t} |\nabla(u-k)_\pm|^p \, dx \leq c \left(\frac{R}{s-t}\right)^q \int_{B_s} \left|\frac{(u-k)_\pm}{R}\right|^p dx$$

ja tästä väite seuraa. $\square$

Osoitetaan seuraavaksi, että funktio $u$ saavuttaa suurimmat arvonsa pääasiassa lähellä pallon $B_R$ reunaa. Erityisesti suuria arvoja ei saavuteta juurikaan puolisäteisessä pallossa. Tämä tulos on verrattavissa harmonisten funktioiden ominaisuuksiin, sillä harmoninen funktio saavuttaa ääriarvonsa aina määrittelyjoukkonsa reunalla [19, Corollary 1.9]. Funktiota $v$ kutsutaan harmoniseksi, jos se toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = 0,$$

joka on elliptisten osittaisdifferentiaaliyhtälöiden malliesimerkki. Tätä tulosta varten osoitetaan kuitenkin ensin Poincarén epäyhtälöön liittyvä aputulos.

**Lemma 5.5.** *Olkoon $u \in W^{1,1}(\Omega)$ sellainen funktio, että $u(x) = 0$ positiivismittaisessa joukossa $A \subset \Omega$. Tällöin*

$$\left(\int_\Omega |u|^{n/(n-1)} \, dx\right)^{(n-1)/n} \leq c \int_\Omega |\nabla u| \, dx.$$

*Todistus.* Notaation selventämiseksi käytetään lyhennysmerkintää $q = n/(n-1)$. Osoitetaan ensin, että kaikilla positiivismittaisilla joukoilla $B \subset \Omega$

$$\|(u)_\Omega - (u)_B\|_{L^q(\Omega)} \leq \left(\frac{|\Omega|}{|B|}\right)^{1/q} \|u - (u)_\Omega\|_{L^q(\Omega)}. \tag{5.14}$$

Hölderin epäyhtälöstä todetaan, että

$$\|(u)_\Omega - (u)_B\|_{L^q(\Omega)} = |(u)_\Omega - (u)_B| \left(\int_\Omega \chi_\Omega \, dx\right)^{1/q} = |\Omega|^{1/q} \left| ⨍_B u - (u)_\Omega \, dx\right|.$$

Nyt käyttämällä kolmioepäyhtälöä ja Hölderin epäyhtälöä uudestaan

$$\begin{aligned}\|(u)_\Omega - (u)_B\|_{L^q(\Omega)} &\leq |\Omega|^{1/q} ⨍_B |u - (u)_\Omega| \, dx \leq |\Omega|^{1/q} \left(⨍_B |u - (u)_\Omega|^q \, dx\right)^{1/q} \\ &= \left(\frac{|\Omega|}{|B|}\right)^{1/q} \|u - (u)_\Omega\|_{L^q(B)} \leq \left(\frac{|\Omega|}{|B|}\right)^{1/q} \|u - (u)_\Omega\|_{L^q(\Omega)}.\end{aligned}$$

Käytetään sitten epäyhtälöä (5.14), kun joukon $B$ tilalla on oletuksissa esitetty joukko $A$. Selvästi $(u)_A = 0$. Täten käyttämällä ensin kolmioepäyhtälöä saadaan

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(\Omega)} &= \|u-(u)_A\|_{L^q(\Omega)} = \|u-(u)_\Omega + (u)_\Omega - (u)_A\|_{L^q(\Omega)} \\ &\le \|u-(u)_\Omega\|_{L^q(\Omega)} + \|(u)_\Omega - (u)_A\|_{L^q(\Omega)} \\ &\le \left(1+\frac{|\Omega|}{|A|}\right)^{1/q} \|u-(u)_\Omega\|_{L^q(\Omega)}.\end{aligned}$$

Lopuksi käyttämällä Poincarén epäyhtälöä (1.9), jolloin nähdään

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le c\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)},$$

ja väite on todistettu. □

Nyt voidaan osoittaa minimoijan ääriarvojen jakautumista koskeva tulos.

**Lemma 5.6.** *Olkoot $u \in W^{1,p}(\Omega)$ funktionaalin $\mathcal{F}$ lokaali minimoija ja ehdot (1.2), (1.5) sekä (1.8) voimassa. Olkoon lisäksi $B_{2R} \subset\subset \Omega$ sellainen pallo, jonka säde $R \le 1$, ja että*

$$\sup_{B_R} a(x) \le 4[a]_{0,\alpha} R^\alpha$$

*pätee. Oletetaan lisäksi tiheysehto*

$$\frac{|A(k_0,R)|}{|B_R|} \le \frac{1}{2} \quad \left[tai\ \frac{|B(k_0,R)|}{|B_R|} \le \frac{1}{2}\right] \tag{5.15}$$

*pätee vakiolla $k_0 = (M(R)+m(R))/2$. Tällöin on olemassa sellainen positiivinen vakio $c(n,p,q,\nu,L,[a]_{0,\alpha},\|u\|_{L^\infty(B_R)})$, että*

$$\frac{|A(k_j,R/2)|}{|B_{R/2}|} \le \frac{c}{j^{\frac{n(p-1)}{p(n-1)}}} \quad \left[tai\ \frac{|B(k_j,R/2)|}{|B_{R/2}|} \le \frac{c}{j^{\frac{n(p-1)}{p(n-1)}}}\right],$$

*missä $j \in \mathbb{N}$ ja $k_j = M(R) - 2^{-j+1} osc(u,R)$.*

*Todistus.* Oletetaan, että joukkoa $A(k_0,R)$ koskeva ehto on voimassa. Valitaan sellaiset vakiot $h$ ja $k$, että $k_0 < h < k$, ja määritellään apufunktio $v : B_R \to \mathbb{R}$,

$$v(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } u \le h, \\ u-h, & \text{kun } h < u < k, \\ k-h, & \text{kun } u \ge k. \end{cases}$$

Selvästi $v = 0$ joukossa $B_{R/2} \setminus A(k_0, R/2)$. Täten $v = 0$ joukossa, jonka mitta on suurempi kuin $|B_R|/2$ tiheysehdon (5.15) nojalla. Tällöin Lemman 5.5 avulla saadaan

$$\left( \int_{B_{R/2}} v^{\frac{n}{n-1}} \, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq c \int_{B_{R/2}} |\nabla v| \, dx = c \int_{\Delta} |\nabla u| \, dx,$$

missä $\Delta = A(h, R/2) \setminus A(k, R/2)$ eli se osa palloa $B_{R/2}$, missä $h < u < k$. Tästä saadaan Hölderin epäyhtälöllä sekä kasvattamalla integroimisjoukkoa joukosta $\Delta$ joukkoon $A(h, R/2)$ ylä- ja ala-arviot

$$\begin{aligned} (k-h)|A(k, R/2)|^{\frac{n-1}{n}} &\leq \left( \int_{B_{R/2}} v^{\frac{n}{n-1}} \, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq c|\Delta|^{1-\frac{1}{p}} \left( \int_{A(h,R/2)} |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Toisaalta Lemman 5.4 avulla ja valitsemalla $t = R/2$ ja $s = R$ päätellään

$$\int_{A(h,R/2)} |\nabla u|^p \, dx \leq c \left( \frac{R}{R/2} \right)^q \int_{A(h,R)} \frac{(u-h)^p}{R^p} \, dx.$$

Nyt vielä arvioimalla funktiota $u$ supremumillaan ja joukkon $|A(h, R)|$ mittaa pallon mitalla $cR^n$ nähdään, että

$$\int_{A(h,R)} \frac{(u-h)^p}{R^p} \, dx \leq cR^{n-p}(M(R) - h)^p,$$

ja täten

$$(k-h)|A(k, R/2)|^{\frac{n-1}{n}} \leq c|\Delta|^{1-\frac{1}{p}} R^{\frac{n-p}{p}} (M(R) - h).$$

Jos $h < k_j$, niin $M(R) - h \geq M(R) - k_j = 2^{-j+1}\operatorname{osc}(u, R)$. Sijoittamalla edelliseen epäyhtälöön arvot

$$k = k_i = M(R) - 2^{-i+1}\operatorname{osc}(u, R) \quad \text{ja} \quad h = k_{i-1} = M(R) - 2^{-i+2}\operatorname{osc}(u, R)$$

se saadaan muotoon

$$\frac{\operatorname{osc}(u, R)}{2^{i-1}} |A(k_i, R/2)|^{\frac{n-1}{n}} \leq c|A(k_{i-1}, R/2) \setminus A(k_i, R/2)|^{1-\frac{1}{p}} R^{\frac{n-p}{p}} \frac{\operatorname{osc}(u, R)}{2^i}.$$

Jakamalla puolittain luvulla $2^{i-1}\operatorname{osc}(u, R)$ ja korottamalla epäyhtälön molemmat puolet potenssiin $p/(p-1)$ havaitaan, että

$$|A(k_j, R/2)|^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}} \leq |A(k_i, R/2)|^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}} \leq cR^{\frac{n-p}{p-1}} |A(k_{i-1}, R/2) \setminus A(k_i, R/2)|.$$

Tässä ensimmäinen epäyhtälö on voimassa, sillä aiemmin oletettiin, että $k_i < k_{i-1} = h < k_j$. Nyt summaamalla epäyhtälö muuttujan $i$ suhteen luvusta 1 lukuun $j$

$$\begin{aligned} j|A(k_j, R/2)|^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}} &\leq cR^{\frac{n-p}{p-1}} \sum_{i=1}^{j} |A(k_{i-1}, R/2) \backslash A(k_i, R/2)| \\ &\leq cR^{\frac{n-p}{p-1}} |A(k_0, R/2)| \leq cR^{\frac{n-p}{p-1}} R^n = cR^{\frac{p(n-1)}{p-1}}. \end{aligned}$$

Tästä voidaan ratkaista suoraviivaisesti

$$\frac{|A(k_j, R/2)|}{|B_{R/2}|} \leq \frac{c}{j^{\frac{n(p-1)}{p(n-1)}}},$$

ja väite on todistettu. $\square$

Osoitetaan seuraavaksi parannus edelliseen lemmaan. Seuraava tulos näyttää, että minimoija $u$ ei saavuta oleellista supremumiaan neljäsosasäteisessä pallossa.

**Lemma 5.7.** *Olkoon $B_{2R} \subset\subset \Omega$ pallo, jonka säde $R \leq 1$. Jokaista $\kappa \in (0, 1)$ kohti on olemassa $\sigma \in (0, 1)$, joka riippuu vain vakioista $n, p, q, \nu, L, [a]_{0,\alpha}, \|u\|_{L^\infty(B_R)}$ ja $\kappa$, niin, että jos jollakin $\varepsilon > 0$ on voimassa*

$$\frac{|A(M(R) - \varepsilon osc(u, R), R/2)|}{|B_{R/2}|} \leq \sigma \left[ tai \quad \frac{|B(m(R) + \varepsilon osc(u, R), R/2)|}{|B_{R/2}|} \leq \sigma \right],$$

*niin vastaavasti on voimassa*

$$u(x) \leq M(R) - \kappa\varepsilon osc(u, R) \quad \left[ tai \quad u(x) \geq m(R) + \kappa\varepsilon osc(u, R) \right]$$

*melkein kaikilla $x \in B_{R/4}$.*

*Todistus.* Todistetaan väite funktion $(u - k)_+$ avulla. Tapaus $(u - k)_-$ on analoginen tämän kanssa, ja siitä saadaan hakasulkeissa oleva väite. Olkoon $\{B_{\rho_i}\}$ jono sisäkkäisiä palloja, jotka ovat samankeskisiä pallon $B_R$ kanssa, ja $\rho_i = R(1 + 2^{-i})/4$. Määritellään lisäksi $\overline{\rho}_i = (\rho_i + \rho_{i+1})/2$ ja katkaisufunktiot $\eta_i \in C_0^\infty(B_{\overline{\rho}_i})$ siten, että $0 \leq \eta_i \leq 1$, $\eta_i \equiv 1$ pallossa $B_{\rho_{i+1}}$ ja $|\nabla \eta_i| \leq c2^i/R$. Merkitään lopuksi tasoja

$$k_i = M(R) - \kappa\varepsilon \mathrm{osc}(u, R) - (1 - \kappa)\varepsilon \mathrm{osc}(u, R)/2^i,$$

missä vakio $\varepsilon > 0$ on kiinnitetty. Nyt voidaan arvioida katkaisufunktion avulla

$$\begin{aligned}\left[\frac{(1-\kappa)\varepsilon \operatorname{osc}(u,R)}{2^{i+1}}\right]^p |A(k_{i+1},\rho_{i+1})| &= (k_{i+1}-k_i)^p |A(k_{i+1},\rho_{i+1})| \\ &\le \int_{A(k_{i+1},\rho_{i+1})} |(u-k_i)_+|^p\,dx \\ &\le \int_{A(k_i,\overline{\rho}_i)} |\eta_i(u-k_i)_+|^p\,dx. \qquad (5.16)\end{aligned}$$

Käyttämällä Hölderin epäyhtälöä, missä uusiksi eksponenteiksi valitaan $p/p^*$ ja

$$1-(p^*/p) = 1-[np/(n-p)]/p = 1-n/(n-p) = p/n,$$

päätellään

$$\int_{A(k_i,\overline{\rho}_i)} |\eta_i(u-k_i)_+|^p\,dx \le \left(\int_{B_{\overline{\rho}_i}} |\eta_i(u-k_i)|^{p^*}\,dx\right)^{p/p^*} |A(k_i,\overline{\rho}_i)|^{p/n}.$$

Nyt, koska $\eta_i(u-k_i)_+ \in W^{1,p}(B_{\overline{\rho}_i})$ ja $p \le n/(1+\delta) < n$, niin Poincarén epäyhtälön (1.10) perusteella

$$\left(\int_{B_{\overline{\rho}_i}} |\eta_i(u-k_i)_+|^{p^*}\,dx\right)^{p/p^*} \le \int_{B_{\overline{\rho}_i}} |\nabla(\eta_i(u-k_i)_+)|^p\,dx\,|A(k_i,\overline{\rho}_i)|^{p/n}.$$

Käyttämällä tulon derivointikaavaa, katkaisufunktion derivaatan rajoittuneisuutta sekä Lemmaa 5.4 yhdessä laskun

$$\begin{aligned}\left(\frac{R}{\rho_i-\overline{\rho}_i}\right)^q &= \left(\frac{R}{R\frac{1+2^{-i}}{4} - \left(\frac{R}{8}(1+2^{-i}) + \frac{R}{8}(1+2^{-i-1})\right)}\right)^q \\ &= \left(\frac{8}{2^{-i+1}-2^{-i}+2^{-i-1}}\right)^q = \tilde{c}2^{qi}\end{aligned}$$

kanssa todetaan

$$\begin{aligned}&\int_{A(k_i,\overline{\rho}_i)} |\eta_i(u-k_i)_+|^p\,dx \\ &\le 2^{p-1}\left(\int_{B_{\overline{\rho}_i}} |(u-k_i)_+ D\eta_i|^p\,dx + \int_{B_{\overline{\rho}_i}} |\eta_i \nabla(u-k_i)_+|^p\,dx\right) |A(k_i,\overline{\rho}_i)|^{p/n} \\ &\le \left(c2^{pi}\int_{B_{\overline{\rho}_i}} \left|\frac{(u-k_i)_+}{R}\right|^p dx + \tilde{c}2^{qi}\int_{B_{\rho_i}} \left|\frac{(u-k_i)_+}{R}\right|^p dx\right) |A(k_i,\rho_i)|^{p/n} \\ &\le c2^{qi}\int_{A(k_i,\rho_i)} \left|\frac{u-k_i}{R}\right|^p dx\,|A(k_i,\rho_i)|^{p/n}.\end{aligned}$$

Koska funktiota $u$ voidaan arvioida supremumillaan, niin

$$\begin{aligned} u - k_i &= u - M(R) + \kappa\varepsilon\operatorname{osc}(u,R) + \frac{(1-\kappa)\varepsilon\operatorname{osc}(u,R)}{2^i} \\ &\le \varepsilon\operatorname{osc}(u,R)\left(\kappa + \frac{1-\kappa}{2^i}\right) \le \varepsilon\operatorname{osc}(u,R) \end{aligned}$$

joukossa $A(k_i,\rho_i)$, ja täten

$$\begin{aligned} \int_{A(k_i,\bar{\rho}_i)} |\eta_i(u-k_i)_+|^p\,dx &\le c2^{qi}[\varepsilon\operatorname{osc}(u,R)]^p \frac{|A(k_i,\rho_i)|^{1+p/n}}{R^p} \\ &\le c2^{qi}[\varepsilon\operatorname{osc}(u,R)]^p \frac{|A(k_i,\rho_i)|^{1+p/n}}{|B_{\rho_i}|^{p/n}}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Valmistellaan tulevaa iteraatiota merkitsemällä

$$\Psi_i = \frac{|A(k_i,\rho_i)|}{|B_{\rho_i}|}.$$

Tällöin jakamalla epäyhtälöistä (5.16) hakasuluissa oleva termi epäyhtälön oikealle puolelle, jakamalla puolittain pallon $B_{\rho_{i+1}}$ mitalla ja käyttämällä arvioita (5.17) huomataan, että

$$\Psi_{i+1} = \frac{|A(k_{i+1},\rho_{i+1})|}{|B_{\rho_{i+1}}|} \le \frac{c2^{qi}[\varepsilon\operatorname{osc}(u,R)]^p|A(k_i,\rho_i)|^{1+p/n}}{(1-\kappa)^p[\varepsilon\operatorname{osc}(u,R)]^p|B_{\rho_i}|^{1+p/n}}2^{p(i+1)}.$$

Kun vielä käytetään arvioita $2^{p(i+1)} \le c2^{qi}$, niin saadaan

$$\Psi_{i+1} \le \frac{c4^{qi}}{(1-\kappa)^p}\Psi_i^{1+p/n}.$$

Käytetään jälleen iteraatiolemmaa 2.2. Nyt $\alpha = p/n, B = 4^q$ ja $C = c/(1-\kappa)^p$. Siis $\Psi_i \to 0$, kunhan määritellään vakio $\sigma$ ehdolla

$$\begin{aligned} \Psi_0 = \frac{|A(k_0,\rho_0)|}{|B_{\rho_0}|} &= \frac{|A(M(R)-\varepsilon\kappa\operatorname{osc}(u,R), R/2)|}{|B_{R/2}|} \\ &\le \frac{(1-\kappa)^{1/n}}{c^{p/n}}4^{-qn^2/p^2} = \sigma \end{aligned}$$

eli väitteen ehto on voimassa. Nyt antamalla indeksin $i$ kasvaa rajatta ja hyödyntämällä mittojen konvergenssia [11, Theorem 10.2]

$$\Psi_i = \frac{|A(k_i,\rho_i)|}{|B_{\rho_i}|} \to \frac{|A(M(R)-\kappa\varepsilon\operatorname{osc}(u,R), R/4)|}{|B_{R/4}|} = 0.$$

Siis joukon $A$ määritelmän nojalla se pallon $B_{R/4}$ osajoukko, missä $u(x) \ge M(R) - \kappa\varepsilon\operatorname{osc}(u,R)$, on nollamittainen eli

$$u(x) \le M(R) - \kappa\varepsilon\operatorname{osc}(u,R)$$

melkein kaikilla $x \in B_{R/4}$. □

Viimein voidaan osoittaa arvio funktion $u$ heilahtelulle pallossa $B_R$, jos funktionaali $\mathcal{P}$ on tässä joukossa $p$-kasvuvaiheessa. Minimoijan Hölder-jatkuvuus tässä tapauksessa seuraa tästä iteraatiolla, kuten Lauseessa 5.11 myöhemmin osoitetaan.

**Lause 5.8.** *Olkoon $B_{2R} \subset\subset \Omega$ pallo, jonka säde $R \leq 1$. Tällöin on olemassa sellainen vakio $\theta(n, p, q, \nu, L, [a]_{0,\alpha}, \|u\|_{L^\infty(B_R)}) \in (0, 1)$, että jos*

$$\sup_{B_R} a(x) \leq 4[a]_{0,\alpha} R^\alpha$$

*on voimassa, niin*

$$osc(u, R/4) \leq \theta\, osc(u, R).$$

*Todistus.* Koska

$$B_R \subset (\{u \leq M(R) - \operatorname{osc}(u, R)\} \cap B_R) \cup (\{u \geq m(R) + \operatorname{osc}(u, R)/2\} \cap B_R),$$

niin jompikumpi tiheysehdoista (5.15) on välttämättä voimassa. Oletetaan, että näistä ensimmäinen on voimassa. Valitaan Lemmassa 5.7 esiintyvä $\kappa = 1/2$ ja $\varepsilon = 2^{-j}$. Tällöin Lemman 5.6 väitteesä saadaan $\sigma$, joka toteuttaa Lemman 5.7 ehdon, kunhan $j$ on riittävän suuri, joten $u(x) \leq M(R) - \varepsilon \operatorname{osc}(u, R)/2$ melkein kaikkialla pallossa $B_{R/4}$. Nyt ottamalla puolittain oleellinen supremum

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_{R/4}} u \leq M(R) - \varepsilon(M(R) - m(R))/2.$$

Toisaalta yleisesti pätee

$$-\operatorname*{ess\,inf}_{B_{R/4}} u \leq -\operatorname*{ess\,inf}_{B_R} u.$$

Lisäämällä nämä epähtälöt yhteen, saadaan

$$\begin{aligned}\operatorname{osc}(u, R/4) &= \operatorname*{ess\,sup}_{B_{R/4}} u - \operatorname*{ess\,inf}_{B_{R/4}} u \\ &\leq M(R) - \frac{\varepsilon(M(R) - m(R))}{2} - m(R) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \operatorname{osc}(u, R).\end{aligned}$$

Valitsemalla $\theta = (1 - \varepsilon/2)$ väite seuraa ensimmäisessä tapauksessa. Tapaus, jossa tiheysehdon toinen puoli on voimassa, todistetaan vastaavasti. $\square$

Esitellään ennen viimeistä todistusta vielä yksi aputulos, joka käsittelee jäädytetyn funktionaalin $\mathcal{P}_0$ kvasiminimoijaa. Lause antaa samankaltaisen tuloksen kuin Lause 5.8, mutta sen todistus sivuutetaan. Annetaan kuitenkin ensin määritelmä kvasiminimoijalle ja muotoillaan sitten mainittu aputulos.

**Määritelmä 5.9.** Olkoon $Q \geq 1$. Funktio $v$ on funktionaalin $\mathcal{P}_0$ *kvasi- eli $Q$-minimi*, jos

$$|\nabla v|^p + a(x_0)|\nabla v|^q \in L^1(B_{R_0/4^m}) \tag{5.18}$$

ja $\mathcal{P}_0(v, K) \leq Q\mathcal{P}_0(w, K)$ pätee kaikilla $w \in W^{1,1}(B_{R_0/4^m})$, joille pätee myös ehto (5.18). Tässä $K \subset B_{R_0/4^m}$ on mielivaltainen kompakti joukko, jolle $\text{supp}(v - w) \subset K$.

**Lause 5.10** ([20, Luku 6]). *Olkoon $v \in W^{1,p}(\Omega)$ funktionaalin $\mathcal{P}_0$ lokaali $Q$-minimoija. Tällöin on olemassa positiiviset sellaiset vakiot $c, \beta_0 \in (0, 1)$, jotka riippuvat vakioista $n, p, q$ ja $Q$, että*

$$osc(v, B_\rho) \leq c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\beta_0} osc(v, B_R)$$

*kaikilla samankeskisillä palloilla $B_\rho \subset B_R \subset \Omega$.*

Nyt voidaan osoittaa arvio minimoijan $u$ heilahtelulle myös silloin, kun funktionaali $\mathcal{P}$ ei ole $p$-kasvuvaiheessa. Tällöin kerroinfunktio $a$ saa jossakin pisteessä riittävän suuren arvon $a(x_0)$ ja termi $a(x)|\nabla u|^q$ on tässä tapauksessa merkitsevä. Täten riittää tarkastella jäädytettä funktionaalia $\mathcal{P}_0$ ja käyttää sille juuri esiteltyä heilahtelutulosta. Kun funktion $u$ heilahtelulle on osoitettu ylärajat molemmissa kasvuvaiheissa, Hölder-jatkuvuus seuraa iteraatiolla riittävään pieneen palloon.

**Lause 5.11.** *Olkoot $u \in W^{1,p}(\Omega)$ funktionaalin $\mathcal{F}$ lokaali minimoija ja ehdot (1.2), (1.5) sekä (1.8) voimassa. Jos $p \leq n(1 + \delta)$, niin jokaiselle avoimelle $\Omega' \subset\subset \Omega$ on olemassa sellainen Hölder-eksponentti $\beta(n, p, q, \nu, L[a]_{0,\alpha}, \|u\|_{L^\infty(\Omega')}) \in (0, 1)$, että*

$$u \in C^{0,\beta}(\Omega').$$

*Todistus.* Kiinnitetään $\Omega' \subset\subset \Omega$ kuten oletuksissa. Olkoon $B_{R_0} \subset \Omega'$ pallo, jonka säde $R \leq 1$ ja

$$\sup_{x \in B_{R_0/4^k}} a(x) \leq 4[a]_{0,\alpha}\left(R_0/4^k\right)^\alpha. \tag{5.19}$$

Määritellään poistumisindeksi $m$ lausekkeella

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \mid (5.19) \text{ ei päde}\}.$$

Kun käytetään Lemmaa 5.8 peräkkäin $m$ kertaa, niin

$$\operatorname{osc}(u, R_0/4^k) \leq \theta^k \operatorname{osc}(u, R_0) \tag{5.20}$$

jokaisella $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ ja $\theta \in (0,1)$ riippuu vain vakioista $n, p, q, \nu$, $L$, $[a]_{0,\alpha}$ ja $\|u\|_{L^\infty(\Omega')}$. Jos $m < \infty$, niin ehto (5.19) ei päde jossakin pisteessä $x_0 \in B_{R_0/4^m}$ eli

$$a(x_0) > 4[a]_{0,\alpha}\,(R_0/4^m)^\alpha\,. \tag{5.21}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että $u$ on funktionaalin $\mathcal{P}_0$ lokaali $Q$-minimi pallossa $B_{R_0/4^m}$, missä $Q = 4L/\nu$ ja $a_0 = a(x_0)$. Osoitetaan ensin, että

$$\frac{1}{2}a(x) \leq a(x_0) \leq 2a(x) \tag{5.22}$$

kaikilla $x, x_0 \in B_{R_0/4^m}$. Jos $a(x) < a(x_0)$, niin ehdon (5.21) nojalla

$$\begin{aligned}
2a(x) &= 2|a(x) + a(x_0) - a(x_0)| \\
&\geq 2\Big||a(x) - a(x_0)| - |a(x_0)|\Big| \\
&= 2a(x_0) - 2|a(x) - a(x_0)| \\
&\geq a(x_0) + 4[a]_{0,\alpha}\left(\frac{R}{4^m}\right)^\alpha - 2|a(x) - a(x_0)|.
\end{aligned}$$

Koska oletusten nojalla funktio $a$ on Hölder-jatkuva, niin tällöin $|a(x) - a(x_0)| \leq [a]_{0,\alpha}\,(2R/4^m)^\alpha$, ja täten $2a(x) \geq a(x_0)$. Epäyhtälö pätee selvästi myös, jos $a(x) \geq a(x_0)$. Samalla päättelyllä nähdään, että $2a(x_0) \geq a(x)$ kaikilla $x \in B_{R_0/4^m}$. Tästä päätellään, että ehto (5.18) on totta, sillä

$$|\nabla u|^p + a(x)|\nabla u|^q \in L^1(B_{R_0/4^m}).$$

Koska $u$ on funktionaalin $\mathcal{F}$ minimoiva funktio, niin epäyhtälöiden (5.22) ja

(1.8) nojalla

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_0(u,K) &\leq \int_K |\nabla u|^p + 2a(x)|\nabla u|^q \, dx \\
&\leq \frac{2}{\nu}\mathcal{F}(u,K) \\
&\leq \frac{2}{\nu}\mathcal{F}(w,K) \\
&\leq \frac{2L}{\nu}\int_K |\nabla w|^p + a(x)|\nabla w|^q \, dx \\
&\leq \frac{2L}{\nu}\int_K |\nabla w|^p + 2a(x_0)|\nabla w|^q \, dx \\
&\leq \frac{4L}{\nu}\mathcal{P}_0(w,K),
\end{aligned}
$$

joten funktio $u$ on jäädytetyn funktionaalin $\mathcal{P}_0$ kvasiminimi vakion $Q$ arvolla $4L/\nu$. Tällöin Lauseen 5.10 nojalla on olemassa sellainen $\tau \in (0,1/4)$, joka riippuu vain vakioista $n, p, q, \nu, L, [a]_{0,\alpha}$ ja $\|u\|_{L^\infty(\Omega')}$, että

$$
\operatorname{osc}(u, \tau^h R_0/4^m) \leq \theta^h \operatorname{osc}(u, R_0/4^m)
$$

pätee kaikilla $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, kun $\theta \in (0,1)$ on vakio. Käyttämällä tätä ja epäyhtälöä (5.20) päätellään, että

$$
\operatorname{osc}(u, \tau^h R_0) \leq \theta^h \operatorname{osc}(u, R_0) \tag{5.23}
$$

kaikilla $h \in \mathbb{N}_0$.

Koska $\theta \in (0,1)$, niin $\theta$ voidaan kirjoittaa muodossa $(C-1)/C$ valitsemalla $C = 1/(1-\theta)$. Valitaan $x, y \in B_{R_0} \subset \Omega'$ ja olkoon $n \in \mathbb{N}_0$ sellainen luku, että $\tau^{n+1}R_0 \leq |x-y| < \tau^n R_0$. Nyt epäyhtälö (5.23) voidaan kirjoittaa muodossa

$$
|u(x) - u(y)| \leq \operatorname{osc}(u, \tau^n R_0) \leq \left(\frac{C-1}{C}\right)^n \operatorname{osc}(u, R_0). \tag{5.24}
$$

Valitsemalla

$$
\beta = \frac{\log(C/(C-1))}{\log(\tau)} > 0,
$$

kirjoittamalla $\tau = e^{\log(\tau)}$ ja käyttämällä luvun $n$ määritelmää nähdään, että

$$
\begin{aligned}
\frac{|x-y|^\beta}{R_0^\beta} &\geq \left(\tau^{n+1}\right)^{\frac{\log(C/(C-1))}{\log(\tau)}} = \tau^{\frac{\log((C-1)/C)^{n+1}}{\log(\tau)}} = e^{\frac{\log(\tau)\log\left[((C-1)/C)^{n+1}\right]}{\log(\tau)}} \\
&= \left(\frac{C-1}{C}\right)^{n+1}
\end{aligned}
$$

eli

$$\left(\frac{C-1}{C}\right)^n \leq \frac{C|x-y|^\beta}{(C-1)R_0^\beta}.$$

Täten epäyhtälö (5.24) saadaan muotoon

$$|u(x)-u(y)| \leq \frac{C\operatorname{osc}(u,R)}{(C-1)R_0^\beta}|x-y|^\beta,$$

mistä nähdään, että funktio $u$ on lokaalisti Hölder-jatkuva eksponentilla $\beta = \log(\theta)/\log(\tau)$. Koska kaikki tulokset ovat riippumattomia aloituspallosta $B_{R_0}$, kunhan se sisältyy alueeseen $\Omega'$, ja sekä $\tau$ että $\theta$ riippuvat vain vakioista $n, p, q, \nu, L, [a]_{0,\alpha}$ ja $\|u\|_{L^\infty(\Omega')}$. □

On siis osoitettu, että funktionaalin $\mathcal{F}(\cdot,\Omega)$ minimoiva funktio $u$ on lokaalisti Hölder-jatkuva. Tulokset eivät siis anna viitteitä minimoijan ominaisuuksista alueen $\Omega$ reunalla. Funktio $u$ on kuitenkin Hölder-jatkuva jokaisessa kompaktissa joukossa $K \subset \Omega$: Merkitään $d = \min_{x\in K} \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$ ja peitetään joukko $K$ palloilla $B_i = B_r(x)$, missä $x \in K$ ja $r < d/2$. Koska $K$ on kompakti joukko, voidaan valita äärellinen osapeite $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^N B_i$. Edellä todistetun nojalla $u$ on Hölder-jatkuva jokaisessa pallossa $B_i \in \mathcal{B}$, joten valitsemalla $\alpha = \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ nähdään, että $u \in C^{0,\alpha}(K)$.

## Viitteet


[1] D. Hilbert, "Mathematical problems," 1900.

[2] I. M. Gelfand, R. A. Silverman, *et al.*, *Calculus of variations.* Courier Corporation, 2000.

[3] M. Colombo and G. Mingione, "Regularity for double phase variational problems," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 215, no. 2, pp. 443–496, 2015.

[4] N. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory.* London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 2005.

[5] W. Rudin, "Functional analysis," *Internat. Ser. Pure Appl. Math*, 1991.

[6] I. Holopainen, *Reaalianalyysi I Helsingin yliopisto.* Elektroninen luentomoniste osoitteessa http://www. helsinki. fi/˜ iholopai/ReAn02. pdf (luettu 24.1. 2017), 2004.

[7] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions.* CRC press, 2015.

[8] L. Evans, *Partial Differential Equations.* Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2010.

[9] E. Giusti, *Direct Methods in the Calculus of Variations.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2003.

[10] M. Giaquinta and E. Giusti, "On the regularity of the minima of variational integrals," *Acta Mathematica*, vol. 148, no. 1, pp. 31–46, 1982.

[11] R. G. Bartle, *A modern theory of integration*, vol. 32. American Mathematical Soc., 2001.

[12] H. Royden, *Real Analysis.* The Macmillan Company, 1963.

[13] W. Rudin, *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., Oxford University press, 1966.

[14] R. B. Holmes, *Geometric functional analysis and its applications.* Springer, 1975.

[15] C. Niculescu and L.-E. Persson, *Convex functions and their applications: a contemporary approach*. Springer Science & Business Media, 2006.

[16] L. Grafakos, "Classical and modern fourier analysis. 2004."

[17] E. Stein and R. Shakarchi, *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*. Princeton lectures in analysis, Princeton University Press, 2011.

[18] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, 2015.

[19] S. Axler, P. Bourdon, and R. Wade, *Harmonic Function Theory*, vol. 137. Springer Science & Business Media, 2001.

[20] G. M. Lieberman, "The natural generalizationj of the natural conditions of ladyzhenskaya and urall'tseva for elliptic equations," *Communications in Partial Differential Equations*, vol. 16, no. 2-3, pp. 311–361, 1991.