Hilateoria ja Boolen algebrat

Veera Reitti

Pro gradu -tutkielma
Syyskuu 2018

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Reitti, Veera: Hilateoria ja Boolen algebrat
Pro gradu -tutkielma, 43 s.
Matematiikka
Syyskuu 2018

Boolen algebrat ovat erityisiä matemaattisia rakenteita. Ne koostuvat hiloista, jotka ovat samaan aikaan distributiivisia ja komplementoituja. Boolen algebroja voidaan hyödyntää monissa sovelluksissa. Esimerkiksi tässä tutkielmassa perehdytään Boolen algebran sovelluksista kytkentäpiireihin, joita voidaan käyttää moniin eri tarkoituksiin. Putkistojen, virtapiirien tai minkä tahansa kytkimiä sisältävän järjestelmän suunnittelussa voidaan hyödyntää kytkentäpiirien teoriaa.

Tässä tutkielmassa määritellään ensin hila ja käydään läpi hilojen perusominaisuuksia. Näitä pohjatietoja tarvitaan Boolen algebroja määriteltäessä. Tämän jälkeen esitellään distributiiviset hilat ja niiden ominaisuuksia. Distributiivisuus on tärkeä käsite ja distributiiviset hilat omaavat paljon ominaisuuksia, jotka helpottavat niiden kanssa työskentelyä. Näiden esitietojen avulla syvennytään Boolen algebroihin. Sovellusten kannalta tärkeitä ovat Boolen polynomit ja polynomifunktiot. Polynomien avulla saadaan haluttu kytkentäpiiri matemaattiseen muotoon, ja polynomifunktiot kertovat, milloin piirissä kulkee esimerkiksi sähkövirta. Tutkielman lopussa käydään läpi muutama konkreettinen kytkentäpiirin sovellus sekä tutkitaan, miten piirejä suunnitellaan ja miten niistä saadaan yksinkertaisempia.

Tämän tutkielman tavoitteena on antaa lukijalle perustiedot hiloista ja Boolen algebroista sekä osoittaa, että algebroja voidaan hyödyntää myös käytännön sovelluksissa. Tässä tutkielmassa keskitytään sovelluksista kytkentäpiireihin, mutta Boolen algebroja voidaan hyödyntää muillakin tavoin eri sovelluksissa.

Sisältö

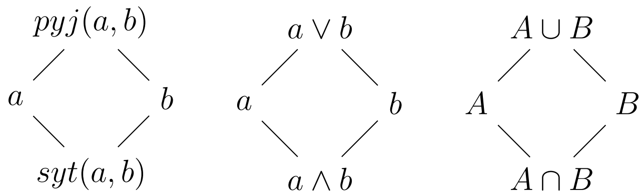
1 Johdanto

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutkitaan hiloja ja Boolen algebroja. Tutkielma perustuu pääosin kirjaan [2]. Kuitenkin luvut 4.2 ja 4.3 on kirjoitettu aineiston [4] avulla. Toisessa luvussa tarkastellaan hilojen perusominaisuuksia ja niiden distributiivisuutta. Erityisesti distributiivisuus on seuraavissa luvuissa tärkeässä roolissa. Tämän myötä kolmannessa luvussa päästään syventymään Boolen algebroihin, jotka ovat sovelluksien kannalta tärkeimpiä hiloja. Luvussa esitellään Boolen algebran määritelmän lisäksi Boolen polynomit ja polynomifunktiot. Näiden polynomien ja polynomifunktioiden avulla saadaan matemaattinen esitys viimeisessä luvussa esiteltäville kytkentäpiireille. Tässä tutkielmassa keskitytään hilojen mahdollisista sovelluksista vain kytkentäpiireihin. Kytkentäpiirien teoriaa voi kuitenkin soveltaa moniin käyttötarkoituksiin kuten putkistojen ja liikennevaloilla varustettujen tieverkostojen suunnitteluun.

Seuraavaksi mainitaan muutama vaihe Boolen algebran historiasta. Vuonna 1854 George Boole (1815-1864) esitteli tärkeän algebrallisten rakenteiden luokan. Häntä kunnioittaen nämä rakenteet nimettiin Boolen algebraksi. Richard Dedekind määritteli nykyisellä terminologialla distributiivisen hilan, mutta vasta 1930 luvun aikoihin hilateorian kehitys alkoi edetä vauhdilla, kun Garrett Birkhoff alkoi panostaa siihen.

2 Hilat

Modernille matematiikalle on tyypillistä, että eri matematiikan osa-alueet johtavat samankaltaisiin tilanteisiin. Tällöin on järkevää koota näiden yhteisiä ominaisuuksia, tutkia niitä ja soveltaa niistä saatua teoriaa moniin muihin aloihin. Esimerkiksi kuvassa 1 on kolme diagrammia, joissa jokaisessa on ylimpänä "vahvin" alkio/joukko ja alimpana "heikoin" alkio/joukko. Keskellä olevat alkiot/joukot eivät ole keskenään vertailtavissa.



Kuva 1: Kolme eri tilannetta, mutta kaikilla on samanlainen diagrammi.

Kuvan 1 ensimmäisessä diagrammissa relaationa on jaollisuus. Alkiot a ja b selvästi jakavat niiden pienimmän yhteisen jaettavan, ja $\mathrm{syt}(a,b)$ selvästi jakaa alkiot a ja b. Sen sijaan kokonaisluvut a ja b eivät välttämättä ole jaollisia toisillaan. Toinen diagrammi koostuu loogisista lausekkeista. Voidaan ajatella, että $a \vee b$ on vahvin, koska se on todennäköisimmin tosi. Lauseke $a \vee b$ on siis tosi, jos a tai b on tosi. Alkiot a ja b ovat keskenään yhtä todennäköisesti tosia, ja $a \wedge b$ on epätodennäköisin, koska siinä sekä alkion a että alkion b pitää olla tosi. Kuvan 1 kolmannen diagrammin relaationa on joukkojen sisältyminen.

Matematiikan yksi tärkeimmistä käsitteistä on relaatio. Erityisesti tärkeitä ovat ekvivalenssirelaatio, funktio ja järjestysrelaatio. Hilateoriassa keskitytään enemmän järjestysrelaatioihin.

2.1 Hilojen perusominaisuuksia

Olkoot A ja B joukkoja. Joukkojen A ja B välinen relaatio R on karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko. Jos pari $(a,b) \in R$, merkitään $a \, R \, b$ ja luetaan "alkio a on relaatiossa R alkion b kanssa". Muulloin merkitään $a \not R \, b$. Jos käsitellään relaatiota R joukossa A, käytetään merkintää (A, R).

Esimerkki 2.1. Olkoot a ja b luonnollisia lukuja eli positiivisia kokonaislukuja. Merkitään luonnollisten lukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{N}$. Eräs näiden lukujen välinen relaatio on jaollisuus. Jaollisuusrelaatiosta käytetään merkintää $|$. Jos b on jaollinen luvulla a ja b ei jaa lukua a, niin merkitään $a|b$ ja $b \nmid a$. Olkoon joukko $D = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x|y\}$. Nyt $(a, b) \in D$ ja $(b, a) \notin D$ kaikilla $a \neq b$.

Relaatiolla R joukossa A voi olla seuraavia ominaisuuksia:

- R on *refleksiivinen*, jos $a\ R\ a$ kaikilla $a \in A$;
- R on *symmetrinen*, jos ehdosta $a\ R\ b$ seuraa $b\ R\ a$ kaikilla $a, b \in A$;
- R on *antisymmetrinen*, jos ehdoista $a\ R\ b$ ja $b\ R\ a$ seuraa $a = b$ kaikilla $a, b \in A$;
- R on *transitiivinen*, jos ehdoista $a\ R\ b$ ja $b\ R\ c$ seuraa $a\ R\ c$ kaikilla $a, b, c \in A$.

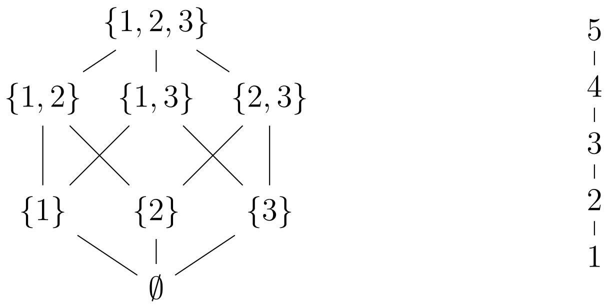
Relaatiota, joka on yhtä aikaa refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, kutsutaan ekvivalenssirelaatioksi.

Määritelmä 2.2. Jos relaatio R joukossa A on refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen, niin relaatiota kutsutaan *osittain järjestetyksi*. Tässä tapauksessa (A, R) on *osittain järjestetty joukko*.

Esimerkki 2.3. Tarkastellaan kuvan 1 ensimmäistä diagrammia ja sen jaollisuusrelaatiota. Olkoon $D = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x|y\}$ ja $a, b \in \mathbb{N}$. Helposti nähdään, että kyseinen jaollisuusrelaatio on refleksiivinen. Se on myös antisymmetrinen, koska ehdoista $a|b$ ja $b|a$ seuraa $a = b$ kaikilla $a, b \in \mathbb{N}$. Tämän lisäksi relaatio on transitiivinen, koska ehdoista $a|b$ ja $b|c$ seuraa $a|c$ kaikilla $a, b, c \in \mathbb{N}$. Näin ollen kuvan 1 diagrammia vastaava joukko on osittain järjestetty joukko.

Yleensä osittaista järjestystä merkitään symbolin R sijaan symboleilla $\leq$ tai $\subseteq$. Osittain järjestettyjä joukkoja voidaan kuvata Hassen diagrammeilla.

Hassen diagrammissa ns. vahvempi alkio on ylempänä kuin heikompi alkio, ja jos nämä ovat relaatiossa keskenään, yhdistetään alkiot viivalla. Kuvassa 2a ei piirretä viivaa joukon $\{1, 2\}$ ja tyhjän joukon välille, koska tämä relaatio käy ilmi esimerkiksi joukon $\{1\}$ kautta kulkevasta viivasta. Kuvan 2a joukko $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ on kaikkien joukon $\{1, 2, 3\}$ osajoukkojen joukko ja $\subseteq$ on joukkojen sisältyvyys. Kuvan 2b joukkoa kutsutaan ketjuksi, koska se ei haaraudu vaan jokainen joukon alkioiden pari on vertailtavissa.



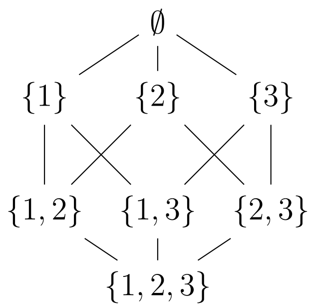
(a) $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ (b) $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \leq)$

Kuva 2: Kaksi esimerkkiä Hassen diagrammista.

Määritelmä 2.4. Olkoon R relaatio joukosta A joukkoon B. Tällöin relaatio R^{-1} joukosta B joukkoon A on relaation R *käänteisrelaatio*, jos

$$(b, a) \in R^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) \in R \quad \forall a \in A, b \in B.$$

Esimerkki 2.5. Kuvassa 2a relaationa $\subseteq$ on joukkojen sisältyminen. Tämän käänteisrelaatio on $\supseteq$. Valitaan alkiot $\{1\}$ ja $\{1, 2\}$, ja tarkastellaan niiden välisiä relaatioita: $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$ ja $\{1, 2\} \supseteq \{1\}$. Käänteisrelaatiota vastaa seuraava Hassen diagrammi:



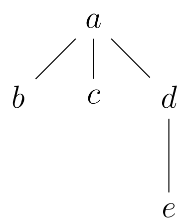
On helppo nähdä, että jos $(A, \leq)$ on osittain järjestetty joukko, niin myös $(A, \geq)$ on osittain järjestetty joukko, missä relaatio $\geq$ on relaation $\leq$ käänteisrelaatio.

Määritelmä 2.6. Olkoon $(A, \leq)$ osittain järjestetty joukko. Alkiota $a \in A$ kutsutaan *suurimmaksi* alkioksi, jos kaikilla $x \in A$ on voimassa $x \leq a$. Toisin sanoen kaikki muut alkiot ovat sitä pienempiä. Vastaavasti alkiota $b \in A$ kutsutaan *pienimmäksi* alkioksi, jos kaikilla $x \in A$ on voimassa $b \leq x$.

Maksimaaliseksi alkioksi kutsutaan alkiota $c \in A$, jos ehdosta $c \leq x$ seuraa $c = x$ kaikilla $x \in A$. Toisin sanoen alkio on maksimaalinen jos mikään alkio ei ole sitä suurempi. Samalla tavalla alkio $d \in A$ on *minimaalinen* alkio, jos ehdosta $x \leq d$ seuraa $d = x$ kaikilla $x \in A$.

Huomautus 2.7. Suurin ja pienin alkio ovat yksikäsitteiset.

Joukolla $(A, \leq)$ on enintään yksi suurin alkio ja enintään yksi pienin alkio. Sen sijaan maksimaalisia tai minimaalisia alkioita voi olla useampia tai ei yhtään. Suurin alkio on myös maksimaalinen ja pienin alkio minimaalinen.



Kuva 3: Hassen diagrammi tilanteesta, jolloin joukolla ei ole minimaalialkiota.

Kuvan 3 joukon suurin ja maksimaalinen alkio on a. Minimaalisia alkioita ovat b, c ja e. Pienintä alkiota ei kuitenkaan ole, koska alkiot b ja c eivät ole relaatiossa alkion e kanssa.

Määritelmä 2.8. Olkoon $(A, \leq)$ osittain järjestetty joukko ja $B \subseteq A$.

(i) Joukon B *ylärajaksi* kutsutaan alkiota $a \in A$, jos $b \leq a$ kaikilla $b \in B$.

(ii) Joukon B *alarajaksi* kutsutaan alkiota $a \in A$, jos $a \leq b$ kaikilla $b \in B$.

(iii) Joukon B suurinta alarajaa, jos se on olemassa, kutsutaan joukon B *infimumiksi*. Siitä käytetään merkintää $\inf B$.

(iv) Joukon B pienintä ylärajaa, jos se on olemassa, kutsutaan joukon B *supremumiksi*. Siitä käytetään merkintää $\sup B$.

Esimerkki 2.9. Olkoot $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$ ja relaationa on $\leq$. Joukon A alarajoja ovat $\{1, 0, -1, -2, \ldots\}$. Näistä alarajoista suurin on 1, joten $\inf A = 1$. Joukolla A ei ole ylärajaa, joten $\sup A$ ei ole olemassa. Joukolla B sen sijaan on olemassa sekä infimum että supremum: $\inf B = 0$ ja $\sup B = 2$. Joukon B infimum ja supremum ovat kuten reaalianalyysissä on määritelty (ks. kirja [1]).

Määritelmä 2.10. Osittain järjestettyä joukkoa $(L, \leq)$ kutsutaan *järjestetyksi hilaksi*, jos kaikille alkiopareille $x, y \in L$ on olemassa supremum ja infimum.

Esimerkki 2.11. Kuvan 2a perusteella voidaan todeta, että joukolla $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ on voimassa muun muassa:

$$\begin{aligned}
&\sup(\emptyset, \{1\}) = \{1\}, && \inf(\emptyset, \{1\}) = \emptyset, \\
&\sup(\{1\}, \{1\}) = \{1\}, && \inf(\{1\}, \{1\}) = \{1\}, \\
&\sup(\{1\}, \{2\}) = \{1, 2\}, && \inf(\{1\}, \{2\}) = \emptyset, \\
&\sup(\{1\}, \{1, 2\}) = \{1, 2\}, && \inf(\{1\}, \{1, 2\}) = \{1\}.
\end{aligned}$$

Helposti nähdään, että joukon $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ kaikille muillekin alkiopareille on olemassa supremum ja infimum. Näin ollen $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ on järjestetty hila. Samalla tavalla joukko $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ on myös järjestetty hila (ks. kuva 2b). Itseasiassa jokainen ketju on järjestetty hila, koska kaikki ketjun alkiot ovat keskenään relaatiossa. Sen sijaan kuvan 3 diagrammi ei ole hila, koska esimerkiksi $\inf(b, c)$ ei ole olemassa.

Järjestetyssä hilassa $(L, \leq)$ kaikilla $x, y \in L$ seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:

1. $x \leq y$;
2. $\sup(x, y) = y$;
3. $\inf(x, y) = x$.

Määritelmä 2.12. *Algebrallinen hila* $(L, \wedge, \vee)$ on joukko L, jolla on kaksi binäärioperaatiota $\wedge$ ja $\vee$, ja se toteuttaa seuraavat laskulait kaikilla $x, y, z \in L$:

- $x \wedge y = y \wedge x$, $\quad x \vee y = y \vee x$ (kommutatiivisuus),
- $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $\quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (assosiatiivisuus),
- $x \wedge (x \vee y) = x$, $\quad x \vee (x \wedge y) = x$ (absorptio),
- $x \wedge x = x$, $\quad x \vee x = x$ (idempotenttisuus).

Idempotenttisuus seuraa myös suoraan absorptiolaista: $x \wedge x = x \wedge (x \vee (x \wedge x)) = x$ ja samoin $x \vee x = x$.

Seuraava lemma muotoilee uudelleen infimumin ja supremumin määritelmät.

Lemma 2.13 ([3])**.** Jos $(A, \leq)$ on osittain järjestetty joukko ja $a, b, c \in A$, niin $c = \sup(a, b)$ jos ja vain jos

1. $a \leq c$, $b \leq c$, ja
2. $c \leq d$ kaikilla $d \in A$, jolle on voimassa $a \leq d$ ja $b \leq d$.

Samalla tavalla $c = \inf(a, b)$ jos ja vain jos

1. $c \leq a$, $c \leq b$, ja
2. $d \leq c$ kaikilla $d \in A$, jolle on voimassa $d \leq a$ ja $d \leq b$.

Lause 2.14.

(i) Olkoon $(L, \leq)$ järjestetty hila. Jos merkitään

$$x \wedge y = \inf(x, y) \text{ ja } x \vee y = \sup(x, y),$$

niin $(L, \wedge, \vee)$ on algebrallinen hila.

(ii) Olkoon $(L, \wedge, \vee)$ algebrallinen hila. Jos määritellään

$$x \leq y \;\Leftrightarrow\; x \wedge y = x \quad (\text{tai} \quad x \leq y \;\Leftrightarrow\; x \vee y = y),$$

niin $(L, \leq)$ on järjestetty hila.

Todistus. (i) Olkoon $(L, \leq)$ järjestetty hila. Kaikille $x, y, z \in L$ pätee:

- **Kommutatiivisuus**:

  Kahden alkion suurin alaraja ja pienin yläraja ei muutu, vaikka alkioiden paikkaa vaihtaisi, joten saadaan

  $$x \wedge y = \inf(x, y) = \inf(y, x) = y \wedge x$$
  $$\text{ja}$$
  $$x \vee y = \sup(x, y) = \sup(y, x) = y \vee x.$$

- **Assosiatiivisuus**:

  Todistetaan ensin, että $\inf(x, \inf(y, z)) = \inf(x, y, z)$. Olkoon $s = \inf(y, z)$ ja $t = \inf(x, s)$. Tästä seuraa, että $t \leq x$ ja $t \leq s$ eli $t \leq x, y, z$. Nyt siis t on jokin joukon $\{x, y, z\}$ alaraja.

  Seuraavaksi todistetaan, että t on joukon $\{x, y, z\}$ suurin alaraja. Oletetaan, että $r \leq x, y, z$. Siis $r \leq y$ ja $r \leq z$. Koska $s = \inf(y, z)$, niin $r \leq s$. Nyt on siis voimassa, että $r \leq x$ ja $r \leq s$. Koska $t = \inf(x, s)$, niin $r \leq t$. Näin ollen t on suurin alaraja.

  Samoin voidaan näyttää, että $\inf(\inf(x, y), z) = \inf(x, y, z)$ ja $\sup(x, \sup(y, z)) = \sup(x, y, z) = \sup(\sup(x, y), z)$. Näiden avulla saadaan todistettua järjestetyn hilan assosiatiivisuus:

  $$\begin{aligned} x \wedge (y \wedge z) &= x \wedge \inf(y, z) = \inf(x, \inf(y, z)) = \inf(x, y, z) \\ &= \inf(\inf(x, y), z) = \inf(x, y) \wedge z = (x \wedge y) \wedge z, \end{aligned}$$

  ja samoin $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

- **Absorptio**:

  Olkoon $\sup(x, y) = c$. Tällöin $x \leq c$, joten $\inf(x, c) = x$. Saadaan

  $$x \wedge (x \vee y) = x \wedge \sup(x, y) = \inf(x, \sup(x, y)) = x.$$

Olkoon $\inf(x, y) = d$. Tällöin $d \leq x$, joten $\sup(x, d) = x$. Saadaan

$$x \vee (x \wedge y) = x \vee \inf(x, y) = \sup(x, \inf(x, y)) = x.$$

(ii) Olkoon $(L, \wedge, \vee)$ algebrallinen hila. Oletetaan, että $x, y, z \in L$. Koska $x \wedge x = x$ ja $x \vee x = x$, niin $x \leq x$ ja relaatio $\leq$ on **refleksiivinen**. Jos $x \leq y$ ja $y \leq x$, tällöin $x \wedge y = x$ ja $y \wedge x = y$. Kommutatiivisuuden nojalla $x \wedge y = y \wedge x$, joten $x = y$ ja relaatio $\leq$ on **antisymmetrinen**. Jos $x \leq y$ ja $y \leq z$, niin $x \wedge y = x$ ja $y \wedge z = y$. Tällöin

$$x = x \wedge y = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z.$$

Tästä seuraa, että $x \leq z$ ja relaatio $\leq$ on **transitiivinen**.

Olkoot x, $y \in L$. Tällöin ehdosta $x \wedge (x \vee y) = x$ seuraa $x \leq x \vee y$ ja samoin ehdosta $y \wedge (x \vee y) = y$ seuraa $y \leq x \vee y$. Jos $z \in L$ täyttää ehdot $x \leq z$ ja $y \leq z$, niin $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y$ ja siten $x \wedge y \leq z$. Tästä seuraa, että $\sup(x, y) = x \vee y$. Samoin voidaan näyttää, että $\inf(x, y) = x \wedge y$. Näin ollen $(L, \leq)$ on järjestetty hila.

□

Tästä eteenpäin käytetään sekä hilajärjestetyistä joukoista että algebrallisista hiloista nimitystä hila.

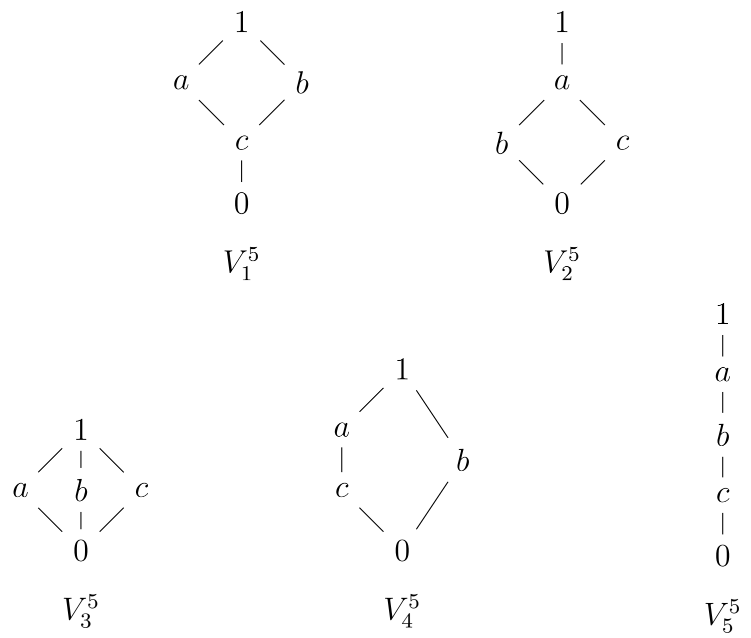
Huomautus 2.15. Jos N on osittain järjestetyn joukon osajoukko, niin $\bigvee_{x \in N} x$ ja $\bigwedge_{x \in N} x$ tarkoittavat joukon N supremumia ja infimumia.

Huomautus 2.16. Mikä tahansa operaatioiden $\wedge$ ja $\vee$ lauseke, joka on voimassa jossakin hilassa $(L, \wedge, \vee)$, on voimassa myös, vaikka operaatio $\wedge$ korvattaisiin kaikkialla lausekkeessa operaatiolla $\vee$ ja $\vee$ korvattaisiin kaikkialla operaatiolla $\wedge$. Tällöin myös relaatiot $\leq$ ja $\geq$ vaihtuvat toisikseen. Tätä kutsutaan *dualisoinniksi.*

Yllä olevan huomautuksen voimassaolo seuraa siitä, että mikä tahansa määritelmän 2.12 lausekkeiden avulla johdettava hilan lauseke pysyy voimassaolevana, vaikka symbolit $\wedge$ ja $\vee$ ja vastaavasti $\leq$ ja $\geq$ vaihdettaisiin päittäin kaikkialla lausekkeessa.

Määritelmä 2.17. Jos hilassa L on operaation $\leq$ suhteen pienin alkio, tätä yksikäsitteistä alkiota kutsutaan *nolla-alkioksi* ja merkitään luvulla 0. Samoin yksikäsitteistä suurinta alkiota kutsutaan *neutraalialkioksi* ja merkitään luvulla 1. Alkioita 0 ja 1 kutsutaan universaaleiksi rajoiksi. Jos ne ovat olemassa, L on *rajoitettu.*

Jokainen äärellinen hila on rajoitettu, koska määritelmän 2.10 ja lauseen 2.14 mukaan kaikilla hiloilla on voimassa, että jokaiselle hilan alkioparille on olemassa infimum ja supremum ja näin ollen äärellisellä hilalla on pienin ja suurin alkio. Jos hila L on rajoitettu, jokaiselle $x \in L$ pätee $0 \leq x \leq 1$, $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 0 = x$, $x \wedge 1 = x$ ja $x \vee 1 = 1$. Kuvassa 4 on kaikki mahdolliset viisialkioisen hilan Hassen diagrammit. Vahvimpana alkiona diagrammeissa on tietysti 1 ja heikoimpana 0. Merkintä V_i^n tarkoittaa i:nnettä hilaa, jossa on n alkiota.



Kuva 4: Kaikki erilaiset viisialkioisen hilan Hassen diagrammit.

Koska viisialkioinen hila on äärellinen, se on rajoitettu. Ylärajana ja samalla Hassen diagrammissa ylimpänä alkiona on 1. Vastaavasti alarajana ja alimpana alkiona on 0. Hilan loput kolme alkiota ovat näiden rajojen välissä, ja kokeilemalla voidaan todeta, ettei ole olemassa muita viiden alkion hiloja kuin yllä olevien Hassen diagrammien määrittelemät.

Alla on kuvan 4 hilan V_4^5 operaatiotaulukot. Taulukoissa on taulukoituna kaikki $x \wedge y$ ja $x \vee y$ arvot hilan alkioille x ja y.

$\wedge$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	c	a
b	0	0	b	0	b
c	0	c	0	c	c
1	0	a	b	c	1

$\vee$	0	a	b	c	1
0	0	a	b	c	1
a	a	a	1	a	1
b	b	1	b	1	1
c	c	a	1	c	1
1	1	1	1	1	1

Lemma 2.18. Jokaisessa hilassa L ehdosta $y \leq z$ seuraa $x \wedge y \leq x \wedge z$ ja $x \vee y \leq x \vee z$.

Todistus. Ehdosta $y \leq z$ seuraa $x \wedge y = (x \wedge x) \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge (x \wedge z)$, josta seuraa $x \wedge y \leq x \wedge z$. Dualisoinnin nojalla toinenkin tapaus on todistettu. □

Lause 2.19. Mielivaltaisen hilan alkiot toteuttavat seuraavat distributiiviset epäyhtälöt:

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

ja

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Todistus. Koska $x \wedge y \leq x$ ja $x \wedge y \leq y \leq y \vee z$, niin $x \wedge y \leq x \wedge (y \vee z)$ ja samalla tavalla $x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z)$. Nyt $x \wedge (y \vee z)$ on sekä lausekkeen $(x \wedge y)$ että lausekkeen $(x \wedge z)$ yläraja, ja tästä seuraa ylempi epäyhtälö. Dualisoimalla nähdään, että toinenkin epäyhtälö pätee. □

Määritelmä 2.20. Osajoukkoa $S \subseteq L$ kutsutaan hilan L *alihilaksi*, jos kaikilla x, $y \in S$ on voimassa $x \wedge y \in S$ ja $x \vee y \in S$.

Tyhjäjoukko ja kaikki yksialkioiset osajoukot ovat alihiloja. Hilan L alihiloja ovat myös välit:

$$[x, y] = \{a \in L \mid x \leq a \leq y;\ x, y \in L\}.$$

Esimerkki 2.21. Olkoon L kuvan 2a Hassen diagrammia vastaava hila, ja olkoon $S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2,3\}\}$. Nyt S on hila sisältymisen suhteen ja, se on hilan L osajoukko. Hila S ei kuitenkaan ole hilan L alihila, koska esimerkiksi $\sup(\{1\},\{2\}) = \{1,2\} \notin S$.

Määritelmä 2.22. Olkoot L ja M hiloja. Kuvausta $f : L \to M$ kutsutaan:

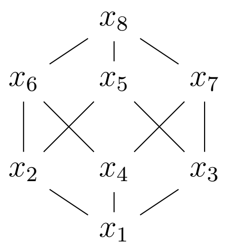
(i) *liittomorfismiksi* (join-morphism), jos $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$;

(ii) *kohtaamismorfismiksi* (meet-morphism), jos $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$;

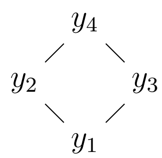
(iii) *järjestysmorfismiksi* (order-morphism), jos $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;

kaikilla x, $y \in L$. Kuvaus f on *homomorfismi*, jos se on sekä liittomorfismi että kohtaamismorfismi. Injektiivistä, surjektiivista ja bijektiivistä homomorfismia kutsutaan vastaavasti *monomorfismiksi*, *epimorfismiksi* ja *isomorfismiksi*. Jos $f : L \to M$ on homomorfismi, niin $f(L)$ on hilan L homomorfinen kuva. Tämä $f(L)$ on hilan M alihila, koska $f(L)$ on hilan M osajoukko ja $f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y) \in f(L)$ sekä $f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) \in f(L)$ kaikilla $x, y \in L$. Jos on olemassa isomorfismi hilasta L hilaan M, ovat L ja M isomorfiset, ja merkitään $L \cong M$.

Esimerkki 2.23. Olkoot hiloilla L_1 ja L_2 seuraavanlaiset Hassen diagrammit:



L_1



L_2

Määritellään kuvaus f siten, että

$$\begin{aligned} f : L_1 \to L_2; \quad & f(x_1) = f(x_4) = y_1,\ f(x_2) = f(x_6) = y_2, \\ & f(x_3) = f(x_7) = y_3,\ f(x_5) = f(x_8) = y_4. \end{aligned}$$

Kuvaus f on järjestysmorfismi, koska ehdosta $x_i \leq x_j$ seuraa $f(x_i) \leq f(x_j)$ kaikilla i, $j \in \{1, 2, \ldots, 8\}$. Tämän lisäksi f on liitto- ja kohtaamismorfismi, sillä $f(x_i \vee x_j) = f(x_i) \vee f(x_j)$ ja $f(x_i \wedge x_j) = f(x_i) \wedge f(x_j)$ kaikilla $i, j \in \{1, 2, \ldots, 8\}$. Siis kuvaus f on homomorfismi. Se ei kuitenkaan ole isomorfinen kuvaus, koska f ei ole bijektiivinen.

Määritelmä 2.24. Olkoot L ja M hiloja. Hilojen L ja M *suoratulo* $L \times M$ on järjestettyjen parien joukko

$$\{(x, y) \mid x \in L, y \in M\},$$

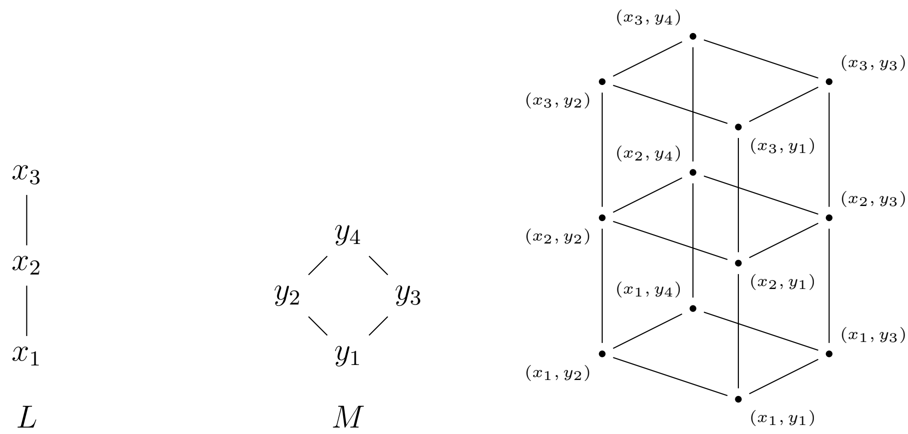
jossa operaatiot $\vee$ ja $\wedge$ määritellään seuraavasti:

$$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2),$$

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2).$$

Useamman hilan suoratulo toimii samalla tavalla. On suoraviivaista todeta, että hilojen suoratulo on myös hila. Koska L ja M ovat hiloja, niin ne toteuttavat algebrallisen hilan määritelmän. Tällöin ylläolevien yhtälöiden oikeapuoli toteuttaa algebrallisen hilan määritelmän (määr. 2.12), ja suoratulo on siis algebrallinen hila. Lauseesta 2.14 seuraa vastaavuus osittaisjärjestykseen. Suorassa tulossa $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ jos ja vain jos $x_1 \leq x_2$ ja $y_1 \leq y_2$.

Esimerkki 2.25. Hilojen L ja M suoratulo voidaan myös esittää Hassen diagrammilla:



$L \times M$

2.2 Distributiiviset hilat

Seuraavaksi tarkastellaan tietynlaisia hiloja, joiden avulla voidaan määritellä Boolen algebrat. Boolen algebrat muodostavat rikkaan ja monipuolisen algebrallisen rakenteen.

Määritelmä 2.26. Hila L on *distributiivinen*, jos se toteuttaa distributiivilait:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

kaikilla x, y, $z \in L$.

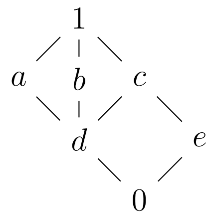
Lause 2.27. Hila on distributiivinen, jos ja vain jos se ei sisällä timantin tai pentagonin kanssa isomorfista alihilaa.

Timantti *Pentagoni*

Kuva 5: Hila, jonka Hassen diagrammi on timantti tai pentagoni, ei ole distributiivinen.

Helposti nähdään, että timantin tai pentagonin sisältävä hila ei ole distributiivinen. Todistus toiseen suuntaan on työläs, joten sivuutetaan se. Timantti ei ole distributiivinen, koska kuvan 5 mukaan $a \vee (b \wedge c) = a \neq 1 = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Pentagoni ei myöskään ole distributiivinen, koska $a \wedge (b \vee c) = a \neq c = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Jokainen ketju on distributiivinen hila.

Esimerkki 2.28. Olkoon hilan Hassen diagrammi kuten alla.



Tällöin hila ei ole distributiivinen, koska se sisältää timantin $\{d, c, b, a, 1\}$ alihilanaan.

Lause 2.29. Hila L on distributiivinen, jos ja vain jos ehdoista $x \wedge y = x \wedge z$ ja $x \vee y = x \vee z$ seuraa $y = z$ kaikilla x, y, $z \in L$.

Todistus. Jos hila on distributiivinen ja on voimassa $x \wedge y = x \wedge z$ ja $x \vee y = x \vee z$, saadaan

$$\begin{aligned} y &= y \vee (x \wedge y) = y \vee (x \wedge z) = (y \vee x) \wedge (y \vee z) \\ &= (x \vee y) \wedge (y \vee z) = (x \vee z) \wedge (y \vee z) = z \vee (x \wedge y). \end{aligned}$$

Tästä seuraa $z \leq y$. Samalla tavalla saadaan $y \leq z$, joten $y = z$.

Tehdään vastaoletus, että hila L ei ole distributiivinen. Tällöin L sisältää alihilanaan timantin tai pentagonin (ks. kuva 5). Nyt kummasakin tapauksessa $b \wedge a = 0 = b \wedge c$ ja $b \vee a = 1 = b \vee c$, mutta $a \neq c$. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten väite on tosi. □

Määritelmä 2.30. Hilaa L kutsutaan *komplementoiduksi*, jos jokaiselle $x \in L$ on olemassa ainakin yksi sellainen alkio y, että $x \wedge y = 0$ ja $x \vee y = 1$. Tällaista alkiota y kutsutaan alkion x *komplementiksi* ja siitä käytetään merkintää x'.

Huomataan, että $(x')' = x$.

Esimerkki 2.31. Kuvan 2 Hassen diagrammista nähdään, että $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ ei sisällä alihilanaan timantin tai pentagonin kanssa isomorfista hilaa. Näin ollen $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ on distributiivinen. Kyseinen hila on myös komplementoitu, sillä sen jokaisella alkiolla on komplementti: $\{1, 2, 3\}' = \emptyset$, $\{1, 2\}' = \{3\}$, $\{1, 3\}' = \{2\}$, $\{2, 3\}' = \{1\}$, $\emptyset' = \{1, 2, 3\}$, $\{1\}' = \{2, 3\}$, $\{2\}' = \{1, 3\}$ ja $\{3\}' = \{1, 2\}$.

Yleisestikin muotoa $\mathcal{P}(M)$ oleva hila, jonka järjestysrelaationa on sisältyminen $\subseteq$, on distributiivinen, koska seuraavat ominaisuudet ovat tunnetusti voimassa kaikille $A, B, C \subseteq M$:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ja
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Esimerkki 2.32.

(i) Olkoon $L = \mathcal{P}(M)$. Tällöin $B = M \setminus A$ on joukon A yksikäsitteinen komplementti.

(ii) Rajoitetussa hilassa neutraalialkio 1 on nolla-alkion 0 komplementti ja päinvastoin.

(iii) Jokainen ketju, jossa on enemmän kuin kaksi alkiota, ei ole komplementoitu.

(iv) Alkion komplementti ei ole yksikäsitteinen. Esimerkiksi kuvan 5 timantin alkion a komplementit ovat alkiot b ja c.

Lause 2.33. Jos L on distributiivinen hila, niin jokaisella $x \in L$ on enintään yksi komplementti.

Todistus. Oletetaan, että alkion $x \in L$ komplementit ovat y_1 ja y_2. Tästä seuraa, että $x \vee y_1 = 1 = x \vee y_2$ ja $x \wedge y_1 = 0 = x \wedge y_2$. Nyt lauseen 2.29 mukaan $y_1 = y_2$. □

3 Boolen algebra

Boolen algebrat ovat erityisiä hiloja, joista on hyötyä esimerkiksi logiikan tutkimuksissa. Boolen algebraa voidaan soveltaa myös kytkentäpiireihin, joita tarkastellaan tarkemmin viimeisessä luvussa.

3.1 Lauseita ja määritelmiä

Määritelmä 3.1. Jos hila on distributiivinen ja komplementoitu, niin sitä kutsutaan *Boolen algebraksi* tai *Boolen hilaksi*.

Lauseen 2.33 perusteella Boolen algebrojen distributiivisuus takaa komplementtien yksikäsitteisyyden.

Huomautus 3.2. Tästä eteenpäin symbolilla B merkitään joukkoa, jolla on binäärioperaatioina $\wedge$ ja $\vee$, nolla-alkiona 0, neutraalialkiona 1 ja unaarioperaattorina (eli yhteen muuttujaan kohdistuvana operaattorina) komplementti $'$. Siis merkitään $B = (B, \wedge, \vee, 0, 1,')$.

Esimerkki 3.3.

(i) Joukko $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, \emptyset, M,')$ on joukon M osajoukkojen joukon Boolen algebra. Tässä $\cap$ ja $\cup$ ovat joukko-opin mukaiset leikkaus ja unioni. Joukko $\mathcal{P}(M)$ on distributiivinen kuten aiemmin todettiin. Esimerkin 2.32 kohdan (i) mukaisesti $A' = M \setminus A$. Nolla-alkiona on $\emptyset$ ja neutraalialkiona M. Jos joukolla M on $n \in \mathbb{N}$ alkiota, niin joukolla $\mathcal{P}(M)$ on 2^n alkiota.

(ii) Olkoon $\mathbb{B}$ kaksialkioinen hila, jonka operaatioiden määritelmät ovat

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

	$'$
0	1
1	0

Tällöin $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, 0, 1,')$ on Boolen algebra. Jos $n \in \mathbb{N}$, voidaan $\mathbb{B}^n$ muuttaa Boolen algebraksi määritelmän 2.24 avulla:

$$\begin{aligned}
(i_1, \ldots, i_n) \wedge (j_1, \ldots, j_n) &= (i_1 \wedge j_1, \ldots, i_n \wedge j_n), \\
(i_1, \ldots, i_n) \vee (j_1, \ldots, j_n) &= (i_1 \vee j_1, \ldots, i_n \vee j_n), \\
(i_1, \ldots, i_n)' &= (i_1', \ldots, i_n'),
\end{aligned}$$

ja $0 = (0, \ldots, 0)$ sekä $1 = (1, \ldots, 1)$.

Lause 3.4. Boolen algebrojen suoratulo on myös Boolen algebra.

Todistus. Olkoot A ja B Boolen algebroja. Tällöin A ja B ovat distributiivisia ja komplementoituja. Näytetään ensin, että suoratulo distributiivinen:

$$\begin{aligned}(a_1,b_1)\vee\big((a_2,b_2)\wedge(a_3,b_3)\big) &= (a_1,b_1)\vee\big((a_2\wedge a_3),\ (b_2\wedge b_3)\big)\\ &= \big(a_1\vee(a_2\wedge a_3),\ b_1\vee(b_2\wedge b_3)\big)\\ &= \big((a_1\vee a_2)\wedge(a_1\vee a_3),\ (b_1\vee b_2)\wedge(b_1\vee b_3)\big)\\ &= \big((a_1\vee a_2),\ (b_1\vee b_2)\big)\wedge\big((a_1\vee a_3),\ (b_1\vee b_3)\big)\\ &= \big((a_1,b_1)\vee(a_2,b_2)\big)\wedge\big((a_1,b_1)\vee(a_3,b_3)\big)\end{aligned}$$

kaikilla $a_1,a_2,a_3\in A$ ja $b_1,b_2,b_3\in B$. Samalla tavalla saadaan

$$(a_1,b_1)\wedge\big((a_2,b_2)\vee(a_3,b_3)\big) = \big((a_1,b_1)\wedge(a_2,b_2)\big)\vee\big((a_1,b_1)\wedge(a_3,b_3)\big).$$

Näytetään seuraavaksi, että suoratulo on myös komplementoitu ja että $(a,b)'=(a',b')$ kaikilla $(a,b)\in A\times B$:

$$\begin{aligned}(a,b)\wedge(a,b)' &= (a,b)\wedge(a',b') = \big((a\wedge a'),\ (b\wedge b')\big) = (0,0) \text{ ja}\\ (a,b)\vee(a,b)' &= (a,b)\vee(a',b') = \big((a\vee a'),\ (b\vee b')\big) = (1,1).\end{aligned}$$

□

Lause 3.5. (De Morganin lait) Boolen algebrassa B kaikilla $x,y\in B$ on voimassa

$$(x\wedge y)' = (x'\vee y') \quad \text{ja} \quad (x\vee y)' = (x'\wedge y').$$

Todistus. Kaikilla $x,y\in B$ on voimassa

$$\begin{aligned}(x\wedge y)\vee(x'\vee y') &= (x\vee x'\vee y')\wedge(y\vee x'\vee y')\\ &= (1\vee y')\wedge(1\vee x')\\ &= 1\wedge 1 = 1.\end{aligned}$$

Samalla tavalla saadaan $(x\wedge y)\wedge(x'\vee y') = (x\wedge y\wedge x')\vee(x\wedge y\wedge y') = 0$. Näin ollen lausekkeen $x\wedge y$ komplementti on $x'\vee y'$. Toinen De Morganin laki seuraa tästä dualisuuden nojalla. Huomataan, että dualisoinnin myötä 0 ja 1 muuttuvat toisikseen. □

Lause 3.6. Jos B on Boolen algebra, niin kaikilla $x, y \in B$ on voimassa

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x' \geq y'.$$

Todistus. De Morganin lakien avulla saadaan $x \leq y \;\Leftrightarrow\; x \vee y = y \;\Leftrightarrow\; x' \wedge y' = (x \vee y)' = y' \;\Leftrightarrow\; x' \geq y'$. □

Lause 3.7. Jos B on Boolen algebra, niin kaikilla $x, y \in B$ on voimassa

$$x \leq y \;\Leftrightarrow\; x \wedge y' = 0 \;\Leftrightarrow\; x' \vee y = 1 \;\Leftrightarrow\; x \wedge y = x \;\Leftrightarrow\; x \vee y = y.$$

Todistus. Aiemman mukaan tiedetään, että $x \leq y \;\Leftrightarrow\; x \wedge y = x \;\Leftrightarrow\; x \vee y = y$, joten todistetaan tässä vain ekvivalenssit $x \leq y \;\Leftrightarrow\; x \wedge y' = 0$ ja $x \wedge y' = 0 \;\Leftrightarrow\; x' \vee y = 1$.

- Osoitetaan, että $x \wedge y' = 0 \Rightarrow x' \vee y = 1$. Oletuksesta $x \wedge y' = 0$ saadaan $(x \wedge y')' = 0' \Leftrightarrow x' \vee y = 1$ ottamalla yhtälöstä komplementit puolittain.

- Yllä olevalla tavalla osoitetaan myös, että $x' \vee y = 1 \Rightarrow x \vee y' = 0$.

$$\begin{aligned} x' \vee y &= 1 \quad \| \;(\;)' \\ (x' \vee y)' &= 1' \\ x \wedge y' &= 0 \end{aligned}$$

- Osoitetaan, että $x \leq y \Rightarrow x \wedge y' = 0$. Oletuksesta $x \leq y$ saadaan $x = x \wedge y$. Assosiatiivisuuden nojalla on voimassa $(x \wedge y) \wedge y' = x \wedge (y \wedge y')$, joten saadaan

$$x \wedge y' = (x \wedge y) \wedge y' = x \wedge (y \wedge y') = x \wedge 0 = 0$$

- Lopuksi osoitetaan, että $x \wedge y' = 0 \Rightarrow x \leq y$. Oletuksesta $x \wedge y' = 0$ ja hilan distributiivisuudesta saadaan:

$$\begin{aligned} x \wedge y &= (x \wedge y) \vee (x \wedge y') \\ &= (x \vee x) \wedge (y \vee y') \\ &= x \wedge (y \vee y') \\ &= x \wedge 1 = x \end{aligned}$$

Tämän perusteella $x \leq y$. □

Esimerkki 3.8. Esimerkissä 3.3 todetaan, että hila $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ on distributiivinen ja komplementoitu. Siis se on Boolen algebra. Näytetään Boolen algebran $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ avulla esimerkit lauseista 3.5 - 3.7:

1. $(\{1,2\} \cap \{1\})' = (\{1\})' = \{2,3\} = \{3\} \cup \{2,3\} = \{1,2\}' \cup \{1\}'$ ja $(\{1,2\} \cup \{1\})' = (\{1,2\})' = \{3\} = \{3\} \cap \{2,3\} = \{1,2\}' \cap \{1\}'$.

2. $\{1\} \subseteq \{1,2\}$ ja $\{2,3\} \supseteq \{3\}$.

3. $\{1\} \subseteq \{1,2\}$, $\{1\} \cap \{1,2\}' = \{1\} \cap \{3\} = \emptyset$, $\{1\}' \cup \{1,2\} = \{2,3\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3\}$, $\{1\} \cap \{1,2\} = \{1\}$ ja $\{1\} \cup \{1,2\} = \{1,2\}$.

Määritelmä 3.9. Olkoot B_1 ja B_2 Boolen algebroja. Kuvausta $f : B_1 \to B_2$ kutsutaan *Boolen homomorfismiksi* joukosta B_1 joukkoon B_2, jos f on (hila)homomorfismi ja kaikilla $x \in B_1$ on voimassa $f(x') = (f(x))'$.

Boolen *monomorfismi* on injektiivinen Boolen homomorfismi ja Boolen *isomorfismi* on bijektiivinen Boolen homomorfismi. Joukkojen B_1 ja B_2 välisestä Boolen isomorfismista käytetään merkintää $B_1 \cong_b B_2$.

Esimerkki 3.10. Olkoot $L_1 = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ ja $L_2 = \mathcal{P}(\{1,2\})$ hiloja. Määritellään kuvaus $f : L_1 \to L_2$ seuraavasti: $f(\emptyset) = f(\{2\}) = \emptyset$, $f(\{1\}) = f(\{1,2\}) = \{1\}$, $f(\{1,3\}) = f(\{1,2,3\}) = \{1,2\}$, $f(\{3\}) = f(\{2,3\}) = \{2\}$. Esimerkin 2.23 nojalla f on hilahomomorfismi. Se ei kuitenkaan ole Boolen homomorfismi, koska esimerkiksi

$$f(\{2\}') = f(\{1,3\}) = \{1,2\} \neq \{1,2,3\} = \emptyset' = (f(\{2\}))'.$$

Määritelmä 3.11 ([3])**.** Olkoon B Boolen algebra. Algebra $A = (A, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ on Boolen algebran $B = (B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ *alialgebra*, jos $A \subseteq B$ ja joukon A operaatiot vastaavat joukon B operaatioita rajoitettuna joukkoon A.

Huomaa, että Boolen algebran B ja sen alialgebran A nolla-alkio ja neutraalialkio täytyvät olla samat.

Lause 3.12. Olkoon $f : B_1 \to B_2$ Boolen homomorfismi. Tällöin

(i) $f(0) = 0,\ f(1) = 1$;

(ii) kaikilla $x, y \in B_1$ on voimassa ehdot $x \leq y \ \Rightarrow\ f(x) \leq f(y)$;

(iii) $f(B_1)$ on Boolen algebra ja joukon B_2 Boolen alialgebra.

Todistus.

(i) Koska f on Boolen homomorfismi, niin määritelmän mukaan saadaan

$$f(0) = f(x \wedge x') = f(x) \wedge f(x') = f(x) \wedge (f(x))' = 0 \text{ ja}$$
$$f(1) = f(x \vee x') = f(x) \vee f(x') = f(x) \vee (f(x))' = 1.$$

(ii) Homomorfismista ja ehdosta $x \leq y$ seuraa $f(x) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, joten $f(x) \leq f(y)$.

(iii) Joukko $f(B_1)$ on Boolen algebra, jos se on distributiivinen ja komplementoitu. Kaikilla $x, y, z \in B_1$

$$\begin{aligned} f(x) \vee (f(y) \wedge f(z)) &= f(x) \vee f(y \wedge z) = f(x \vee (y \wedge z)) \\ &= f((x \vee y) \wedge (x \vee z)) = f(x \vee y) \wedge f(x \vee z) \\ &= (f(x) \vee f(y)) \wedge (f(x) \vee f(z)). \end{aligned}$$

Samalla tavalla saadaan toinenkin distributiivisuuden ehto. Oletetaan, että $x \in B_1$. Koska B_1 on Boolen algebra, niin $x' \in B_1$. Tällöin $f(x') = (f(x))' \in f(B_1)$, joten $f(B_1)$ on komplementoitu. Selvästi $f(B_1) \subseteq B_2$. Koska $(x \wedge y), (x \vee y) \in B_1$ ja kuvaus f on Boolen homomorfismi, niin $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \in f(B_1)$ ja $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \in f(B_1)$. Lisäksi $f(0) = 0 \in f(B_1)$ ja $f(1) = 1 \in f(B_1)$. Näin ollen $f(B_1)$ on Boolen algebran B_2 alialgebra.

$\square$

Esimerkki 3.13. Jos $M \subset N$, kuvaus $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$, $A \mapsto A$ on (hila)monomorfismi. Se ei kuitenkaan ole Boolen monomorfismi, koska joukon $A \in \mathcal{P}(M)$ komplementit joukoissa M ja N ovat erisuuret. Lisäksi $f(1) = f(M) = M \neq N$, joka on joukon $\mathcal{P}(N)$ neutraalialkio.

Esimerkki 3.14. Olkoot B_1 ja B_2 Boolen algebroja, ja olkoot niiden Hassen diagrammit kuten alla.

B_1 B_2

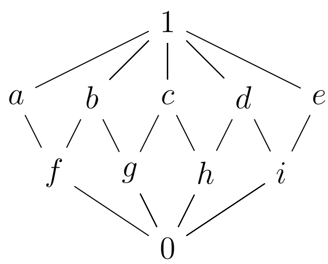
Määritellään kuvaus $f : B_1 \to B_2$ niin, että

$$f(0_{B_1}) = 0_{B_2}, \quad f(a) = c, \quad f(b) = d, \quad f(1_{B_1}) = 1_{B_2}.$$

Helposti nähdään, että kuvaus f on (hila)isomorfismi. Koska kaikilla $x \in B_1$ on voimassa $f(x') = (f(x))'$, kuvaus f on Boolen isomorfismi.

Määritelmä 3.15. Olkoon L hila ja $0 \in L$. Tällöin alkiota $a \in L$ kutsutaan *atomiksi*, jos $a \neq 0$ ja kaikilla $b \in L$ ehdosta $0 < b \leq a$ seuraa $b = a$.

Esimerkki 3.16. Alla olevaa Hassen diagrammia vastaavalla hilalla on neljä atomia: f, g, h ja i.



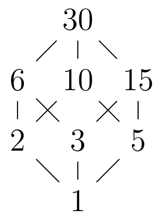
Lause 3.17. Äärellisen Boolen algebran B kardinaliteetti on aina muotoa 2^n, ja Boolen algebralla B on tasan n atomia. Mitkä tahansa kaksi Boolen algebraa, joilla on sama äärellinen kardinaliteetti, ovat isomorfiset.

Sivuutetaan tämän lauseen todistus. Se löytyy kirjasta [2] sivulta 23.

Lause 3.18. Äärellinen Boolen algebra on aina isomorfinen jonkin joukon $\mathcal{P}(\{a, b, c, \ldots\})$ kanssa.

Tämän lauseen todistus on pitkä, joten sivuutetaan se. Todistus löytyy kirjasta [2] sivulta 22.

Esimerkki 3.19. Olkoon B luvun 30 jakajista koostuva hila. Tämä on muotoa $B = (\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, \mathrm{syt}, \mathrm{pyj}, 1, 30,')$ oleva Boolen algebra. Alla olevasta diagrammista nähdään, että hila ei sisällä alihilanaan timanttia tai pentagonia ja kaikilla alkioilla on komplementtinsa. Tämän Boolen algebran kardinaliteetti on $8 = 2^3$, joten lauseen 3.17 mukaan se on isomorfinen potenssijoukon $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ kanssa.



Esimerkki 3.20. Alla on kaikki keskenään ei-isomorfiset Boolen algebrat, joissa on alle 16 alkiota.

$\mathbb{B}^0$ $\mathbb{B}^1$ $\mathbb{B}^2$ $\mathbb{B}^3$

Määritelmä ja lause 3.21. Olkoon B Boolen algebra ja X mikä tahansa joukko. Kuvauksille f ja g joukosta X joukkoon B määritellään

$$\begin{aligned} f \wedge g : X &\to B; \quad x \mapsto f(x) \wedge g(x); \\ f \vee g : X &\to B; \quad x \mapsto f(x) \vee g(x); \\ f' : X &\to B; \quad x \mapsto (f(x))'; \\ f_0 : X &\to B; \quad x \mapsto 0; \\ f_1 : X &\to B; \quad x \mapsto 1; \end{aligned}$$

kaikilla $x \in X$. Tällöin kaikkien joukosta X joukkoon B kuvautuvien kuvauksien joukko B^X on Boolen algebra. Erityisesti, jos $X = B^n$, saadaan Boolen algebra $F_n(B) = B^{B^n}$, joka koostuu kaikista joukosta B^n joukkoon B kuvautuvista funktioista.

Yllä olevan lauseen todistus on suoraviivainen, mutta sen pituuden vuoksi sivuutetaan se.

3.2 Boolen polynomit

Tässä luvussa esitellään Boolen polynomeja ja polynomifunktioita sellaisessa muodossa, että ne sopivat seuraavassa luvussa esiteltäviin sovelluksiin.

Määritelmä 3.22. Olkoon $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ n-alkioinen joukko, joka ei sisällä symboleja 0 ja 1. *Boolen polynomit* joukossa X ovat kaikki ne polynomit, jotka saadaan soveltamalla onnistuneesti äärellisen monta kertaa seuraavia kohtia:

(i) $x_1, x_2, \dots, x_n$, 0 ja 1 ovat Boolen polynomeja;

(ii) jos p ja q ovat Boolen polynomeja, niin myös $p \wedge q$, $p \vee q$ ja p' ovat Boolen polynomeja.

Kaksi polynomia on keskenään yhtäsuuret, jos niiden symbolien sarjat ovat identtiset. Joukon $\{x_1, \dots, x_n\}$ kaikkien Boolen polynomien joukkoa merkitään symbolilla P_n.

Huomautus 3.23. Huomataan, että esimerkiksi $0'$ ei ole sama polynomi kuin 1. Lisäksi $x_1 \wedge x_2 \neq x_2 \wedge x_1$, ja niin edelleen.

Esimerkki 3.24. Joukon $\{x_1, x_2\}$ Boolen polynomeja ovat muun muassa $0,\ 1,\ x_1,\ x_2,\ x_1 \vee 1,\ x_1 \wedge x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1',\ x_1' \wedge x_2$ ja $x_1' \wedge (x_2 \vee x_1)$.

Koska jokainen joukon $\{x_1, \dots, x_n\}$ Boolen polynomi on myös joukon $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ Boolen polynomi, saadaan

$$P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_n \subset P_{n+1} \subset \dots .$$

Huomataan, että P_n ei ole Boolen algebra, koska esimerkiksi $x_1 \wedge x_2 \neq x_2 \wedge x_1$. Seuraavaksi esitellään polynomifunktioiden käsite, jotta lausekkeet $x_1 \wedge x_2$ ja $x_2 \wedge x_1$ voidaan samaistaa.

Määritelmä 3.25. Olkoot B Boolen algebra, B^n tämän n-kertainen suoratulo ja $p \in P_n$ Boolen polynomi. Tällöin kuvausta

$$\overline{p}_B : B^n \to B; \quad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \overline{p}_B(a_1, \ldots, a_n),$$

kutsutaan *Boolen polynomifunktioksi.* Tässä $\overline{p}_B(a_1, \ldots, a_n)$ on joukon B alkio, joka on saatu Boolen polynomista p korvaamalla jokainen x_i alkiolla $a_i \in B$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Toisin sanoen Boolen polynomifunktiolla tarkoitetaan mitä tahansa ilmaisua, joka voidaan esittää äärellisen monen symbolin kombinaationa operaatioilla $\wedge$, $\vee$ ja $'$. Jokainen symboli edustaa vakiota tai muuttujaa. Siis esimerkiksi $(a' \vee b)' \wedge c \vee a \wedge b' \wedge d \vee 0$ on Boolen polynomifunktio edellyttäen, että jokainen a, b, c ja d ovat muuttujia, jotka saavat arvoikseen Boolen algebran alkioita. [4]

Esimerkki 3.26. Olkoot Boolen algebran B eräs polynomi $p = x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)'$ ja tästä saatu polynomifunktio $\overline{p}_B : B^3 \to B$. Tällöin esimerkiksi

$$\begin{aligned}
&\overline{p}_B(0, a_1, 1) = 0 \vee (a_1 \wedge 1)' = a_1', \\
&\overline{p}_B(a_1, a_2, a_3) = a_1 \vee (a_2 \wedge a_3)' = a_1 \vee a_2' \vee a_3', \\
&\overline{p}_B(1, 0, a_1) = 1 \vee (0 \wedge a_1)' = 1,
\end{aligned}$$

kun $0, a_1, a_2, a_3, 1 \in B$.

Seuraava esimerkki osoittaa, että kahdella eri Boolen polynomilla voi olla sama Boolen polynomifunktio.

Esimerkki 3.27. Olkoot $n = 2$, $p = x_1 \wedge x_2$, $q = x_2 \wedge x_1$ ja $\mathbb{B}$ kuten esimerkissä 3.3. Tällöin

$$\overline{p}_{\mathbb{B}} : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}; \quad (0,0) \mapsto 0, \quad (0,1) \mapsto 0, \quad (1,0) \mapsto 0, \quad (1,1) \mapsto 1,$$

$$\overline{q}_{\mathbb{B}} : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}; \quad (0,0) \mapsto 0, \quad (0,1) \mapsto 0, \quad (1,0) \mapsto 0, \quad (1,1) \mapsto 1.$$

Siis $\overline{p}_{\mathbb{B}} = \overline{q}_{\mathbb{B}}$.

Määritelmä 3.28. Määritellään $P_n(B) = \{\overline{p}_B \mid p \in P_n\}$.

Huomautus 3.29. Joukko P_n koostuu Boolen polynomeista, kun taas $P_n(B)$ koostuu Boolen polynomifunktioista.

Lause 3.30. Olkoot B Boolen algebra ja $F_n(B)$ kaikista joukosta B_n joukkoon B kuvautuvista funktioista koostuva Boolen algebra. Tällöin joukko $P_n(B)$ on Boolen algebra ja joukon $F_n(B)$ alialgebra.

Todistus. Tarkistetaan, että $P_n(B)$ on suljettu operaatioiden $\vee$, $\wedge$ ja $'$ suhteen, ja että $P_n(B)$ sisältää funktiot f_0 ja f_1. Operaatiolle $\wedge$ on voimassa kaikilla $a_1, \ldots, a_n \in B$:

$$(\overline{p}_B \wedge \overline{q}_B)(a_1, \ldots, a_n) = \overline{p}_B(a_1, \ldots, a_n) \wedge \overline{q}_B(a_1, \ldots, a_n) = \overline{(p \wedge q)}_B(a_1, \ldots, a_n).$$

Tästä seuraa, että kaikilla $\overline{p}_B$, $\overline{q}_B \in P_n(B)$, $\overline{p}_B \wedge \overline{q}_B = \overline{(p \wedge q)}_B \in P_n(B)$. Samalla tavalla selviää, että $P_n(B)$ on suljettu myös operaatioiden $\vee$ ja $'$ suhteen. Koska $0, a_1, \ldots, a_n, 1$ ovat myös Boolen polynomeja, saadaan $\overline{0} = f_0$ ja $\overline{1} = f_1$. $\square$

Määritelmä 3.31. Boolen polynomit $p, q \in P_n$ ovat ekvivalentit (merkitään $p \sim q$), jos niiden Boolen polynomifunktiot joukossa $\mathbb{B}$ ovat yhtäsuuret eli

$$p \sim q \quad \Leftrightarrow \quad \overline{p}_{\mathbb{B}} = \overline{q}_{\mathbb{B}}.$$

Esimerkki 3.32. Olkoot $p = x_1 \wedge x_1'$ ja $q = x_2 \wedge x_2'$. Koska $\overline{p}_{\mathbb{B}} = 0$ ja $\overline{q}_{\mathbb{B}} = 0$ kaikilla muuttujien x_1, x_2 arvoilla, niin $p \sim q$.

Lause 3.33.

(i) Relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio joukossa P_n.

(ii) Joukko $P_n \backslash \sim$ on Boolen algebra ekvivalenssiluokkiin kohdistuvien operaatioiden $\wedge$ ja $\vee$ suhteen, missä operaatiot ekvivalenssiluokille määritellään $[p] \wedge [q] = [p \wedge q]$ ja $[p] \vee [q] = [p \vee q]$. Lisäksi

$$P_n \backslash \sim \; \cong_b P_n(\mathbb{B}).$$

Todistus.

(i) Kaikilla $p \in P_n$ on voimassa $p \sim p$, koska $\overline{p}_{\mathbb{B}} = \overline{p}_{\mathbb{B}}$, ja kaikilla $p, q, r \in P_n$ on voimassa

$$p \sim q \;\Rightarrow\; \overline{p}_{\mathbb{B}} = \overline{q}_{\mathbb{B}} \;\Rightarrow\; \overline{q}_{\mathbb{B}} = \overline{p}_{\mathbb{B}} \;\Rightarrow\; q \sim p \;\text{ ja}$$

$$p \sim q,\; q \sim r \;\Rightarrow\; \overline{p}_{\mathbb{B}} = \overline{q}_{\mathbb{B}},\; \overline{q}_{\mathbb{B}} = \overline{r}_{\mathbb{B}} \;\Rightarrow\; \overline{p}_{\mathbb{B}} = \overline{q}_{\mathbb{B}} = \overline{r}_{\mathbb{B}} \;\Rightarrow\; p \sim r.$$

Tämän perusteella relaatio $\sim$ on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivien eli ekvivalenssirelaatio.

(ii) Joukossa $P_n \backslash \sim$ operaatiot $\wedge$ ja $\vee$ ovat hyvinmääriteltyjä: Jos $[p_1] = [p_2]$ ja $[q_1] = [q_2]$, niin $p_1 \sim p_2$ ja $q_1 \sim q_2$. Koska $\overline{(p_1 \wedge q_1)}_{\mathbb{B}} = \overline{(p_2 \wedge q_2)}_{\mathbb{B}}$, saadaan $p_1 \wedge q_1 \sim p_2 \wedge q_2$. Näin ollen $[p_1 \wedge q_1] = [p_2 \wedge q_2]$. Samalla tavalla saadaan $[p_1 \vee q_1] = [p_2 \vee q_2]$. Helposti voidaan tarkistaa, että $P_n \backslash \sim$ on hila. Sivuutetaan kuitenkin tämä tarkistus. Määritellään kuvaus $h : P_n(\mathbb{B}) \to P_n \backslash \sim$ siten, että $h(\overline{p}_{\mathbb{B}}) = [p]$. Koska

$$\overline{p}_{\mathbb{B}} = \overline{q}_{\mathbb{B}} \;\Leftrightarrow\; p \sim q \;\Leftrightarrow\; [p] = [q],$$

h on hyvinmääritelty ja injektiivinen. Joukossa $P_n \backslash \sim$ operaatioiden $\wedge$ ja $\vee$ määritelmistä seuraa, että h on hilahomomorfismi. Helposti nähdään, että $h(\overline{0}_{\mathbb{B}}) = 0$ ja $h(\overline{1}_{\mathbb{B}}) = 1$. Koska $h(\overline{p}_{\mathbb{B}}) \wedge h(\overline{p}'_{\mathbb{B}}) = h(\overline{p}_{\mathbb{B}} \wedge \overline{p}'_{\mathbb{B}}) = h(\overline{0}_{\mathbb{B}}) = 0$ ja samoin $h(\overline{p}_{\mathbb{B}}) \vee h(\overline{p}'_{\mathbb{B}}) = 1$, niin $h(\overline{p}'_{\mathbb{B}}) = h(\overline{p}_{\mathbb{B}})'$ ja siten h on Boolen homomorfismi. Kuvauksen h määritelmän mukaan se on surjektio. Näin ollen h on Boolen isomorfismi. Joukko $P_n \backslash \sim$ on myös Boolen algebra, koska kaikilla $p, q, r \in P_n \backslash \sim$

$$\begin{aligned}
[p] \wedge ([q] \vee [r]) &= [p] \wedge [q \vee r] = \underbrace{[p \wedge (q \vee r)] = [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]}_{P_n(\mathbb{B}) \text{ on Boolen algebra.}} \\
&= [p \wedge q] \vee [p \wedge r] = ([p] \wedge [q]) \vee ([p] \wedge [r]),
\end{aligned}$$

ja duaalisuudesta seuraa $[p] \vee ([q] \wedge [r]) = ([p] \vee [q]) \wedge ([p] \vee [r])$. Joukko $P_n \backslash \sim$ on myös komplementoitu:

$$[0] = [p \wedge p'] = [p] \wedge [p'] \text{ ja } [1] = [p \vee p'] = [p] \vee [p'] \;\Rightarrow\; [p'] = [p]'.$$

□

Seuraavan lauseen mukaan ekvivalenttien polynomien polynomifunktiot vastaavat toisiaan kaikissa Boolen algebroissa eikä vain Boolen algebrassa $\mathbb{B}$.

Lause 3.34. Olkoot B mielivaltainen Boolen algebra ja $p, q \in P_n$ sellaisia Boolen polynomeja, että $p \sim q$. Tällöin $\overline{p}_B = \overline{q}_B$.

Tämän todistus sivuutetaan. Todistus löytyy kirjasta [2] sivulta 28.

Määritelmä 3.35. Joukkoa $N \subseteq P_n$ kutsutaan *normaalimuotojen systeemiksi*, jos

(i) jokainen $p \in P_n$ on ekvivalentti jonkin polynomin $q \in N$ kanssa;

(ii) kaikilla $q_1, q_2 \in N$ ehdosta $q_1 \neq q_2$ seuraa $q_1 \not\sim q_2$.

Huomautus 3.36. Lausekkeiden yksinkertaistamiseksi käytetään vastedes merkinnän $p \vee q$ sijaan merkintää $p + q$ ja merkinnän $p \wedge q$ sijaan merkintää pq.

Tarkastellaan esimerkiksi polynomin $p = x_1 x_2' x_3'$ tuottamaan funktiota. Huomataan, että $\overline{p}$ saa arvon 1 vain silloin kun $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$, ja arvon 0 kaikilla $(x_1, x_2, x_3) \neq (1, 0, 0)$. Samalla tavalla $q = x_1 x_2' x_3' + x_1 x_2 x_3$ saa arvon 1 ainoastaan kohdissa $(1, 0, 0)$ ja $(1, 1, 1)$ sekä muutoin se saa arvon 0. Siis jokaisen muuttujista x_1(tai x_1')$, \ldots, x_n$(tai x_n') koostuvien tulojen summalle johdetun polynomifunktion arvo tiedetään heti. Jos f on mikä tahansa funktio joukosta $\mathbb{B}^n$ joukkoon $\mathbb{B}$, niin tarkastellaan jokaista $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{B}^n$, jolle $f(b_1, \ldots, b_n) = 1$, ja kirjoitetaan ylös termi $x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$. Tässä $x_i^1 = x_i$ ja $x_i^0 = x_i'$. Polynomi

$$p = \sum_{f(b_1, \ldots, b_n) = 1} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$$

selvästi johtaa tulokseen $\overline{p} = f$, ja se on ainut termeistä $x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}$ muodostuva summa, jolla on tämä ominaisuus. Tämä on melkein normaalimuotojen systeemi. Normaalimuotojen systeemiä varten korvataan jokainen termi $x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ polynomissa p termillä $1 x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ ja lisätään kaikki muut termit $x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}$, jotka eivät esiinny polynomissa p, terminä $0 x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}$. Tällaista muotoa olevien termien summana saadaan jokainen funktio $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ tasan kerran. Tässä siis johdettiin seuraava määritelmä:

Määritelmä 3.37. Joukkoa N_d, joka sisältää kaikki polynomit muotoa

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{B}^n} d_{i_1 i_2\cdots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n},$$

jossa jokainen $d_{i_1 i_2\cdots i_n}$ on joko 0 tai 1, kutsutaan *disjunktiivisten normaalimuotojen systeemiksi.*

Jokaisella termillä $x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$, joita on siis 2^n erilaista, voi olla kertoimena $d_{i_1\cdots i_n} = 0$ tai $d_{i_1\cdots i_n} = 1$. Näin ollen saadaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 3.38.

(i) Joukossa N_d on 2^{2^n} alkiota. Tästä johtuen P_n jakautuu 2^{2^n}:ksi eri ekvivalenssiluokaksi.

(ii) Jos $p \in P_n$, niin polynomifunktiota $\overline{p}$ vastaava yksikäsitteinen $p_d \in N_d$ voidaan muodostaa tarkastelemalla kuvauksen $\overline{p}$ funktiotaulukkoa. Tätä polynomia p_d kutsutaan polynomin p *disjunktiiviseksi normaalimuodoksi.*

Esimerkki 3.39. Kun halutaan löytää polynomin $p = ((x_1+x_2)'x_1+x_2''')'+x_1x_2+x_1x_2'$ disjunktiivinen normaalimuoto, listataan ensin polynomifunktion $\overline{p}$ arvot:

b_1	b_2	$\overline{p}(b_1,b_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Taulukosta saadaan $p_d = 0x_1'x_2' + 1x_1'x_2 + 1x_1x_2' + 1x_1x_2$ tai $p_d = x_1'x_2 + x_1x_2' + x_1x_2$.

Näin siis saadaan yleisestikin monimutkainen polynomi p yksinkertaistettuun muotoon:

1. Muutetaan p disjunktiiviseen normaalimuotoon p_d.

2. Sievennetään p_d.

Toisin sanoen polynomi p korvataan ekvivalentilla polynomilla.

Esimerkki 3.40. Etsitään Boolen polynomi p, joka johtaa funktioon f:

b_1	b_2	b_3	$f(b_1, b_2, b_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Tarkastellaan rivejä, joilla $f(b_1, b_2, b_3) = 1$, ja saadaan polynomi

$$p = x_1' x_2' x_3' + x_1' x_2 x_3 + x_1 x_2' x_3'.$$

Ensimmäinen ja kolmas termi voidaan yhdistää:

$$p \sim x_1' x_2' x_3' + x_1 x_2' x_3' + x_1' x_2 x_3 \sim (x_1 + x_1') x_2' x_3' + x_1' x_2 x_3 \sim x_2' x_3' + x_1' x_2 x_3 = q.$$

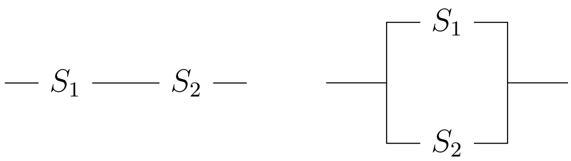
Näin ollen q on toinen ekvivalentti muoto annetulle funktiolle f, ja $\overline{q} = \overline{p} = f$.

4 Hilojen sovelluksia

Hilateorian yksi tärkeimmistä ja modernin algebran vanhimmista sovelluksista on Boolen algebrojen käyttö kytkentäpiirien mallintamisessa ja yksinkertaistamisessa. Kytkentäpiirien teoriaa voidaan soveltaa muun muassa virtapiireihin, putkistoihin ja liikennevaloilla varustettuihin tieverkostoihin.

4.1 Kytkentäpiirit

Kytkentäpiirien algebrassa kuvataan pääasiassa elektronisia kytkentäpiirejä matemaattisessa muodossa ja suunnitellaan kytkentäpiireille diagrammeja tietyillä ominaisuuksilla. Tässä luvussa muodostetaan elektronisia kytkimiä sarjoiksi ja rinnakkain piireiksi. Näillä kytkimillä on kaksi mahdollista tilaa: auki tai kiinni. Oletuksena on, että virta kulkee kytkimen ollessa kiinni.



Sarjakytkentä *Rinnakkaiskytkentä*

Kuva 6: Kytkentäpiirejä, joissa S_1 ja S_2 ovat kytkimiä.

Sarjaan kytketyssä piirissä virta kulkee jos ja vain jos kaikki kytkimet ovat kiinni. Sen sijaan rinnakkaiskytkennässä riittää, että yksi kytkin on kiinni. Kytkimen S_1 komplementti S_1' tarkoittaa kytkintä, joka on auki silloin ja vain silloin kun S_1 on kiinni kyseisessä kytkentäpiirissä. Kytkimet S_1 ja S_1' ovat siis näin yhteydessä toisiinsa. Jos kytkentäpiirissä on useampi S_1-kytkin, niin nämä ovat yhteydessä toisiinsa olemalla aina samassa ”tilassa” eli kaikki S_1-kytkimet ovat joko auki tai kiinni.

Seuraavat määritelmät muodostavat yhteyden elektronisten kytkimien ja Boolen algebran alkioiden välille.

Määritelmä 4.1. Olkoon $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

(i) Jokaista $x_1, \ldots, x_n \in X_n$ kutsutaan *kytkimeksi.*

(ii) Jokaista $p \in P_n$ kutsutaan *kytkentäpiiriksi.*

(iii) Symbolia x_i' kutsutaan kytkimen x_i *komplementtikytkimeksi.*

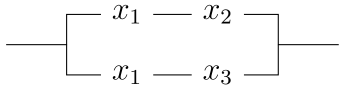
(iv) Merkintä $x_i x_j$ tarkoittaa kytkimien x_i ja x_j *sarjakytkentää.*

(v) Merkintä $x_i + x_j$ tarkoittaa kytkimien x_i ja x_j *rinnakkaiskytkentää.*

(vi) Polynomia $p \in P_n$ vastaavaa polynomifunktiota $\overline{p} \in P_n(\mathbb{B})$ kutsutaan polynomin p *kytkentäfunktioksi.*

(vii) Polynomifunktiota $\overline{p}(a_1, \ldots, a_n)$ kutsutaan kytkentäpiirin p arvoksi vakioilla $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{B}$.

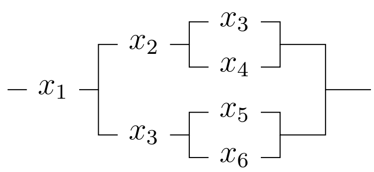
Esimerkki 4.2. Polynomi $x_1x_2 + x_1x_3$ voidaan esittää seuraavalla tavalla:



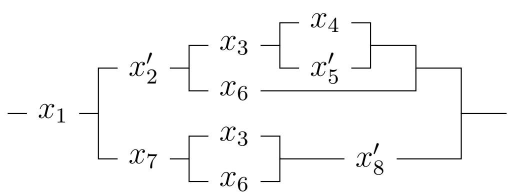
Boolen polynomien avulla voidaan siis mallintaa elektronisia piirejä. Elektroniset piirit toimivat identtisesti, jos niiden arvot ovat yhtäsuuret kaikilla mahdollisilla vakioilla. Tämä tarkoittaa vastaaville polynomeille p ja q, että $p \sim q$.

Elektroniselle piirille voidaan löytää yksinkertaisempi muoto, jolla on samat ominaisuudet kuin alkuperäisellä, etsimällä alkuperäisen polynomin kanssa ekvivalentti yksinkertainen Boolen polynomi. Piirin yksinkertaistamista käydään läpi seuraavassa luvussa.

Esimerkki 4.3. Kytkentäpiirien $p_1 = x_1(x_2(x_3 + x_4) + x_3(x_5 + x_6))$ ja $p_2 = x_1(x_2'(x_6 + x_3(x_4 + x_5')) + x_7(x_3 + x_6)x_8')$ diagrammit ovat seuraavanlaiset:



p_1

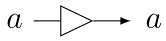


p_2

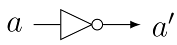
Nykyään puolijohteet ovat tärkeämmässä asemassa kuin elektroniset kytkimet. Puolijohteita käytetään paljon tietokoneiden rakennusosissa. Tässä asiayhteydessä kytkimet esitetään *portteina* tai niiden kombinaationa. Siis portti tai usean portin kombinaatio on polynomi p, jonka arvot joukossa $\mathbb{B}$ saadaan korvaamalla muuttuja x_i alkiolla a_i kaikilla i. Jos $\overline{p}(a_1, \ldots, a_n) = 1$, niin virta kulkee piirissä p ja funktion arvon ollessa 0 virta ei kulje.

Määritelmä 4.4. Alla on joitakin portteja, joita käytetään kytkentäpiirien kuvantamisessa.

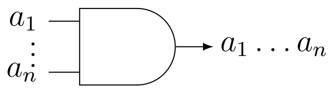
(i) *Identiteettiportti* vastaa polynomia x.



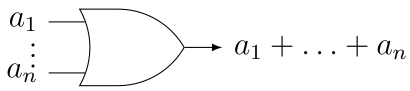
(ii) *EI-portti* vastaa polynomia x'.



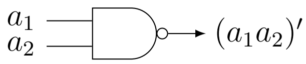
(iii) *JA-portti* vastaa polynomia $x_1 \dots x_n$.

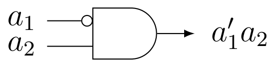


(iv) *TAI-portti* vastaa polynomia $x_1 + \dots + x_n$.



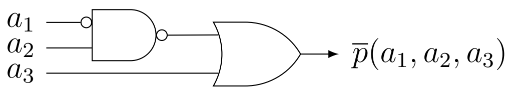
Useamman portin kombinaatiossa EI-portti voidaan merkitä yksinkertaisemmin pelkkänä ympyränä joko heti ennen tai jälkeen jonkin toisen portin:





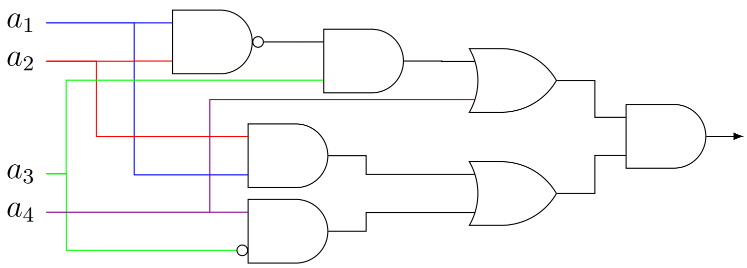
Esimerkki 4.5.

(i) Polynomi $p = (x_1'x_2)' + x_3 = x_1 + x_2' + x_3$ voidaan esittää kuten alla.



Kuvasta (tai polynomin sievennetystä muodosta $p = x_1 + x_2' + x_3$) nähdään, että piirissä kulkee virta jos ja vain jos $\overline{p}(a_1, a_2, a_3) \neq \overline{p}(0, 1, 0) = 0$.

(ii) Alla olevaa diagrammia vastaa polynomi $p = ((x_1x_2)'x_3 + x_4)(x_1x_2 + x_3'x_4)$.



Esimerkiksi totuustaulukon avulla nähdään, että tässä piirissä virta kulkee arvoilla $(0,0,0,1),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(1,1,0,1)$ ja $(1,1,1,1)$. Muissa tapauksissa virta ei kulje.

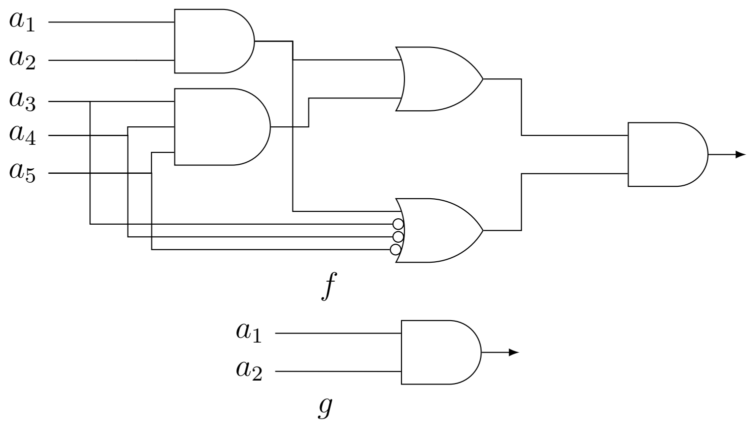
4.2 Kytkentäpiirien muuttaminen yksinkertaisempaan muotoon

Boolen algebran soveltamisessa kytkentäpiireihin kohdataan kaksi perustehtävää: piirien yksinkertaistaminen siten, että ne säilyttävät samat ominaisuudet kuin alkuperäinen piiri, ja tietyt ominaisuudet omaavien uusien kytkentäpiirien suunnittelu. Kytkentäpiirien yksinkertaistamiseen on useita metodeja Boolen funktioiden avulla. Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkien avulla joitakin yksinkertaistamismetodeja.

Yleinen tapa yksinkertaistaa kytkentäpiiri on etsiä piirin Boolen funktio ja yksinkertaistaa tämä funktio samalla tavalla kuin esimerkissä 3.40 tehdään. Lopuksi piirretään tämän yksinkertaisemman Boolen funktion diagrammi.

Esimerkki 4.6. Boolen funktio $f = (a_1a_2 + a_3a_4a_5)(a_1a_2 + a_3' + a_4' + a_5')$ saadaan yksinkertaistettua funktioksi $g = a_1a_2$. Kuvassa 7 on polynomeja f ja g vastaavat diagrammit.

$$\begin{aligned}
f &= (a_1a_2 + a_3a_4a_5)(a_1a_2 + a_3' + a_4' + a_5') \\
&= (a_1a_2(a_1a_2 + a_3' + a_4' + a_5')) + (a_3a_4a_5(a_1a_2 + a_3' + a_4' + a_5')) \\
&= a_1a_2(a_1a_2 + a_3' + a_4' + a_5') + a_3a_4a_5a_1a_2 + a_3a_4a_5a_3' + a_3a_4a_5a_4' + a_3a_4a_5a_5' \\
&= a_1a_2(a_1a_2 + a_3' + a_4' + a_5') + a_3a_4a_5a_1a_2 + 0a_4a_5 + a_30a_5 + a_3a_40 \\
&= a_1a_2(a_1a_2 + a_3' + a_4' + a_5') + a_3a_4a_5a_1a_2 + 0 + 0 + 0 \\
&= a_1a_2(a_1a_2 + a_3' + a_4' + a_5' + a_3a_4a_5) \\
&\overset{\text{distr.}}{=} a_1a_2(a_1a_2 + a_3' + a_4' + (a_5' + a_3)(a_5' + a_4)(a_5' + a_5)) \\
&= a_1a_2(a_1a_2 + a_3' + a_4' + (a_5' + a_3)(a_5' + a_4)1) \\
&\overset{\text{distr.}}{=} a_1a_2(a_1a_2 + a_3' + (a_4' + a_5' + a_3)(a_4' + a_5' + a_4)) \\
&= a_1a_2(a_1a_2 + a_3' + (a_4' + a_5' + a_3)1) \\
&= a_1a_2(a_3' + a_4' + a_5' + a_3) = a_1a_21 = a_1a_2 = g
\end{aligned}$$



Kuva 7: Polynomien f ja g diagrammit.

Toinen tapa yksinkertaistaa kytkentäpiiriä on dualisoida piiriä vastaava Boolen funktio ja yksinkertaistaa tämä dualisoitu funktio. Näin saatu yksinkertainen Boolen funktio dualisoidaan uudestaan ja näin ollaan saatu alkuperäiselle funktiolle yksinkertaisempi muoto.

Esimerkki 4.7. Muutetaan Boolen funktio $f = a_3a_2 + a_1a_2'a_3a_4 + a_3a_4' + a_1a_3' + a_1'a_2a_3' + a_2'a_3'a_4'$ yksinkertaisempaan muotoon. Edellä mainitun funktion ja sen yksinkertaistetun muodon diagrammit ovat kuvissa 8 ja 9. Olkoon $f = g + h$ siten, että $g = a_3a_2 + a_1a_2'a_3a_4 + a_3a_4'$ ja $h = a_1a_3' + a_1'a_2a_3' + a_2'a_3'a_4'$. Käytetään näiden funktioiden dualeista merkintöjä $d(g)$ ja $d(h)$.

$$\begin{aligned}
d(g) =& (a_3 + a_2)(a_1 + a_2' + a_3 + a_4)(a_3 + a_4') \\
=& (a_3(a_3 + a_4') + a_2(a_3 + a_4'))(a_1 + a_2' + a_3 + a_4) \\
\overset{\text{abs.}}{=}& (a_3 + a_2(a_3 + a_4'))(a_1 + a_2' + a_3 + a_4) \\
=& (a_3 + a_2(a_3 + a_4'))a_1 + (a_3 + a_2(a_3 + a_4'))a_2' \\
+& (a_3 + a_2(a_3 + a_4'))a_3 + (a_3 + a_2(a_3 + a_4'))a_4 \\
=& (a_3 + a_2a_3 + a_2a_4')a_1 + a_3a_2' \\
+& (a_3 + a_2a_3 + a_2a_4')a_3 + (a_3 + a_2a_3 + a_2a_4')a_4 \\
\overset{\text{abs.}}{=}& (a_3 + a_2a_4')a_1 + a_3a_2' + a_3 + a_3a_4 \\
=& a_1a_2a_4' + a_3(a_1 + a_2' + 1 + a_4) = a_3 + a_1a_2a_4'
\end{aligned}$$

Kun tämä dualisoidaan uudestaan saadaan

$$g = a_3(a_1 + a_2 + a_4'),$$

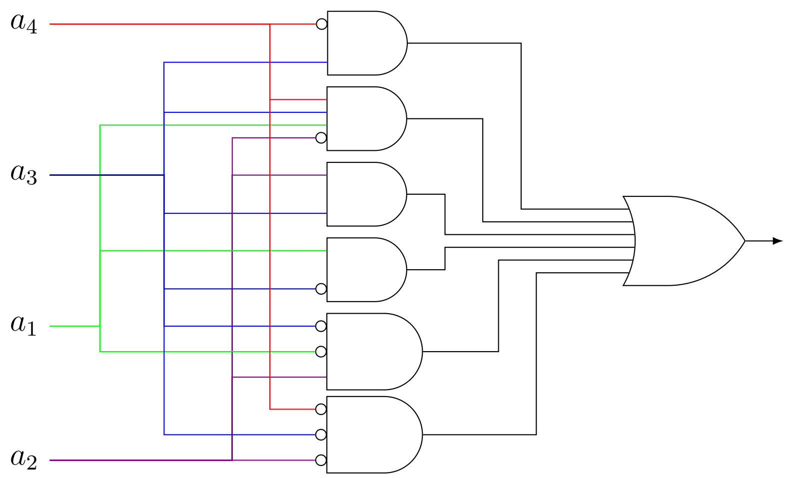
joka on siis ekvivalentti alkuperäisen polynomin g kanssa. Samalla tavalla saadaan polynomi h sievempään muotoon

$$\begin{aligned}
d(h) &= (a_1 + a_3')(a_1' + a_2 + a_3')(a_2' + a_3' + a_4') \\
&= ((a_1 + a_3')a_1' + (a_1 + a_3')a_2 + (a_1 + a_3')a_3')(a_2' + a_3' + a_4') \\
&= (a_3'a_1' + (a_1 + a_3')a_2 + a_3')(a_2' + a_3' + a_4') \\
&= ((a_1 + a_3')a_2 + a_3')(a_2' + a_3' + a_4') \\
&= a_3'a_2' + (a_1 + a_3')a_2a_3' + a_3' + ((a_1a_2 + a_3'a_2 + a_3')a_4' \\
&= a_3'a_2' + (a_1 + a_3')a_2a_3' + a_3' + (a_1a_2 + a_3')a_4' \\
&= a_3'(a_2' + (a_1 + a_3')a_2 + 1 + a_3'a_4') + a_1a_2a_4' = a_3' + a_1a_2a_4'
\end{aligned}$$

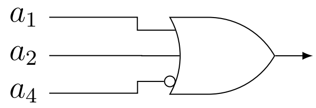
ja $h = a_3'(a_1 + a_2 + a_4')$.

Nyt yhdistämällä uudet g ja h saadaan

$$f = g + h = (a_3 + a_3')(a_1 + a_2 + a_4') = a_1 + a_2 + a_4'.$$



Kuva 8: Esimerkin 4.7 alkuperäinen polynomi f.



Kuva 9: Esimerkin 4.7 yksinkertaistettu polynomi f.

4.3 Kytkentäpiirien suunnittelu

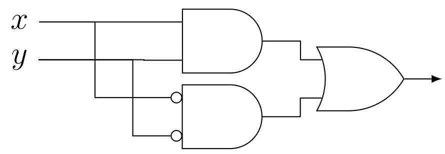
Tietyillä ominaisuuksilla varustetun piirin suunnittelun vaikeutena on löytää funktio, jonka totuustaulukko vastaa piirin vaadittuja ominaisuuksia. Ensimmäiseksi muodostetaan taulukko, joka antaa kytkentäpiirille halutun tilan (0 tai 1) kaikille eri kytkimien mahdollisille tiloille. Seuraavaksi muodostetaan tätä taulukkoa vastaava Boolen funktio ja yksinkertaistetaan se, jos se on mahdollista. Tämän jälkeen piirretään diagrammi tästä funktiosta.

Esimerkki 4.8. Halutaan suunnitella piiri, joka yhdistää kaksi kytkintä ja hehkulampun siten, että kummallakin kytkimellä voidaan kontrolloida hehkulamppua toisen kytkimen tilasta riippumatta.

Merkitään kytkimiä symboleilla x ja y. Alla on tehtävänannon tilannetta vastaava totuustaulukko, jonka avulla saadaan kytkentäpiiriä kuvaava Boolen funktio.

Rivi	x	y	f
1	0	0	1
2	0	1	0
3	1	0	0
4	1	1	1

Taulukko on saatu muodostettua seuraavasti: rivin 1 funktion arvo on valittu sattumanvaraisesti, jos ei ole väliä, onko lamppu päällä vai pois päältä kyseisillä kytkimien asennoilla. Rivit 2 ja 3 edustavat yhden kytkimen tilan muutosta riviin 1 verrattuna ja tällöin myös lampun tilan pitää muuttua tehtävänannon mukaan. Siis tapauksessa, jossa rivin 1 funktion tila on 1, pitää rivien 2 ja 3 funktion tilojen olla 0. Rivi 4 edustaa yhden kytkimen tilan muutosta verrattuna riveihin 2 ja 3, joten funktion tila rivillä 4 pitää olla eri kuin riveillä 2 ja 3. Näin on saatu Boolen funktio $f = xy + x'y'$.



Usein suunniteltaessa kytkentäpiirejä tiedetään, että jotkin kytkimien tilojen kombinaatiot eivät koskaan esiinny piirissä. Tällöin piiriä vastaavan funktion arvo voi näillä kombinaatioilla olla mitä tahansa vaikuttamatta tulokseen. Merkitään totuustaulukossa tällaisten kombinaatioiden funktiosarakkeeseen symboli ?. Suunniteltavaa kytkentäpiiriä voidaan merkittävästi yksinkertaistaa valitsemalla sopivat arvot symbolien ? paikalle. Seuraavaksi esitellään kaksi sääntöä, joiden avulla saadaan helposti yksinkertaistettua kytkentäpiiriä.

1. Jos voidaan valita symbolit ? joko kaikki arvoiksi 0 (tai kaikki arvoiksi 1) siten, että funktiolla on vain muutamalla rivillä arvo 1 (tai vastaavasti arvo 0) ja lopuilla riveillä on funktion arvona tämän komplementti, niin tätä vastaava disjunktiivinen normaalimuoto (tai konjunktiivinen normaalimuoto, jonka määritelmä löytyy kirjan [4] sivulta 38) antaa funktion.

2. Funktiosta voi olla mahdollista tehdä riippumaton yhdestä tai useammasta muuttujasta sijoittamalla symbolien ? paikalle sopivasti arvoja 1 ja 0.

Esimerkki 4.9. Muodostetaan seuraavalla sivulla olevan taulukon mukainen funktio. Huomataan, että funktiosarakkeessa on arvoja 1 vain yksi. Säännön 1 mukaan nyt voidaan korvata kaikki symbolit ? arvolla 0 ja näin saadaan funktio $f = xyz$. Tämä vastaa kytkentäpiiriä, jossa kytkimet x, y ja z on kytketty sarjaksi.

Soveltamalla tähän sääntöä 2 saadaan toinen ratkaisu tehtävälle. Jos rivillä 4 funktion arvo on 1 ja riveillä 1 ja 3 sen arvo on 0, niin funktio f on riippumaton muuttujasta x. Säännön 2 avulla saadaan siis ratkaisu $f = yz$.

Rivi	x	y	z	f
1	0	0	0	?
2	0	0	1	0
3	0	1	0	?
4	0	1	1	?
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

Nyt kytkentäpiiri on ainoastaan kytkimien y ja z muodostama sarjakytkentä, joka on yksinkertaisempi kuin ensimmäinen ratkaisu. Nämä ratkaisut eivät ole ekvivalentit, mutta koska ne eroavat vain niissä tapauksissa, jotka eivät esiinny piirissä, kelpaavat molemmat tehtävän ratkaisuiksi.

4.4 Kytkentäpiirien sovelluksia

Tässä luvussa esitellään muutama kytkentäpiirien sovellus esimerkkien avulla.

Esimerkki 4.10. Huoneessa on kolme ovea ja jokaisen oven vieressä on kytkin, jolla hallitaan huoneen valaistusta. Jokaisella kytkimellä valot saadaan päälle ja pois päältä eli jokaisella kytkimellä on kaksi mahdollista tilaa: joko päällä tai pois päältä. Merkitään kytkimiä symbolein x_1, x_2, x_3 ja kahta mahdollista kytkimen tilaa symbolilla $a_i \in \{0, 1\}$. Huoneen valaistuksen tilanne selviää arvosta $\overline{p}(a_1, a_2, a_3)$. Jos $\overline{p}(a_1, a_2, a_3) = 0$, niin valot ovat pois päältä ja funktion arvolla 1 ne ovat päällä. Valitaan sattumanvaraisesti, että $\overline{p}(1, 1, 1) = 1$.

(i) Nyt on voimassa $\overline{p}(a_1, a_2, a_3) = 0$ kaikilla (a_1, a_2, a_3), jotka eroavat arvosta $(1, 1, 1)$ yhdessä tai kaikissa kolmessa kohdassa. Toisin sanoen, jos vaihdetaan yhden tai kolmen kytkimen tilaa, niin valot sammuvat.

(ii) Samoin on voimassa $\overline{p}(a_1, a_2, a_3) = 1$ kaikilla (a_1, a_2, a_3), jotka eroavat arvosta $(1, 1, 1)$ kahdessa kohdassa. Toisin sanoen, jos vaihdetaan kahden kytkimen tilaa, niin valot pysyvät päällä.

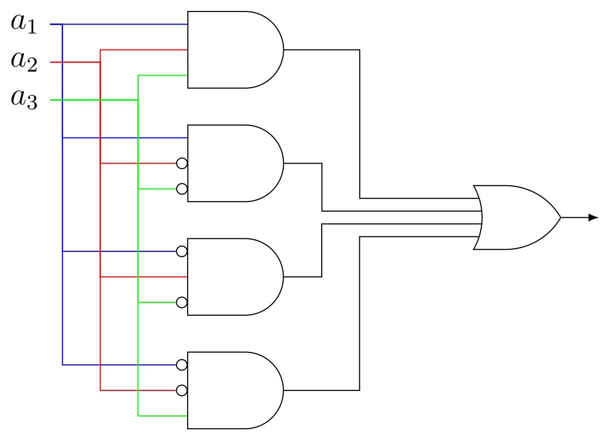
Tästä saadaan seuraava taulukko:

Rivi	a_1	a_2	a_3	vast. termi	$\overline{p}(a_1, a_2, a_3)$
1	0	0	0	$x_1'x_2'x_3'$	0
2	0	0	1	$x_1'x_2'x_3$	1
3	0	1	0	$x_1'x_2x_3'$	1
4	0	1	1	$x_1'x_2x_3$	0
5	1	0	0	$x_1x_2'x_3'$	1
6	1	0	1	$x_1x_2'x_3$	0
7	1	1	0	$x_1x_2x_3'$	0
8	1	1	1	$x_1x_2x_3$	1

Taulukosta saadaan disjunktiivinen normaalimuoto kytkentäpiirille p:

$$p = x_1x_2x_3 + x_1x_2'x_3' + x_1'x_2x_3' + x_1'x_2'x_3.$$

Tämän avulla piirretään piirin diagrammi, joka on esitetty kuvassa 10.



Kuva 10: Valaistuksen virtapiiriä kuvaava diagrammi.

Esimerkki 4.11. Moottorissa on kolme generaattoria. Kunkin generaattorin toimintaa valvoo sitä vastaava kytkin, joka sulkee piirin heti generaattorin hajottua. Valvontasysteemiltä vaaditaan seuraavat ominaisuudet:

1. Varoitusvalo syttyy, jos yksi tai kaksi generaattoria hajoaa.
2. Hälytysääni käynnistyy, jos kaksi tai kaikki kolme generaattoria hajoavat.

Olkoon $a_i = 0$, kun generaattori i on toimiva, $i \in \{1, 2, 3\}$ ja $a_i = 1$, kun generaattori i on rikki. Nyt tarvitaan kaksi funktiota:

$$\begin{aligned}
\overline{p}_1(a_1, a_2, a_3) = 1: &\quad \text{Hälytysääni päällä.}\\
\overline{p}_1(a_1, a_2, a_3) = 0: &\quad \text{Hälytysääni pois päältä.}\\
\overline{p}_2(a_1, a_2, a_3) = 1: &\quad \text{Varoitusvalo päällä.}\\
\overline{p}_2(a_1, a_2, a_3) = 0: &\quad \text{Varoitusvalo pois päältä.}
\end{aligned}$$

Näiden polynomifunktioiden arvoille saadaan seuraava taulukko:

Rivi	a_1	a_2	a_3	$\overline{p}_1(a_1, a_2, a_3)$	$\overline{p}_2(a_1, a_2, a_3)$
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	1
4	0	1	1	1	1
5	1	0	0	0	1
6	1	0	1	1	1
7	1	1	0	1	1
8	1	1	1	1	0

Polynomiksi p_1 valitaan disjunktiivinen normaalimuoto:

$$p_1 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3' + x_1x_2'x_3 + x_1'x_2x_3.$$

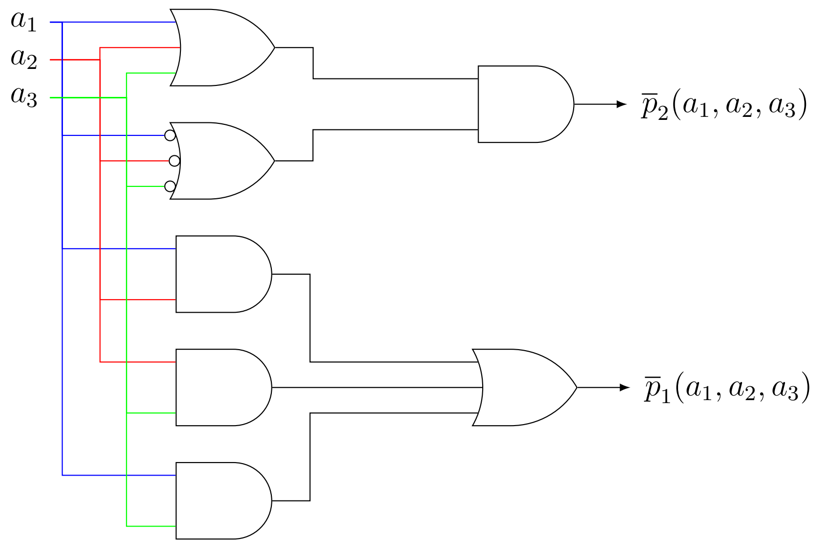
Tämä saadaan yksinkertaisempaan muotoon Boolen algebran sääntöjen avulla:

$$p_1 \sim x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3.$$

Polynomin p_2' disjunktiivisesta normaalimuodosta, $p_2' = x_1x_2x_3 + x_1'x_2'x_3'$, ottamalla komplementti saadaan

$$p_2 = (x_1' + x_2' + x_3')(x_1 + x_2 + x_3).$$

ja tätä polynomia kuvaava diagrammi on esitetty kuvassa 11.



Kuva 11: Diagrammi kuvaa, milloin hälytysääni ja varoitusvalo ovat päällä.

5 Yhteenveto

Hilat ovat siis algebrallisia rakenteita ja niitä voidaan kuvata Hassen diagrammeilla. Hilassa jokaiselle alkioparille on olemassa infimum ja supremum, muutoin se ei ole hila. Kaikista hiloista koostuvan joukon eräs alajoukko on distributiiviset hilat. Distributiivisuus on tärkeä ominaisuus. Se helpottaa hilojen kanssa työskentelyä. Jos distributiivinen hila on lisäksi komplementoitu, sitä kutsutaan Boolen algebraksi. Boolen algebroja voidaan hyödyntää esimerkiksi kytkentäpiirien suunnittelussa ja piirien yksinkertaistamisessa. Boolen polynomien avulla voidaan kytkentäpiirit esittää matemaattisessa muodossa ja Boolen polynomifunktiot taas kertovat esimerkiksi milloin virtapiirissä kulkee virta. Elektroniset kytkentäpiirit ovat hyvä esimerkki siitä, että Boolen algebroja voidaan hyödyntää käytännön sovelluksissa.

Tässä tutkielmassa keskityttiin Boolen algebrojen sovelluksista vain kytkentäpiireihin. Boolen algebroja voidaan kuitenkin soveltaa myös logiikassa, joukko- ja todennäköisyysteoriassa sekä kvanttifysiikassa. Näistä sovelluksista löytyy hieman lisätietoa kirjasta [2]. Jos kytkentäpiirit kiinnostavat enemmän, niin kirjassa [4] on lisää kytkentäpiirien teoriaa. Aina sarja- tai rinnakkaiskytkentä ei ole taloudellisesti kannattavin kytkentä ja tällöin ei Boolen algebrasta ole apua. Muun muassa tästä on enemmän tietoa kyseisessä kirjassa.

Viitteet

[1] P. Harjulehto, R. Klén ja M. Koskenoja: *Analyysiä reaaliluvuilla.* Helsinki, 2014.

[2] Rudolf Lidl ja Günther Pilz: *Applied abstract algebra second edition.* New York, 1998.

[3] Magnus Steinby: *Boolean algebra.* Turku, 2004.

[4] J. Eldon Whitesitt: *Boolean algebra and its applications.* Massachusetts, 1961.