

# HYPERBOLINEN JA KVASIHYPERBOLINEN GEOMETRIA

Markus Glader

Pro gradu -tutkielma  
Syyskuu 2011

MATEMATIIKAN LAITOS  
TURUN YLIOPISTO



TURUN YLIOPISTO

Matematiikan laitos

GLADER, MARKUS: Hyperbolinen ja kvasihyperbolinen geometria

Pro gradu -tutkielma, 62 s.

Matematiikka

Syyskuu 2011

---

Tämä Pro gradu -tutkielma käsittelee hyperbolista ja kvasihyperbolista geometriaa. Tutkielmassa tarkasteellaan hyperbolista geometriaa ylemmässä puolitasossa ja yksikkökiekossa. Sovelluksena tarjotaan kaava hyperbolisen geodeesin hyperboliselle keskipisteelle.

Kvasihyperbolista geometriaa tutkitaan tasovyössä. Erityisesti selvitetään millaisia ovat tasovyön kvasihyperboliset geodeesit.

Asiasanat: geodeesi, hyperbolinen geometria, hyperbolinen keskipiste, kvasihyperbolinen geometria, Möbius-kuvaus.



# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Hyperbolinen geometria</b>	<b>3</b>
2.1	Hyperboliset geodeesit . . . . .	3
2.2	Möbius-kuvaukset . . . . .	10
2.3	Ylemmästä puolitasosta yksikkökiekkoon . . . . .	16
2.4	Hyperboliset ympyrät . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Hyperbolinen ala ja trigonometria</b>	<b>29</b>
3.1	Hyperboliset kolmiot . . . . .	29
3.2	Hyperbolinen ala . . . . .	32
3.3	Hyperbolisen trigonometrian perustuloksia . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Kvasihyperbolinen geometria</b>	<b>45</b>
4.1	Kvasihyperbolisen geometrian perusteet . . . . .	45
4.2	Kvasihyperboliset geodeesit tasovyössä . . . . .	47
	<b>Kirjallisuutta</b>	<b>61</b>



# 1 Johdanto

Hyperbolisen geometrian historia alkaa pyrkimyksistä johtaa euklidisen geometrian paralleeliaksioma muista aksiomista lähtien. Nämä pyrkimykset epäonnistuivat, mutta niistä syntyneiden tulosten kautta sai alkunsa epäeuklidinen geometria. Merkittävimpiä kehittäjiä olivat E. Beltrami, J. Bolyai, C. F. Gauss ja N. Lobatševski. Termiä *hyperbolinen geometria* käytti ensimmäisenä F. Klein vuonna 1871. Vaikka hyperbolinen geometria sai alkunsa puhtaan teoreettisen tutkimuksen kautta, nykyään sitä sovelletaan esimerkiksi monissa kosmologian ja kvanttimekaniikan malleissa.

Kvasihyperbolinen geometria esiteltiin ensimmäistä kertaa vuonna 1976 F. W. Gehringin ja B. P. Palkan julkaisussa. Muita merkittäviä kvasihyperbolisen geometrian kehittäjiä ovat muun muassa G. J. Martin ja B. G. Osgood.

Tutkielman alussa käsitellään yleisesti hyperbolista geometriaa ylemmässä puolitasossa ja todistetaan siihen liittyviä perustuloksia. Tästä edetään Möbius-kuvausten kautta tarkastelemaan hyperbolista geometriaa yksikkökiekossa.

Toisen luvun alussa tutustutaan hyperbolisiin kolmioihin ja hyperboliseen alaan. Luvun lopussa tarkastellaan hyperbolista trigonometriaa.

Viimeisessä luvussa tarkastellaan aluksi kvasihyperbolista geometriaa, minkä jälkeen selvitetään millaisia ovat kvasihyperboliset geodeesit tasovyöissä.

Kaksi ensimmäistä lukua perustuvat pääasiallisesti kirjoihin [1], [2] ja [12]. Viimeinen luku nojaa julkaisuihin [3], [4], [8], [9] ja [14]. Lukijan oletetaan hallitsevan euklidista geometriaa, funktioteoriaa ja erityisesti Möbius-kuvauksia koskevat perustulokset.





## 2 Hyperbolinen geometria

### 2.1 Hyperboliset geodeesit

Esitetään aluksi hyperbolisen tason mallit. Niiden pohjalta lähdetään selvittämään millaisia ovat hyperboliset geodeesit.

**Määritelmä 2.1.** Hyperbolisen tason tunnetuimmat mallit ovat ylempi puolitaso

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\} \quad (1)$$

ja yksikkökierokko

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}. \quad (2)$$

Kyseisiä malleja kutsutaan joskus kirjallisuudessa Poincarén puolitasoksi ja kiekoksi. Niiden alkuperäinen kehittäjä on kuitenkin E. Beltrami.

**Määritelmä 2.2.** Olkoon  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  suoristuva käyrä, joka on määritelty ehdolla  $f(t) = x(t) + iy(t)$ . Käyrän  $f$  hyperbolinen pituus on

$$\|f\| = \int_f \frac{|dz|}{\text{Im}(z)} = \int_a^b \frac{|f'(t)|}{\text{Im}(f(t))} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{\text{Im}(f(t))} dt. \quad (3)$$

**Esimerkki 1.** Olkoon  $0 < a < b$  ja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  käyrä, joka on määritelty ehdolla  $f(t) = t + it$ . Nyt kyseessä olevan polun hyperbolinen pituus on

$$\|f\| = \int_a^b \frac{|f'(t)|}{\text{Im}(f(t))} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{2}}{t} dt = \sqrt{2} \ln \left[ \frac{b}{a} \right].$$

**Määritelmä 2.3.** Merkitään kompleksitason pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävää euklidista janaa symbolilla  $[z_1, z_2]$ .

**Esimerkki 2.** Olkoot  $a, y_1$  ja  $y_2$  reaalityyppisiä lukuja, joista kahdella jälkimmäisellä on ominaisuus:  $0 < y_1 \leq y_2$ . Lasketaan ylemmän puolitason pisteitä  $z_1 = a + iy_1$  ja  $z_2 = a + iy_2$  yhdistävän euklidisen janan hyperbolinen pituus.

Funktioteorian perusteista tiedetään, että janaa  $[z_1, z_2]$  vastaava käyrä on:

$$(f : [y_1, y_2] \rightarrow \mathbb{H}) : f(t) = it.$$

Nyt haluttu hyperbolinen pituus on:

$$\|f\| = \int_{y_1}^{y_2} \frac{|f'(t)|}{\operatorname{Im}(f(t))} dt = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{t} dt = \ln \left[ \frac{y_2}{y_1} \right]. \quad (4)$$

Tämä esimerkki on esitetty kirjassa [12].

**Esimerkki 3.** Olkoon  $Y$  euklidinen ympyrä, jonka säde on  $r$  ja keskipiste  $c \in \mathbb{R}$ . Valitaan ympyrän  $Y$  kehältä pisteet  $z_1$  ja  $z_2$ , jotka toteuttavat ehdot  $\operatorname{Im}(z_k) > 0$  ja  $\operatorname{Re}(z_1) > \operatorname{Re}(z_2)$ . Olkoon janan  $[c, z_k]$  ja positiivisen reaaliakselin välinen kulmaa  $\theta_k$ . Lasketaan nyt pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävän kaaren  $s$  hyperbolinen pituus.

Olkoon  $\theta$  positiivisen reaaliakselin ja ympyrän  $Y$  sädettä vastaavan janan välinen kulma. Funktioteorian perusteista tiedetään, että kaarta  $s$  vastaava käyrä on:

$$(f : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{H}) : f(\theta) = c + re^{i\theta} = (c + r \cos \theta) + ir \sin \theta.$$

Nyt voidaan laskea haluttu hyperbolinen pituus:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{(-r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}}{r \sin \theta} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin \theta} d\theta \\ &\stackrel{\theta_k \neq \frac{\pi}{2}}{=} \ln \left[ \frac{1}{\sin \theta_2} - \frac{1}{\tan \theta_2} \right] - \ln \left[ \frac{1}{\sin \theta_1} - \frac{1}{\tan \theta_1} \right]. \end{aligned}$$

Erikoistapauksessa  $\theta_k = \frac{\pi}{2}$  saadaan

$$\|f\| = \begin{cases} \ln \left[ \frac{1}{\sin \theta_2} - \frac{1}{\tan \theta_2} \right], & \text{kun } k = 1 \\ \text{ja} \\ -\ln \left[ \frac{1}{\sin \theta_1} - \frac{1}{\tan \theta_1} \right], & \text{kun } k = 2. \end{cases}$$

Toisaalta hyvin tunnettujen euklidisen trigonometrian identiteettien mukaan

$$\sin \theta_k = \frac{y_k}{r} \text{ ja } \tan \theta_k = \frac{y_k}{x_k - c}.$$

Nyt saadaan ilmaistua kaaren pituus myös annettujen pisteiden koordinaattien avulla:

$$\|f\| = \ln \left[ \frac{r + c - x_2}{y_2} \right] - \ln \left[ \frac{r + c - x_1}{y_1} \right] = \ln \left[ \frac{y_1 (r + c - x_2)}{y_2 (r + c - x_1)} \right]. \quad (5)$$

Tämä esimerkki on esitetty kirjassa [12].

Jos käyrä yhdistää kaksi tason pistettä lyhimällä mahdollisella tavalla, niin sitä kutsutaan geodeesiksi. Geodeesit eivät ole kaikissa geometrioissa yksikäsitteisiä. Selvitetään seuraavaksi millaisia ovat hyperboliset geodeesit.

**Määritelmä 2.4.** Määritellään funktio  $\rho : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow [0, \infty)$  ehdolla

$$\rho(z_1, z_2) = \inf_{f \in \Gamma[z_1, z_2]} \|f\|, \quad (6)$$

missä  $\Gamma[x, y]$  on hyperbolisen tason  $\mathbb{H}$  pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävien suoristuvien käyrien perhe.

Tätä kuvausta kutsutaan hyperboliseksi etäisyydeksi.

**Lause 2.5.** *Olkoot  $z_1$  ja  $z_2$  pisteitä alueessa  $\mathbb{H}$ . Jos  $\gamma$  on pisteitä yhdistävä hyperbolinen geodeesi, niin ko. käyrä on joko*

- a) *kaari euklidisessa ympyrässä, jonka keskipiste on reaaliakselilla tai*
- b) *euklidinen jana, joka on yhdensuuntainen imaginaariakselin kanssa.*

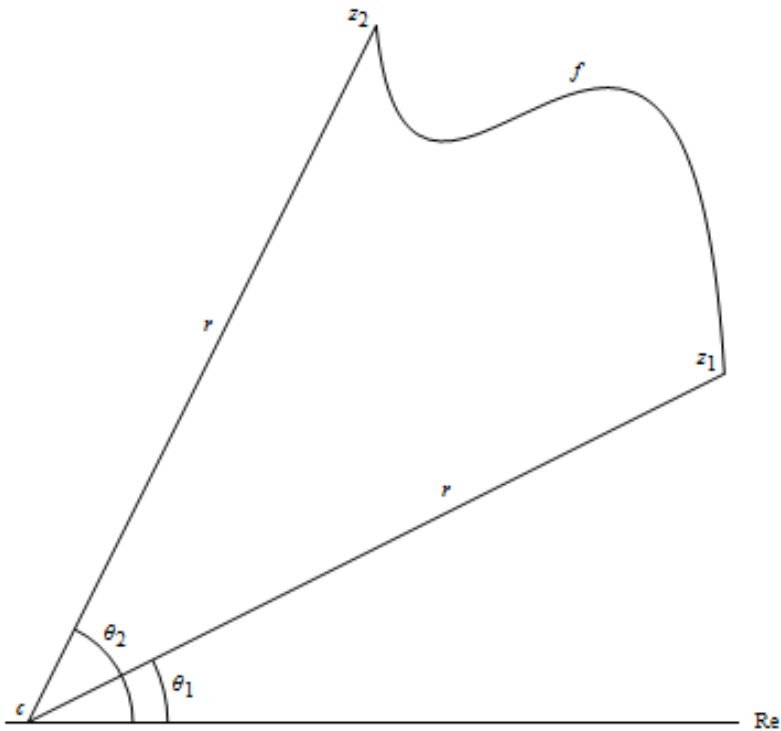
*Todistus.* Olkoon  $z_1 = x_1 + iy_1$  ja  $z_2 = x_2 + iy_2$  kaksi mielivaltaista pistettä ylempässä puolitasossa ja  $f$  näitä pisteitä yhdistävä käyrä. Jaetaan tarkastelu kahteen tapaukseen:  $x_1 > x_2$  ja  $x_1 = x_2$ .

1. tapaus: Olkoon  $x_1 > x_2$ . Nyt jana  $[z_1, z_2]$  ei ole kohtisuorassa reaaliakselia vastaan. Olkoon  $l$  euklidinen suora, joka kulkee janan  $[z_1, z_2]$  euklidisen keskipisteen kautta ja joka on myös kohtisuorassa ko. janaan nähden. Olkoon  $c$  piste, jossa suora  $l$  leikkaa reaaliakselin. Euklidisestä geometriasta tiedetään, että nyt euklidinen etäisyys pisteestä  $c$  pisteeseen  $z_1$  on yhtä suuri kuin euklidinen etäisyys pisteestä  $c$  pisteeseen  $z_2$ .

Asetetaan seuraavaksi tasoon napakoordinaatisto, jonka origo on pisteessä  $c$  ja jonka napa-akseli on reaaliakselin suuntainen. Olkoot pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  vastaavat napakoordinaatit  $(r, \theta_1)$  ja  $(r, \theta_2)$ , ja ilmaistaan ko. pisteitä yhdistävä käyrä napakoordinaateissa:  $f = f(\theta)$ .

Jotta voidaan tarkastella käyrän  $f$  pituutta, selvitetään ensin tekijän  $|f'(\theta)|$  lauseke. Ensinnäkin käyrän karteesiset koordinaatit ovat nyt:

$$x = c + f \cos \theta \text{ ja } y = f \sin \theta.$$



Kuva 1: Pisteet  $z_1$  ja  $z_2$  sekä niitä yhdistävä käyrä  $f$ .

Näistä saadaan laskettua differentiaalit:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{df}{d\theta} \cos \theta + f \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} = f' \cos \theta - f \sin \theta$$

ja

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{df}{d\theta} \sin \theta + f \frac{d(\sin \theta)}{d\theta} = f' \sin \theta + f \cos \theta.$$

Nyt voidaan laskea summa

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= (f' \cos \theta - f \sin \theta)^2 d\theta^2 + (f' \sin \theta + f \cos \theta)^2 d\theta^2 \\ &= (f'^2 + f^2) d\theta^2. \end{aligned}$$

Siispä  $|f'(\theta)| = \sqrt{f'^2 + f^2}$ . Nyt päästään arvioimaan käyrän pituutta:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{f'^2 + f^2}}{f \sin \theta} d\theta \\ &\geq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{f^2}}{f \sin \theta} d\theta \\ &\stackrel{f \geq 0}{=} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Toisaalta esimerkin 3 mukaan edeltävä integraali on pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävän euklidisen ympyrän kaaren hyperbolinen pituus, kun ympyrän keskipiste on reaaliakselilla. Näin ollen etsitty geodeesi on todella a)-kohdassa kuvatun kaltainen.

2. tapaus: Olkoon  $x_1 = x_2$ . Ilmaistaan pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävä käyrä  $y$ -koordinaatin suhteen  $f = f(y)$  ja merkitään  $\frac{df}{dy} = f'$ . Arvioidaan nyt käyrän pituutta:

$$\|f\| = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{f'^2 + 1}}{y} dy \geq \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y} dy = \ln \left[ \frac{y_2}{y_1} \right].$$

Tämä kaava taas on esimerkin 2 mukaan pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävän euklidisen suoran hyperbolinen pituus. Siispä tämä geodeesi vastaa b)-kohdassa esitettyä tapausta.  $\square$

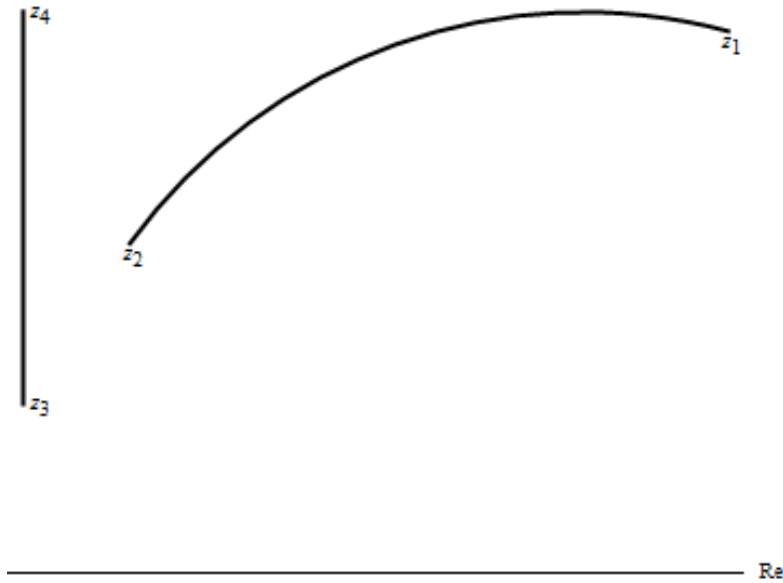
**Seuraus 2.6.** *Kaikkia ylemmän puolitason pistepareja kohti on olemassa yksikäsitteinen hyperbolinen geodeesi.*

*Todistus.* Tulos seuraa suoraan euklidisten suorien ja ympyröiden olemassaolosta ja yksikäsitteisyydestä.  $\square$

**Lause 2.7.** *Järjestetty pari  $(\mathbb{H}, \rho)$  on metrinen avaruus.*

*Todistus.* Selvästikin riittää todistaa, että kuvaus  $\rho$  täyttää metriikalta vaadittavat kolme ehtoa:

1.  $\rho(z_1, z_2) \geq 0 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ , ja  $\rho(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
2.  $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{H}$
3.  $\rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}$



Kuva 2: Kaksi hyperbolista geodeesia ylemmässä puolitasossa.

Koska käyrän hyperbolisen pituuden lausekkeen integrandi on aina ei-negatiivinen, käyrän hyperbolinen pituus on myös aina ei-negatiivinen. Näin ollen myös  $\rho$  on aina ei-negatiivinen, joten ensimmäisen ehdon ensimmäinen kohta on tosi. Lauseesta 2.5 sekä esimerkeistä 2 ja 3 taas nähdään, että  $\rho(z_1, z_2) = 0$  jos ja vain jos  $z_1 = z_2$ . Siispä myös toinen kohta on selvä.

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan toista ehtoa. Olkoon  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  käyrä joukossa  $\Gamma[z_1, z_2]$  ja  $h : [a, b] \rightarrow [a, b]$  ehdolla  $h(t) = a + b - t$  määriteltä kuvaus. Koska  $(f \circ h)(a) = f(b) = z_2$  ja  $(f \circ h)(b) = f(a) = z_1$ , niin käyrä  $f \circ h$  kuuluu joukkoon  $\Gamma[z_2, z_1]$ . Lasketaan sitten käyrän  $f \circ h$  pituus:

$$\begin{aligned} \|f \circ h\| &= \int_a^b \frac{|(f \circ h)'(t)|}{\operatorname{Im}((f \circ h)(t))} dt = \int_a^b \frac{|f'(h(t))| |h'(t)|}{\operatorname{Im}(f(h(t)))} dt \\ &= \int_a^b \frac{|f'(h(t))|}{\operatorname{Im}(f(h(t)))} dt \stackrel{h(t)=s}{=} \int_b^a \frac{|f'(s)|}{\operatorname{Im}(f(s))} (-ds) \\ &= \int_a^b \frac{|f'(s)|}{\operatorname{Im}(f(s))} ds = \|f\|. \end{aligned}$$

Näin ollen jokaista joukon  $\Gamma[z_1, z_2]$  käyrää kohti on olemassa yhtä pitkä käyrä joukossa  $\Gamma[z_2, z_1]$ , ja symmetrian nojalla myös kaikkia joukon  $\Gamma[z_2, z_1]$  käyrä vastaa yhtä pitkä käyrä joukossa  $\Gamma[z_1, z_2]$ . Siispä jouk-

ko  $\{\|f\| \mid f \in \Gamma[z_1, z_2]\}$  sama kuin joukko  $\{\|g\| \mid g \in \Gamma[z_2, z_1]\}$ , joten  $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$ . Tästä seuraa metriikan toinen ehto.

Seurauksen 2.6 nojalla on olemassa käyrät  $f \in \Gamma[z_1, z_2]$  ja  $g \in \Gamma[z_2, z_3]$ , jotka toteuttavat ehdot  $\|f\| = \rho(z_1, z_2)$  ja  $\|g\| = \rho(z_2, z_3)$ . Olkoon  $h$  käyrä, joka saadaan liittämällä yhteen käyrät  $f$  ja  $g$ . Nyt voidaan kirjoittaa

$$\rho(z_1, z_3) \leq \|h\| = \|f\| + \|g\| = \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3),$$

mikä osoittaa metriikan viimeisen ehdon voimassaolon.  $\square$

**Esimerkki 4.** Lasketaan hyperbolinen etäisyys  $\rho(z_1, z_2)$ , kun  $z_1 = 5 + i9$  ja  $z_2 = -7 + i$ .

Lähdetään ratkaisemaan tehtävää lauseen 2.5 todistuksen antaman mallin mukaisesti. Ensinnäkin pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävän euklidisen janan keskipiste on

$$\frac{5 + (-7)}{2} + i\frac{9 + 1}{2} = -1 + i5,$$

ja ko. pisteiden kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$\frac{1 - 9}{-7 - 5} = \frac{2}{3}.$$

Nyt janan  $[z_1, z_2]$  keskipisteen kautta kulkevan ja ko. janaa vasten kohtisuorassa olevan suoran yhtälö on  $y - 5 = -\frac{3}{2}(x + 1)$ . Tämä suora leikkaa reaaliakselin pisteessä  $c = \frac{7}{3}$ , ja halutun euklidisen ympyrän säde on  $r = \sqrt{(5 - \frac{7}{3})^2 + (9 - 0)^2} = \frac{\sqrt{793}}{3}$ .

Nyt esimerkin 3 ja lauseen 2.5 nojalla saadaan halutuksi etäisyydeksi

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \left[ \frac{9 \left( \frac{\sqrt{793}}{3} + \frac{7}{3} - (-7) \right)}{\left( \frac{\sqrt{793}}{3} + \frac{7}{3} - 5 \right)} \right] = \ln \left[ \frac{113 + 4\sqrt{793}}{9} \right] \approx 3,22$$

**Esimerkki 5.** Olkoon  $a, y_1$  ja  $y_2$  reaaliukuja, joista kahdella jälkimmäisellä on ominaisuus:  $0 < y_1 \leq y_2$ . Etsitään ylemmän puolitason pisteitä  $z_1 = a + iy_1$  ja  $z_2 = a + iy_2$  yhdistävän hyperbolisen geodeesin hyperbolinen keskipiste  $M = c + id$ .

Nyt lauseen 2.5 nojalla hyperbolinen geodeesi on euklidinen suora, joten  $c = a$ . Toisaalta esimerkistä 2 nähdään, että tekijän  $d$  täytyy toteuttaa yhtälö

$$\frac{d}{y_1} = \frac{y_2}{d}.$$

*Siispä hyperbolinen keskipiste on*

$$M = a + i\sqrt{y_1 y_2}. \quad (7)$$

*Tämä esimerkki on esitetty kirjassa [12].*

## 2.2 Möbius-kuvaukset

Kerrataan aluksi lyhyesti Möbius-kuvauksen määritelmä ja perusominaisuudet. Todistuksia ei esitetä, sillä lukijan odotetaan tuntevan tulokset.

**Määritelmä 2.8.** Möbius-kuvaus on funktio

$$(m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}) : m(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (8)$$

missä tekijät  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  ja diskriminantti  $ad - bc \neq 0$ .

Merkitään Möbius-kuvausten joukkoa symbolilla Möb.

Kun kerroin  $c \neq 0$ , voidaan Möbius-kuvauksen määritelmä laajentaa suljettuun kompleksitasoon  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Tällöin määritellään

$$m\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \text{ ja } m(\infty) = \frac{a}{c}. \quad (9)$$

Möbius-kuvaukset ovat bijektiivisiä holomorfeja, ne muodostavat ryhmän kuvaustulon suhteen, ja käänteiskuvauksen yhtälö on

$$m^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}. \quad (10)$$

Koska Möbius-kuvaukset ovat bijektiivisiä holomorfeja, ne kuvaavat suoristuvat käyrät suoristuviksi käyriksi.

**Lause 2.9.** *Jokainen Möbius-kuvaus  $m(z)$  voidaan esittää siirron  $s(z) = z + v$ , kierron  $k(z) = uz$  ja kuvauksen  $f(z) = \frac{1}{z}$  yhdisteenä.*

*Todistus.* Todistus sivuutetaan.  $\square$

**Määritelmä 2.10.** Olkoot  $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$ . Näiden kompleksilukujen kaksois-suhde  $[a, b, c, d]$  on

$$[a, b, c, d] = \frac{(a - b)(c - d)}{(a - c)(b - d)}. \quad (11)$$

Jos jokin tekijöistä on ääretön, niin kaksoisuhde määritellään raja-arvona.



**Lause 2.11** (Kaksoissuhteen invarianssi). *Jokainen Möbius-kuvaus toteuttaa kaksoissuhteen invarianssin:*

$$[m, m_1, m_2, m_3] = [z, z_1, z_2, z_3], \quad (12)$$

missä piste  $m_i$  on pisteen  $z_i$  vastinpiste määritelmän 2.8 kuvauksessa  $m$ .

*Todistus.* Todistus sivuutetaan. □

Kaksoissuhteen invarianssia käytetään usein Möbius-kuvauksen yhtälön selvittämiseen, kun kuvauspisteet tunnetaan. Esitetään seuraavaksi esimerkin sen käytöstä.

**Esimerkki 6.** *Etsitään yhtälö Möbius-kuvaukselle  $m(z)$ , joka toteuttaa ehdot  $m(i) = 0$ ,  $m(-1) = 1$  ja  $m(-i) = \infty$ .*

*Nyt kaksoissuhteen invarianssin 2.11 nojalla saadaan yhtälö*

$$[m, 0, 1, \infty] = [z, i, -1, -i]$$

*eli*

$$\frac{m - 0}{m - 1} = \frac{(z - i)(-1 - (-i))}{(z - (-1))(i - (-i))}.$$

*Sieventämällä saadaan lopputulokseksi*

$$m(z) = \frac{iz + 1}{-z - i}. \quad (13)$$

**Lause 2.12.** *Möbius-kuvauksilla on kaksoissuhteen invarianssin lisäksi myös seuraavat invarianssiominaisuudet:*

- *suljetun kompleksitason yleistetyt euklidiset ympyrät kuvautuvat yleistyiksi euklidisiksi ympyröiksi*
- *peilipisteet kuvautuvat peilipisteiksi*
- *suunnansäilyvyys*
- *konformisuus eli kulmien säilyvyys.*

*Todistus.* Todistus sivuutetaan. □

**Esimerkki 7.** *Suunnansäilyvyyden nojalla esimerkin 6 Möbius-kuvaus kuvaa yksikkökierokkeen ylemmälle puolitasolle.*

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan Möbius-kuvauksia, jotka kuvaavat ylemmän puolitason ylemmälle puolitasolle.

**Määritelmä 2.13.** Olkoon joukko  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  Möbius-kuvausten perhe, joka määritellään ehdolla

$$\text{Möb}(\mathbb{H}) = \{m \in \text{Möb} \mid m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}. \quad (14)$$

**Lause 2.14.** *Möbius-kuvaus*

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

*kuuluu joukkoon  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  jos ja vain jos  $a, b, c$  sekä  $d$  ovat reaalilukuja ja  $ad - bc > 0$ .*

*Todistus.* Oletetaan aluksi, että  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  on Möbius-kuvaus, joka kuuluu joukkoon  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Ensinnäkin suljetun reaalilukusuoran  $\overline{\mathbb{R}}$  on kuvauduttava itselleen. Tästä seuraa, että kuvauksen kertoimet  $a, b, c$  ja  $d$  ovat joukossa  $\mathbb{R}$ . Jos voimassa olisi ehto  $ad - bc < 0$ , niin  $m$  kuvaisi ylemmän puolitason alemmalle puolitasolle. Siispä saadaan  $ad - bc > 0$ .

Jos toisaalta  $a, b, c$  sekä  $d$  ovat reaalilukuja ja  $ad - bc > 0$ , niin  $m$  selvästi kuvaa suljetun reaalilukusuoran  $\overline{\mathbb{R}}$  itselleen. Kun kerroin  $c = 0$ , niin ylempi puolitaso kuvautuu selvästi itselleen. Jos taas  $c \neq 0$ , niin muokataan Möbius-kuvauksen lauseketta:

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)}.$$

Tästä saadaan helpolla laskulla

$$\text{Im}(m(z)) = \frac{ad - bc}{c^2|\bar{z} + \frac{d}{c}|^2} \text{Im}(z),$$

mistä seuraa haluttu tulos. □

**Lause 2.15.** *On olemassa Möbius-kuvaus  $\xi \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ , joka kuvaa euklidisen ympyrän kaarta vastaavan hyperbolisen geodeesin euklidiseksi janaksi positiiviselle imagiaariakselille.*

*Todistus.* Todistetaan lause konstruoimalla haluttu kuvaus. Oletetaan, että euklidisen ympyrän kaarta vastaavan hyperbolisen geodeesin päätepisteet ovat  $z_1$  ja  $z_2$ . Leikatkoon ko. ympyrä reaaliakselin pisteissä  $z_1^*$  ja  $z_2^*$ . Olkoon sitten

$$\xi(z) = \frac{\alpha z - (\alpha z_1^* + 1)}{z - z_1^*}, \text{ missä } \alpha = (z_2^* - z_1^*)^{-1}. \quad (15)$$

Nyt diskriminantti

$$-\alpha z_1^* - (-\alpha z_1^* - 1) = 1$$

on positiivinen ja kertoimet  $\alpha$ ,  $-(\alpha z_1^* + 1)$ ,  $1$  ja  $-z_1^*$  ovat selvästi reaali-  
lukuja, joten lauseen 2.14 nojalla  $\xi \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ .

Lopuksi suoran sijoituksen avulla nähdään, että

$$\xi(z_1^*) = \infty \text{ ja } \xi(z_2^*) = 0.$$

Siispä pisteitä  $z_1^*$  ja  $z_2^*$  yhdistävä puoliympyrä kuvautuu nyt euklidiselle puoli-  
suoralle  $\{z \mid \text{Re}(z) = 0 \text{ ja } \text{Im}(z) > 0\}$ , joten pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävä kaari  
kuvautuu janaksi positiiviselle imaginaariakselille.  $\square$

Todistetaan sitten kolme hyperboliseen metriikkaan liittyvää tulosta.

**Lause 2.16.** *Olkoon  $f \in \Gamma[z_1, z_2]$  ja  $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ . Nyt  $\|f\| = \|m \circ f\|$ .*

*Todistus.* Oletetaan, että kuvaus  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  kuuluu joukkoon  $\Gamma[z_1, z_2]$ .  
Lauseen 2.9 nojalla riittää todistaa yhtäsuuruus

$$\left| \int_a^b \frac{|(h \circ f)'(t)|}{\text{Im}((h \circ f)(t))} dt \right| = \|f\|,$$

kun

$$h(z) = \begin{cases} z + v, \\ uz \\ \text{tai} \\ \frac{1}{z} \end{cases}, \text{ missä } u \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ ja } v \in \mathbb{R}.$$

Kaikissa tapauksissa todistus tapahtuu suoralla sijoituksella, joten todiste-  
taan tässä vain tapaus  $h(z) = uz$ . Nyt saadaan

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \frac{|(h \circ f)'(t)|}{\text{Im}((h \circ f)(t))} dt \right| &= \left| \int_a^b \frac{|u| |f'(t)|}{u \text{Im}(f(t))} dt \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{\text{sgn}(u) |f'(t)|}{\text{Im}(f(t))} dt \right| = \|f\|. \end{aligned}$$

Muut tapaukset todistetaan analogisesti.  $\square$

**Lause 2.17.** *Olkoon  $m$  Möbius-kuvaus joukossa  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Nyt  $\rho(z_1, z_2) = \rho(m(z_1), m(z_2))$ , kun pisteet  $z_1$  ja  $z_2$  ovat alueessa  $\mathbb{H}$ .*

*Todistus.* Oletetaan, että kuvaus  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  kuuluu joukkoon  $\Gamma[z_1, z_2]$  ja että Möbius-kuvaus  $m$  on joukossa  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Nyt  $(m \circ f)(a) = m(z_1)$  ja  $(m \circ f)(b) = m(z_2)$ , joten yhdistetty kuvaus  $m \circ f$  kuuluu perheeseen  $\Gamma(m(z_1), m(z_2))$ .

Lauseen 2.16 nojalla  $\|f\| = \|m \circ f\|$ , joten nyt saadaan

$$\begin{aligned} \rho(m(z_1), m(z_2)) &= \inf \{ \|g\| \mid g \in \Gamma[m(z_1), m(z_2)] \} \\ &\leq \inf \{ \|m \circ f\| \mid f \in \Gamma[z_1, z_2] \} \\ &= \inf \{ \|f\| \mid f \in \Gamma[z_1, z_2] \} = \rho(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Toisaalta käänteiskuvaus  $m^{-1}$  on olemassa ja selvästi  $m^{-1} \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ . Näin ollen jos käyrä  $g \in \Gamma[m(z_1), m(z_2)]$ , niin yhdistetty kuvaus  $m^{-1} \circ g$  kuuluu perheeseen  $\Gamma[z_1, z_2]$ . Tämän nojalla

$$\begin{aligned} \rho(z_1, z_2) &= \inf \{ \|f\| \mid f \in \Gamma[z_1, z_2] \} \\ &\leq \inf \{ \|m^{-1} \circ g\| \mid g \in \Gamma[m(z_1), m(z_2)] \} \\ &= \inf \{ \|g\| \mid g \in \Gamma[m(z_1), m(z_2)] \} = \rho(m(z_1), m(z_2)). \end{aligned}$$

Nyt siis  $\rho(m(z_1), m(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2)$  ja  $\rho(z_1, z_2) \leq \rho(m(z_1), m(z_2))$ , joten  $\rho(z_1, z_2) = \rho(m(z_1), m(z_2))$ .  $\square$

**Lause 2.18.** *Olkoot  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  pisteitä ylemmässä puolitasossa ja käyrä  $\gamma$  on pisteitä  $z_1$  ja  $z_3$  yhdistävä geodeesi. Yhtäsuuruus*

$$\rho(z_1, z_3) = \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \tag{16}$$

*on voimassa jos ja vain jos piste  $z_2 \in \gamma$ .*

*Todistus.* Olkoot  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  pisteitä ylemmässä puolitasossa, ja olkoon  $\gamma$  pisteitä  $z_1$  ja  $z_3$  yhdistävä geodeesi.

Olkoon  $z_2 \in \gamma$ . Lauseiden 2.15 ja 2.17 riittää tarkastella tapausta, jossa  $\gamma$  on euklidinen suora. Nyt esimerkissä 2 esitetystä laskukaavasta seuraa suoraan haluttu yhtäsuuruus.

Toisaalta olkoon lauseen yhtäsuuruus voimassa. Olkoot  $f \in \Gamma[z_1, z_2]$  ja  $g \in \Gamma[z_2, z_3]$  käyriä, jotka toteuttavat ehdot  $\|f\| = \rho(z_1, z_2)$  ja  $\|g\| = \rho(z_2, z_3)$ . Merkitään symbolilla  $h$  käyrää, joka on muodostettu liittämällä yhteen käyrät  $f$  ja  $g$ . Jos  $h \neq \gamma$ , niin geodeesien yksikäsitteisyydestä nojalla  $\rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) = \|h\| > \|\gamma\| = \rho(z_1, z_3)$ . Tämä on ristiriita, joten  $h = \gamma$  ja  $z_2 \in \gamma$ .  $\square$

Esitetään kappaleen lopuksi kaksi esimerkkiä hyperbolisen keskipisteen selvittämisestä.

**Esimerkki 8.** *Olkoot  $z_1 = x_1 + iy_1$  ja  $z_2 = x_2 + iy_2$  ylemmän puolitason pisteitä, joilla on ominaisuus  $x_1 \neq x_2$ . Oletetaan, että ko. pisteitä yhdistävän hyperbolisen geodeesin jatkeet leikkaavat reaaliakselin pisteissä  $z_1^*$  ja  $z_2^*$ . Etsitään nyt pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävän hyperbolisen geodeesin hyperbolinen keskipiste  $K$ .*

*Olkoon  $\xi$  Möbius-kuvaus, joka on määritelty ehdolla*

$$\xi(z) = \frac{\alpha z - (\alpha z_1^* + 1)}{z - z_1^*}, \text{ missä } \alpha = (z_2^* - z_1^*)^{-1}.$$

*Lauseen 2.15 todistuksen mukaan kuvaus  $\xi \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  ja se kuvaa pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävän euklidisen ympyrän kehän euklidiseksi janaksi, joka sijaitsee positiivisella imaginaariakselilla. Esimerkin 5 nojalla tämän janan hyperbolinen keskipiste  $M = i\sqrt{\text{Im}(\xi(z_1)) \text{Im}(\xi(z_2))}$ . Lauseen 2.17 nojalla Möbius-kuvaukset  $\xi$  ja  $\xi^{-1}$  säilyttävät hyperbolisen etäisyyden, joten pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävän geodeesin hyperbolinen keskipiste*

$$K = \xi^{-1} \left( i\sqrt{\text{Im}(\xi(z_1)) \text{Im}(\xi(z_2))} \right) \quad (17)$$

**Esimerkki 9.** *Selvitetään esimerkin 4 hyperbolisen geodeesin hyperbolinen keskipiste  $K$ . Käytetään vastaavia merkintöjä kuin esimerkissä 8.*

*Nyt Möbius-kuvauksen  $\xi$  muodostamiseen tarvittavat pisteet ovat  $z_1 = 5 + i9$ ,  $z_2 = -7 + i$ ,  $z_1^* = \frac{7+\sqrt{793}}{3}$  ja  $z_2^* = \frac{7-\sqrt{793}}{3}$ . Kuvausten  $\xi$  ja  $\xi^{-1}$  yhtälöt*

ovat

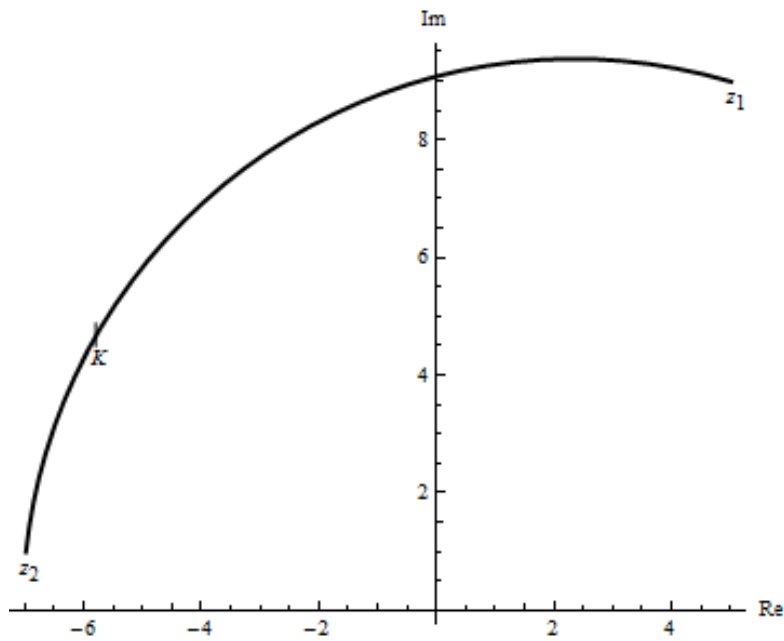
$$\xi(z) = \frac{-9z - 3(-7 + \sqrt{793})}{6\sqrt{793}z - 2\sqrt{793}(7 + \sqrt{793})}$$

ja

$$\xi^{-1}(z) = \frac{-2\sqrt{793}(7 + \sqrt{793})z + 3(-7 + \sqrt{793})}{-6\sqrt{793}z - 9}.$$

Haluttu hyperbolinen keskipiste saadaan nyt suoralla sijoituksella:

$$K = \xi^{-1}\left(i\sqrt{\operatorname{Im}(\xi(z_1))\operatorname{Im}(\xi(z_2))}\right) = \frac{1}{5}\left(-29 + i3\sqrt{61}\right) \approx -5,8 + i4,69.$$



Kuva 3: Pisteitä  $z_1 = 5 + i9$  ja  $z_2 = -7 + i$  yhdistävä hyperbolinen geodeesi sekä sen hyperbolinen keskipiste  $K = \frac{1}{5}(-29 + i3\sqrt{61})$ .

### 2.3 Ylemmästä puolitasosta yksikkökiekkoon

Johdetaan seuraavaksi hyperbolinen metriikka yksikkökiekkossa ylempää puolitasoa koskevien tulosten avulla.

**Määritelmä 2.19.** Olkoon  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  suoristuva käyrä ja  $m$  Möbius-kuvaus, joka kuvaa yksikkökieron  $\mathbb{D}$  ylemmälle puolitasolle  $\mathbb{H}$ . Nyt käyrän  $f$  hyperbolinen pituus yksikkökierossa on

$$\|f\|_{\mathbb{D}} = \|m \circ f\|. \quad (18)$$

**Lause 2.20.** *Hyperbolinen pituus yksikkökierossa on hyvinmääritelty.*

*Todistus.* Oletetaan, että  $f$  on suoristuva käyrä yksikkökierossa ja että  $m$  sekä  $n$  ovat Möbius-kuvauksia, jotka kuvaavat yksikkökieron ylemmälle puolitasolle. Möbius-kuvausten perusominaisuuksien nojalla yhdistetty kuvaus  $p = n \circ m^{-1}$  on myös Möbius-kuvaus ja se kuuluu joukkoon  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Nyt lauseen 2.16 nojalla saadaan

$$\|m \circ f\| = \|p \circ m \circ f\| = \|n \circ m^{-1} \circ m \circ f\| = \|n \circ f\|.$$

Siispä pituus  $\|f\|_{\mathbb{D}}$  on Möbius-kuvauksen valinnasta riippumaton, mikä todistaa väitteen.  $\square$

**Lemma 2.1.** *Olkoon  $f$  suoristuva käyrä ylemmässä puolitasossa ja  $m$  Möbius-kuvaus, joka kuvaa ylemmän puolitason yksikkökierolle. Nyt*  
 $\|m \circ f\|_{\mathbb{D}} = \|f\|.$

*Todistus.* Olkoon  $f$  suoristuva käyrä ylemmässä puolitasossa ja  $m$  Möbius-kuvaus, joka kuvaa ylemmän puolitason yksikkökierolle. Koska käänteiskuvaus  $m^{-1}$  on olemassa, niin suoralla johdalla saadaan

$$\|m \circ f\|_{\mathbb{D}} = \|m^{-1} \circ m \circ f\| = \|f\|.$$

$\square$

**Lause 2.21.** *Olkoon  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  suoristuva käyrä. Sen hyperbolinen pituus saadaan laskemalla integraali*

$$\|f\|_{\mathbb{D}} = \int_f \frac{2}{1 - |z|^2} |dz|. \quad (19)$$

*Todistus.* Olkoon  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  suoristuva käyrä ja  $m$  esimerkissä 6 esitetty Möbius-kuvaus yksikkökiekosta ylemmälle puolitasolle. Nyt suoraan johtamalla käyrän  $f$  pituudeksi saadaan

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathbb{D}} &= \|m \circ f\| = \int_{m \circ f} \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} |dz| \\ &= \int_a^b \frac{|(m \circ f)'(t)|}{\operatorname{Im}((m \circ f)(t))} dt \\ &= \int_a^b \frac{|m'(f(t))| |f'(t)|}{\operatorname{Im}(m(f(t)))} dt \\ &= \int_f \frac{|m'(z)|}{\operatorname{Im}(m(z))} |dz|. \end{aligned}$$

Selvitetään sitten tekijöiden  $|m'(z)|$  ja  $\operatorname{Im}(m(z))$  lausekkeet. Kun  $z = x + iy$ , niin kuvaus  $m$  saa muodon

$$m(z) = \frac{iz + 1}{-z - i} = \frac{-2x + i(-y^2 - x^2 + 1)}{x^2 + (y + 1)^2}.$$

Tästä saadaan suoralla laskulla

$$|m'(z)| = \frac{2}{|z + i|^2}$$

ja

$$\operatorname{Im}(m(z)) = \frac{1 - |z|^2}{|z + i|^2}.$$

Sijoitetaan lopuksi termit pituuden lausekkeeseen:

$$\|f\|_{\mathbb{D}} = \int_f \frac{2}{1 - |z|^2} |dz|.$$

□

**Esimerkki 10.** Olkoon  $0 < r < 1$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  ja  $f : [0, r] \rightarrow \mathbb{D}$  suoristuva käyrä, joka on määritelty ehdolla  $f(t) = te^{i\theta}$ . Lasketaan käyrän hyperbolinen pituus yksikkökiekossa.

Suoralla sijoituksella saadaan

$$\|f\|_{\mathbb{D}} = \int_f \frac{2}{1 - |z|^2} |dz| = \int_0^r \frac{2}{1 - t^2} dt = \ln \left[ \frac{1 + r}{1 - r} \right].$$



**Määritelmä 2.22.** Määritellään funktio  $\rho_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow [0, \infty)$  ehdolla

$$\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \inf_{f \in \Theta[z_1, z_2]} \|f\|_{\mathbb{D}}, \quad (20)$$

missä  $\Theta[z_1, z_2]$  on yksikkökierokkeen pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävien suoristuvien käyrien muodostama perhe. Tätä kuvausta kutsutaan hyperboliseksi etäisyydeksi yksikkökierokossa.

**Lause 2.23.** *Olkoon  $m$  Möbius-kuvaus, joka kuvaa yksikkökierokkeen ylemmälle puolitasolle. Hyperbolisten etäisyyksien välillä on voimassa seuraavat yhtäsuuruudet:*

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) &= \rho(m(z_1), m(z_2)) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{D}. \\ \text{ja} \\ \rho(w_1, w_2) &= \rho_{\mathbb{D}}(m^{-1}(w_1), m^{-1}(w_2)) \quad \forall w_1, w_2 \in \mathbb{H}. \end{aligned} \quad (21)$$

*Todistus.* Olkoon  $m$  Möbius-kuvaus, joka kuvaa yksikkökierokkeen ylemmälle puolitasolle. Todistetaan aluksi yhtäsuuruuksista ensimmäinen.

Olkoon  $f$  suoristuva käyrä joukossa  $\Theta[z_1, z_2]$ . Kaikilla yksikkökierokkeen pisteillä  $z_1$  ja  $z_2$  on voimassa

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) &= \inf \{ \|f\|_{\mathbb{D}} \mid f \in \Theta[z_1, z_2] \} \\ &= \inf \{ \|m \circ f\| \mid f \in \Theta[z_1, z_2] \} \\ &\leq \inf \{ \|g\| \mid g \in \Gamma[m(z_1), m(z_2)] \} = \rho(m(z_1), m(z_2)). \end{aligned}$$

Toisaalta lemmän 2.1 nojalla vastaavasti saadaan

$$\begin{aligned} \rho(m(z_1), m(z_2)) &= \inf \{ \|g\| \mid g \in \Gamma[m(z_1), m(z_2)] \} \\ &= \inf \{ \|m^{-1} \circ g\|_{\mathbb{D}} \mid g \in \Gamma[m(z_1), m(z_2)] \} \\ &\leq \inf \{ \|f\|_{\mathbb{D}} \mid f \in \Theta[z_1, z_2] \} = \rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2). \end{aligned}$$

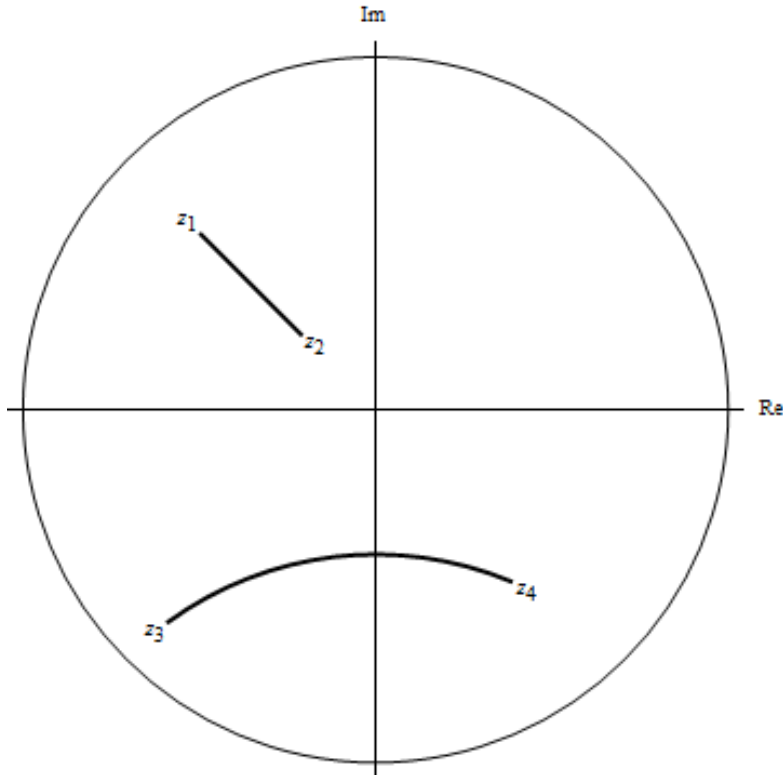
Siispä  $\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \rho(m(z_1), m(z_2))$  kaikilla yksikkökierokkeen pisteillä  $z_1$  ja  $z_2$ , mikä todistaa ensimmäisen yhtäsuuruuden.

Toinen yhtäsuuruus todistetaan analogisesti, joten väite on selvä.  $\square$

**Seuraus 2.24.** *Hyperboliset geodeesit yksikkökierokossa ovat joko euklidisia janoja tai ympyrän kaaria, joiden jatkeet leikkaavat yksikköympyrän kohtisuorasti.*

*Todistus.* Tulos seuraa Möbius-kuvausten ominaisuuksista ja lauseesta 2.23.

□



Kuva 4: Kaksi hyperbolista geodeesia yksikkökiekossa.

**Seuraus 2.25.** *Kaikkia yksikkökiekon pistepareja kohti on olemassa yksikäsitteinen hyperbolinen geodeesi.*

*Todistus.* Tulos seuraa suoraan euklidisten suorien ja ympyröiden olemassaolosta ja yksikäsitteisyydestä. □

**Seuraus 2.26.** *Järjestetty pari  $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}})$  on metrinen avaruus.*

*Todistus.* Koska  $\rho$  on metriikka avaruudessa  $\mathbb{H}$ , niin tulos seuraa lauseesta 2.23. □

**Lause 2.27.** *Olko  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  pisteitä yksikkökiekossa ja käyrä  $\gamma$  on pisteitä  $z_1$  ja  $z_3$  yhdistävä hyperbolinen geodeesi. Yhtäsuuruus*

$$\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_3) = \rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) + \rho_{\mathbb{D}}(z_2, z_3) \quad (22)$$

on voimassa jos ja vain jos piste  $z_2 \in \gamma$ .

*Todistus.* Todistus on analoginen lauseen 2.18 todistuksen kanssa.  $\square$

Lauseen 2.23 nojalla hyperbolinen etäisyys yksikkökiekossa lasketaan yksinkertaisesti kuvaamalla pisteet ylempään puolitasoon ja käyttämällä sitten hyväksi esimerkkejä 2 ja 4.

**Esimerkki 11.** *Selvitetään hyperbolinen etäisyys  $\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$ , kun  $z_1 = -0,75 + i0,5$  ja  $z_2 = 0,5 - i0,25$ .*

*Kuvataan aluksi esimerkin 6 Möbius-kuvauksen  $m$  avulla pisteet ylempälle puolitasolle. Suoralla sijoituksella saadaan*

$$m(z_1) = \frac{8}{15} + i\frac{1}{15} \text{ ja } m(z_2) = -\frac{16}{13} + i\frac{11}{13}.$$

*Näiden pisteiden välinen hyperbolinen geodeesi on euklidinen ympyrä, joten jatketaan kuten esimerkissä 4. Helpolla laskulla selvitetään, että ympyrän keskipiste  $c = \frac{71}{129}$  ja säteen euklidinen pituus on  $\frac{\sqrt{19618}}{129}$ . Niinpä etsitty hyperbolinen etäisyys yksikkökiekossa on*

$$\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \rho(m(z_1), m(z_2)) = \ln \left[ \frac{1121 + 8\sqrt{19618}}{33} \right] \approx 4,22.$$

**Esimerkki 12.** *Olkoon  $0 < r < 1$  ja  $\theta \in \mathbb{R}$ . Lasketaan hyperbolinen etäisyys  $\rho_{\mathbb{D}}(0, re^{i\theta})$  ja ilmaistaan tekijä  $r$  hyperbolisen etäisyyden funktiona.*

*Yksikkökiekon pisteitä yhdistävän geodeesin jatkeet leikkaavat yksikköympyrän kohtisuorasti, joten pisteitä  $0$  ja  $re^{i\theta}$  yhdistävän geodeesin täytyy olla euklidinen jana. Tällaista janaa vastaava käyrä määritellään ehdolla  $f(t) = te^{i\theta}$ , missä  $0 < t < r$ . Niinpä  $\rho_{\mathbb{D}}(0, re^{i\theta}) = \|f\|_{\mathbb{D}}$ , joten esimerkin 10 nojalla  $\rho_{\mathbb{D}}(0, re^{i\theta}) = \ln \left[ \frac{1+r}{1-r} \right]$ .*

*Toisaalta funktioteorian perusteiden mukaan  $\operatorname{artanh}(z) = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1+z}{1-z} \right]$ , kun  $|z| < 1$ . Tämän nojalla  $r = \tanh \left[ \frac{\rho_{\mathbb{D}}(0, re^{i\theta})}{2} \right]$ .*

Lauseen 2.23 yhtäsuuruudet mahdollistavat myös yksikkökiekon hyperbolisen geodeesin hyperbolisen keskipisteen selvittämisen. Jos  $m$  on Möbius-kuvaus yksikkökiekosta ylempälle puolitasolle ja pisteet  $z_1$  ja  $z_2$  kuuluvat

joukkoon  $\mathbb{D}$ , niin hyperbolinen keskipiste yksikkökiekossa selvitetään etsimällä ensin ylemmän puolitason pisteiden  $m(z_1)$  ja  $m(z_2)$  välisen hyperbolisen geodeesin hyperbolinen keskipiste ja kuvaamalla sitten ko. piste takaisin yksikkökiekkoon kuvauksella  $m^{-1}$ .

**Esimerkki 13.** *Selvitetään esimerkin 11 pisteitä  $z_1 = -0,75 + i0,5$  ja  $z_2 = 0,5 - i0,25$  yhdistävän hyperbolisen geodeesin hyperbolinen keskipiste  $K$ .*

*Olkoon  $m$  jälleen esimerkissä 6 esitetty Möbius-kuvaus. Muodostetaan ensin esimerkin 8 mukaisesti kuvaus  $\xi$ . Tarvittavat pisteet ovat  $m(z_1) = \frac{8}{15} + i\frac{1}{15}$ ,  $m(z_2) = -\frac{16}{13} + i\frac{11}{13}$ ,  $m(z_1)^* = \frac{-71+\sqrt{19618}}{129}$  ja  $m(z_2)^* = \frac{-71-\sqrt{19618}}{129}$ . Suoraviivaisella laskulla saadaan yhtälöt*

$$\xi(z) = \frac{-16641z - 129(71 + \sqrt{19618})}{258\sqrt{19168}z - 2\sqrt{19618}(-71 + \sqrt{19618})}$$

*ja*

$$\xi^{-1}(z) = \frac{-2\sqrt{19618}(-71 + \sqrt{19618})z + 129(71 + \sqrt{19618})}{-258\sqrt{19618}z - 16641}.$$

*Nyt haluttu keskipiste on*

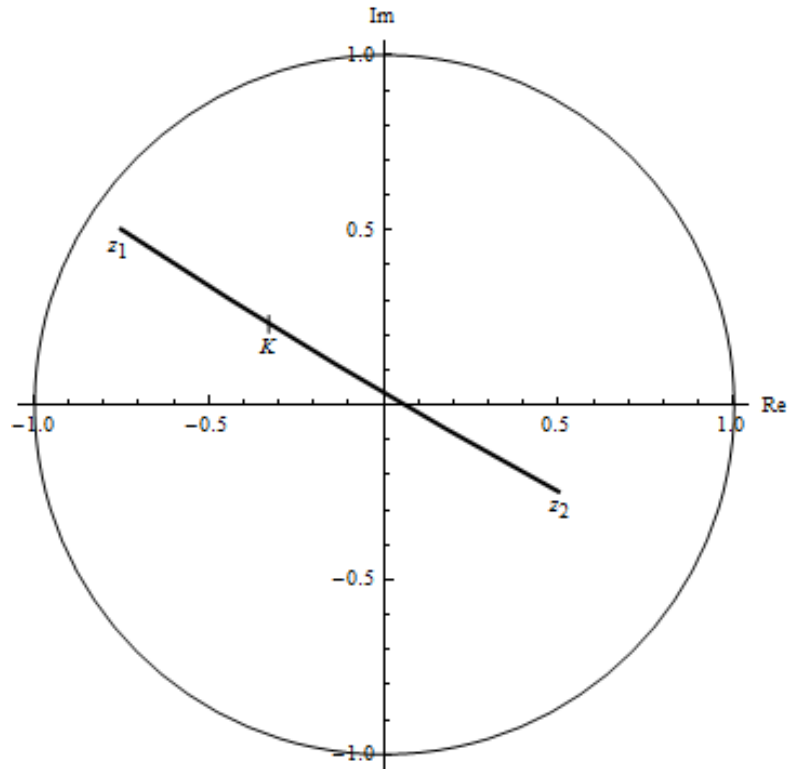
$$\begin{aligned} K &= m^{-1}\left(\xi^{-1}\left(i\sqrt{\operatorname{Im}(\xi(m(z_1)))\operatorname{Im}(\xi(m(z_2)))}\right)\right) \\ &= \frac{-191 + \sqrt{19041}}{4360}(27 - i19) \\ &\approx -0,328 + i0,231. \end{aligned}$$

**Esimerkki 14.** *Olkoon  $0 < r < 1$  ja  $\theta \in \mathbb{R}$ . Etsitään esimerkin 12 pisteitä  $z_1 = 0$  ja  $z_2 = re^{i\theta}$  yhdistävän hyperbolisen geodeesin hyperbolinen keskipiste  $K$ .*

*Toimimalla kuten edellä esimerkissä 13 saadaan suoraviivaisilla sijoituksilla vastaukseksi*

$$K = \frac{1 - \sqrt{1 - r^2}}{r}e^{i\theta}.$$

Tarkastellaan kappaleen lopuksi lyhyesti millaiset kuvaukset säilyttävät hyperbolisen etäisyyden yksikkökiekossa.



Kuva 5: Pisteitä  $z_1 = -0,75 + i0,5$  ja  $z_2 = 0,5 - i0,25$  yhdistävä hyperbolinen geodeesi sekä sen hyperbolinen keskipiste  $K = \frac{-191 + \sqrt{19041}}{4360} (27 - i19)$ .

**Määritelmä 2.28.** Olkoon joukko  $\text{Möb}(\mathbb{D})$  Möbius-kuvausten perhe, joka määritellään ehdolla

$$\text{Möb}(\mathbb{D}) = \{m \in \text{Möb} \mid m(\mathbb{D}) = \mathbb{D}\}. \quad (23)$$

**Esimerkki 15.** Oletetaan, että  $z_1 = re^{i\theta}$  ja että  $z_1 \in \mathbb{D}$ . Määritellään kuvaus  $m_{z_1}$  ehdolla

$$m_{z_1}(z) = e^{-i\theta} \frac{z - z_1}{-\bar{z}_1 z + 1}.$$

Olkoon  $l$  euklidinen suora, joka kulkee pisteiden  $0$  ja  $z_1$  kautta. Helpoilla laskuilla havaitaan, että  $m_{z_1} \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ ,  $m_{z_1}(z_1) = 0$  ja  $m_{z_1}(l) = \mathbb{R}$ . Tätä Möbius-kuvausta kutsutaan joskus kalvon venyttäjäksi.

**Lause 2.29.** Olkoot  $z_1$  ja  $z_2$  pisteitä yksikkökiekossa. Jos Möbius-kuvaus  $n \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ , niin  $\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \rho_{\mathbb{D}}(n(z_1), n(z_2))$ .

*Todistus.* Olkoon  $n \in \text{Möb}(\mathbb{D})$  ja  $m$  Möbius-kuvaus, joka kuvaa yksikkökiekon ylemmälle puolitasolle. Nyt yhdistetty kuvaus  $m \circ n \circ m^{-1}$  kuuluu selvästi perheeseen  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , joten lauseen 2.17 mukaan se säilyttää hyperbolisen etäisyyden ylemmässä puolitasossa. Toisaalta lauseen 2.23 nojalla myös kuvaukset  $m$  ja  $m^{-1}$  säilyttävät hyperboliset etäisyydet. Siispä kuvauksen on  $n$  säilytettävä etäisyys yksikkökiekossa, mikä todistaa väitteen.  $\square$

## 2.4 Hyperboliset ympyrät

Tutkitaan luvun lopuksi lyhyesti hyperbolisten ympyröiden ominaisuuksia. Esitetään aluksi määritelmä hyperboliselle ympyrälle yksikkökiekossa.

**Määritelmä 2.30.** Hyperbolinen ympyrä yksikkökiekossa on joukko, joka määritellään ehdolla

$$C = \{z \in \mathbb{D} \mid \rho_{\mathbb{D}}(c, z) = s\}, \quad (24)$$

missä  $c \in \mathbb{D}$  ja  $s > 0$  ovat vakioita. Vakiota  $c$  kutsutaan hyperboliseksi keskipisteeksi ja vakiota  $s$  hyperboliseksi säteeksi.

Tarkastellaan seuraavaksi hyperbolisten ja euklidisten ympyröiden vastaavuutta.

**Lause 2.31.** *Hyperbolinen ympyrä yksikkökiekossa on aina myös euklidinen ympyrä yksikkökiekossa sekä päinvastoin.*

*Todistus.* Olkoon  $C$  hyperbolinen ympyrä yksikkökiekossa. Oletetaan, että ympyrän  $C$  hyperbolinen keskipiste on  $c \in \mathbb{D}$  ja hyperbolinen säde on  $s > 0$ .

Todistetaan lause aluksi tapauksessa  $c = 0$ . Olkoon  $r = \tanh\left[\frac{s}{2}\right]$ , jolloin esimerkin 12 nojalla  $s = \rho_{\mathbb{D}}(0, re^{i\theta})$ . Nyt origokeskinen ja  $r$ -säteinen euklidinen ympyrä on hyperbolinen ympyrä, jonka hyperbolinen keskipiste on origo ja hyperbolinen säde on  $s$ .

Siirrytään sitten tarkastelemaan tapausta, jossa hyperbolinen keskipiste ja säde ovat mielivaltaisia. Oletetaan, että kuvaus  $m \in \text{Möb}(\mathbb{D})$  toteuttaa ehdon  $m(c) = 0$ . Nyt lauseesta 2.29 seuraa, että  $m(C)$  on origokeskinen hyperbolinen ympyrä, jonka hyperbolinen säde on  $s$ . Aikaisemman tarkastelun

mukaan  $m(C)$  on euklidinen ympyrä, joten Möbius-kuvausten perusominaisuuksien nojalla hyperbolisen ympyrän  $C = m^{-1} \circ m(C)$  täytyy olla myös euklidinen ympyrä.

Toisaalta olkoon  $Y$  euklidinen ympyrä yksikkökiekossa. Jos  $Y$  on origokeskinen, niin todistuksen alussa esitetyn tarkastelun nojalla se on myös hyperbolinen ympyrä. Oletetaan sitten, että ympyrän  $Y$  euklidinen keskipiste  $k$  ei ole origo ja että  $l$  on euklidinen suora, joka kulkee pisteiden  $k$  ja  $0$  kautta. Olkoon  $j$  ympyrän  $Y$  halkaisija, jolla on ominaisuus  $j \in l$ . Seurauksen 2.24 nojalla  $j$  on myös hyperbolinen geodeesi. Olkoon  $K$  hyperbolisen geodeesin  $j$  hyperbolinen keskipiste ja  $\alpha \geq 0$  positiivisen reaaliakselin ja suoran  $l$  välinen kulma. Kun Möbius-kuvaus  $m_K$  määritellään kuten esimerkissä 15, niin  $m_K \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ ,  $m_K(K) = 0$  ja  $m_K(l) = \mathbb{R}$ . Koska perheen  $\text{Möb}(\mathbb{D})$  kuvaukset säilyttävät hyperbolisen etäisyyden yksikkökiekossa ja koska etäisyys  $\rho_{\mathbb{D}}(0, re^{i\theta})$  ei riipu kulmasta  $\theta$ , niin  $m_K$  vie joukon  $j \cap Y$  pisteet reaaliakselille symmetrisesti kohtiin  $-a$  ja  $a$ . Siispä Möbius-kuvausten perusominaisuuksien nojalla  $m_K(Y)$  on euklidinen ympyrä, joka leikkaa reaaliakselin kohtisuorasti pisteissä  $-a$  ja  $a$ . Nyt euklidisen geometrian perusteiden mukaan  $m_K(Y)$  on origokeskinen, joten jälleen todistuksen alun tarkastelun nojalla  $m_K(Y)$  on hyperbolinen ympyrä. Lopulta lauseen 2.29 nojalla saadaan, että myös  $Y = m_K^{-1} \circ m_K(Y)$  on hyperbolinen ympyrä.  $\square$

**Lause 2.32.** *Olkoon  $C$  hyperbolinen ympyrä yksikkökiekossa. Oletetaan, että ympyrän  $C$  hyperbolinen keskipiste  $c$  on origo ja hyperbolinen säde  $s > 0$ . Nyt ympyrän kehän hyperbolinen pituus yksikkökiekossa on*

$$\|C\|_{\mathbb{D}} = 2\pi \sinh(s). \quad (25)$$

*Todistus.* Olkoon  $C$  hyperbolinen ympyrä yksikkökiekossa. Oletetaan, että ympyrän  $C$  hyperbolinen keskipiste  $c$  on origo ja hyperbolinen säde  $s > 0$ . Nyt lauseen 2.31 todistuksen nojalla  $C$  on euklidinen ympyrä, jonka euklidinen säde  $r = \tanh\left(\frac{1}{2}s\right)$ . Lisäksi funktioteorian perusteista tiedetään, että origokeskistä  $r$ -säteistä euklidistä ympyrää vastaava käyrä on  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{D}$ , missä  $f(z) = re^{iz}$ . Nyt lauseen 2.21 nojalla saadaan

$$\|C\|_{\mathbb{D}} = \|f\|_{\mathbb{D}} = \int_f \frac{2}{1-|z|^2} |dz| = \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1-r^2} dz = \frac{4\pi r}{1-r^2}.$$

Koska  $r = \tanh\left(\frac{1}{2}s\right)$ , niin hyperbolisia identiteettejä hyväksikäyttäen saadaan lopulta

$$\|C\|_{\mathbb{D}} = \frac{4\pi \tanh\left[\frac{s}{2}\right]}{1 - \tanh^2\left[\frac{s}{2}\right]} = 2\pi \sinh(s).$$

□

Olkoon  $C$  hyperbolinen ympyrä yksikkökiekossa ja  $m$  Möbius-kuvaus, joka toteuttaa ehdon  $m(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$ . Koska hyperboliset ympyrät ovat myös euklidisia ympyröitä ja koska lauseen 2.23 nojalla  $m$  säilyttää hyperbolisen etäisyyden, niin Möbius-kuvausten perusominaisuuksien mukaan myös  $m(C)$  on sekä hyperbolinen että euklidinen ympyrä. Hyperboliset ympyrät voidaan siis yleistää ylempään puolitasoon yksinkertaisesti kuvaamalla hyperbolinen ympyrä yksikkökiekossa kuvauksen  $m$  avulla ylempään puolitasoon.

**Lause 2.33.** *Olkoon  $Y$  euklidinen ympyrä ylempässä puolitasossa. Jos ympyrän  $Y$  euklidinen keskipiste on  $a+ib$  ja säde  $r$ , niin ympyrän  $Y$  hyperbolinen keskipiste  $c = a + i\sqrt{b^2 - r^2}$  ja hyperbolinen säde  $s = \frac{1}{2} \ln\left[\frac{b+r}{b-r}\right]$ .*

*Todistus.* Olkoon  $Y$  euklidinen ympyrä ylempässä puolitasossa. Oletetaan, että ympyrän  $Y$  euklidinen keskipiste on  $a + ib$  ja säde  $r$ .

Koska imaginaariakselin suuntaiset euklidiset janat ovat myös hyperbolisia geodeesejä, niin hyperbolinen säde on helpointa selvittää ratkaisemalla ensin pisteiden  $a + i(b + r)$  ja  $a + i(b - r)$  välinen hyperbolinen etäisyys. Esimerkin 2 mukaisesti  $\rho(a + i(b + r), a + i(b - r)) = \ln\left[\frac{b+r}{b-r}\right]$ . Siispä ympyrän  $Y$  hyperbolinen säde  $s = \frac{1}{2} \ln\left[\frac{b+r}{b-r}\right]$ . Käyttämällä lopuksi hyväksi esimerkkiä 5 saadaan ympyrän hyperboliseksi keskipisteeksi  $c = a + i\sqrt{(b+r)(b-r)} = a + i\sqrt{b^2 - r^2}$ . □

Hyperbolisia ympyröitä koskevien tulosten avulla voidaan myös todistaa seuraava hyperbolisen keskipisteen geometrista konstruktiota koskeva lause.

**Lause 2.34.** *Olkoot  $z_1 = x_1 + iy_1$  ja  $z_2 = x_2 + iy_2$  ylempään puolitasoon pisteitä, joilla on ominaisuus  $x_1 > x_2$ . Oletetaan, että ko. pisteitä yhdistävän hyperbolisen geodeesin jatkeet leikkaavat reaaliakselin pisteissä  $z_1^*$  ja  $z_2^*$ . Merkitään pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävän geodeesin hyperbolista keskipistettä kirjaimella  $K$ . Jos  $l_t$  on pisteiden  $z_t$  ja  $z_t^*$  kautta kulkeva suora ja  $l_1 \cap l_2 = \{v\}$ , niin  $\operatorname{Re}(v) = \operatorname{Re}(K)$ .*



*Todistus.* Olkoot  $z_1 = x_1 + iy_1$  ja  $z_2 = x_2 + iy_2$  ylempään puolitasoon pisteitä, joilla on ominaisuus  $x_1 > x_2$ . Oletetaan, että ko. pisteitä yhdistävän hyperbolisen geodeesin jatkeet leikkaavat reaaliakselin pisteissä  $z_1^*$  ja  $z_2^*$ . Kun  $l_t$  on pisteiden  $z_t$  ja  $z_t^*$  kautta kulkeva suora, niin selvästi leikkaukseen  $l_1 \cap l_2 = \{v\}$  kuuluu täsmälleen yksi piste. Merkitään pisteiden  $z_1, z_2, z_1^*$  ja  $z_2^*$  kautta kulkevan ympyrän euklidista keskipistettä symbolilla  $c_1$  ja pisteiden  $z_1, z_2$  ja  $v$  kautta käyvän ympyrän  $Y$  euklidista keskipistettä symbolilla  $c_2$ .

Todistetaan ensin, että edellä mainitut ympyrät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Koska euklidiset kolmiot  $c_1 z_1 z_2$  ja  $c_2 z_1 z_2$  ovat kumpikin tasakylkisiä ja ne jakavat kannan, niin selvästi riittää todistaa, että  $\angle c_1 z_2 c_2 + \angle c_2 z_1 c_1 = \pi$ . Käyttämällä hyväksi euklidisen geometrian perusteita saadaan  $\angle z_1 c_1 z_2 = 2\angle c_1 z_2^* z_2 + 2\angle z_1 z_1^* c_1 - \pi$  ja  $\angle z_2 c_2 z_1 = 2\pi - 2\angle c_1 z_2^* z_2 - 2\angle z_1 z_1^* c_1$ . Nyt  $\angle c_1 z_2 c_2 + \angle c_2 z_1 c_1 = 2\pi - \angle z_1 c_1 z_2 - \angle z_2 c_2 z_1 = \pi$ .

Oletetaan, että jana  $[v, \operatorname{Re}(v)]$  leikkaa ympyrän  $Y$  myös pisteessä  $s$ . Euklidisen geometrian menetelmillä saadaan helposti selville, että pisteiden  $v$  ja  $c_2$  kautta kulkeva suora leikkaa reaaliakselin kohtisuorasti. Näin ollen jana  $[v, s]$  on ympyrän halkaisija. Koska euklidiset ympyrät ovat myös hyperbolisia ympyröitä ja jana  $[v, s]$  on hyperbolinen geodeesi, niin ympyrän  $Y$  hyperbolinen keskipiste on janalla  $[v, s]$ .

Olkoon sitten  $\xi$  lauseen 2.15 todistuksessa konstruoitu Möbius-kuvaus ja  $\gamma$  pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävä hyperbolinen geodeesi. Merkitään  $\{u\} = \gamma \cap [v, s]$ . Nyt  $\xi$  kuvaa geodeesin  $\gamma$  janaksi imaginaariakselille. Toisaalta piste  $v$  selvästi kuuluu ylempään puolitasoon, muttei geodeesille  $\gamma$ . Siispä Möbius-kuvausten ominaisuuksien nojalla ympyrä  $Y$  kuvautuu ympyräksi, joka leikkaa imaginaariakselin kohtisuorasti pisteissä  $\xi(z_1)$  ja  $\xi(z_2)$ . Lisäksi imaginaariakselin suuntainen jana  $[v, s]$  kuvautuu ympyrän kaarta vastaavaksi geodeesiksi, joka leikkaa janan  $\xi(\gamma)$ . Jana  $[\xi(z_1), \xi(z_2)]$  on hyperbolinen geodeesi, joten nyt ympyrän  $\xi(Y)$  hyperbolinen keskipiste on  $\xi(K)$ , missä  $K$  on geodeesin  $\gamma$  hyperbolinen keskipiste. Ympyrän hyperbolisen keskipisteen yksikäsitteisyyden nojalla  $\xi(u) = \xi(K)$ , joten  $\operatorname{Re}(v) = \operatorname{Re}(K)$ .

Vaihtoehtoinen todistus on esitetty käsikirjoituksessa [13]. □



## 3 Hyperbolinen ala ja trigonometria

### 3.1 Hyperboliset kolmiot

Tarkastellaan luvun aluksi hyperbolisia kolmioita.

**Määritelmä 3.1.** Olkoot  $A$ ,  $B$  ja  $C$  hyperbolisen tason pisteitä, jotka eivät ole samalla hyperbolisella geodeesilla. Oletetaan, että  $\gamma_{AB}$ ,  $\gamma_{BC}$  ja  $\gamma_{AC}$  ovat näitä pisteitä yhdistävät hyperboliset geodeesit. Nyt hyperbolinen kolmio  $ABC$  muodostuu kärkipisteistä  $A$ ,  $B$  ja  $C$  sekä sivuista  $\gamma_{AB}$ ,  $\gamma_{BC}$  ja  $\gamma_{AC}$ .

**Lause 3.2.** *Olkoon  $ABC$  hyperbolinen kolmio. Jos Möbius-kuvaus  $m$  kuvaa yksikkökierokkeen ylemmälle puolitasolle tai jos se kuuluu perheeseen  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  tai  $\text{Möb}(\mathbb{D})$ , niin  $m(ABC)$  ja  $m^{-1}(ABC)$  ovat myös hyperbolisia kolmioita ja ne ovat yhteneviä hyperbolisen kolmion  $ABC$  kanssa.*

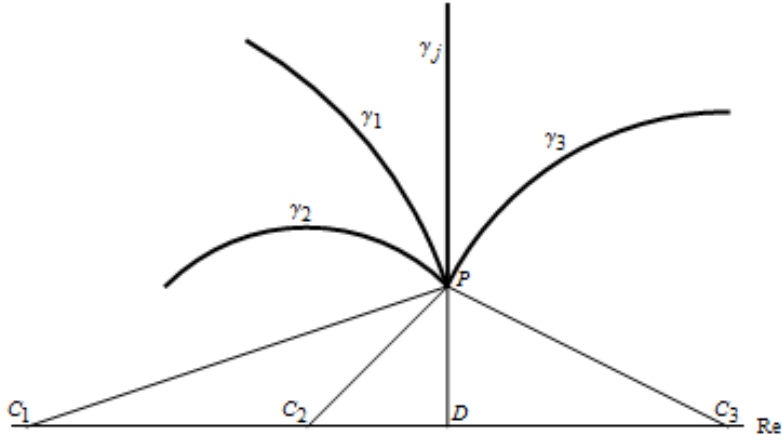
*Todistus.* Lause seuraa suoraan Möbius-kuvausten perusominaisuuksista sekä lauseista 2.17, 2.23 ja 2.29.  $\square$

**Määritelmä 3.3.** Olkoon  $P$  piste hyperbolisessa tasossa. Oletetaan, että  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  ovat hyperbolisia geodeeseja, joiden toinen päätepiste on  $P$ . Nyt geodeesien  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  välistä kulmaa pisteessä  $P$  merkitään symbolilla  $\angle(\gamma_1, \gamma_2)$ , missä  $\gamma_1$  on kulman oikea kylki.

Esitetään lause, joka tarjoaa keinon hyperbolisten geodeesien välisten kulmien selvittämiseen.

**Lause 3.4.** *Olkoon  $P = D + iy$  piste ylemmässä puolitasossa, ja olkoot  $\gamma_j$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  sekä  $\gamma_3$  hyperbolisia geodeeseja, joiden toinen päätepiste on  $P$ . Oletetaan, että  $\gamma_j$  vastaa euklidista janaa ja että  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  sekä  $\gamma_3$  vastaavat ympyröiden kaaria kuten kuvassa 6. Jos ko. ympyröiden keskipisteet ovat  $C_1$ ,  $C_2$  ja  $C_3$  ja ne toteuttavat ehdon  $C_1 < C_2 < D < C_3$ , niin seuraavat yhtäsuuruudet ovat voimassa:*

$$\begin{aligned}\angle(\gamma_j, \gamma_1) &= \angle DC_1P, \\ \angle(\gamma_1, \gamma_2) &= \angle C_1PC_2 \\ &\text{ja} \\ \angle(\gamma_3, \gamma_1) &= \pi - \angle C_1PC_3.\end{aligned}\tag{26}$$



Kuva 6: Geodeesit  $\gamma_j$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  ja  $\gamma_3$  sekä pisteet  $P$ ,  $D$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  ja  $C_3$ .

*Todistus.* Olkoon  $P = D + iy$  piste ylemmässä puolitasossa, ja olkoot  $\gamma_j$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  sekä  $\gamma_3$  hyperbolisia geodeeseja, joiden toinen päätepiste on  $P$ . Oletetaan, että  $\gamma_j$  vastaa euklidista janaa ja että  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  sekä  $\gamma_3$  vastaavat euklidisten ympyröiden kaaria. Näiden ympyröiden keskipisteet ovat  $C_1$ ,  $C_2$  ja  $C_3$  ja ne toteuttavat ehdon  $C_1 < C_2 < D < C_3$ .

Valitaan geodeesilta  $\gamma_j$  piste  $D'$ , jolla on ominaisuus  $Im(D') > Im(P)$ . Olkoot  $t_1$  ja  $t_2$  euklidisia tangentteja geodeeseille  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  pisteessä  $P$ . Oletetaan, että piste  $T_k \in t_k$  ja että  $Re(T_k) < D$  kummallakin indeksin  $k$  arvolla. Koska ympyrän tangentti on kohtisuorassa ympyrän sädettä vastaan ja euklidisen kolmion kulmien summa on  $\pi$  radiaania, niin saadaan

$$\angle(\gamma_j, \gamma_1) = \angle D'PT_1 = \pi - \angle T_1PC_1 - \angle C_1PD = \frac{\pi}{2} - \angle C_1PD = \angle DC_1P.$$

Käyttämällä vastaavasti hyväksi euklidisen geometrian perustuloksia saadaan

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \angle T_1PT_2 = \angle T_1PC_1 - \angle T_2PC_1 = \angle T_2PC_2 - \angle T_2PC_1 = \angle C_1PC_2,$$

ja lauseen ensimmäisen yhtäsuuruuden mukaan

$$\angle(\gamma_3, \gamma_1) = \angle(\gamma_3, \gamma_j) + \angle(\gamma_j, \gamma_1) = \angle PC_3D + \angle DC_1P = \pi - \angle C_1PC_3.$$

□

Tarkastellaan sitten, kuinka hyperbolisen kolmion kulmat voidaan selvittää edeltävän lauseen avulla.

**Esimerkki 16.** *Olkoon  $ABC$  hyperbolinen kolmio ylemmässä puolitasossa, ja olkoot sen kärkipisteet  $A = -1 + i$ ,  $B = 1 + i2$  ja  $C = 4 + i4$ . Selvitetään nyt tämän hyperbolisen kolmion kulmat.*

*Pisteitä yhdistävät hyperboliset geodeesit  $\gamma_{AB}$ ,  $\gamma_{BC}$  ja  $\gamma_{AC}$  ovat selvästi kaikki ympyröiden kaaria. Näiden ympyröiden euklidiset keskipisteet ovat  $C_{AB} = \frac{3}{4}$ ,  $C_{BC} = \frac{9}{2}$  ja  $C_{AC} = 3$  ja säteet  $r_{AB} = \frac{\sqrt{65}}{4}$ ,  $r_{BC} = \frac{\sqrt{65}}{2}$  ja  $r_{AC} = \sqrt{17}$ . Nyt lausetta 3.4 ja euklidista trigonometriaa käyttäen saadaan*

$$\begin{aligned}\angle(\gamma_{AB}, \gamma_{AC}) &= \angle C_{AB}AC_{AC} = \arccos \left[ \frac{r_{AB}^2 + r_{AC}^2 - (C_{AC} - C_{AB})^2}{2r_{AB}r_{AC}} \right] \\ &= \arccos \left[ \frac{32}{\sqrt{1105}} \right] \approx 15,7^\circ.\end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned}\angle(\gamma_{AC}, \gamma_{BC}) &= \angle C_{AC}CC_{BC} = \arccos \left[ \frac{r_{AC}^2 + r_{BC}^2 - (C_{BC} - C_{AC})^2}{2r_{AC}r_{BC}} \right] \\ &= \arccos \left[ \frac{31}{\sqrt{1105}} \right] \approx 21,2^\circ.\end{aligned}$$

Lopuksi viimeinen kulma on

$$\begin{aligned}\angle(\gamma_{BC}, \gamma_{AB}) &= \pi - \angle C_{AB}BC_{BC} \\ &= \pi - \arccos \left[ \frac{r_{AB}^2 + r_{BC}^2 - (C_{BC} - C_{AB})^2}{2r_{AB}r_{BC}} \right] \\ &= \pi - \arccos \left[ \frac{5}{13} \right] \approx 113^\circ.\end{aligned}$$

**Esimerkki 17.** *Olkoon  $ABC$  hyperbolinen kolmio yksikkökiekossa, ja olkoot sen kärkipisteet  $A = -0,5 + i0,5$ ,  $B = 0,5 + i0,2$  ja  $C = 0,4$ . Selvitetään nyt hyperbolisen kolmion kulmat.*

*Olkoon  $m$  esimerkissä 6 esitetty Möbius-kuvaus. Nyt hyperbolisen kolmion  $m(ABC)$  kärkipisteet ovat  $m(A) = \frac{2}{5} + i\frac{1}{5}$ ,  $m(B) = -\frac{100}{169} + i\frac{71}{169}$  ja  $m(C) =$*

$-\frac{20}{29} + i\frac{21}{29}$ . Toimitaan sitten kuten edellä esimerkissä 16 ja suoraviivaisten sijoitusten avulla saadaan vastauksiksi

$$\angle(\gamma_{AB}, \gamma_{BC}) = \angle(\gamma_{m(A)m(B)}, \gamma_{m(B)m(C)}) = \pi - \arccos\left[-\frac{3031}{17\sqrt{110090}}\right] \approx 57,5^\circ,$$

$$\angle(\gamma_{AC}, \gamma_{AB}) = \angle(\gamma_{m(A)m(C)}, \gamma_{m(A)m(B)}) = \arccos\left[\frac{7831}{17\sqrt{213749}}\right] \approx 4,89^\circ$$

ja

$$\angle(\gamma_{BC}, \gamma_{AC}) = \angle(\gamma_{m(B)m(C)}, \gamma_{m(A)m(C)}) = \arccos\left[-\frac{31}{\sqrt{1980610}}\right] \approx 91,3^\circ.$$

Edellisissä esimerkeissä hyperbolisen kolmion kulmien summa on alle  $\pi$  radiaania. Seuraavassa kappaleessa todistetaan, että tämä pätee yleisesti kaikille hyperbolisille kolmioille.

## 3.2 Hyperbolinen ala

Tarkastellaan seuraavaksi hyperbolista alaa.

**Määritelmä 3.5.** Olkoon  $X \subset \mathbb{H}$ . Nyt joukon  $X$  hyperbolinen ala  $A(X)$  määritellään lausekkeella

$$A(X) = \int_X \frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2} dx dy = \int_X \frac{1}{y^2} dx dy, \quad (27)$$

missä  $z = x + iy$ .

**Esimerkki 18.** Lasketaan alueen

$$X = \{z \in \mathbb{H} \mid a < \operatorname{Re}(z) < b \text{ ja } \operatorname{Im}(z) > c \geq 0\}$$

hyperbolinen ala. Suoralla sijoituksella saadaan

$$A(X) = \int_X \frac{1}{y^2} dx dy = \int_c^\infty \int_a^b \frac{1}{y^2} dx dy = \frac{b-a}{c}.$$

**Lause 3.6.** Olkoon  $m \in \operatorname{Möb}(\mathbb{H})$  ja  $X \subset \mathbb{H}$ . Nyt  $A(X) = A(m(X))$ .

*Todistus.* Olkoon  $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ ,  $h(x, y) = \frac{1}{y^2}$  ja  $X \subset \mathbb{H}$ . Esitetään ensin kuvauksen  $m$  yhtälö kahden muuttujan funktiona. Lauseen 2.14 nojalla  $m$  on muotoa

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

missä tekijät  $a, b, c$  sekä  $d$  ovat reaalilukuja ja diskriminantti  $ad - bc > 0$ . Kun  $z = x + iy$ , niin

$$m(z) = \frac{acy^2 + acx^2 + bd + bcx + adx}{c^2y^2 + (d + cx)^2} + i \frac{(ad - bc)y}{c^2y^2 + (d + cx)^2}.$$

Näin ollen

$$m(x, y) = \left( \frac{acy^2 + acx^2 + bd + bcx + adx}{c^2y^2 + (d + cx)^2}, \frac{(ad - bc)y}{c^2y^2 + (d + cx)^2} \right).$$

Suoralla laskulla kuvauksen  $m(x, y)$  Jacobin determinantiksi  $\det(J(m(x, y)))$  saadaan

$$\det(J(m(x, y))) = \frac{(ad - bc)^2}{(c^2y^2 + (d + cx)^2)^2}.$$

Koska funktio  $h(x, y)$  on jatkuva sekä reaaliarvoinen ylemmässä puolitasossa, Möbius-kuvaukset ovat holomorfinen bijektioita ja  $\det(J(m(x, y))) \neq 0$ , niin nyt voidaan käyttää hyväksi usean muuttujan funktioiden teoriasta tuttua muuttujanvaihtolausetta. Tämän lauseen mukaan

$$\begin{aligned} A(m(X)) &= \int_{m(X)} h(x, y) dx dy = \int_X (h \circ m)(x, y) |\det(J(m(x, y)))| dx dy \\ &= \int_X \frac{(c^2y^2 + (d + cx)^2)^2 (ad - bc)^2}{(ad - bc)^2 y^2 (c^2y^2 + (d + cx)^2)^2} dx dy \\ &= \int_X \frac{1}{y^2} dx dy = A(X), \end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen. □

Hyperbolinen ala voidaan määritellä myös yksikkökiekossa.

**Määritelmä 3.7.** Olkoon  $X \subset \mathbb{D}$  ja  $m$  Möbius-kuvaus, joka kuvaa yksikkökiekon ylemmälle puolitasolle. Nyt joukon  $X$  hyperbolinen ala yksikkökiekossa on

$$A_{\mathbb{D}}(X) = A(m(X)). \quad (28)$$

**Lause 3.8.** Olkoon  $X \subset \mathbb{D}$ . Joukon  $X$  hyperbolinen ala yksikkökiekossa on hyvinmääritelty.

*Todistus.* Todistus on analoginen lauseen 2.20 todistuksen kanssa.  $\square$

**Lause 3.9.** Olkoon  $X \subset \mathbb{D}$ . Sen hyperbolinen ala saadaan laskemalla integraali

$$A_{\mathbb{D}}(X) = \int_X \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} dx dy \quad (29)$$

*Todistus.* Olkoon  $X \subset \mathbb{D}$ ,  $h(x, y) = \frac{1}{y^2}$  ja  $m(z)$  esimerkissä 6 esitetty Möbius-kuvaus. Toimitaan kuten lauseen 3.6 todistuksessa ja selvitetään Jacobin determinantti  $\det(J(m(x, y)))$ . Ensinnäkin

$$m(x, y) = \left( \frac{-2x}{x^2 + (1 + y)^2}, \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (1 + y)^2} \right),$$

joten Jacobin determinantti on

$$\det(J(m(x, y))) = \frac{4}{(x^2 + (1 + y)^2)^2}.$$

Koska funktio  $h(x, y)$  on jatkuva sekä reaaliarvoinen ylemmässä puolitasossa, Möbius-kuvaukset ovat holomorfin bijektioita ja  $\det(J(m(x, y))) \neq 0$ , niin nyt voidaan käyttää jälleen hyväksi usean muuttujan funktioiden teoriasta tuttua muuttujanvaihtolausetta. Suoralla sijoituksella saadaan

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{D}}(X) &= A(m(X)) = \int_{m(X)} h(x, y) dx dy \\ &= \int_X (h \circ m)(x, y) |\det(J(m(x, y)))| dx dy \\ &= \int_X \frac{(x^2 + (1 + y)^2)^2 4}{(1 - x^2 - y^2)^2 (x^2 + (1 + y)^2)^2} dx dy \\ &= \int_X \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} dx dy. \end{aligned}$$

$\square$

**Esimerkki 19.** Olkoon  $0 < a < 1$ . Lasketaan käyrän

$$\left( f : \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right] \rightarrow \mathbb{D} \right) : f(t) = ae^{i\theta}$$



ja euklidisten janojen  $[0, ae^{i\frac{\pi}{4}}]$  ja  $[0, ae^{i\frac{7\pi}{4}}]$  rajoittaman alueen hyperbolinen ala yksikkökiekossa. Integroinnin helpottamiseksi käytetään napakoordinaatteja, jolloin lauseen 3.9 integraali saa muodon

$$A_{\mathbb{D}}(X) = \int_X \frac{4r}{(1-r^2)^2} drd\theta.$$

Nyt haluttu hyperbolinen ala on

$$A_{\mathbb{D}}(X) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int_0^a \frac{4r}{(1-r^2)^2} drd\theta = \frac{3\pi a^2}{a^2-1}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi hyperbolisen kolmion alaa. Esitetään aluksi hyödyllinen lemma.

**Lemma 3.1.** *Olkoot  $z_1$  ja  $z_2$  ylemmän puolitasan pisteitä, joilla on ominaisuus  $\operatorname{Re}(z_1) > \operatorname{Re}(z_2)$ . Määritellään joukko  $X$  ehdolla*

$$X = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z_2) < \operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z_1) \text{ ja } \operatorname{Im}(z) > \operatorname{Im}(\gamma)\},$$

missä  $\gamma$  on pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävä hyperbolinen geodeesi. Kun suora  $l_k = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z_k)\}$ , niin alueen  $X$  hyperbolinen ala on

$$A(X) = \pi - \angle(l_1, \gamma) - \angle(\gamma, l_2). \quad (30)$$

*Todistus.* Olkoot  $z_1$  ja  $z_2$  ylemmän puolitasan pisteitä, joilla on ominaisuus  $\operatorname{Re}(z_1) > \operatorname{Re}(z_2)$ . Näiden pisteiden välinen geodeesi  $\gamma$  on selvästi ympyrän kaari. Oletetaan, että tämän ympyrän keskipiste on  $C$  ja säde  $r$ . Nyt voidaan merkitä  $z_k = C + re^{i\theta_k}$ , missä  $\theta_k$  on positiivisen reaaliakselin ja euklidisen janan  $[C, z_k]$  välinen kulma.

Joukon

$$X = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z_2) < \operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z_1) \text{ ja } \operatorname{Im}(z) > \operatorname{Im}(\gamma)\}$$

hyperbolinen ala on

$$\begin{aligned} A(X) &= \int_{C+r\cos(\theta_2)}^{C+r\cos(\theta_1)} \int_{\sqrt{r^2-(x-C)^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx \\ &= \int_{C+r\cos(\theta_2)}^{C+r\cos(\theta_1)} \frac{1}{\sqrt{r^2-(x-C)^2}} dx. \end{aligned}$$

Tehdään sijoitus  $x - C = r \cos(\omega)$ , jolloin saadaan

$$A(X) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin(\omega)}{|\sin(\omega)|} d\omega.$$

Koska nyt  $0 < \theta_k < \pi$ , niin

$$A(X) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\omega = \theta_2 - \theta_1.$$

Merkitään  $l_k = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z_k)\}$  ja sovelletaan lausetta 3.4, jolloin alan kaavaksi tulee

$$A(X) = \pi - \angle(l_1, \gamma) - \angle(\gamma, l_2).$$

□

Tämän lemmän avulla voidaan helposti johtaa kaava hyperbolisen kolmion alalle.

**Lause 3.10.** *Olkoon  $ABC$  hyperbolinen kolmio ylemmässä puolitasossa, jonka kulmat ovat  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\delta$ . Nyt hyperbolinen ala  $A(ABC)$  voidaan laskea kaavalla*

$$A(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \delta. \quad (31)$$

*Todistus.* Olkoon  $ABC$  hyperbolinen kolmio, jonka kulmat ovat  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\delta$ . Lauseiden 2.15 ja 3.6 nojalla riittää selvästi tarkastella vain kolmioita, joiden yksi sivuista on euklidinen jana positiivisella reaaliakselilla. Oletetaan, että kärkipiste  $B$  ei ole reaaliakselilla ja että  $\operatorname{Im}(A) > \operatorname{Im}(C)$ .

Olkoot  $\gamma_{AB}$ ,  $\gamma_{BC}$  ja  $\gamma_{AC}$  kolmion kärkipisteitä yhdistävät hyperboliset geodeesit. Määritellään joukot  $R$  ja  $S$  ehdoilla

$$R = \{z \in \mathbb{H} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(B) \text{ ja } \operatorname{Im}(z) > \operatorname{Im}(\gamma_{AC})\}$$

ja

$$S = \{z \in \mathbb{H} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(B) \text{ ja } \operatorname{Im}(z) > \operatorname{Im}(\gamma_{AB})\}.$$

Nyt hyperbolisen kolmion  $ABC$  hyperbolinen ala  $A(ABC)$  on

$$A(ABC) = A(R) - A(S),$$

ja soveltamalla lemmaa 3.1 saadaan

$$A(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \delta.$$

□

**Seuraus 3.11.** *Olkoon  $ABC$  hyperbolinen kolmio yksikkökiekossa, jonka kulmat ovat  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\delta$ . Nyt hyperbolinen ala  $A_{\mathbb{D}}(ABC)$  voidaan laskea kaavalla*

$$A_{\mathbb{D}}(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \delta. \quad (32)$$

*Todistus.* Tulos on selvä seuraus Möbius-kuvausten perusominaisuuksista, yksikkökiekon hyperbolisen alan määritelmästä 3.7 ja edeltävästä lauseesta 3.10. □

**Seuraus 3.12.** *Hyperbolisen kolmion kulmien summa on aina alle  $\pi$  radiaania.*

*Todistus.* Tulos seuraa suoraan lauseesta 3.10. □

Esitetään kappaleen lopuksi kaksi esimerkkiä hyperbolisen kolmion hyperbolisen alan laskemisesta.

**Esimerkki 20.** *Lasketaan esimerkin 16 hyperbolisen kolmion hyperbolinen ala  $A(ABC)$ .*

*Nyt kolmion kulmat ovat*

$$\alpha = \arccos \left[ \frac{32}{\sqrt{1105}} \right], \beta = \arccos \left[ \frac{31}{\sqrt{1105}} \right] \text{ ja } \delta = \pi - \arccos \left[ \frac{5}{13} \right],$$

*joten lauseen 3.10 mukaan*

$$A(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \delta \approx 30,5.$$

**Esimerkki 21.** *Lasketaan esimerkin 17 hyperbolisen kolmion hyperbolinen ala  $A_{\mathbb{D}}(ABC)$ .*

*Toimimalla vastaavasti kuten edeltävässä esimerkissä 20, saadaan*

$$A_{\mathbb{D}}(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \delta \approx 26,4.$$

### 3.3 Hyperbolisen trigonometrian perustuloksia

Olkoon  $ABC$  hyperbolinen kolmio. Merkitään tässä kappaleessa ko. kolmion sivujen hyperbolisia pituuksia kirjaimilla  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ja näiden sivujen vastinkulmia symboleilla  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\delta$ . Esitetään aluksi kaksi lemmaa, jotka helpottavat myöhempiä todistuksia.

**Lemma 3.2.** *On olemassa Möbius-kuvaus, joka kuvaa mielivaltaisen hyperbolisen kolmion kärkipisteet yksikkökielekkoon pisteisiin  $0$ ,  $r$  ja  $s$ , missä  $0 < r < 1$  ja  $s \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{R}$ .*

*Todistus.* Koska Möbius-kuvaukset muodostavat ryhmän kuvaustulon suhteen, niin selvästi riittää tutkia tilannetta yksikkökielekossa. Lisäksi rajoitusta voidaan määrittellä  $A \neq 0$ .

Oletetaan, että  $m_A$  on esimerkiksi 15 esitetty Möbius-kuvaus. Määritellään kuvaus  $h$  ehdolla  $h(z) = e^{-i\text{Arg}(m_A(B))}z$ , ja olkoon  $n_{A,B} = h \circ m_A$ . Nyt  $n_{A,B}$  on selvästi Möbius-kuvaus ja se kuvaa yksikkökielekon hyperbolisen kolmion kärjet pisteisiin  $0$ ,  $r$  ja  $s$ , missä  $0 < r < 1$  ja  $s \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{R}$ .  $\square$

**Lemma 3.3.** *Olkoot  $z_1$  ja  $z_2$  eri pisteitä yksikkökielekossa, ja olkoon  $z_1 \neq 0$ . Kun  $n_{z_1,z_2}$  on lemmän 3.2 todistuksessa konstruoitu Möbius-kuvaus, niin on voimassa yhtäsuuruus*

$$\frac{|z_1 - z_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} = \frac{|n_{z_1,z_2}(z_1) - n_{z_1,z_2}(z_2)|^2}{(1 - |n_{z_1,z_2}(z_1)|^2)(1 - |n_{z_1,z_2}(z_2)|^2)}. \quad (33)$$

*Todistus.* Olkoot  $z_1$  ja  $z_2$  eri pisteitä yksikkökielekossa, ja olkoon  $z_1 \neq 0$ . Oletetaan, että  $n_{z_1,z_2}$  on lemmän 3.2 todistuksessa konstruoitu Möbius-kuvaus.

Todistetaan lause suoraan johtamalla. Koska  $n_{z_1,z_2}(z_1) = 0$ , niin

$$\frac{|n_{z_1,z_2}(z_1) - n_{z_1,z_2}(z_2)|^2}{(1 - |n_{z_1,z_2}(z_1)|^2)(1 - |n_{z_1,z_2}(z_2)|^2)} = \frac{|n_{z_1,z_2}(z_2)|^2}{1 - |n_{z_1,z_2}(z_2)|^2}.$$

Sijoitetaan sitten kuvauksen  $n_{z_1,z_2}$  lauseke, jolloin pitkähkön sievennyksen kautta saadaan

$$\frac{|n_{z_1,z_2}(z_2)|^2}{1 - |n_{z_1,z_2}(z_2)|^2} = \frac{|z_1 - z_2|^2}{|-\bar{z}_1 z_2 + 1|^2 - |z_1 - z_2|^2} = \frac{|z_1 - z_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}.$$

$\square$

**Lause 3.13** (Ensimmäinen hyperbolinen kosinilause).

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\delta) \quad (34)$$

*Todistus.* Lauseen 3.2 ja lemmän 3.2 nojalla riittää tarkastella tapausta, jossa kolmion kärkipisteet ovat  $0$ ,  $r$  ja  $s$ , kun  $0 < r < 1$  ja  $s \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{R}$ . Olkoon  $a = \rho_{\mathbb{D}}(0, r)$ ,  $b = \rho_{\mathbb{D}}(0, s)$  ja  $c = \rho_{\mathbb{D}}(r, s)$ .

Hyperbolisten funktioiden perusominaisuuksien avulla saadaan yhtäsuuruus

$$\cosh(c) = 2 \sinh^2 \left[ \frac{c}{2} \right] + 1 = \frac{2 \tanh^2 \left[ \frac{c}{2} \right]}{1 - \tanh^2 \left[ \frac{c}{2} \right]} + 1.$$

Olkoon  $n_{r,s}$  lemmän 3.2 todistuksessa konstruoitu Möbius-kuvaus, ja merkitään  $n_{r,s}(s) = s_*$ . Nyt lauseen 2.29 nojalla

$$\frac{2 \tanh^2 \left[ \frac{c}{2} \right]}{1 - \tanh^2 \left[ \frac{c}{2} \right]} + 1 = \frac{2 \tanh^2 \left[ \frac{\rho_{\mathbb{D}}(0, s_*)}{2} \right]}{1 - \tanh^2 \left[ \frac{\rho_{\mathbb{D}}(0, s_*)}{2} \right]} + 1,$$

ja esimerkin 12 mukaan

$$\frac{2 \tanh^2 \left[ \frac{\rho_{\mathbb{D}}(0, s_*)}{2} \right]}{1 - \tanh^2 \left[ \frac{\rho_{\mathbb{D}}(0, s_*)}{2} \right]} = \frac{2s_*^2}{1 - s_*^2}.$$

Kun tähän tulokseen sovelletaan lopulta lemmaa 3.3, niin saadaan

$$\cosh(c) = \frac{2|r - s|}{(1 - r^2)(1 - |s|^2)} + 1.$$

Toisaalta euklidinen kosinilause antaa yhtäsuuruuden

$$|r - s| = r^2 + |s|^2 - 2r|s| \cos(\delta),$$

ja esimerkin 12 nojalla

$$r = \tanh \left[ \frac{a}{2} \right] \text{ ja } |s| = \tanh \left[ \frac{b}{2} \right].$$

Näin ollen

$$\cosh(c) = \frac{2 \left( \tanh^2 \left[ \frac{a}{2} \right] + \tanh^2 \left[ \frac{b}{2} \right] - 2 \tanh \left[ \frac{a}{2} \right] \tanh \left[ \frac{b}{2} \right] \cos(\delta) \right)}{\left( 1 - \tanh^2 \left[ \frac{a}{2} \right] \right) \left( 1 - \tanh^2 \left[ \frac{b}{2} \right] \right)},$$

mistä saadaan sieventämällä

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\delta).$$

□

**Lause 3.14** (Hyperbolinen sinilause).

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\delta)} \quad (35)$$

*Todistus.* Koska  $\sinh(c)$  ja  $\sin(\delta)$  ovat nyt molemmat selvästi positiivisia, riittää tarkastella tekijää  $\left[\frac{\sinh(c)}{\sin(\delta)}\right]^2$ . Ensimmäisen hyperbolisen kosinilauseen 3.13 mukaan

$$\left[\frac{\sinh(c)}{\sin(\delta)}\right]^2 = \frac{\sinh^2(c)}{1 - \left[\frac{\cosh(a)\cosh(b) - \cosh(c)}{\sinh(a)\sinh(b)}\right]^2}.$$

Sieventämällä tätä lauseketta saadaan

$$\left[\frac{\sinh(c)}{\sin(\delta)}\right]^2 = \frac{\sinh^2(a) \sinh^2(b) \sinh^2(c)}{1 + 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)}.$$

Edeltävän lausekkeen oikea puoli säilyy selvästi muuttumattomana, vaikka pituudet  $a$ ,  $b$  ja  $c$  vaihtaisivatkin keskenään paikkaa. Niinpä saadaan

$$\left[\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)}\right]^2 = \left[\frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)}\right]^2 = \left[\frac{\sinh(c)}{\sin(\delta)}\right]^2,$$

mikä todistaa väitteen. □

**Lause 3.15** (Toinen hyperbolinen kosinilause).

$$\cosh(c) = \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\delta)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)} \quad (36)$$

*Todistus.* Käyttämällä ensimmäistä hyperbolista kosinilauseetta 3.13 saadaan yhtäsuuruudet

$$\cos(\delta) = \frac{\cosh(a) \cosh(b) - \cosh(c)}{\sinh(a) \sinh(b)},$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\cosh(b) \cosh(c) - \cosh(a)}{\sinh(b) \sinh(c)}$$

ja

$$\cos(\beta) = \frac{\cosh(a) \cosh(c) - \cosh(b)}{\sinh(a) \sinh(c)}.$$

Koska  $\sin(\alpha)$ ,  $\sin(\beta)$ ,  $\sinh(a)$  ja  $\sinh(b)$  ovat nyt selvästi positiivisia, niin hyperbolisen sinilauseen todistuksessa esitetyn yhtäsuuruuden nojalla

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{1 + 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)}}{\sinh(b) \sinh(c)}$$

ja

$$\sin(\beta) = \frac{\sqrt{1 + 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)}}{\sinh(a) \sinh(c)}.$$

Sijoittamalla tekijöiden yhtälöt lausekkeeseen  $\frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\delta)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)}$  ja sieventämällä saadaan lopulta

$$\frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\delta)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)} = \cosh(c).$$

□

**Seuraus 3.16.** *Hyperbolinen kolmio on tasasivuinen jos ja vain jos se on tasakulmainen.*

*Todistus.* Jos hyperbolinen kolmio on tasasivuinen, niin ensimmäisen hyperbolisen kosinilauseen 3.13 nojalla saadaan

$$\cos(\delta) = \frac{\cosh(a) (\cosh(a) - 1)}{\sinh^2(a)}.$$

Näin ollen tasasivuisuudesta seuraa tasakulmaisuus.

Toisaalta toisen hyperbolisen kosinilauseen 3.15 nojalla kolmion tasakulmaisuudesta seuraa tasasivuisuus. □

**Seuraus 3.17.** *Jos kahden hyperbolisen kolmiot kulmat ovat yhtäsuuret, niin ko. hyperboliset kolmiot ovat yhtenevät.*

*Todistus.* Tulos seuraa suoraan toisesta hyperbolisesta kosinilauseesta 3.15. □

Esitetään sitten esimerkki hyperbolisen trigonometrian käytöstä.

**Esimerkki 22.** Selvitetään esimerkin 16 hyperbolisen kolmion  $ABC$  sivujen pituudet. Merkitään kulmia symboleilla

$$\alpha = \angle(\gamma_{AB}, \gamma_{AC}) = \arccos \left[ \frac{32}{\sqrt{1105}} \right],$$

$$\beta = \angle(\gamma_{AC}, \gamma_{BC}) = \arccos \left[ \frac{31}{\sqrt{1105}} \right]$$

ja

$$\delta = \angle(\gamma_{BC}, \gamma_{AB}) = \pi - \arccos \left[ \frac{5}{13} \right]$$

ja sivujen pituuksia kirjaimilla

$$a = \rho(B, C), \quad b = \rho(A, B) \quad \text{ja} \quad c = \rho(A, C).$$

Ensinnäkin toisen hyperbolisen kosinilauseen 3.15 nojalla

$$a = \operatorname{arcosh} \left[ \frac{\cos(\beta) \cos(\delta) + \cos(\alpha)}{\sin(\beta) \sin(\delta)} \right] \approx 1,20.$$

Sitten hyperbolisen sinilauseen 3.14 mukaan

$$b = \operatorname{arsinh} \left[ \frac{\sinh(a) \sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \right] \approx 1,45.$$

Lopulta ensimmäisen hyperbolisen kosinilauseen 3.13 avulla saadaan

$$c = \operatorname{arcosh}(\cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\delta)) \approx 2,34.$$

Tarkastellaan kappaleen lopuksi euklidista kosinilauseetta hyperbolisella metriikalla varustettuna.

**Lause 3.18** (Hyperbolinen kosiniepäyhtälö).

$$c^2 > a^2 + b^2 - 2ab \cos(\delta) \tag{37}$$

*Todistus.* Funktio  $\cosh$  on aidosti kasvava reaalilukuvälillä  $[0, \infty)$ , joten ensimmäisen hyperbolisen kosinilauseen 3.13 nojalla voidaan siirtyä tarkastelemaan epäyhtälöä

$$\cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\delta) > \cosh\left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\delta)}\right).$$



Koska hyperbolisen kolmion kärkipisteet eivät voi olla samalla geodeesilla, niin  $\delta \neq 0$  ja  $\delta \neq \pi$ . Siispä nyt  $\cos(\delta) \in (-1, 1)$ , joten riittää todistaa funktion

$$f(x) = \cosh(a) \cosh(b) - x \sinh(a) \sinh(b) - \cosh\left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2abx}\right),$$

olevan positiivinen reaalilukuvälillä  $(-1, 1)$ .

Hyperbolisten funktioiden perusominaisuuksien mukaan

$$\begin{aligned} f(-1) &= \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b) - \cosh\left(\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab}\right) \\ &= \cosh(a + b) - \cosh|a + b| = 0 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f(1) &= \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) - \cosh\left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}\right) \\ &= \cosh(a - b) - \cosh|a - b| = 0. \end{aligned}$$

Sitten suoralla laskulla saadaan

$$f''(x) = \frac{a^2 b^2 (\sinh(\sqrt{a^2 + b^2 - 2abx}) - \sqrt{a^2 + b^2 - 2abx} \cosh(\sqrt{a^2 + b^2 - 2abx}))}{(\sqrt{a^2 + b^2 - 2abx})^{3/2}}.$$

Toisaalta tekijä  $a^2 + b^2 - 2abx = (a - b)^2 + 2ab(1 - x)$ , ja  $(a - b)^2 + 2ab(1 - x) > 0$ , kun  $x \in (-1, 1)$ . Lisäksi  $\sinh(t) < t \cosh(t)$ , kun  $t > 0$ . Näin ollen  $f''(x) < 0$  reaalilukuvälillä  $(-1, 1)$ , joten itse funktio  $f(x)$  on konkaavi välillä  $(-1, 1)$ . Kuten aikaisemmin todistettiin  $f(-1) = 0 = f(1)$ , joten  $f(x)$  on positiivinen välillä  $(-1, 1)$ .

Tämä todistus on esitetty julkaisussa [7]. □

Artikkelissa [5] osoitetaan edeltävän lauseen 3.18 olevan voimassa, kun hyperbolinen metriikka siirretään kompleksitason mielivaltaiseen aitoon osajoukkoon.



## 4 Kvasihyperbolinen geometria

### 4.1 Kvasihyperbolisen geometrian perusteet

Esitetään kvasihyperboliseen geometriaan liittyviä määritelmiä ja perustuloksia.

**Määritelmä 4.1.** Olkoon  $G \subsetneq \mathbb{C}$  ja  $f$  suoristuva käyrä alueessa  $G$ . Käyrän  $f$  kvasihyperbolinen pituus on

$$l_G(f) = \int_f \frac{|dz|}{d(z, \partial G)}, \quad (38)$$

missä  $d(z, \partial G)$  on euklidinen etäisyys pisteen  $z$  ja reunan  $\partial G$  välillä.

**Määritelmä 4.2.** Olkoon  $G \subsetneq \mathbb{C}$ . Oletetaan, että pisteet  $z_1$  ja  $z_2$  kuuluvat joukkoon  $G$ . Kvasihyperbolinen etäisyys alueessa  $G$  on kuvaus

$$(k_G : G \times G \rightarrow [0, \infty)) : k_G(z_1, z_2) = \inf_{f \in \Gamma[z_1, z_2]} l_G(f), \quad (39)$$

missä  $\Gamma[z_1, z_2]$  on kaikkien pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävien suoristuvien käyrien perhe.

Kvasihyperbolisen pituuden ja etäisyyden esittelivät ensimmäisenä F. W. Gehring ja B. P. Palka julkaisussa [4].

Järjestetty pari  $(G, k_G)$  on selvästi metrinen avaruus. Lisäksi ylempään puolitasoon asetettu kvasihyperbolinen metriikka vastaa tavallista hyperbolista metriikkaa.

**Lause 4.3.** *Olkoon  $G \subsetneq \mathbb{C}$ . Jos pisteet  $z_1$  ja  $z_2$  kuuluvat alueeseen  $G$ , niin on olemassa niitä yhdistävä kvasihyperbolinen geodeesi.*

*Todistus.* Todistus on esitetty artikkelissa [3]. □

Kvasihyperboliset geodeesit eivät ole kaikissa alueissa yksikäsitteisiä. Esimerkiksi joukossa  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  geodeeseja on erikoistapauksessa täsmälleen kaksi kappaletta, mikä todistetaan artikkelissa [10].

**Lause 4.4.** *Jos  $G \subsetneq \mathbb{C}$  on konvekssi alue, niin kvasihyperboliset geodeesit ovat yksikäsitteisiä.*

*Todistus.* Lause on todistettu artikkelissa [11]. □

**Lause 4.5.** *Kvasihyperboliset geodeesit ovat sileitä käyriä.*

*Todistus.* Lause todistetaan artikkelissa [9]. □

Merkitään jatkossa alueen  $G$  pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävää kvasihyperbolista geodeesia symbolilla  $J_G [z_1, z_2]$ .

**Lemma 4.1.** *Olkoon  $G \subsetneq \mathbb{C}$  konvekssi joukko. Nyt etäisyysfunktio  $d(z, \partial G)$  on konkaavi.*

*Todistus.* Olkoon  $G \subsetneq \mathbb{C}$  konvekssi joukko ja  $d(z, \partial G)$  euklidinen etäisyys pisteen  $z$  ja reunan  $\partial G$  välillä.

Oletetaan, että  $z_1$  ja  $z_2$  ovat eri pisteitä joukossa  $G$  ja että  $t \in (0, 1)$ . Merkitään sitten  $u = tz_1 + (1 - t)z_2$  ja  $v = td(z_1, \partial G) + (1 - t)d(z_2, \partial G)$ . Olkoon  $w$  kompleksitason piste, joka toteuttaa ehdon  $|w| < v$ . Nyt selvästi riittää todistaa, että  $u + w \in G$ .

Koska nyt

$$\left| \frac{d(z_1, \partial G)w}{v} \right| < d(z_1, \partial G) \text{ ja } \left| \frac{d(z_2, \partial G)w}{v} \right| < d(z_2, \partial G),$$

niin

$$z_1 + \frac{d(z_1, \partial G)w}{v} \in G \text{ ja } z_2 + \frac{d(z_2, \partial G)w}{v} \in G.$$

Toisaalta  $G$  on konvekssi, joten

$$u + w = t \left( z_1 + \frac{d(z_1, \partial G)w}{v} \right) + (1 - t) \left( z_2 + \frac{d(z_2, \partial G)w}{v} \right) \in G.$$

Siispä  $d(z, \partial G)$  on konkaavi.

Tämä todistus on esitetty artikkelissa [14]. □

**Lemma 4.2.** *Oletetaan, että  $G \subsetneq \mathbb{C}$  on konvekssi joukko ja että  $z_1$  ja  $z_2$  ovat eri pisteitä joukossa  $G$ . Nyt etäisyysfunktio  $d(z, \partial G)$  on joko monotoninen geodeesilla  $J_G [z_1, z_2]$  tai geodeesilla  $J_G [z_1, z_2]$  on sellainen piste  $z_3$ , että kuvaus  $d(z, \partial G)$  on kasvava geodeesilla  $J_G [z_1, z_3]$  ja vähenevä geodeesilla  $J_G [z_3, z_2]$ .*

*Todistus.* Oletetaan, että  $G \subsetneq \mathbb{C}$  konvekksi joukko ja että  $z_1$  ja  $z_2$  ovat eri pisteitä joukossa  $G$ . Todistetaan lemma käyttämällä vastaoletusta.

Olkoon  $J_G[u, v]$  geodeesin  $J_G[z_1, z_2]$  sellainen osa, että  $d(u, \partial G) = d(v, \partial G)$  ja että  $d(z, \partial G) < d(u, \partial G)$ , kun  $z \in J_G[u, v] \setminus \{u, v\}$ . Merkitään  $r = d(u, \partial G)$ . Nyt lemmän 4.1 nojalla  $d(z, \partial G) \geq r$ , kun piste  $z$  kuuluu euklidiselle janalle  $[u, v]$ . Siispä kvasihyperbolisen pituuden määritelmän nojalla  $l_G([u, v]) < l_G(J_G[u, v])$ , mikä on ristiriita. Siispä etäisyysfunktio  $d(z, \partial G)$  on joko monotoninen geodeesilla  $J_G[z_1, z_2]$  tai geodeesilla  $J_G[z_1, z_2]$  on sellainen piste  $z_3$ , että kuvaus  $d(z, \partial G)$  on kasvava geodesilla  $J_G[z_1, z_3]$  ja vähenevä geodeesilla  $J_G[z_3, z_2]$ .

Tämä todistus on esitetty artikkelissa [14]. □

## 4.2 Kvasihyperboliset geodeesit tasovyössä

Tässä kappaleessa selvitetään millaisia kvasihyperboliset geodeesit ovat tasovyössä  $R = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \text{Im}(z) < 1\}$ .

Kvasihyperbolista geometriaa tasovyössä on aikaisemmin tarkasteltu ainakin R. Klénin lisensiaatintyössä [6]. Geodeesien muodon selvittämiseen käytetään vastaavaa menetelmää kuin julkaisussa [8], jossa selvitetään millaisia kvasihyperboliset geodeesit ovat sektorissa.

**Määritelmä 4.6.** Tasovyön ylempi puolikas on

$$R^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im}(z) < 1\}$$

ja alempi puolikas on

$$R^- = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \text{Im}(z) < 0\}.$$

**Määritelmä 4.7.** Määritellään merkinnät jatkossa tärkeille ympyrätyypeille:

a) Olkoot  $z_1$  ja  $z_2$  pisteitä joukossa  $R \setminus R^-$ . Nyt  $C_{c, z_1, z_2}$  tarkoittaa euklidista ympyrää, jonka keskipiste  $c$  on suoralla  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 1\}$  ja joka kulkee pisteiden  $z_1$  ja  $z_2$  kautta.

b) Olkoot  $z_1$  ja  $z_2$  pisteitä alueessa  $R \setminus R^+$ . Nyt  $C_{c, z_1, z_2}^-$  tarkoittaa euklidista ympyrää, jonka keskipiste  $c$  on suoralla  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = -1\}$  ja joka kulkee pisteiden  $z_1$  ja  $z_2$  kautta.

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi ilmaistaan tästä eteenpäin symbolilla  $C[z_1, z_2]$  euklidisen ympyrän  $C$  kaarta pisteestä  $z_1$  pisteeseen  $z_2$  ja symbolilla  $\text{rad}(C)$  ympyrän  $C$  säteen pituutta.

Esitetään aluksi kolme lemmaa, joita tarvitaan tasovyön kvasihyperbolisten geodeesien selvittämiseen.

**Lemma 4.3.** *Jos kumpikin pisteistä  $z_1$  ja  $z_2$  kuuluu joukkoon  $R \setminus R^-$ , niin  $J_R[z_1, z_2] \in R \setminus R^-$ .*

*Jos pisteet  $z_1$  ja  $z_2$  kuuluvat alueeseen  $R \setminus R^+$ , niin tapaus on analoginen.*

*Todistus.* Olkoot  $z_1$  ja  $z_2$  eri pisteitä alueessa  $R \setminus R^-$ . Jos kvasihyperbolinen geodeesi  $J_R[z_1, z_2]$  ei kuuluisi joukkoon  $R \setminus R^-$ , niin tällöin etäisyysfunktio  $d(z, \partial R)$  ei olisi monotoninen, eikä geodeesilla  $J_R[z_1, z_2]$  voisi olla sellaista pistettä  $z_3$ , että kuvaus  $d(z, \partial R)$  olisi kasvava geodesilla  $J_R[z_1, z_3]$  ja vähenevä geodesilla  $J_R[z_3, z_2]$ . Tämä on kuitenkin ristiriidassa lemmän 4.2 kanssa, sillä tasovyö on konvekssi joukko. Siispä  $J_R[z_1, z_2] \in R \setminus R^-$ .  $\square$

**Lemma 4.4.** *a) Olkoon piste  $z \in R^+$ . Nyt on olemassa täsmälleen kaksi pisteen  $z$  kautta kulkevaa euklidista ympyrää, joiden keskipisteet ovat suoralla  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 1\}$  ja jotka sivuavat reaaliakselia. Näiden ympyröiden keskipisteet ovat  $c_1 = -\sqrt{1 - (\text{Im}(z) - 1)^2} + \text{Re}(z) + i$  ja  $c_2 = \sqrt{1 - (\text{Im}(z) - 1)^2} + \text{Re}(z) + i$ .*

*b) Olkoon piste  $z \in R^-$ . Nyt on olemassa täsmälleen kaksi pisteen  $z$  kautta kulkevaa euklidista ympyrää, joiden keskipisteet ovat suoralla  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = -1\}$  ja jotka sivuavat reaaliakselia. Näiden ympyröiden keskipisteet ovat  $c_1 = -\sqrt{1 - (\text{Im}(z) + 1)^2} + \text{Re}(z) - i$  ja  $c_2 = \sqrt{1 - (\text{Im}(z) + 1)^2} + \text{Re}(z) - i$ .*

*Todistus.* a) Olkoon piste  $z \in R^+$ . Koska kolme pistettä määrää ympyrän täysin, niin on todellakin olemassa täsmälleen kaksi pisteen  $z$  kautta kulkevaa euklidista ympyrää, joiden keskipisteet ovat suoralla  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 1\}$  ja jotka sivuavat reaaliakselia.

Selvitetään sitten ympyröiden keskipisteet. Koska kummankin ympyrän säteen pituus on selvästi 1, niin yhtälöksi saadaan

$$(\text{Re}(z) - \text{Re}(c_{1,2}))^2 + (\text{Im}(z) - 1)^2 = 1.$$

Kun edeltävästä yhtälöstä ratkaistaan  $\operatorname{Re}(c_{1,2})$ , niin saadaan haluttu tulos:

$$\operatorname{Re}(c_{1,2}) = \mp \sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z) - 1)^2} + \operatorname{Re}(z).$$

b) Todistus on analoginen a)-kohdan kanssa.  $\square$

**Lemma 4.5.** *Oletetaan, että  $z_1 \in R^+$  ja että  $z_2 \in R^-$ . Olkoon  $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$ . Merkitään sitten  $c_1 = \sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_1) - 1)^2} + \operatorname{Re}(z_1) + i$  ja  $c_2 = -\sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_2) + 1)^2} + \operatorname{Re}(z_2) - i$ . Jos  $\operatorname{Re}(c_1) > \operatorname{Re}(c_2)$ , niin on olemassa sellainen yksikäsitteinen reaaliakselin piste  $t$  ja sellaiset yksikäsitteiset ympyrät  $C_{k_1, z_1, t}$  ja  $C_{k_2, t, z_2}^-$ , että käyrä  $C_{k_1, z_1, t}[z_1, t] \cup C_{k_2, t, z_2}^-[t, z_2]$  on differentioituva.*

*Kun  $z_1 \in R^+$  ja  $z_2 \in R^-$  toteuttavat ehdon  $\operatorname{Re}(z_1) > \operatorname{Re}(z_2)$ , niin tapaus on analoginen.*

*Todistus.* Oletetaan, että  $z_1 \in R^+$  ja että  $z_2 \in R^-$ . Olkoon  $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$ . Oletetaan, että pisteet  $c_1 = \sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_1) - 1)^2} + \operatorname{Re}(z_1) + i$  ja  $c_2 = -\sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_2) + 1)^2} + \operatorname{Re}(z_2) - i$  toteuttavat ehdon  $\operatorname{Re}(c_1) > \operatorname{Re}(c_2)$ . Jotta käyrä  $C_{k_1, z_1, t}[z_1, t] \cup C_{k_2, t, z_2}^-[t, z_2]$  voisi olla differentioituva pisteen  $t$  kuuluessa reaaliakselille, niin selvästi ympyröiden  $C_{k_1, z_1, t}$  ja  $C_{k_2, t, z_2}^-$  on oltava ulkoisesti tangentit ja niiden keskipisteiden on toteutettava ehdot  $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(k_1)$  ja  $\operatorname{Re}(z_2) > \operatorname{Re}(k_2)$ .

Olko

$$\Omega_1 = \{C_{l_1, z_1, s_1} \mid \operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(l_1), s_1 \in \mathbb{R} \text{ ja } 1 \leq \operatorname{rad}(C_{l_1, z_1, s_1}) < |l_1 - z_1|\}$$

ja

$$\Omega_2 = \{C_{l_2, s_2, z_2}^- \mid \operatorname{Re}(z_2) > \operatorname{Re}(l_2)\}.$$

Jokaista ympyrää  $C \in \Omega_1$  kohti on selvästi olemassa sellainen yksikäsitteinen ympyrä  $\bar{C} \in \Omega_2$  ja piste  $p(C, \bar{C})$ , että  $C \cap \bar{C} = \{p(C, \bar{C})\}$ .

Nyt selvästi ympyrä  $C_{c_1, z_1, c_1 - i} \in \Omega_1$  ja  $\operatorname{Im}(p(C_{c_1, z_1, c_1 - i}, \bar{C}_{c_1, z_1, c_1 - i})) > 0$ . Toisaalta jos valitaan sellainen  $C' \in \Omega_1$ , että  $\bar{C}' = C_{c_2, c_2 + i, z_2}^-$ , niin  $\operatorname{Im}(p(C', \bar{C}')) < 0$ . Merkitään  $a = \operatorname{rad}(C_{c_1, z_1, c_1 - i})$  ja  $b = \operatorname{rad}(C')$ .

Jokaista ympyrää joukossa  $\Omega_1$  vastaa luonnollisesti yksikäsitteinen säde. Määritellään seuraavaksi funktio  $F : (a, b) \rightarrow (-1, 1)$  ehdolla  $F(r) =$

$\text{Im}(p(C, \overline{C}))$ , missä  $r = \text{rad}(C)$ . Nyt kuvaus  $F$  on selvästi jatkuva ja aidosti vähenevä. Siispä jatkuvien funktioiden väliarvolauseen ja aidon monotonisuuden nojalla on olemassa sellainen yksikäsitteinen luku  $E \in (a, b)$ , että  $F(E) = 0$ . Tästä taas seuraa halutun pisteen  $t$  sekä ympyröiden  $C_{k_1, z_1, t}$  ja  $C_{k_2, t, z_2}^-$  olemassaolo ja yksikäsitteisyys.  $\square$

Käydään läpi kolme erikoistapausta, joissa kvasihyperboliset geodeesit on helppo selvittää.

**Lause 4.8.** *Olkoot  $z_1$  ja  $z_2$  eri pisteitä reaaliakselilla. Nyt*

$$J_R[z_1, z_2] = [z_1, z_2]. \quad (40)$$

*Todistus.* Todistus on analoginen lemmän 4.3 todistuksen kanssa.  $\square$

**Lause 4.9.** *Jos  $z_1$  ja  $z_2$  ovat pisteitä joukossa  $R \setminus R^-$  ja jos  $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ , niin*

$$J_R[z_1, z_2] = [z_1, z_2]. \quad (41)$$

*Kun pisteet  $z_1$  ja  $z_2$  kuuluvat alueeseen  $R \setminus R^+$ , niin tapaus on analoginen.*

*Todistus.* Tulos seuraa selvästi ylemmän puolitason hyperbolisia geodeesejä koskevasta lauseesta 2.5.  $\square$

**Lause 4.10.** *Oletetaan, että pisteet  $z_1$  ja  $z_2$  kuuluvat alueeseen  $R \setminus R^-$  ja että toinen pisteistä ei ole reaaliakselilla. Jos nyt  $C_{c, z_1, z_2}[z_1, z_2] \cap \mathbb{R} = \emptyset$  tai jos  $C_{c, z_1, z_2}[z_1, z_2] \cap \mathbb{R} = \{u\}$ , niin*

$$J_R[z_1, z_2] = C_{c, z_1, z_2}[z_1, z_2]. \quad (42)$$

*Kun pisteet  $z_1$  ja  $z_2$  kuuluvat joukkoon  $R \setminus R^+$ , niin tapaus on analoginen.*

*Todistus.* Lause seuraa selvästi ylemmän puolitason hyperbolisia geodeesejä koskevasta lauseesta 2.5.  $\square$

Selvitetään seuraavaksi tasovyön kvasihyperboliset geodeesit muissa sellaisissa tapauksissa, joissa tarkasteltavat pisteet eivät kuulu tasovyön eri puoliskoille.



**Lause 4.11.** *Olkoot  $z_1$  ja  $z_2$  sellaisia pisteitä alueessa  $R^+$ , että  $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$ . Olkoon  $C_{c,z_1,z_2}[z_1, z_2] \cap \mathbb{R} = \{u, v\}$ . Nyt*

$$J_R[z_1, z_2] = C_{c_1, z_1, c_1 - i}[z_1, c_1 - i] \cup [c_1 - i, c_2 - i] \cup C_{c_2, c_2 - i, z_2}[c_2 - i, z_2], \quad (43)$$

missä  $c_1 = \sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_1) - 1)^2} + \operatorname{Re}(z_1) + i$  ja  $c_2 = -\sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_2) - 1)^2} + \operatorname{Re}(z_2) + i$ .

*Kun pisteet  $z_1$  ja  $z_2$  kuuluvat joukkoon  $R^-$ , niin tapaus on analoginen.*

*Todistus.* Olkoot  $z_1$  ja  $z_2$  sellaisia pisteitä alueessa  $R^+$ , että  $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$ . Olkoon  $C_{c,z_1,z_2}[z_1, z_2] \cap \mathbb{R} = \{u, v\}$ . Merkitään  $c_1 = \sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_1) - 1)^2} + \operatorname{Re}(z_1) + i$  ja  $c_2 = -\sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_2) - 1)^2} + \operatorname{Re}(z_2) + i$ .

Selvästi leikkauksiin  $J_R[z_1, z_2] \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(c_1)\} = \{w_1\}$  ja  $J_R[z_1, z_2] \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(c_2)\} = \{w_2\}$  kuuluu kumpaankin vain yksi piste. Lisäksi lemmän 4.3 nojalla  $\{w_1, w_2\} \subset R \setminus R^-$ .

Olkoon  $\gamma$  sellainen pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävä käyrä, että

$$\gamma \neq C_{c_1, z_1, c_1 - i}[z_1, c_1 - i] \cup [c_1 - i, c_2 - i] \cup C_{c_2, c_2 - i, z_2}[c_2 - i, z_2].$$

Todistetaan lause osoittamalla, ettei  $\gamma$  voi olla geodeesi. Jos nyt  $w_1 = \operatorname{Re}(c_1)$  ja  $w_2 = \operatorname{Re}(c_2)$ , niin silloin ainakin yksi osakäyrästä  $\gamma[z_1, c_1 - i]$ ,  $\gamma[c_1 - i, c_2 - i]$  tai  $\gamma[c_2 - i, z_2]$  eroaa käyrästä  $C_{c_1, z_1, c_1 - i}[z_1, c_1 - i]$ ,  $[c_1 - i, c_2 - i]$  tai  $C_{c_2, c_2 - i, z_2}[c_2 - i, z_2]$ . Tällöin lauseiden 4.8 ja 4.10 mukaan  $\gamma$  ei voi olla geodeesi.

Oletetaan sitten, että  $w_1 \neq \operatorname{Re}(c_1)$  tai  $w_2 \neq \operatorname{Re}(c_2)$ . Jos osakäyrä  $\gamma[z_1, w_1] \neq C_{k_1, z_1, w_1}[z_1, w_1]$  tai jos  $\gamma[w_2, z_2] \neq C_{k_2, w_2, z_2}[w_2, z_2]$ , niin lauseen 4.10 nojalla  $\gamma$  ei ole geodeesi. Olkoot nyt  $\gamma[z_1, w_1] = C_{k_1, z_1, w_1}[z_1, w_1]$  ja  $\gamma[w_2, z_2] = C_{k_2, w_2, z_2}[w_2, z_2]$ . Nyt  $\operatorname{Re}(k_1) < \operatorname{Re}(w_1)$  tai  $\operatorname{Re}(k_2) > \operatorname{Re}(w_2)$ . Siispä jos osakäyrä  $\gamma[w_1, w_2]$  kulkee euklidisen janan  $[w_1, w_2]$  yläpuolella, niin selvästi se ei voi olla differentioituva pisteessä  $w_1$  tai  $w_2$ . Tällöin lauseesta 4.5 seuraa, ettei  $\gamma$  voi olla geodeesi.

Oletetaan lopulta, että osakäyrä  $\gamma[w_1, w_2]$  kulkee ainakin osittain euklidisen janan  $[w_1, w_2]$  alapuolelta. Jos esimerkiksi  $w_1 \neq \operatorname{Re}(c_1)$ , niin käyrän  $\gamma$  on lähdeittävä pisteestä  $w_1$  ympyrän  $C_{k_1, z_1, w_1}$  kaaren suuntaisesti ylöspäin ollakseen differentioituva ko. pisteessä. Tällöin osakäyrällä  $\gamma[w_1, w_2]$  etäisyysfunktio  $d(z, \partial R)$  on ensin vähenevä ja sitten kasvava. Siispä lemmän 4.2 nojalla

$\gamma$  ei voi olla geodeesi. Tapaus  $w_2 \neq \operatorname{Re}(c_2)$  käsitellään vastaavasti.

Nyt on todistettu, ettei  $\gamma$  voi olla kvasihyperbolinen geodeesi. Toisaalta kvasihyperbolinen geodeesi on lauseen 4.3 mukaan aina olemassa, joten

$$J_R[z_1, z_2] = C_{c_1, z_1, c_1 - i}[z_1, c_1 - i] \cup [c_1 - i, c_2 - i] \cup C_{c_2, c_2 - i, z_2}[c_2 - i, z_2].$$

□

**Seuraus 4.12.** Oletetaan, että  $z_1 \in R^+$  ja  $z_2 \in \mathbb{R}$ . Olkoot  $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$  ja  $C_{c, z_1, z_2}[z_1, z_2] \cap \mathbb{R} = \{u, z_2\}$ . Nyt

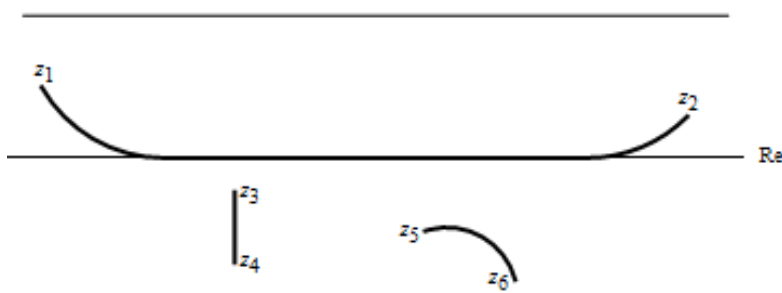
$$J_R[z_1, z_2] = C_{c_1, z_1, c_1 - i}[z_1, c_1 - i] \cup [c_1 - i, z_2], \quad (44)$$

missä  $c_1 = \sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_1) - 1)^2 + \operatorname{Re}(z_1)} + i$ .

Kun  $z_1 \in R^-$  tai  $\operatorname{Re}(z_1) > \operatorname{Re}(z_2)$ , niin tapaus on analoginen.

*Todistus.* Tulos seuraa suoraan lauseesta 4.11.

□



Kuva 7: Kolme kvasihyperbolista geodeesia tasovyössä.

Siirrytään seuraavaksi käsittelemään tapauksia, joissa tarkasteltavat pisteet ovat tasovyön eri puoliskoilla.

**Lause 4.13.** Oletetaan, että  $z_1 \in R^+$  ja  $z_2 \in R^-$ . Olkoon  $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$ . Merkitään sitten  $c_1 = \sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_1) - 1)^2 + \operatorname{Re}(z_1)} + i$  ja  $c_2 = -\sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_2) + 1)^2 + \operatorname{Re}(z_2)} - i$ .

a) Jos  $\operatorname{Re}(c_1) = \operatorname{Re}(c_2)$ , niin

$$J_R[z_1, z_2] = C_{c_1, z_1, c_1 - i}[z_1, c_1 - i] \cup C_{c_2, c_2 + i, z_2}^-[c_2 + i, z_2]. \quad (45)$$

b) Jos  $\operatorname{Re}(c_1) < \operatorname{Re}(c_2)$ , niin

$$J_R[z_1, z_2] = C_{c_1, z_1, c_1 - i}[z_1, c_1 - i] \cup [c_1 - i, c_2 + i] \cup C_{c_2, c_2 + i, z_2}^- [c_2 + i, z_2]. \quad (46)$$

Kun pisteet  $z_1 \in R^+$  ja  $z_2 \in R^-$  toteuttavat ehdon  $\operatorname{Re}(z_1) > \operatorname{Re}(z_2)$ , niin tapaus on analoginen.

*Todistus.* Todistus on analoginen lauseen 4.11 todistuksen kanssa.  $\square$

**Lause 4.14.** Oletetaan, että  $z_1 \in R^+$  ja  $z_2 \in R^-$ . Olkoon  $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$ . Merkitään sitten  $c_1 = \sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_1) - 1)^2} + \operatorname{Re}(z_1) + i$  ja  $c_2 = -\sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_2) + 1)^2} + \operatorname{Re}(z_2) - i$ . Jos  $\operatorname{Re}(c_1) > \operatorname{Re}(c_2)$ , niin

$$J_R[z_1, z_2] = C_{k_1, z_1, t}[z_1, t] \cup C_{k_2, t, z_2}^- [t, z_2], \quad (47)$$

missä piste  $t$  sekä ympyrät  $C_{k_1, z_1, t}$  ja  $C_{k_2, t, z_2}^-$  ovat kuin lemmassa 4.5.

Kun pisteet  $z_1 \in R^+$  ja  $z_2 \in R^-$  toteuttavat ehdon  $\operatorname{Re}(z_1) > \operatorname{Re}(z_2)$ , niin tapaus on analoginen.

*Todistus.* Oletetaan, että  $z_1 \in R^+$  ja  $z_2 \in R^-$ . Olkoon  $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$ . Oletetaan, että pisteet  $c_1 = \sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_1) - 1)^2} + \operatorname{Re}(z_1) + i$  ja  $c_2 = -\sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_2) + 1)^2} + \operatorname{Re}(z_2) - i$  toteuttavat ehdon  $\operatorname{Re}(c_1) > \operatorname{Re}(c_2)$ . Nyt lauseen 4.3 nojalla kvasihyperbolinen geodeesi  $J_R[z_1, z_2]$  on olemassa, ja lemmasta 4.2 seuraa, että ko. geodeesi voi leikata reaaliakselin vain yhdessä pisteessä. Lisäksi lemmän 4.5 mukaan on olemassa sellainen yksikäsitteinen reaaliakselin piste  $t$  ja sellaiset yksikäsitteiset ympyrät  $C_{k_1, z_1, t}$  ja  $C_{k_2, t, z_2}^-$ , että käyrä  $C_{k_1, z_1, t}[z_1, t] \cup C_{k_2, t, z_2}^- [t, z_2]$  on differentioituvaa.

Olkoon  $\gamma$  sellainen pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävä käyrä, että

$$\gamma \neq C_{k_1, z_1, t}[z_1, t] \cup C_{k_2, t, z_2}^- [t, z_2],$$

kun piste  $t$  sekä ympyrät  $C_{k_1, z_1, t}$  ja  $C_{k_2, t, z_2}^-$  ovat kuin lemmassa 4.5. Todistetaan, ettei  $\gamma$  voi olla kvasihyperbolinen geodeesi. Olkoon  $\{w\} = \gamma \cap \mathbb{R}$ . Oletetaan aluksi, että  $w = \operatorname{Re}(z_1)$ . Jotta  $\gamma$  voisi olla geodeesi osakäyrien  $\gamma[z_1, w]$  ja  $\gamma[w, z_2]$  tulisi selvästi vastata käyriä  $[z_1, w]$  ja  $C_{l, w, z_2}^- [w, z_2]$ . Tällöin  $\gamma$  ei kuitenkaan voisi olla differentioituvaa pisteessä  $w$ , joten lauseen 4.5 se ei olisi

geodeesi. Tapaus  $w = \operatorname{Re}(z_2)$  käsitellään vastaavasti.

Oletetaan sitten, että  $w \neq \operatorname{Re}(z_1)$  ja  $w \neq \operatorname{Re}(z_2)$ . Jotta  $\gamma$  voisi olla geodeesi, niin seuraavien yhtäsuuruuksien on selvästi oltava voimassa:

$$\gamma[z_1, w] = J_R[z_1, w] \text{ ja } \gamma[w, z_2] = J_R[w, z_2],$$

missä käyrät  $J_R[z_1, w]$  ja  $J_R[w, z_2]$  ovat kuin lauseessa 4.10. Toisaalta jos  $w \neq t$ , niin lemmän 4.5 nojalla  $\gamma$  ei voi olla differentioituva. Tällöin  $\gamma$  ei voi olla kvasihyperbolinen geodeesi, sillä lauseen 4.5 mukaan kvasihyperboliset geodeesit ovat sileitä käyriä.

Nyt on todistettu, ettei  $\gamma$  voi olla geodeesi. Kvasihyperbolinen geodeesi on kuitenkin olemassa, joten

$$J_R[z_1, z_2] = C_{k_1, z_1, t}[z_1, t] \cup C_{k_2, t, z_2}^-[t, z_2].$$

□

**Lause 4.15.** *Oletetaan, että  $z_1 \in R^+$  ja  $z_2 \in R^-$ . Olkoon  $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ . Nyt*

$$J_R[z_1, z_2] = [z_1, z_2]. \quad (48)$$

*Todistus.* Oletetaan, että  $z_1 \in R^+$  ja  $z_2 \in R^-$ . Olkoon  $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ . Nyt lauseen 4.3 nojalla kvasihyperbolinen geodeesi  $J_R[z_1, z_2]$  on olemassa, ja lemmasta 4.2 seuraa, että ko. geodeesi voi leikata reaaliakselin vain yhdessä pisteessä.

Olkoon  $\gamma$  sellainen pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävä käyrä, että

$$\gamma \neq [z_1, z_2].$$

Todistetaan, ettei  $\gamma$  voi olla kvasihyperbolinen geodeesi. Olkoon  $\{w\} = \gamma \cap \mathbb{R}$ . Oletetaan aluksi, että  $w \neq \operatorname{Re}(z_1)$ . Jotta  $\gamma$  voisi olla geodeesi, niin seuraavien yhtäsuuruuksien on selvästi oltava voimassa:

$$\gamma[z_1, w] = J_R[z_1, w] \text{ ja } \gamma[w, z_2] = J_R[w, z_2],$$

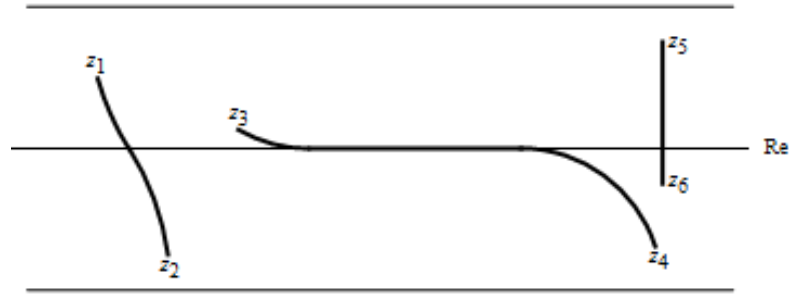
missä käyrät  $J_R[z_1, w]$  ja  $J_R[w, z_2]$  ovat kuin lauseessa 4.10. Nyt  $\gamma$  ei voi olla differentioituva pisteessä  $w$ , joten lauseen 4.5 se ei voi olla geodeesi.

Jos sitten  $w = \operatorname{Re}(z_1)$ , niin ainakin toinen osakäyristä  $\gamma[z_1, w]$  tai  $\gamma[w, z_2]$  eroaa käyrästä  $[z_1, w]$  tai  $[w, z_2]$ . Tällöin lauseen 4.9 mukaan  $\gamma$  ei voi olla geodeesi.

Nyt on todistettu, ettei  $\gamma$  voi olla kvasihyperbolinen geodeesi. Toisaalta kvasihyperbolinen geodeesi on kuitenkin aina olemassa, joten

$$J_R[z_1, z_2] = [z_1, z_2].$$

□



Kuva 8: Tasovyön eri puoliskoilla olevien pisteiden välisiä kvasihyperbolisia geodeeseja.

Lasketaan seuraavaksi muutamien kvasihyperbolisten geodeesien pituudet.

**Esimerkki 23.** Lasketaan kvasihyperbolinen etäisyys  $k_R(z_1, z_2)$ , kun  $z_1 = -4 + i0,5$  ja  $z_2 = 3 + i0,75$ .

Toimimalla kuten esimerkissä 4 saadaan helposti selville, että ympyrän  $C_{c,z_1,z_2}$  keskipiste  $c = -\frac{115}{224} + i$  ja että säde  $\operatorname{rad}(C_{c,z_1,z_2}) = \frac{\sqrt{622505}}{224}$ . Koska  $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(c) < \operatorname{Re}(z_2)$  ja koska  $\operatorname{rad}(C_{c,z_1,z_2}) > 1$ , niin kaari  $C_{c,z_1,z_2}[z_1, z_2]$  selvästi leikkaa reaaliakselin kahdessa pisteessä. Siispä pisteiden  $z_1$  ja  $z_2$  välinen kvasihyperbolinen geodeesi on kuin lauseessa 4.11.

Nyt siis  $k_R(z_1, z_2) = k_R(z_1, \operatorname{Re}(c_1)) + k_R(\operatorname{Re}(c_1), \operatorname{Re}(c_2)) + k_R(\operatorname{Re}(c_2), z_2)$ , missä  $c_1 = \sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_1) - 1)^2} + \operatorname{Re}(z_1) + i$  ja  $c_2 = -\sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_2) - 1)^2} + \operatorname{Re}(z_2) + i$ . Toimitaan sitten kuten esimerkissä 3, jolloin haluttu kvasihyper-

bolinen etäisyys voidaan laskea kaavalla

$$\begin{aligned}
k_R(z_1, z_2) &= \ln \left[ \frac{1 + \operatorname{Re}(c_1) - \operatorname{Re}(z_1)}{1 - \operatorname{Im}(z_1)} \right] + \int_{\operatorname{Re}(c_1)}^{\operatorname{Re}(c_2)} dt \\
&+ \ln \left[ \frac{1 - \operatorname{Im}(z_2)}{1 + \operatorname{Re}(c_2) - \operatorname{Re}(z_2)} \right] \\
&= \ln \left[ \frac{1 + \operatorname{Re}(c_1) - \operatorname{Re}(z_1)}{1 - \operatorname{Im}(z_1)} \right] + (\operatorname{Re}(c_2) - \operatorname{Re}(c_1)) \\
&+ \ln \left[ \frac{1 - \operatorname{Im}(z_2)}{1 + \operatorname{Re}(c_2) - \operatorname{Re}(z_2)} \right].
\end{aligned}$$

Sijoittamalla arvot edeltävään kaavaan saadaan

$$k_R(z_1, z_2) = 7 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{15}}{4} + \ln \left( (2 + \sqrt{3})(4 + \sqrt{15}) \right) \approx 8,55.$$

**Esimerkki 24.** Lasketaan kvasihyperbolinen etäisyys  $k_R(z_1, z_2)$ , kun  $z_1 = -4 + i0,5$  ja  $z_2 = -3,5 - i0,75$ .

Oletetaan, että  $c_1 = \sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_1) - 1)^2} + \operatorname{Re}(z_1) + i$  ja että  $c_2 = -\sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_2) + 1)^2} + \operatorname{Re}(z_2) - i$ . Nyt  $\operatorname{Re}(c_1) = -4 + \frac{\sqrt{3}}{2}$  ja  $\operatorname{Re}(c_2) = -3,5 - \frac{\sqrt{15}}{4}$ , joten  $\operatorname{Re}(c_1) > \operatorname{Re}(c_2)$ . Niinpä pisteitä  $z_1$  ja  $z_2$  yhdistävä kvasihyperbolinen geodeesi on kuin lauseessa 4.14.

Oletetaan, että piste  $t$  sekä ympyrät  $C_{k_1, z_1, t}$  ja  $C_{k_2, t, z_2}^-$  ovat kuin lemmassa 4.5. Aluksi on selvitettävä tekijöiden  $t$ ,  $k_1$  ja  $k_2$  arvot. Lemman 4.5 todistuksen nojalla tiedetään, että  $C_{k_1, z_1, t}$  ja  $C_{k_2, t, z_2}^-$  on ovat ulkoisesti tangentit, että ne leikkaavat reaaliakselilla pisteessä  $t$  ja että niiden keskipisteet toteuttavat ehdot  $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(k_1)$  ja  $\operatorname{Re}(z_2) > \operatorname{Re}(k_2)$ . Näin ollen halutut tuntemattomat voidaan selvittää ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{cases}
(\operatorname{Re}(z_1) - \operatorname{Re}(k_1))^2 + (\operatorname{Im}(z_2) - 1)^2 = \operatorname{rad}(C_{k_1, z_1, t})^2 \\
(\operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Re}(k_2))^2 + (\operatorname{Im}(z_2) + 1)^2 = \operatorname{rad}(C_{k_2, t, z_2}^-)^2 \\
(t - \operatorname{Re}(k_1))^2 + 1 = \operatorname{rad}(C_{k_1, z_1, t})^2 \\
(t - \operatorname{Re}(k_2))^2 + 1 = \operatorname{rad}(C_{k_2, t, z_2}^-)^2 \\
(\operatorname{Re}(k_1) - \operatorname{Re}(k_2))^2 + 4 = (\operatorname{rad}(C_{k_1, z_1, t}) + \operatorname{rad}(C_{k_2, t, z_2}^-))^2
\end{cases},$$

kun seuraavat ehdot ovat voimassa:

$$\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(k_1), \operatorname{Re}(z_2) > \operatorname{Re}(k_2), \operatorname{rad}(C_{k_1, z_1, t}) > 0 \text{ ja } \operatorname{rad}(C_{k_2, t, z_2}^-) > 0.$$

Sovelletaan sitten esimerkkiä 3, jolloin halutun etäisyyden kaavaksi tulee

$$k_R(z_1, z_2) = \ln \left[ \frac{\operatorname{rad}(C_{k_1, z_1, t}) + \operatorname{Re}(k_1) - \operatorname{Re}(z_1)}{(1 - \operatorname{Im}(z_1)) (\operatorname{rad}(C_{k_1, z_1, t}) + \operatorname{Re}(k_1) - t)} \right] \\ + \ln \left[ \frac{(\operatorname{Im}(z_2) + 1) (\operatorname{rad}(C_{k_2, t, z_2}^-) + \operatorname{Re}(k_2) - t)}{\operatorname{rad}(C_{k_2, t, z_2}^-) + \operatorname{Re}(k_2) - \operatorname{Re}(z_2)} \right].$$

Ratkaisemalla tuntemattomien tekijöiden arvot numeerisesti ja sijoittamalla ne etäisyyden lausekkeeseen saadaan likiarvoksi

$$k_R(z_1, z_2) \approx 2,22.$$

**Esimerkki 25.** Lasketaan kvasihyperbolinen etäisyys  $k_R(z_1, z_2)$ , kun  $z_1 = -4 + i0,5$  ja  $z_2 = -i0,25$ .

Toimimalla kuten kahdessa edellisessä esimerkissä käy ilmi, että pisteiden  $z_1$  ja  $z_2$  välinen kvasihyperbolinen geodeesi on kuin lauseen 4.13 b)-kohdassa. Edelleen aikaisempien esimerkkien tavoin saadaan etäisyyden lausekkeeksi

$$k_R(z_1, z_2) = \ln \left[ \frac{1 + \operatorname{Re}(c_1) - \operatorname{Re}(z_1)}{1 - \operatorname{Im}(z_1)} \right] + (\operatorname{Re}(c_2) - \operatorname{Re}(c_1)) \\ + \ln \left[ \frac{\operatorname{Im}(z_2) + 1}{1 + \operatorname{Re}(c_2) - \operatorname{Re}(z_2)} \right],$$

missä  $c_1 = \sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_1) - 1)^2} + \operatorname{Re}(z_1) + i$  ja  $c_2 = -\sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_2) + 1)^2} + \operatorname{Re}(z_2) - i$ . Sijoittamalla arvot em. kaavaan saadaan tulokseksi

$$k_R(z_1, z_2) = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{4} + \ln \left[ \frac{(2 + \sqrt{3})(4 + \sqrt{7})}{3} \right] \approx 4,58.$$

**Esimerkki 26.** Lasketaan kvasihyperbolinen etäisyys  $k_R(z_1, z_2)$ , kun  $z_1 = -i0,25$  ja  $z_2 = 3 + i0,75$ .

Kvasihyperbolinen geodeesi on jälleen kuin 4.13 b)-kohdassa. Siispä toimimalla kuten edellisessä esimerkissä 25 saadaan etäisyyden kaavaksi

$$k_R(z_1, z_2) = \ln \left[ \frac{1 + \operatorname{Re}(c_1) - \operatorname{Re}(z_1)}{\operatorname{Im}(z_1) + 1} \right] + (\operatorname{Re}(c_2) - \operatorname{Re}(c_1)) \\ + \ln \left[ \frac{1 - \operatorname{Im}(z_2)}{1 + \operatorname{Re}(c_2) - \operatorname{Re}(z_2)} \right],$$

missä  $c_1 = \sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z_1) + 1)^2} + \operatorname{Re}(z_1) - i$  ja  $c_2 = -\sqrt{1 - (\operatorname{Im}(z) - 1)^2} + \operatorname{Re}(z) + i$ . Asettamalla tekijät etäisyyden kaavaan saadaan tulokseksi

$$k_R(z_1, z_2) = 3 - \frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4} + \ln \left[ \frac{(4 + \sqrt{7})(4 + \sqrt{15})}{3} \right] \approx 4,23.$$

Osoitetaan sitten vastaesimerkillä, ettei ensimmäinen hyperbolinen kosinilause 3.13 ole yleisesti voimassa, kun kvasihyperbolinen geometria asetetaan tasovyöhön.

**Esimerkki 27.** *Olkoot kvasihyperbolisen kolmion  $ABC$  kärkipisteet  $A = -4 + i0,5$ ,  $B = -i0,25$  ja  $C = 3 + i0,75$ . Nyt esimerkkien 23, 25 ja 26 perusteella tiedetään sekä kolmion sivujen muodot että kärkipisteiden väliset etäisyydet.*

*Nyt  $\angle(J_R[A, B], J_R[A, C]) = 0$ , sillä  $J_R[A, B]$  ja  $J_R[A, C]$  jakavat aluksi saman kaaren lähtiessään kärkipisteestä  $A$ . Nyt ensimmäisen hyperbolisen kosinilauseen 3.13 mukaan lausekkeiden  $\cosh(k_R(B, C))$  ja  $\cosh(k_R(A, B)) \cosh(k_R(A, C)) - \sinh(k_R(A, B)) \sinh(k_R(A, C)) \cos(0)$  tulisi olla yhtäsuuria, mutta sijoittamalla niihin edellisten esimerkkien tulokset saadaan*

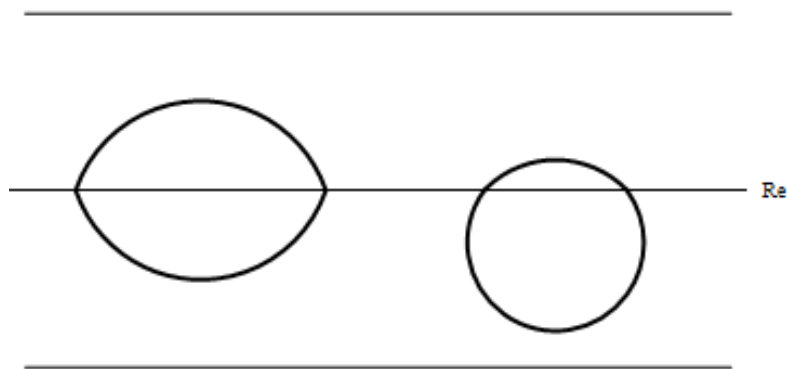
$$\cosh(k_R(B, C)) \approx 34,3$$

*ja*

$$\cosh(k_R(A, B)) \cosh(k_R(A, C)) - \sinh(k_R(A, B)) \sinh(k_R(A, C)) \approx 26,3.$$

Todetaan lopuksi, etteivät kvasihyperboliset ympyrät tasovyössä ole aina euklidisia ympyröitä. Kvasihyperbolisia ympyröitä ja kiekkoja on tutkittu syvällisemmin lähteessä [6].





Kuva 9: Kaksi kvasihyperbolista ympyrää tasovyössä.



## Kirjallisuutta

- [1] J. W. Anderson: *Hyperbolic Geometry, 2. painos*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [2] A. F. Beardon: *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [3] F. W. Gehring ja B. G. Osgood: *Uniform Domains and the Quasihyperbolic Metric*, Journal D'Analyse Mathématique, Vol. 36, s. 50-74, 1979.
- [4] F. W. Gehring ja B. P. Palka: *Quasiconformally Homogeneous Domains*, Journal D'Analyse Mathématique, Vol. 30, s. 172-199, 1976.
- [5] M. Huang, S. Ponnusamy, H. Wang ja X. Wang: *A Cosine Inequality in the Hyperbolic Geometry*, Applied Mathematics Letters, Vol. 23, Num. 8, s. 887-891, 2010.
- [6] R. Klén: *Local Convexity Properties of Metric Balls*, Turku, 2007.
- [7] R. Klén: *On Hyperbolic Type Metrics*, Yliopistopaino, Helsinki, 2009.
- [8] H. Lindén: *Quasihyperbolic Geodesics and Uniformity in Elementary Domains*, Yliopistopaino, Helsinki, 2005.
- [9] G. J. Martin: *Quasiconformal and Bi-Lipschitz Homeomorphisms, Uniform Domains and the Quasihyperbolic Metric*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 292, Num. 1, s. 169-191, 1985.
- [10] G. J. Martin ja B. G. Osgood: *The Quasihyperbolic Metric and Associated Estimates on the Hyperbolic Metric*, Journal D'Analyse Mathématique, Vol. 47, s. 37-53, 1986.
- [11] O. Martio ja J. Väisälä: *Quasihyperbolic Geodesics in Convex Domains II*, Pure and Applied Mathematics Quarterly, Vol. 7, Num. 1, s. 379-393, 2011.
- [12] S. Stahl: *The Poincaré Half-Plane: A Gateway to Modern Geometry*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1993.

- [13] M. Vuorinen ja G. Wang: *Bisection of Geodesic Segments in Hyperbolic Geometry*, Käsikirjoitus, Turun yliopisto, 2011.
- [14] J. Väisälä: *Quasihyperbolic Geodesics in Convex Domains*, Results in Mathematics, Vol. 48, s. 184-195, 2005.