SEITSENTOISTAKULMIO

Olli Nurmi

Pro gradu -tutkielma
Tammikuu 2019

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Olli Nurmi: Seitsentoistakulmio
Pro gradu -tutkielma, 30 s.
Matematiikka
Tammikuu 2019

Tutkielma käsittelee säännöllisten monikulmioiden konstruktioiden historiaa ja monikulmioiden konstruoituvuuden osoittamista sekä itse konstruktioita.

Tutkielmassa perehdytään antiikin kreikan konstruktio-ongelmiin ja lopulta osoitetaan seitsentoistakulmion olevan konstruoitavissa pelkästään käyttämällä harppia ja viivainta. Lopuksi demonstroidaan kolme erilaista konstruktiota säännölliselle seitsetoistakulmiolle.

Konstruoituvuuden todistus on saksalaisen matemaatikon Gaussin tutkimuksen sivutulos tutkimuksessaan *Disquisitiones Arithmeticae* teostaan varten. Teoksessa Gauss tuli osoittaneeksi, että $\cos(\frac{2\pi}{17})$ on mahdollista kirjoittaa kokonaislukujen ja niiden neliöjuurien summan, tulon, osamäärää ja neliöjuuren äärellisenä yhdistelmänä. Tästä seuraa, että seitsentoistakulmio on mahdollita konstruoida käyttämällä harppia ja viivainta.

Tutkielman lopussa käydään kuvin läpi H. W. Richmondin, T. P. Stowellin ja D. W. DeTemplen esittämät konstruktiot.

Asiasanat: seitsentoistakulmio, geometrinen konstruktio, säännöllinen monikulmio, Gauss

Sisältö

1 Johdanto

Jo antiikin kreikkalaiset matemaatikot olivat suuresti kiinnostuneita geometrisista konstruktio-ongelmista, kuten, voidaanko annettu kulma jakaa kolmeen yhtäsuureen osaan käyttäen klassisia apuvälineitä, harppia ja viivainta. Antiikin kreikkalaisten harmiksi tämä ongelma ei ratkennut antiikin aikana, vaan piti odottaa aina 1800-luvulle asti, ennen kuin kulman kolmijakoon saatiin vastaus. Antiikin kreikkalaisten matemaatikkojen ansioksi on toki luettava Eukleidisen geometrian vahvojen perustusten luominen. He osasivat mm. konstruoida kolmion ja neliön sekä näiden muunnelmat, joissa sivujen määrä kerrotaan parillisella luvulla. Kreikkalaisten kyvyille mahdottomat monikulmiot olivat seitsen- ja yhdeksänkulmiot. Antiikin matemaatikot eivät myöskään ottaneet kantaa siihen, olivatko he löytäneet jo kaikki mahdolliset konstruoituvat monikulmiot ja millainen monikulmio on ylipäänsä konstruoituva.

Vasta vuosisatojen kuluttua tähänkin ongelmaan saatiin vastaus. Vuonna 1796 vasta 19-vuotias saksalainen uraauurtava matemaatikko Carl Friedrich Gauss tuli puolivahingossa osoittaneeksi,että tavanomaisten monikulmioiden lisäksi on olemassa erikoisempi joukko monikulmioita, jotka ovat konstruoitavissa harpilla ja viivaimella. Näistä tyyppiesimerkkinä Gauss käytti nimenomaan seitsentoistakulmiota. Vaikka tulos oli silloisessakin matematiikan yhteisössä merkittävä, sillä ei ollut juuri käytännön sovelluksia. Gauss saattoi pitää enemmän konstruoituvuuden todistuksen eksaktista luonteesta, eikä hän niin välittänyt varsinaisesta konstruktiosta, joten uskalsikin väittää konstruktion olevan olemassa perustuen vain laskelmiinsa. Ensimmäisiä konstruktioita seitsentoistakulmiolle pitikin odottaa 1800-luvun loppumetreille saakka.

Tässä tutkielmassa perehdytään tarkemmin Gaussin todistukseen konstruktion olemassaolosta ja käydään läpi todistuksen perusrakenne. Lopuksi esitetään kolme tunnetuinta konstruktiota seitsentoistakulmiolle havainnollistavien kuvien avulla.

2 Antiikin Kreikan konstruointiongelmat

Geometria oli antiikin kreikkalaisille tärkeä matematiikan osa-alue. Antiikin kreikkalaiset hallitsivat paljon tärkeitä geometrian ja aritmetiikan perusteiden päätuloksia. Eukleideen kirjoittamaa *Elementa*-teosta käytettiin geometrian oppikirjana vielä 1930-luvulle asti. Kreikkalaiset pitivät suoraa ja ympyrää puhtaimpina ja tärkeimpinä abstrakteina geometrisina kuvioina ja niiden avulla suoritettavat konstruktiot katsottiin mielelle tyydyttäviksi.

Tunnetuimmat antiikin Kreikan konstruktio-ongelmat kulkevat nimellä *Kolme kuuluisaa konstruktioprobleemaa:*

- **Kulman kolmijako** eli kulman jakaminen kolmeen yhtä suureen kulmaan

- **Ympyrän neliöinti** eli sellaisen neliön konstruoiminen jolla on sama pinta-ala kuin annetulla ympyrällä

- **Kuution kahdentaminen** eli sellaisen kuution konstruoiminen, jolla on kaksinkertainen tilavuus kuin annetulla kuutiolla

Kuuluisiksi ongelmat tekee ehkä vain niiden haastavuus. Antiikin kreikkalaiset matemaatikot eivät kyenneet ratkaisemaan ko. ongelmia, vaan niiden ratkeamattomuus todistettiin vasta 1800-luvulla, ks. esim. [1].

2.1 Monikulmioiden konstruoinnista

Säännöllisiin monikulmioihin ja niiden konstruointiin liittyvät ongelmat ovat vaivanneet jo antiikin kreikkalaisia matemaatikoita. Kiinnostaviksi ongelmiksi nousivat mm. se, mitä säännöllisiä monikulmioita voidaan konstruoida käyttämällä pelkästään harppia ja viivainta? Aluksi on tarpeen määritellä, mitä *tasokonstruoinnilla* tarkoitetaan.

Määritelmä 2.1. (Tasokonstruktio) Oletetaan, että tasolla T on kaksi pistettä P ja Q. Nyt käyttämällä **harppia** voidaan piirtää piste P keskipisteenä ympyrä jonka säteenä on jana PQ. Myös käyttämällä **viivainta** voidaan piirtää pisteiden P ja Q kautta suora s. Tällöin *harppi-viivain konstruktio* on äärellinen määrä näiden kahden operaatioiden toistoja.

Antiikin Kreikan matemaatikot osasivat käyttämällä annettuja pituuksia a ja b muodostaa niiden summan $a+b$, erotuksen $a-b$ (kun $a > b$), tulon $a \cdot b$, osamäärän $\frac{a}{b}$, neliön a^2 ja neliöjuuren $\sqrt{a}$. Lisäksi kreikkalaiset matemaatikot pystyivät esimerkiksi puolittamaan annetun kulman ja kaksinkertaistamaan annetun neliön pinta-alan, ks. [2].

Kirjassaan *Elementa*, Eukleides käsittelee neljännessä osassa säännöllisen kolmion, neliön, kuusikulmion, kahdeksankulmion sekä viisitoistakulmion konstruoimista. Lisäksi tunnettiin kaikkien edellämainittujen monikulmioiden kahden monikertojen konstruointi, sillä monikulmion sivu on aina helppo jakaa kahteen yhtä suureen osaa ja kaksinkertaistaa monikulmion kulmien määrä.

Eukleides ei kuitenkaan ottanut kantaa siihen, minkälaiset $n-$kulmiot yleisesti ovat konstruoitavissa ja olivatko nämä hänen mainitsemansa ainoat mahdolliset harpilla ja viivaimella konstruoituvat monikulmiot? Näihin kysymyksiin ei saatu vastausta vuosisatoihin ja jotkut päätyivät jopa uskomaan, että Eukleides oli löytänyt jo kaikki mahdolliset konstruoitavat monikulmiot noin vuonna 300 eaa [3].

2.2 Viisikulmion konstruointi

Kolmion ja neliön konstruointi ovat helpoimmat kuviteltavissa olevat konstruointitehtävät, mutta viisikulmion konstruointi harpilla ja viivaimella on hieman hankalampaa. Tässä esimerkissä esitetään H. W. Richmondin vuonna 1893 esittämä yksinkertainen viisikulmion konstruointi, ks. [4].

Konstruoidaksesi säännöllisen viisikulmion ympyrän sisälle:

1. Piirrä ympyrälle kohtisuorat säteet keskipisteen O kehän pisteiden B ja C kautta.

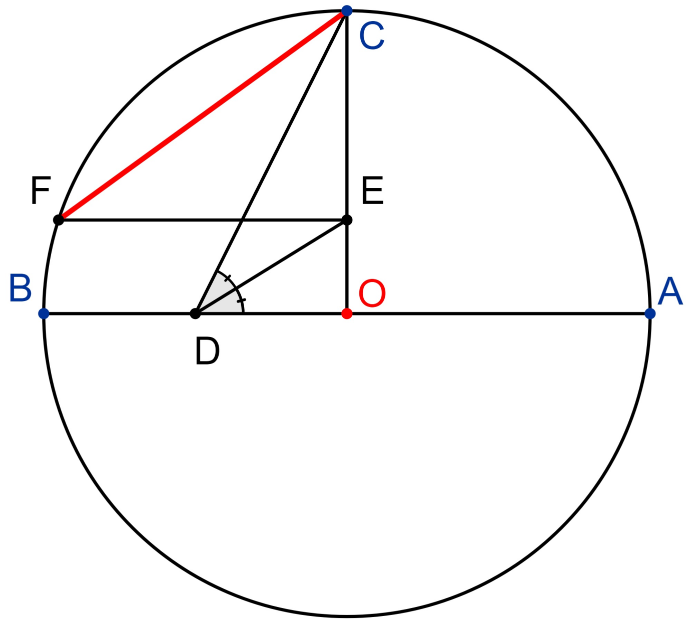
2. Olkoon piste D suoran OB keskipiste. Piirrä suora DC.

3. Etsi piste E, joka on kulman CDO kulmanpuolittajan ja suoran OC leikkauspiste.

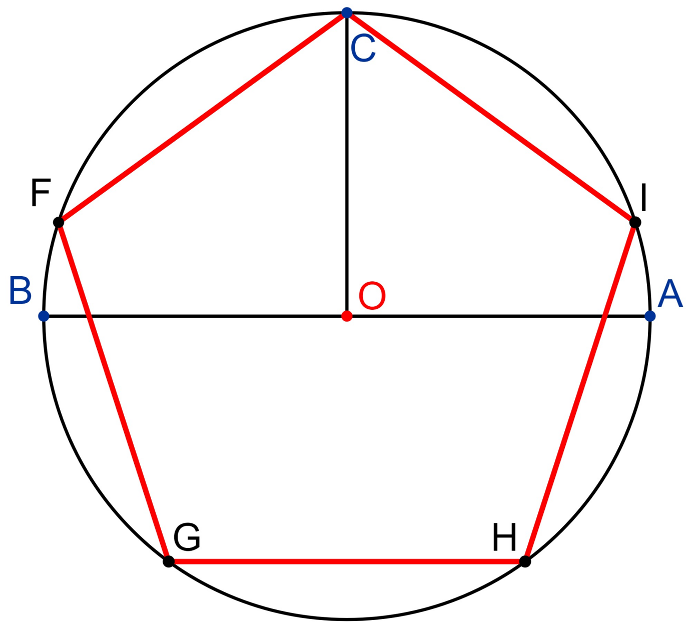
4. Piirrä suoralle pisteeseen E suoran OC kanssa kohtisuora suora ja piste F sen leikkauspiste ympyrän kehän kanssa.

5. Nyt jana CF on yksi halutun viisikulmion sivuista, kuten kuvassa 1.

6. Sama konstruktio voidaan toistaa kaikille viisikulmion sivuille jolloin saadaan viisikulmio konstruoitua, kuten kuvassa 2.



Kuva 1: Konstruktion vaiheet.



Kuva 2: Valmis viisikulmio.

3 Seitsentoistakulmio

Määritelmä 3.1. [Seitsentoistakulmio]

Seitsentoistakulmio (Schläflin symboli $\{17\}$) eli 17-kulmio on säännöllinen monikulmio, jonka sivujen väliset kulmat ovat 158 14/17 ° ja jokaista seitsemäätoista sivua vastaava keskuskulma on 21 3/7 ° .

3.1 Konstruktion olemassaolo

Ei ole lainkaan intuitiivisesti selvää, mitkä säännölliset monikulmiot ovat konstruoitavia ja mitkä eivät. Eukleides ei ottanut kantaa seitsentoistakulmion osalta vaan jätti sen avoimeksi. Olikin yllättävää, että vuonna 1796 vasta 18-vuotias *Carl Friedrich* ***Gauss*** päätyi tutkimuksissaan sivutulokseen, jonka mukaan on olemassa joukko uusia säännöllisiä monikulmoita, joiden konstruoiminen harpilla ja viivaimella on mahdollista. Yksi tällainen monikulmio oli juuri seitsentoistakulmio. Gauss oli päätynyt tähän tulokseen seurauksena ns. *Gaussin jaksoihin* liittyvässä tutkimuksessaan. Gauss julkaisi myös 17-kulmiota koskevan tuloksensa kirjassaan *Disquisitiones Arithmeticae* tutkimuksen valmistuttua 1801, ks. [3] ja [5].

3.2 Gaussin todistus

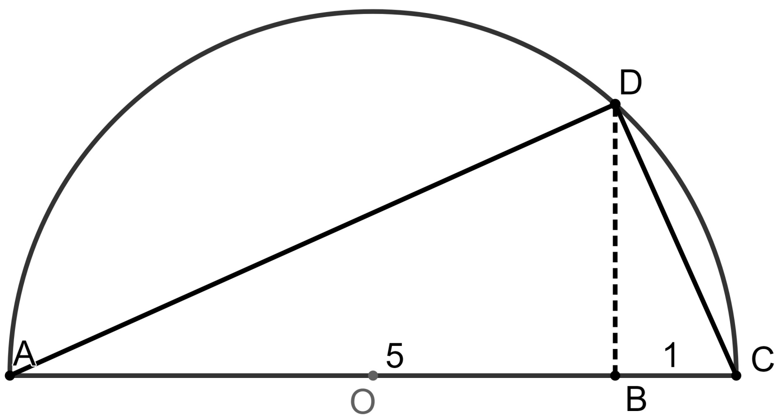
Alkuperäinen Gaussin itsensä teoksessaan *Disquisitiones Arithmeticae* julkaisema todistus 17−kulmion konstruoituvuudelle liittyi mahdollisiin konstruoituviin pituuksiin. Gauss nimittäin kiinnitti huomiota siihen, että sieventymättömien neliöjuurilukujen (muotoa $\sqrt{x}$ olevien lukujen, joissa x ei ole neliöluku, mutta x on kokonaisluku) pituiset suorat voidaan konstruoida harpilla ja viivaimella. Esitys perustuu lähteeseen [3].

Esimerkki 3.2. [Suora jonka pituus on $\sqrt{5}$**].**

Piirretään suora AC, jonka pituus on 6 ja sille keskipiste O ja piste B niin, että $AB = 5$ ja $BC = 1$. Piirretään ympyrä jonka säde on OA ja keskipiste O sekä ympyrän kehälle piste D, joka on pisteeseen B piirretyn suoran AC kanssa kohtisuoran leikkauspiste, kuten kuvassa 3. Nyt yhdenmuotoisuuden perusteella:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC} \text{ joten } (BD)^2 = AB \times BC = 5 \times 1 = 5.$$

Tästä seuraa luonnollisesti, että jana BD on pituudeltaan $\sqrt{5}$, joka on konstruoitu käyttämällä pelkästään harppia ja viivainta.



Kuva 3: Neliöjuuri 5.

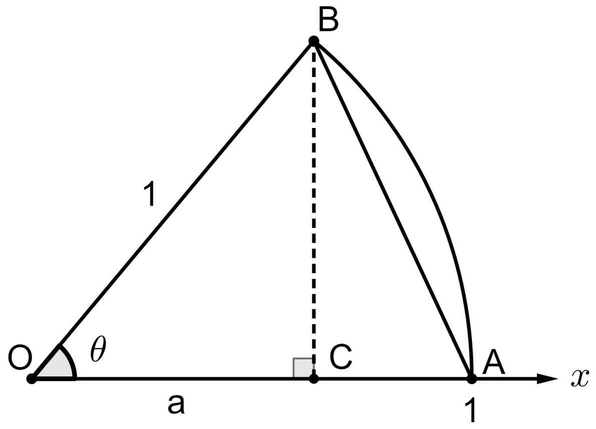
Gauss otti huomioon myös, että kun on saatu konstruoitua jokin pituus, vaikka edellisen esimerkin $\sqrt{5}$, voidaan myös konstruoida sen mikä tahansa summan, tulon, osamäärän ja neliöjuuren yhdistelmä.

Toinen asia johon Gauss kiinnitti huomiota, liittyi siihen mitä $n-$monikulmion konstruoinnissa oikeasti halutaan tehdä. Oletetaan, että halutaan konstruoida säännöllinen $n-$monikulmio. Tällöin jokaista sivua vastaava keskuskulma $\theta = \frac{2\pi}{n}$. Esimerkiksi jos halutaan konstruoida $n-$monikulmio, yksikköympyrän sisälle, halutaan oikeasti konstruoida pituus $a = OC$, kuten kuvassa 4.

Koska $n-$monikulmion sivua vastaava keskuskulma on $\theta = \frac{2\pi}{n}$, janan $a = OC$ pituus on tällöin $\cos(\frac{2\pi}{n})$, sillä

$$\cos(\frac{2\pi}{n}) = \frac{OC}{OB} = \frac{a}{1} = a.$$

Jos tämän pituuden a konstruointi on mahdollista, on myös $n-$monikulmion konstruointi mahdollista, sillä pisteeseen C voidaan piirtää kohtisuora suora, jonka leikkauspiste B ympyrän kehän kanssa ja piste A on halutun monikulmion yksi sivu, kuten kuvassa 4.



Kuva 4: Yksikköympyrä ja keskuskulma θ.

Otettuaan myös tämän huomioon, Gauss päätyi siihen, että mikäli $\cos(\frac{2\pi}{17})$ on mahdollista kirjoittaa kokonaislukujen ja niiden neliöjuurien avulla summana, tulona tai osamääränä (tai niiden yhdistelmänä) olisi myös säännöllinen seitsentoistakulmio mahdollista konstruoida harpin ja viivaimen avulla. On yllättävää, että $\cos(\frac{2\pi}{17})$ todellakin on mahdollista esittää edellä mainitulla tavalla. Gauss nimittäin osoitti, että:

$$\cos(\frac{2\pi}{17}) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$
$$+\frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

Näin Gauss onnistui löytämään todistuksen säännöllisen 17−kulmion konstruoituvuudelle rakentamalla riittävän ehdon, joka takaa kuvion konstruoituvuuden. Hän otaksui myös ilman todistusta, että hänen muotoilemansa ehto oli myös välttämättömyys. Täydellisen todistuksen muotoili Pierre Wantzel vasta vuosia myöhemmin vuonna 1837, ks. [6].

Lause 3.3. **[Gaussin – Wantzelin lause]**

Säännöllinen n-kulmio voidaan konstruoida geometrisesti jos ja vain jos

$$n = 2^m \text{ tai } n = 2^m \cdot p_1 \cdots p_k,$$

missä $p_1, \ldots, p_k$ ovat erisuuria *Fermat'n alkulukuja* eli lukuja jotka ovat muotoa $F_h = 2^{2^h} + 1$ ja alkulukuja. Nykyisin tunnettuja *Fermat'n alkulukuja* ovat vain $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ ja $F_4 = 65537$, ks. [6].

Tällöin lauseen mukaan $n = 2^0 \cdot F_2 = 17$ on konstruoituva, minkä Gauss oli todistanut, vaikka ei ollut kehitellyt konstruktiota. Voidaan olettaa, että Gauss oli enemmän kiinnostunut tuloksen luonteesta konstruktion olemassaolon osoittamisessa, kuin itse konstruktiosta.

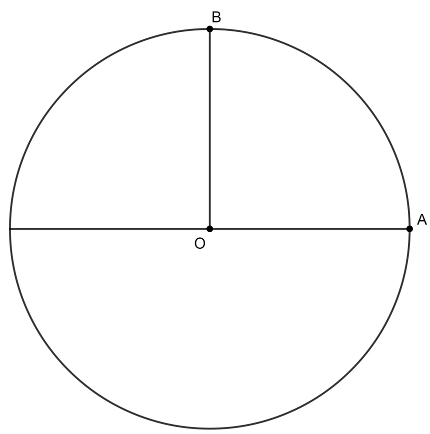
4 Konstruktiot

Tässä tutkielmassa esitetyissä konstruktioissa ylimääräiset välivaiheet on tiivistetty pois, jotta konstruktiot olisivat mahdollisimman selkeitä. Esimerkiksi pois on jätetty janan puolittaminen, sellaiset välivaiheet joissa annetulle suoralle piirretään normaali haluttuun pisteeseen tai suoraan nähden yhdensuuntaisen suoran piirtäminen. Näiden konstruointia ei käsitellä tässä tutkielmassa vaan ne oletetaan tunnetuiksi, mutta nekin kaikki on mahdollista konstruoida käyttämällä vain harppia ja viivainta.

4.1 H. W. Richmondin menetelmä

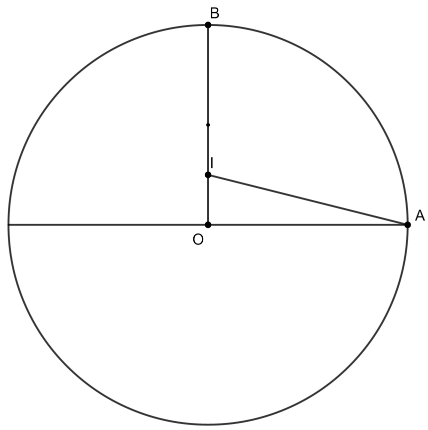
H. W. Richmondin kehittelemään konstruktiota mukaillen julkaisusta [7].

1. Piirretään ympyrä keskipisteellä O ja sille toisiinsa nähden kohtisuorat säteet OA ja OB ja jatketaan jana OA ympyrän halkaisijaksi, kuten kuvassa 5.



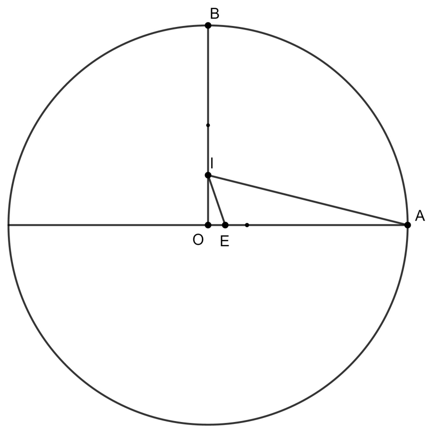
Kuva 5: Ympyrä ja sen säteet.

2. Merkitään janalle OB piste I jolle jana OI on $\frac{1}{4}$ janan OB pituudesta. Piirretään jana AI, kuten kuvassa 6.



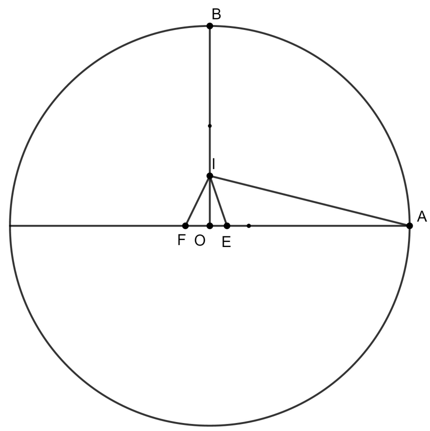
Kuva 6: Jana AI.

3. Merkitään janalle OA piste E niin, että kulma OIE on $\frac{1}{4}$ kulman OIA suuruudesta, kuten kuvassa 7.



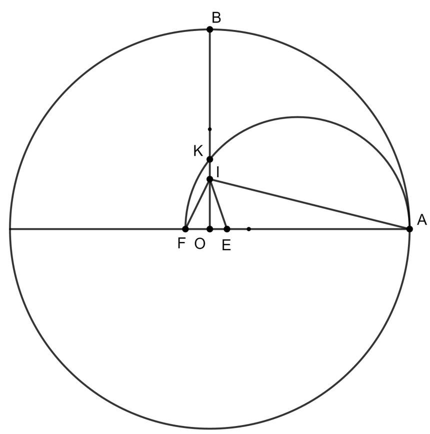
Kuva 7: $\angle\, OIE = \frac{1}{4} \angle\, OIA$.

4. Merkitään piste F suoralle AO (vastakkaiselle puolelle pistettä O pisteeseen E nähden) niin, että kulma FIE on 45°, kuten kuvassa 8.



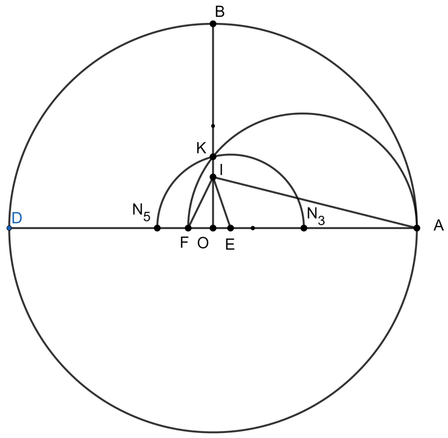
Kuva 8: $\angle\ FIE = 45°$.

5. Piirretään ympyrä niin, että sen halkaisija on jana FA, kuten kuvassa 9. Merkitään lisäksi piste K ympyrän ja janan OB leikkauspisteeseen.



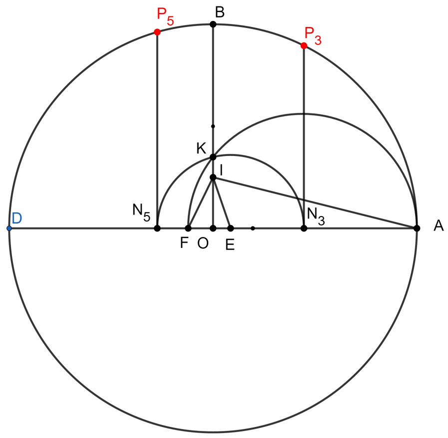
Kuva 9: Ympyrä, jonka halkaisija on jana FA ja leikkauspiste K.

6. Piirretään ympyrä pisteeseen E jonka säde on jana EK. Merkitään suoralle OA ympyrän leikkauspisteet N_3 ja N_5, kuten kuvassa 10.



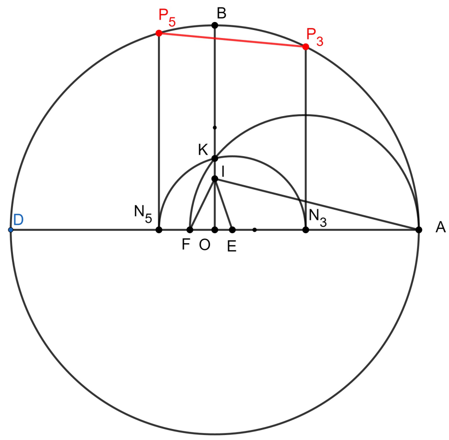
Kuva 10: Ympyrä pisteeseen E ja leikkauspisteet N_3 ja N_5.

7. Piirretään pisteisiin N_3 ja N_5 suoran OA kanssa kohtisuorat ja merkitään suorien ja alkuperäisen ympyrän leikkauspisteet P_3 ja P_5, kuten kuvassa 11.



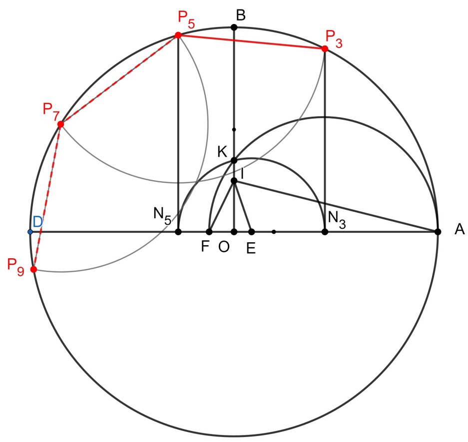
Kuva 11: Kohtisuorien ja ympyrän leikkauspisteet P_3 ja P_5.

8. Nyt kehä P_5P_3 on $\frac{2}{17}$ ympyrän kehästä, kuten kuvassa 12.

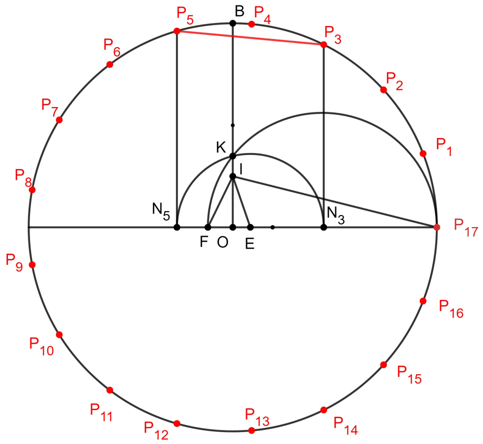


Kuva 12: Jana P_5P_3.

9. Merkitään ympyrän kehälle muut seitsentoistakulmion kulmapisteet (P_7, P_9, ... , P_{16}) käyttäen avuksi janaa P_5P_3, kuten kuvissa 13 ja 14.

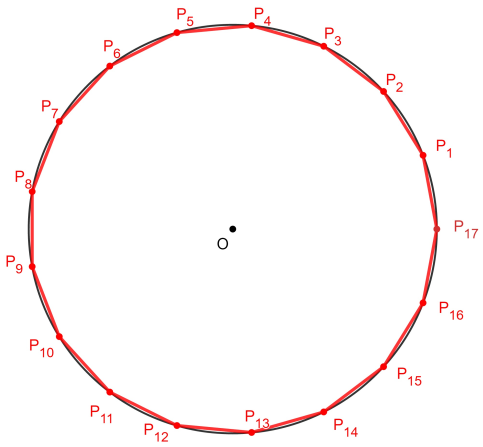


Kuva 13: Pisteiden P_7 ja P_9 merkitseminen ympyrän kehälle.



Kuva 14: Kaikki seitsentoistakulmion kulmapisteet.

10. Yhdistämällä pisteet saadaan lopputulokseksi säännöllinen seitsentoistakulmio, kuten kuvassa 15.

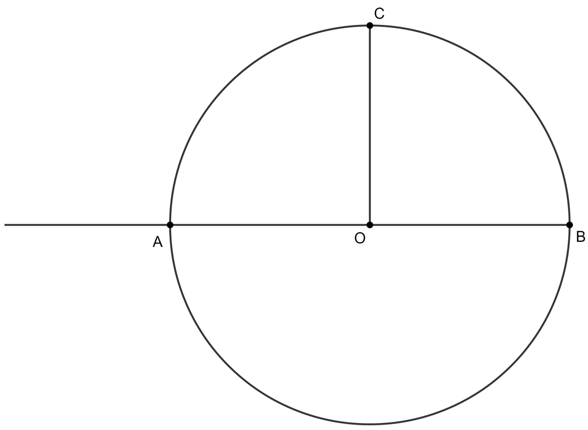


Kuva 15: Valmis seitsentoistakulmio.

4.2 T.P. Stowellin konstruktio

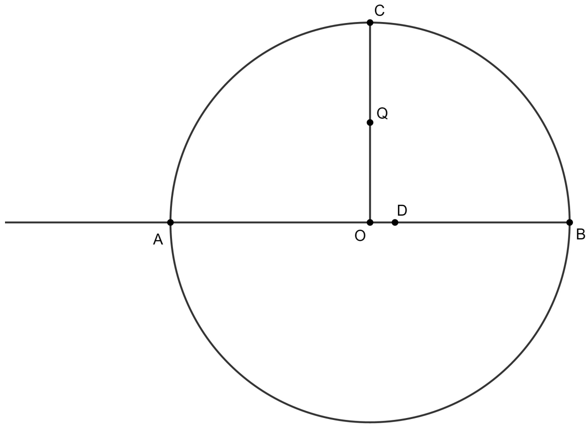
T. P. Stowellin esittämää konstruktiota mukaillen J. E. Hendricksin julkaisusta [8].

1. Piirretään ympyrä keskipisteeseen O ja sille halkaisia pisteiden A, O ja B kautta. Piirretään halkaisijalle AOB kohtisuora säde pisteeseen O ja merkitään piste C säteen ja ympyrän kehän leikkauspisteeseen, kuten kuvassa 16.



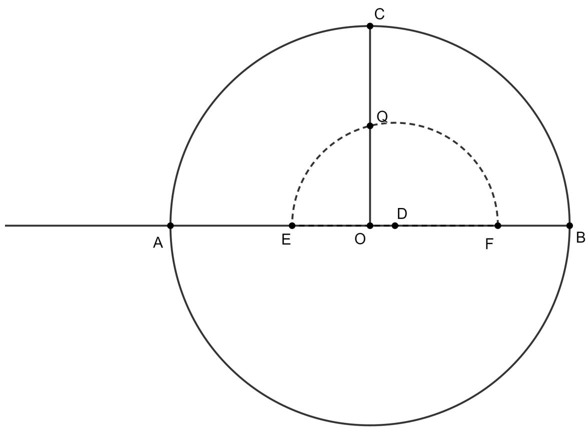
Kuva 16: Ympyrä, halkaisija ja säde.

2. Merkitään janalle OC piste Q jolle janan OQ pituus on $\frac{1}{2}$ janasta OC ja janalle OB piste D jolle janan OD pituus on $\frac{1}{8}$ janan OB pituudesta, kuten kuvassa 17.



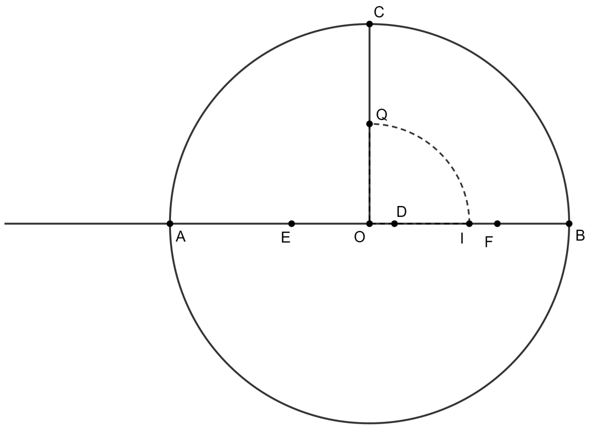
Kuva 17: Pisteet Q ja D.

3. Merkitään janalle AOB pisteet E ja F joiden etäisyys pisteestä D on yhtä suuri kuin janan DQ pituus, kuten kuvassa 18.



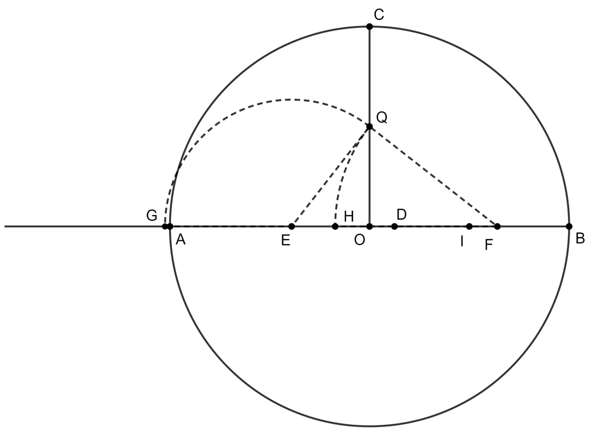
Kuva 18: Pisteiden E ja F merkitseminen.

4. Merkitään janalle OB piste I joka on yhtä kaukana pisteestä O kuin Q pisteestä O, kuten kuvassa 19.



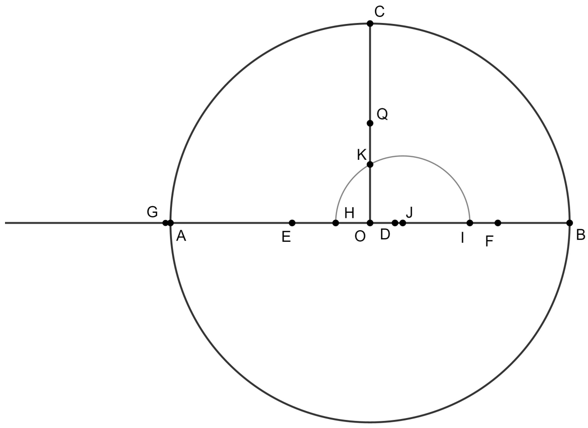
Kuva 19: Piste I.

5. Merkitään janalle AOB piste G jolle pituus EG on sama kuin pituus EQ ja piste H jolle etäisyys FH on sama kuin pituus FQ, kuten kuvassa 20.



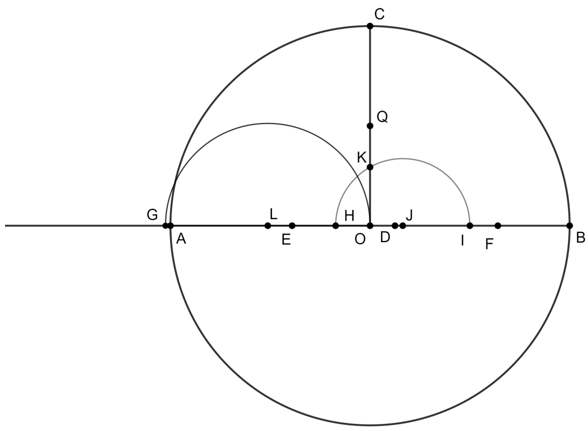
Kuva 20: Pisteiden H ja Q merkitseminen.

6. Merkitään piste J janalle AOB niin, että piste on pisteiden H ja I puolivälissä. Piirretään pisteeseen J ympyrä pisteiden H ja I kautta. Merkitään piste K tämän ympyrän ja säteen OC leikkauspisteeseen, kuten kuvassa 21.



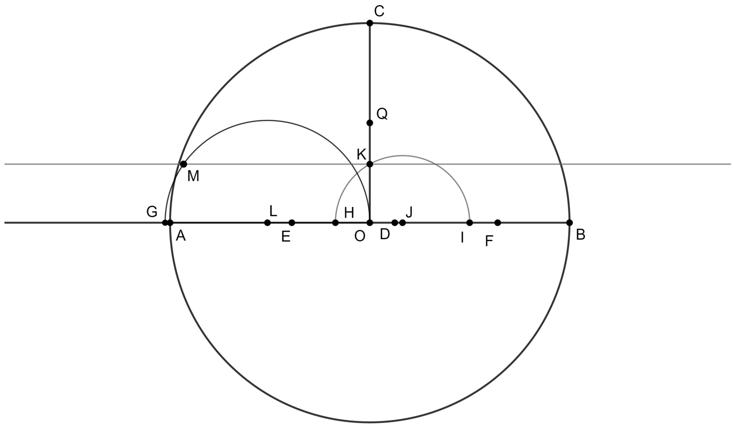
Kuva 21: Leikkauspiste K.

7. Merkitään janalle AOB piste L pisteiden G ja O puoliväliin. Piirretään pisteeseen L ympyrä pisteiden G ja O kautta, kuten kuvassa 22.



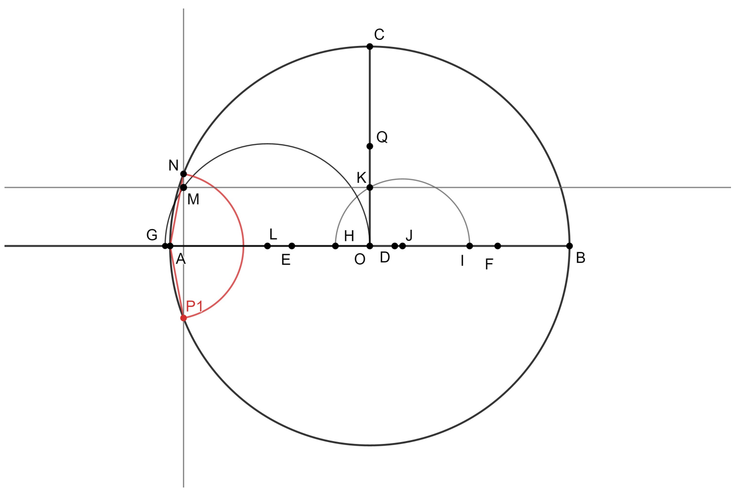
Kuva 22: Ympyrä pisteiden G ja O kautta.

8. Piirretään pisteeseen K janan AOB kanssa yhdensuuntainen suora ja merkitään suoran ja edellisen kohdan ympyrän leikkauspiste M, kuten kuvassa 23.



Kuva 23: Leikkauspiste M.

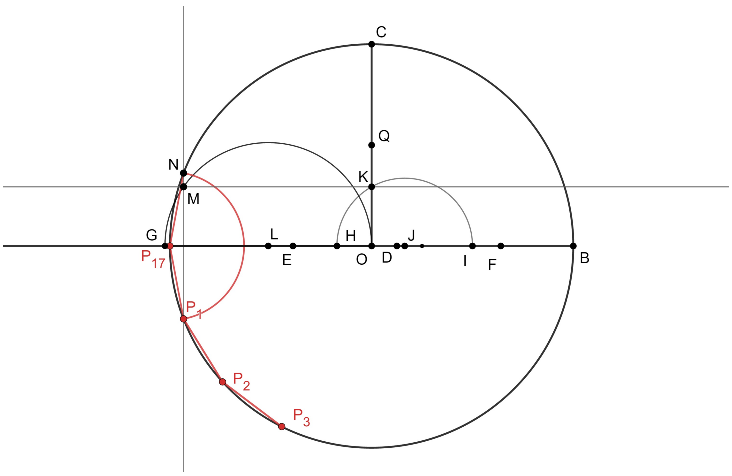
9. Piirretään pisteeseen M janan OC kanssa yhdensuuntainen suora ja merkitään suoran ja alkuperäisen ympyrän leikkauspiste N, kuten kuvassa 24.



Kuva 24: Kehän piste N.

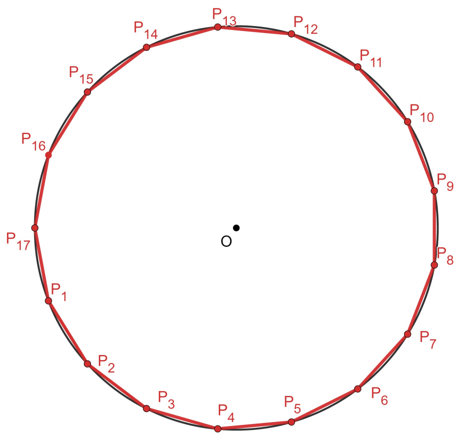
10. Merkitään piste A pisteeksi P_{17}. Nyt kaari $P_{17}N$ on $\frac{1}{17}$ koko ympyrän kehästä ja jana $P_{17}N$ yksi seitsentoistakulmion sivu.

11. Merkitään pisteet $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{16}$, kuten kuvassa 25.



Kuva 25: Seitsentoisakulmion kulmapisteet.

12. Nyt yhdistämällä pisteet saadaan kuvan 26 mukainen seitsentoistakulmio.



Kuva 26: Valmis seitsentoistakulmio.

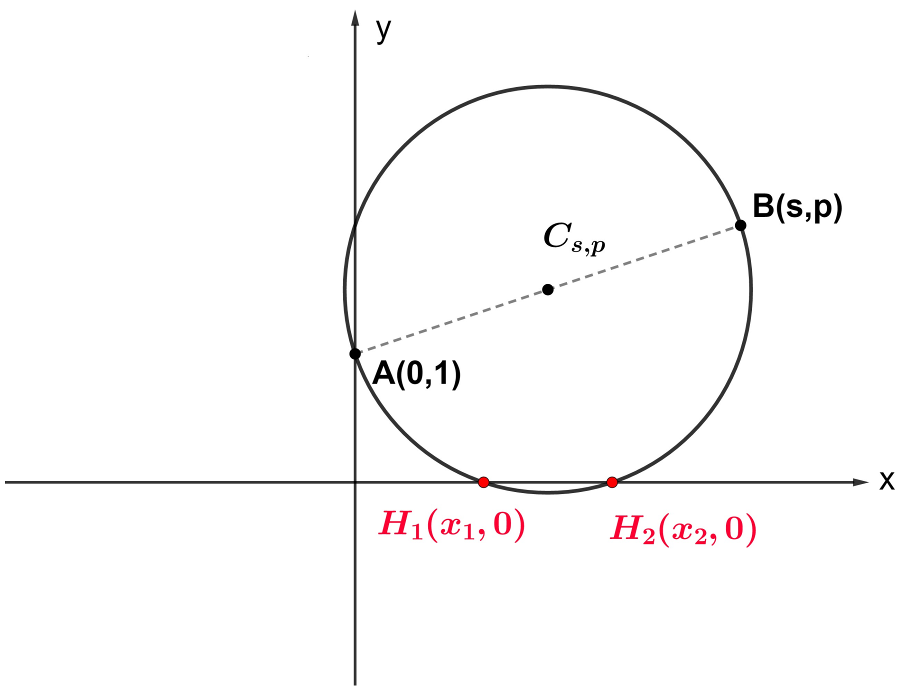
4.3 DeTemplen konstruktio

Vuonna 1991 Duane W. DeTemple julkaisi oman konstruktionsa seitsentoistakulmiolla. Konstruktio perustuu *Carlylen ympyröihin*, joita on pääasiassa käytetty toisen asteen yhtälöiden tarkasteluun ja sovellettu muiden monikulmioiden konstruktioissa.

Määritelmä 4.1. [**Carlylen ympyrä**]

Olkoon $x^2 - sx + p = 0$ toisen asteen yhtälö, jossa s ja p ovat kokonaislukuja. Tällöin ympyrää, jonka halkaisijan pisteet $A(0,1)$ ja $B(s,p)$ muodostavat, kuten kuvassa 27, kutsutaan *Carlylen ympyräksi* $C_{s,p}$. Tällöin *Carlylen ympyrä* $C_{s,p}$ leikkaa $x-$akselin pisteissä $H_1(x_1, 0)$ ja $H_2(x_2, 0)$.

Tällöin ympyrän kehän ja $x-$akselin leikkauspisteet ovat ympyrään liitetyn toisen asteen yhtälön ratkaisut x_1 ja x_2.

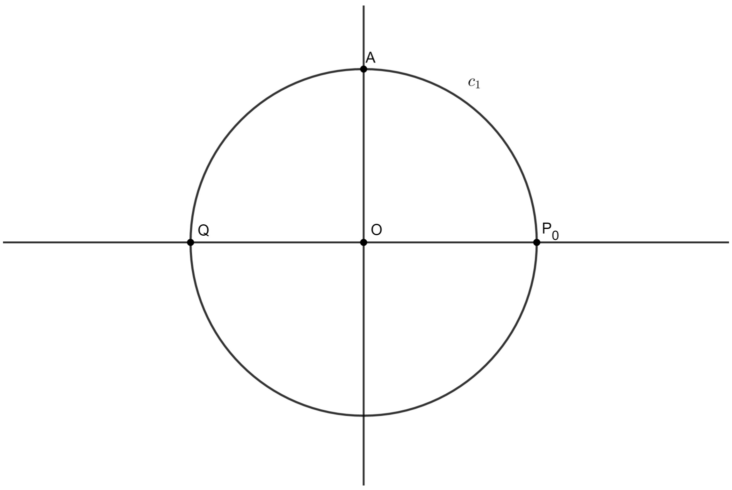


Kuva 27: Carlylen ympyrä.

Konstruktio

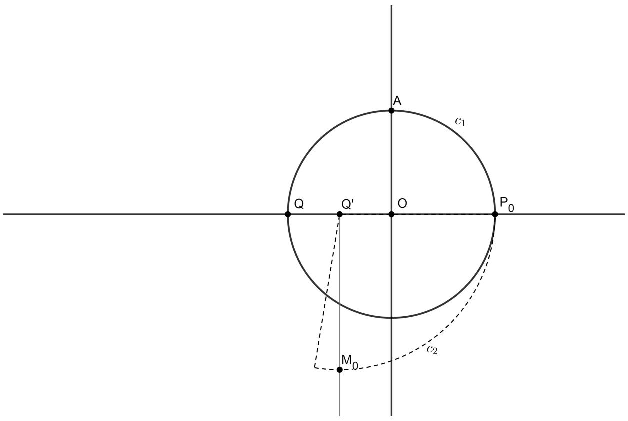
Duane W.Templen 1991 esittämää todistusta [5] mukaillen.

1. Piirretään yksikköympyrä koordinaatiston pisteeseen O ja merkitään pisteet P_0 ja Q kehän ja $x-$akselin leikkauspisteisiin sekä piste A ympyrän kehän ja $y-$akselin leikkauspisteeseen. Nyt piste A on *Carlylen ympyrän* vaatima piste $(0, 1)$, kuten kuvassa 28.



Kuva 28: Yksikköympyrä ja pisteet Q,A ja P_0.

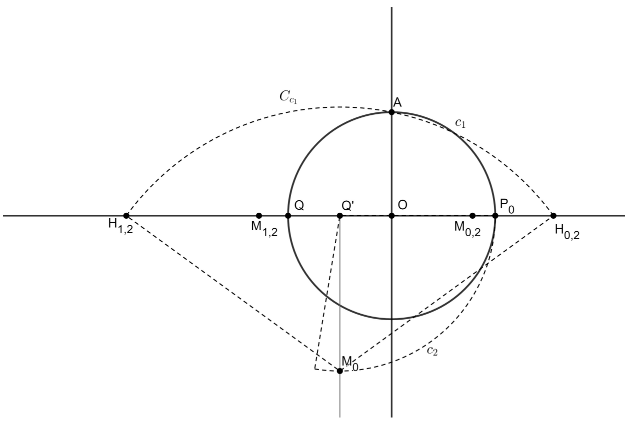
2. Merkitään piste Q' janan QO keskipisteeseen ja piirretään sille normaali suoralle QO. Piirretään pisteeseen Q' ympyrä, jonka säde on jana $Q'P_0$. Merkitään piste M_0 pisteeseen Q' piirretyn normaalin ja edellisen piirretyn ympyrän leikkauspisteeseen, kuten kuvassa 29.



Kuva 29: Pisteeseen Q' piirretty normaali ja $Q'P_0$ säteisen ympyrän leikkauspiste M_0.

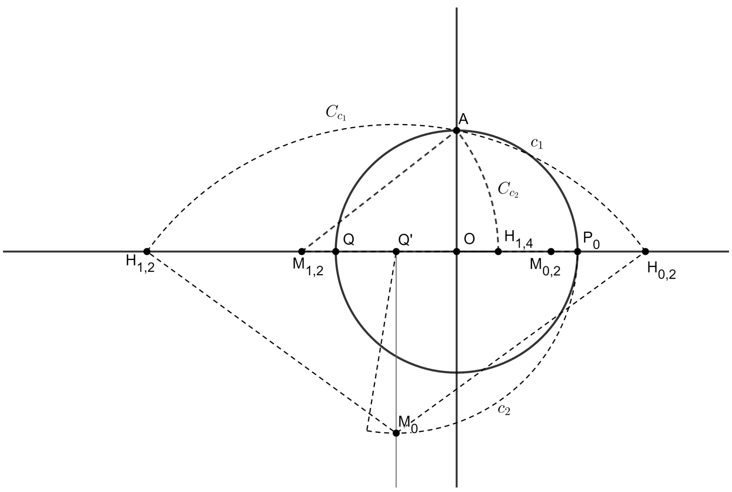
3. Piirretään pisteeseen M_0 ympyrä, joka kulkee pisteen A kautta. Merkitään pisteet $H_{1,2}$ ja $H_{0,2}$ $x-$akselin ja ympyrän leikkauskohtiin.

4. Merkitään piste $M_{1,2}$ janan $H_{1,2}O$ keskipisteeseen ja piste $M_{0,2}$ janan $OH_{0,2}$ keskipisteeseen, kuten kuvassa 30.



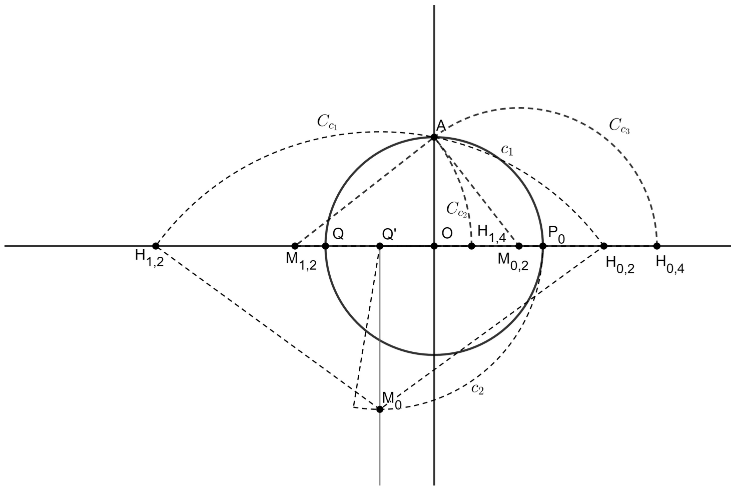
Kuva 30: Pisteeseen M_0 piirretty ympyrä ja sen leikkauspisteet $x-$akselin kanssa.

5. Piirretään pisteeseen $M_{1,2}$ ympyrä joka kulkee pisteen A kautta. Merkitään piste $H_{1,4}$ edellisen ympyrän ja $x-$akselin leikkauspisteeseen, kuten kuvassa 31.



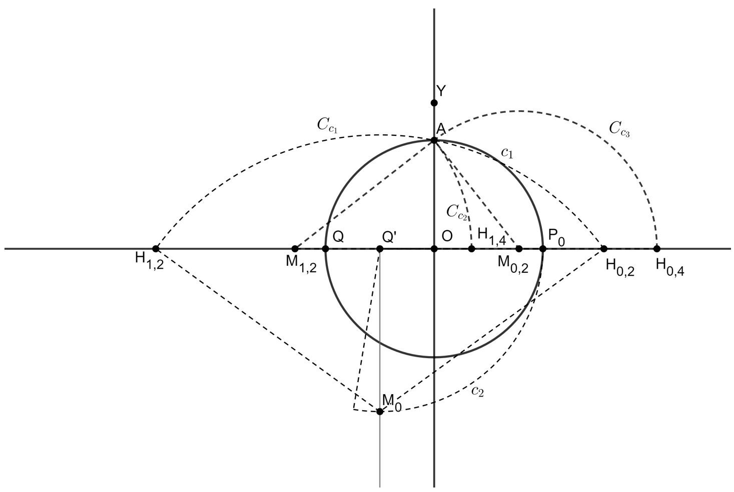
Kuva 31: Pisteeseen $M_{1,2}$ pisteen A kautta piirretyn ympyrän ja $x-$akselin leikkauspiste $H_{1,4}$.

6. Piirretään pisteeseen $M_{0,2}$ ympyrä, joka kulkee pisteen A kautta. Merkitään piste $H_{0,4}$ edellisen ympyrän ja $x-$akselin leikkauspisteeseen, kuten kuvassa 32.



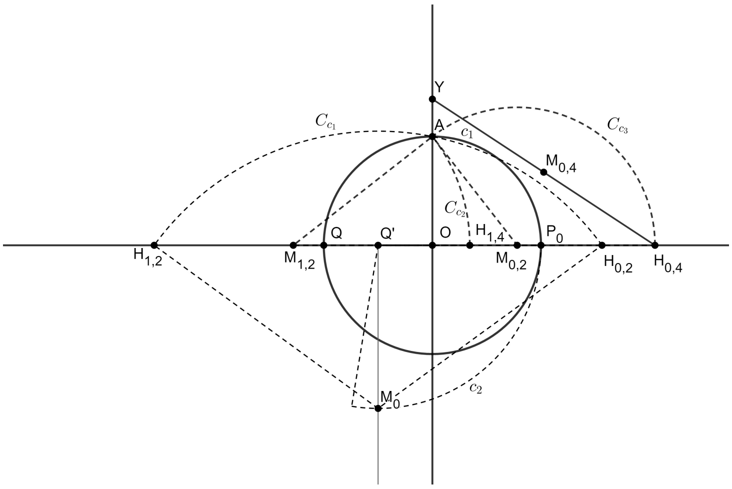
Kuva 32: Pisteeseen $M_{0,2}$ pisteen A kautta kulkeva ympyrä ja sen leikkauspiste $x-$akselin kanssa.

7. Merkitään $y-$akselille piste Y niin, että jana $QH_{1,4}$ on yhtä pitkä janan OY kanssa, kuten kuvassa 33.



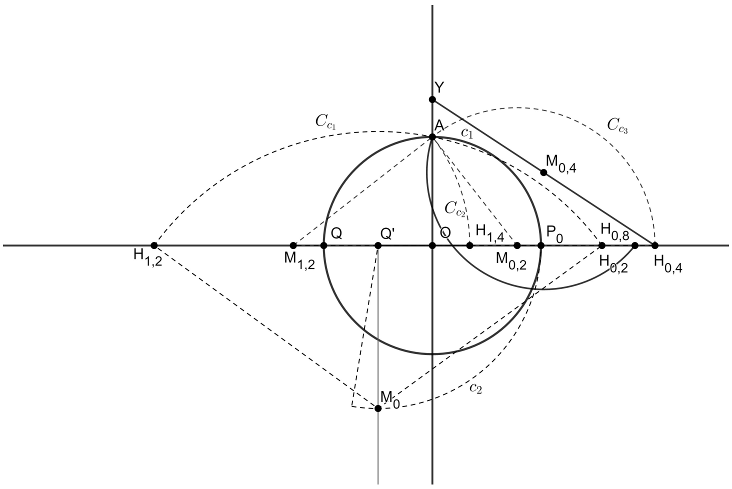
Kuva 33: Piste Y $y-$akselilla.

8. Merkitään piste $M_{0,4}$ janan $YH_{0,4}$ keskipisteeseen, kuten kuvassa 34.



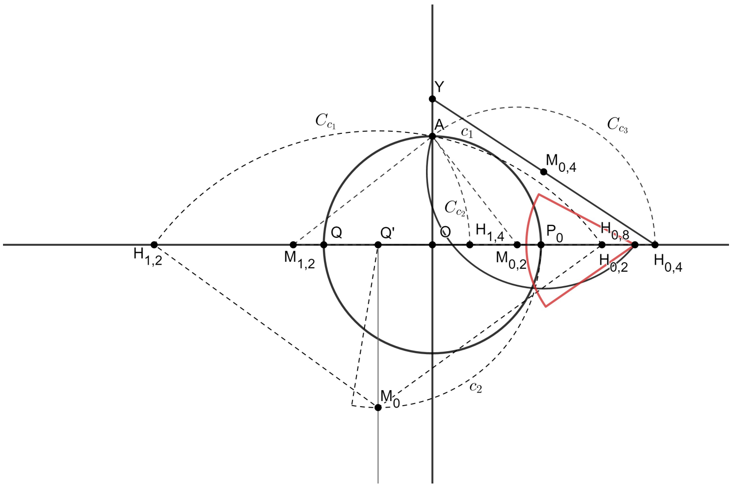
Kuva 34: Jana $YH_{1,4}$ ja sen keskipiste $M_{0,4}$.

9. Piirretään pisteeseen $M_{0,4}$ ympyrä pisteen A kautta. Merkitään piste $H_{0,8}$ edellä piirretyn ympyrän ja $x-$akselin leikkauspisteeseen, kuten kuvassa 35.



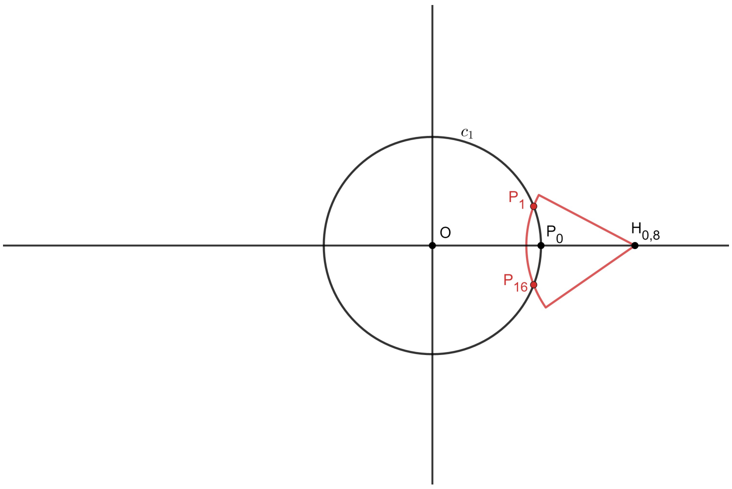
Kuva 35: Pisteeseen $M_{0,4}$ pisteen A kautta kulkeva ympyrä ja sen leikkauspiste $H_{0,8}$ x-akselin kanssa.

10. Piirretään pisteeseen $H_{0,8}$ yksikköympyrä, joka leikkaa alkuperäisen ympyrän, kuten kuvassa 36.



Kuva 36: Pisteeseen $H_{0,8}$ piirretyn yksikköympyrän kaari.

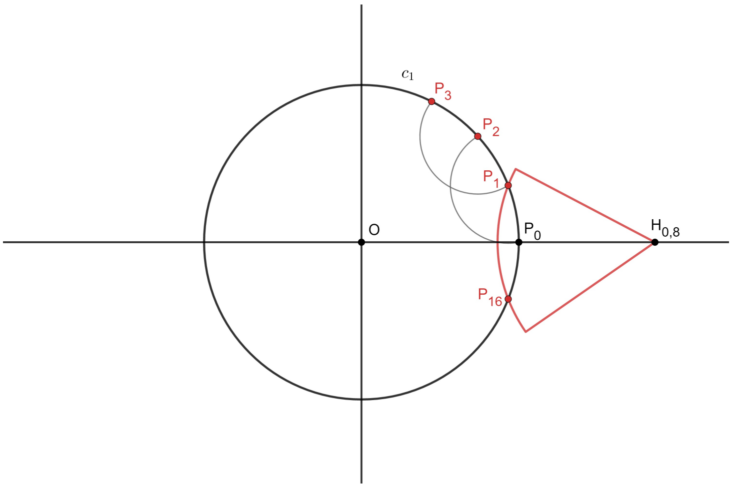
11. Merkitään pisteet P_1 ja P_{16} edellisessä kohdassa piirretyn yksikköympyrän ja alkuperäisen ympyrän leikkauspisteisiin, kuten kuvassa 37.



Kuva 37: Yksikköympyrän leikkauspisteet P_1 ja P_{16} alkuperäisen ympyrän kehällä.

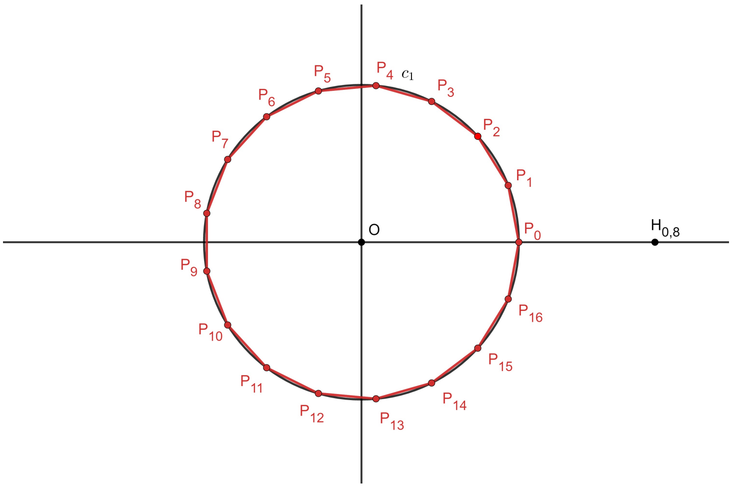
12. Nyt jana P_0P_1 on seitsentoistakulmion yks sivu.

13. Kopioidaan janan P_0P_1 pituus ympyrän kehää pitkin, jotta saadaan merkittyä pisteet $P_2, P_3, \ldots, P_{15}$, kuten kuvassa 38.



Kuva 38: Pisteiden $P2, P3, \ldots, P_{15}$ merkitseminen.

14. Yhdistämällä pisteet saadaan valmis seitsentositakulmio, kuten kuvassa 39.



Kuva 39: Valmis seitsentoistakulmio.

5 Lopuksi

Tässä työssä on esitetty kolme eri konstruktiota seitsentoistakulmiolle. Richmondin ja Stowellin konstruktiot ja niiden toimivuuden todistaminen perustuvat suurimmaksi osaksi trigonometriaan, kun taas DeTemplen konstruktio perustuu Carlylen ympyröihin ja niiden avulla muodostettavien yhtälöiden ratkaisuihin piirrettyihin yksikköympyröihin.

H. W. Richmondin konstruktion pätevyys perustuu yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2\cos 3\alpha + 2\cos 5\alpha = 2\cos \quad \alpha \cdot 2\cos 4\alpha = \tan C \\ 2\cos \quad \alpha + 2\cos 4\alpha = 2\cos 6\alpha \cdot 2\cos 7\alpha = \tan(C + 45°) \\ 2\cos 6\alpha + 2\cos 7\alpha = 2\cos 2\alpha \cdot 2\cos 8\alpha = \tan(C + 90°) \\ 2\cos 2\alpha + 2\cos 8\alpha = 2\cos 3\alpha \cdot 2\cos 5\alpha = \tan(C - 45°) \end{cases}$$

jossa $\alpha = \frac{2\pi}{17}$ ja $C = \angle OIA$, johtamiseen trigonometrian avulla ja sen käyttämiseen konstruktiosta saataviin kulmiin P_3OA ja P_5OA. Sieventämisen avulla saadaan tuloksiksi $P_3OA = 3\alpha$ ja $P_5OA = 5\alpha$, jotka osoittavat konstruktion tuottavan matemaattisesti tarkan seitsentoistakulmion. Edellä mainittu yhtälö mahdollistaa myös monenlaiset muut konstruktiot samaa ajatusta käyttäen, mutta tässä työssä esitetty versio tuottaa ehkä kaikkein lyhyimmän konstruktion. Mielestäni Richmonindin konstruktio on näistä kolmesta helpoin ja selkein johtuen sen yksinkertaisuudesta toteuttaa.

T. P. Stowellin konstruktio perustuu myös trigonometrialle, mutta sen matemaattisesta perustasta tai konstruktion synnystä ei löydy selkeitä lähteitä, vaikka itse konstruktio onkin säilynyt 1800-luvun alkupuolelta.

D. W. DeTemplen Carlylen ympyröihin perustuva konstruktio on mielestäni tässä työssä esitetyistä esteettisin ja elegantein. Konstruktio perustuu yhtälön

$$z^{16} + z^{15} + \cdots + z^1 + 1 = 0 \text{ juurien } \varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{16}, \text{ missä } \varepsilon = e^{2\pi i/17}$$

manipuloimiseen ja niistä muodostettavien yhtälöiden ratkaisemiseen Carlylen ympyröillä, jotka lopulta tuottavat origoon piirretyn yksikköympyrän kanssa pisteissä P_1 ja P_{16} risteävän toisen yksikköympyrän. Konstruktio perustuu pohjimmiltaan matemaattiseen oivaltamiseen ja asioiden yhdistämiseen, minkä vuoksi se kiehtoo itseäni. Samaa konstruktiossa käytettyä Carlylen ympyröiden perustekniikkaa voidaan soveltaa myös säännöllisten 257−kulmion ja 65537−kulmion konstruoinnissa.

Kirjallisuutta

[1] Hannu Tarnanen: *Matematiikan historia.* Turun yliopisto, vuosi tuntematon.

[2] Benjamin Bold: Achievements of the Ancient Greeks, *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover publications inc., Yhdysvallat, 1969.

[3] William Dunham: A Triple Anniversary, *Math Horizon.* Mathematical Association of America, Yhdysvallat, 1996.

[4] David Joyce: Euclides: Book IV, Proposition 11, 1997, luettu 23.11.18. *https://mathcs.clarku.edu/ djoyce/java/elements/bookIV/propIV11.html*

[5] Duane W. DeTemple: Carlyle circles and the lemoine simplicity of polygon constructions, *The American Mathematical Monthly*, Volume 98/2, 1991.

[6] Matti Lehtinen, Jorma Merikoski, Timo Tossavainen: Geometrisia konstruktioita, *Johdatus tasogeometriaan*, s. 83, 2007.

[7] Herbert W. Richmond: A Construction for a regular polygon of seventeen sides, *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, s. 206-207, 1893.

[8] Joel E. Hendricks: Answer to Mr. Heal's query by T. P. Stowell of Rochester, *The Analyst: A Monthly Journal of Pure and Applied Mathematicus*, Vol 1: 94-95, 1874.