# Paralleeliaksiooman ekvivalentit muodot

Kari Korpela

Pro Gradu -tutkielma

Turun yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

14.11.2019

# Sisältö

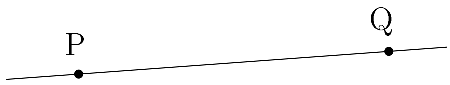
# 1 Johdanto

Euklidinen geometria perustuu perusolettamuksiin eli aksioomiin. Ensimmäisen aksioomasysteemin Euklidiselle geometrialle esitteli Eukleides Aleksandrialainen. Eukleideen aksioomista viides, paralleelipostulaatti, on ollut historiallisesti suuri matematiikan tutkimuskohde. Historian saatossa monet matemaatikot ovat yrittäneet todistaa, että paralleelipostulaatti ei ole aksiooma, vaan johdettavissa muista aksioomista. Paralleelipostulaatti kuitenkin saatiin todistettua riippumattomaksi muista aksioomista ja lisäksi paralleeliaksioomalle on löydetty useita ekvivalentteja muotoja.
Nykyään geometrian tutkimuksessa käytetään uudempia aksioomasysteemejä. Tämä tutkielma tarkastelee paralleeliaksiooman ekvivalentteja muotoja käyttäen David Hilbertin aksioomasysteemiä. Tutkielman aluksi esitellään Eukleideen ja Hilbertin aksioomasysteemit. Tämän jälkeen esitellään Hilbertin aksioomasysteemin käytön kannalta olennaiset määritelmät ja lukuisa määrä tarvittavia apulauseita paralleeliaksiooman tarkastelua varten. Paralleeliaksiooman tarkastelu aloitetaan todistamalla Eukleideen ja Hilbertin muodot paralleeliaksioomasta ekvivalenteiksi, sillä näin kaikki Hilbertin paralleeliaksiooman kanssa ekvivalenteiksi todistetut muodot paralleeliaksioomasta ovat myös todistetusti ekvivalentteja Eukleideen paralleeliaksiooman kanssa, joka on ensimmäinen tunnettu versio paralleeliaksioomasta. Tämän todistuksen jälkeen siirrytään tarkastelemaan eri muotoja paralleeliaksioomasta ja todistetaan ne ekvivalenteiksi Hilbertin paralleeliaksiooman kanssa. Päätöskappaleessa luodaan yhteenveto paralleeliaksiooman tarkastelusta.

## 2 Eukleideen aksioomat

Kirjassaan Alkeet[1] Eukleides esitteli viisi aksioomaa, jotka loivat Euklidisen geometrian perustan. Käyttämällä Eukleideen aksioomia voidaan luoda geometrisia konstruktioita ja todistaa geometrisia ominaisuuksia.

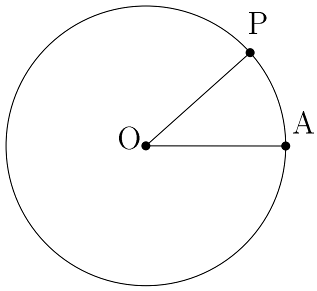
**Aksiooma 2.1.** Jokaiselle kahdelle eri pisteelle $P$ ja $Q$ on olemassa suora $l$, joka kulkee pisteiden $P$ ja $Q$ kautta.




Kuva 2.1: Pisteiden $P$ ja $Q$ kautta piirretty suora.

**Aksiooma 2.2.** Jokainen jana voidaan jatkaa suoraksi.

**Aksiooma 2.3.** Jokaiselle kahdelle eri pisteelle $O$ ja $A$ on olemassa ympyrä jonka keskipiste on $O$ ja säde $OA$.




Kuva 2.2: Pisteiden $O$ ja $A$ avulla piirretty ympyrä.

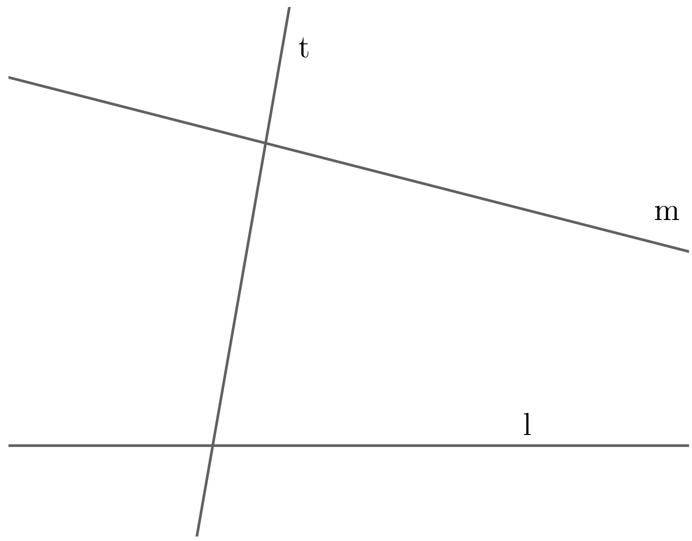
**Aksiooma 2.4.** Kaikki suorat kulmat ovat yhtäsuuria.

Eukleideen neljäs aksiooma määrittelee suoran kulman eräänlaiseksi mittayksiköksi, kirjassaan Alkeet[1] hän vertailee kulmia yhden tai useamman suoran kulman avulla. Tässä tutkielmassa käytetään yhtälöissä kahdelle suoralle kulmalle merkintää 180 astetta.

**Määritelmä 2.1.** Suorat tasossa ovat yhdensuuntaiset, jos niillä ei ole yhteisiä pisteitä.

Viidennelle aksioomalle, eli paralleeliaksioomalle on monta loogisesti yhtäpitävää muotoilua. Eukleides muotoili paralleeliaksiooman kirjassaan Alkeet[1] seuraavasti:

**Aksiooma 2.5.** Jos kahta suoraa leikkaa kolmas ja muodostuvien leikkaajan samalla puolella olevien sisäkulmien summa on suuruudeltaan vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa, leikkaavat suorat sillä puolella leikkaajaa toisensa.




Kuva 2.3: Eukleideen paralleeliaksiooma.

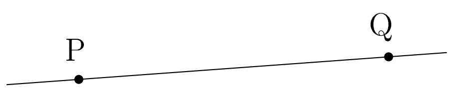
# 3 Hilbertin aksioomat

Hilbertin aksioomasysteemi vuodelta 1899 on Eukleideen aksioomasysteemiä laajempi ja täsmällinen. Monet Eukleideen aksioomasysteemissä konstruktioita ja todistuksia vaativista seikoista saadaan Hilbertin aksioomasysteemissä tehokkaammin suoraan aksioomista. Tämä kappale perustuu kirjan [2] lukuun kolme. Hilbertin aksioomajärjestelmä sisältää 21 aksioomaa ja voidaan jakaa seuraaviin osiin.

## 3.1 Insidenssin aksioomat

Ensimmäisessä osassa oletetaan tunnetuksi vain peruskäsitteet *piste* ja *suora*, sekä niiden välinen relaatio *piste sijaitsee suoralla* tai *suora kulkee pisteen kautta.*

**Aksiooma 3.1.** Jokaiselle kahdelle eri pisteelle $P$ ja $Q$ on olemassa suora $l$, joka kulkee pisteiden $P$ ja $Q$ kautta.




Kuva 3.1: Pisteiden $P$ ja $Q$ kautta piirretty suora.

**Aksiooma 3.2.** Jokaisella suoralla on vähintään kaksi eri pistettä.

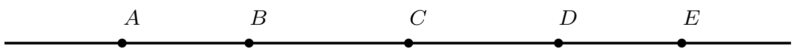
**Aksiooma 3.3.** On olemassa kolme eri pistettä $A$, $B$ ja $C$, joilla on seuraava ominaisuus: Yksikään suora ei kulje jokaisen pisteen $A$, $B$ ja $C$ kautta.

## 3.2 Välissäolon aksioomat

Toisessa osassa otetaan mukaan uusi käsite, *välissäolo*. Välissäoloa merkitään $A * B * C$ ja luetaan *"piste B on pisteiden A ja C välissä"*.

**Aksiooma 3.4.** Jos $A * B * C$, niin A, B ja C ovat kolme eri pistettä, jotka sijaitsevat samalla suoralla ja lisäksi $C * B * A$.

**Aksiooma 3.5.** Jos B ja D ovat eri pisteitä, on olemassa pisteet A, C ja E, jotka sijaitsevat suoralla $\overleftrightarrow{BD}$ siten, että $A * B * D$, $B * C * D$ ja $B * D * E$.

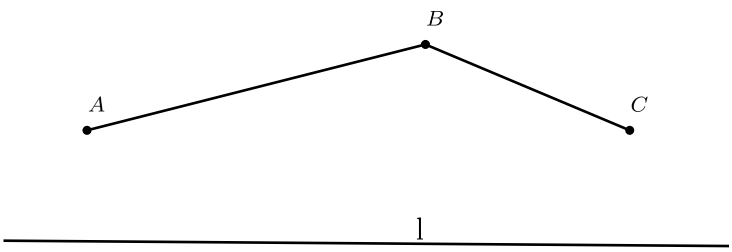



Kuva 3.2: Aksiooma 3.5

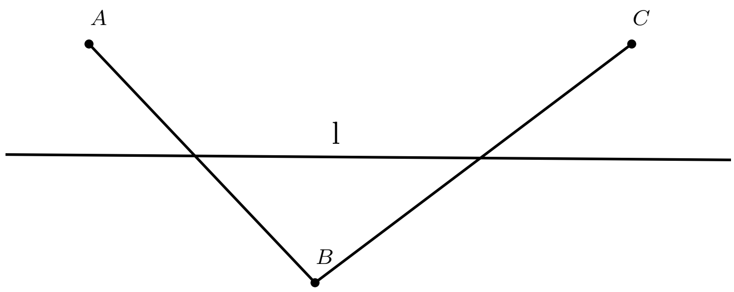
**Aksiooma 3.6.** Jos A, B ja C ovat kolme eri pistettä, jotka kaikki sijaitsevat samalla suoralla, vain yksi pisteistä on kahden muun välissä.

**Määritelmä 3.1.** Pisteet $A$ ja $B$ luokitellaan samalla puolella suoraa $l$ oleviksi, jos jana $AB$ ei leikkaa suoraa $l$. Vastaavasti pisteet $A$ ja $B$ luokitellaan eri puolilla suoraa $l$ oleviksi, jos jana $AB$ leikkaa suoran $l$.

**Aksiooma 3.7.** Jokaiselle suoralle $l$ ja pisteille $A$, $B$ ja $C$, jotka eivät sijaitse suoralla $l$, pätee seuraavat ehdot:
(i) Jos pisteet $A$ ja $B$ ovat samalla puolella suoraa $l$ ja pisteet $B$ ja $C$ ovat samalla puolella suoraa $l$, niin pisteet $A$ ja $C$ ovat samalla puolella suoraa $l$.
(ii) Jos pisteet $A$ ja $B$ ovat eri puolilla suoraa $l$ ja pisteet $B$ ja $C$ ovat eri puolilla suoraa $l$, niin pisteet $A$ ja $C$ ovat samalla puolella suoraa $l$.




Kuva 3.3: Tapaus i

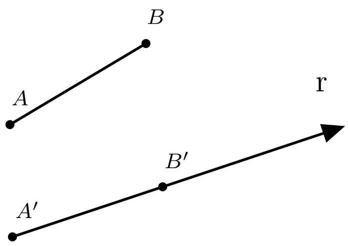



Kuva 3.4: Tapaus ii

## 3.3 Yhtenevyyden aksioomat

Kolmannessa osassa otetaan käyttöön *yhtenevyyden* käsite. Janojen tapauksessa merkitään $AB = CD$ ja luetaan jana $AB$ on kongruentti eli yhtä pitkä janan $CD$ kanssa. Kulmien tapauksessa merkitään $\angle ABC = \angle DEF$ ja luetaan kulma $\angle ABC$ on kongruentti eli yhtä suuri kulman $\angle DEF$ kanssa.

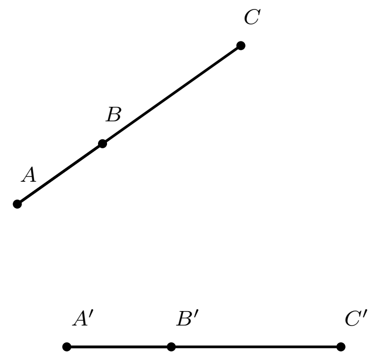
**Aksiooma 3.8.** Jos $A$ ja $B$ ovat määrättyjä pisteitä ja $A'$ mielivaltainen piste, jokaiselle puolisuoralle $r$, jotka lähtevät pisteestä $A'$ on olemassa yksikäsitteinen piste $B'$ puolisuoralla $r$ siten, että $B' \neq A'$ ja $AB = A'B'$ (kuva 3.5).




Kuva 3.5: Aksiooma 3.8

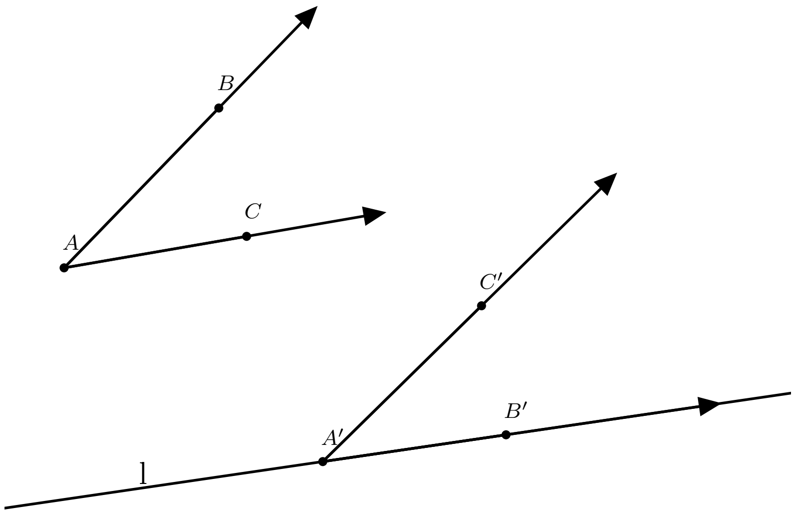
**Aksiooma 3.9.** Jos $AB = CD$ ja $AB = EF$, niin $CD = EF$. Lisäksi jokainen segmentti on itsensä kanssa kongruentti.

**Aksiooma 3.10.** Jos $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB = A'B'$ ja $BC = B'C'$, niin $AC = A'C'$ (kuva 3.6).




Kuva 3.6: Aksiooma 3.10

**Aksiooma 3.11.** Olkoon $\angle BAC$ mikä tahansa annettu kulma ja $\overrightarrow{A'B'}$ mikä tahansa annettu puolisuora, joka lähtee pisteestä $A'$. On olemassa yksikäsitteinen puolisuora $\overrightarrow{A'C'}$ annetulla puolella janaa $A'B'$ siten, että $\angle B'A'C' = \angle BAC$ (kuva 3.7).



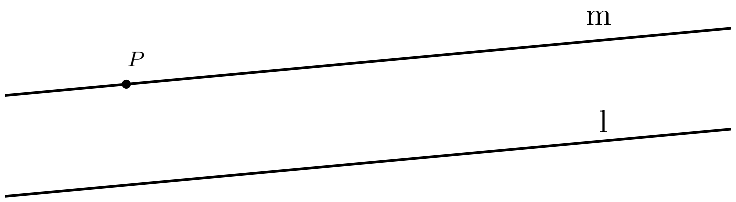

Kuva 3.7: Aksiooma 3.11

**Aksiooma 3.12.** Jos $\angle A = \angle B$ ja $\angle A = \angle C$, niin $\angle B = \angle C$. Lisäksi jokainen kulma on itsensä kanssa kongruentti.

**Aksiooma 3.13** (SKS)**.** Jos kolmion kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat kongruentteja toisen kolmion kahden sivun ja niiden välisen kulman kanssa, ovat kolmiot kongruentit.

## 3.4 Hilbertin Euklidinen paralleeliaksiooma

**Aksiooma 3.14.** Jokaiselle suoralle $l$ ja pistelle $P$, joka ei sijaitse suoralla, on olemassa enintään yksi suora $m$, joka sisältää pisteen $P$ ja on yhdensuuntainen suoran $l$ kanssa (kuva 3.8).

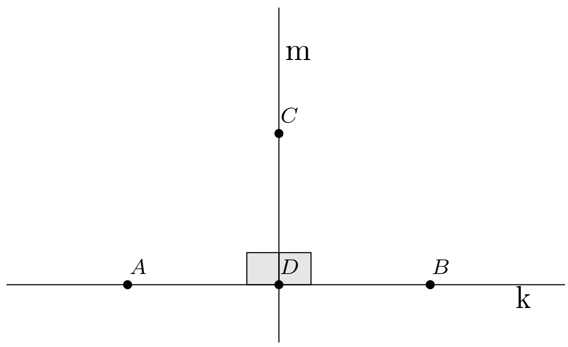



Kuva 3.8: Aksiooma 3.14

# 4 Määritelmät ja apulauseet

Paralleeliaksiooman tarkastelun kannalta olennaisia määritelmiä ovat suoran kulman, yhdensuuntaisuuden ja kohtisuoruuden määritelmät. Lisäksi tarkastelussa tarvitaan monia geometrian apulauseita, jotka esitellään ja todistetaan tässä kappaleessa. Tämä kappale perustuu kirjan [2] lukuihin kolme, neljä ja viisi.

**Määritelmä 4.1.** Kulmaa kutsutaan suoraksi kulmaksi, jos kulma ja sen vieruskulma ovat kongruentteja.




Kuva 4.1: Suorat kulmat $\angle ADC$ ja $\angle CDB$ ja kohtisuorat $k$ ja $m$.

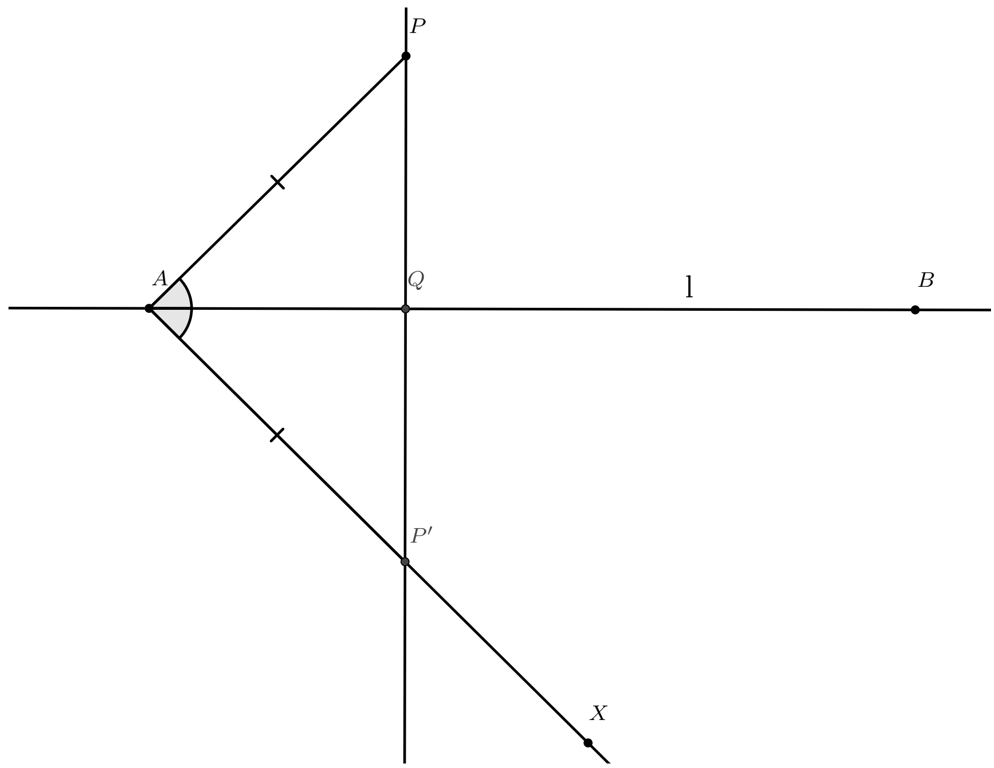
Kuvan 4.1 merkinnöin: Jos kulmat $\angle BDA$ ja $\angle CDA$ ovat yhtäsuuret, ovat ne suoria kulmia. Lisäksi, kulmaa joka sisältyy suoraan kulmaan eli on pienempi kuin suora kulma, kutsutaan *teräväksi* kulmaksi. Vastaavasti kulmaa, johon sisältyy suora kulma eli on suurempi kuin suora kulma, kutsutaan *tylpäksi* kulmaksi.

**Määritelmä 4.2.** Suoria kutsutaan toisiaan kohtaan kohtisuoriksi, mikäli ne leikkaavat pisteessä ja niiden väliin muodostuva kulma on suorakulma (kuva 4.1).

**Lause 4.1.** Jokaiselle suoralle $l$ ja pisteelle $P$ on olemassa kohtisuora pisteen $P$ kautta suoralle $l$.

*Todistus.* Oletetaan ensin, että piste $P$ ei sijaitse suoralla $l$. Olkoon $A$ ja $B$ mitkä tahansa pisteet suoralla $l$ (insidenssin aksiooma 3.2). Pistettä

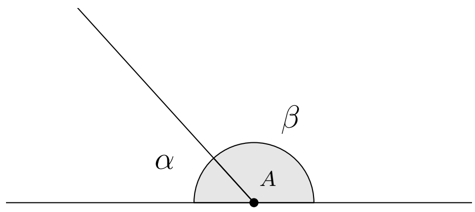
$P$ vastakkaisella puolella suoraa $l$ on olemassa puolisuora $\overrightarrow{AX}$ siten, että $\angle XAB = \angle PAB$ (kongruenssin aksiooma 3.11). Lisäksi on olemassa piste $P'$ puolisuoralla $\overrightarrow{AX}$ siten, että $AP' = AP$ (kongruenssin aksiooma 3.8). Merkitään suora $\overleftrightarrow{PP'}$ ja tämän leikkauspiste $Q$ suoran $l$ kanssa (kuva 4.2).




Kuva 4.2: Lauseen 4.1 todistus

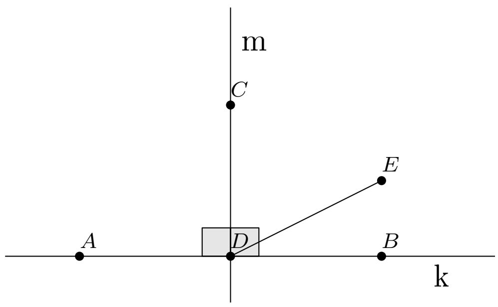
Jos $Q = A$, on suora $\overleftrightarrow{PP'}$ kohtisuorassa suoran $l$ kanssa kohtisuoruuden määritelmän 4.2 perusteella. Jos taas $Q \neq A$, on $\Delta PAQ = \Delta P'AQ$ SKS-aksiooman 3.13 perusteella ja $\angle PQA = \angle P'QA$ eli $PP'$ on kohtisuorassa suoraa $l$ kohtaan kohtisuoruuden määritelmän 4.2 perusteella.
Oletetaan seuraavaksi, että piste $P$ sijaitsee suoralla $l$. Voidaan valita mielivaltainen piste, joka ei sijaitse suoralla $l$, ja toistaa aikaisempi konstruktio, muodostaen kohtisuoran suoralle $l$. Tämän jälkeen voidaan kongruenssin aksiooman 3.11 perusteella luoda toinen suorakulma suoralle $l$, pisteeseen $P$. $\square$

**Lause 4.2** (Vieruskulmalause)**.** Vieruskulmien summa on suuruudeltaan kaksi suoraa kulmaa. Kuvan 4.3 merkinnöin $\alpha + \beta = 180°$.




Kuva 4.3: Vieruskulmat.

*Todistus.* Olkoon $k$ suora, jolla sijaitsee jana $AB$. Konstruoidaan janalle $AB$ kohtisuora $m$ pisteeseen $D$. Merkitään piste $C$ suoralle $m$ ja piste $E$, joka ei sijaitse kummallakaan suoralla. Piirretään jana $DE$. Tarkastellaan nyt kuvan 4.4 tilannetta.




Kuva 4.4: Suora $k$, kohtisuora $m$ ja jana $DE$.

Nyt $\angle ADC$ ja $\angle CDB$ ovat suoria kulmia, sillä $C$ sijaitsee kohtisuoralla $m$. Lisäksi kulma $\angle CDB$ sisältää kulmat $\angle CDE$ ja $\angle EDB$ sekä kulma $\angle ADE$ sisältää kulmat $\angle ADC$ ja $\angle CDE$. Yhtälömuodossa kulmalle $\angle CDB$ saadaan:

$$\angle CDB = \angle CDE + \angle EDB.$$

Lisätään molemmille puolille $\angle ADC$:

$$\angle ADC + \angle CDB = \angle ADC + \angle CDE + \angle EDB.$$

Koska $\angle ADE = \angle ADC + \angle CDE$, saadaan

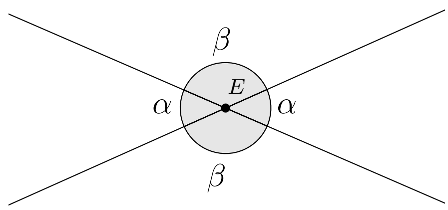
$$\angle ADC + \angle CDB = \angle ADE + \angle EDB.$$

Näin ollen vieruskulmat $\angle ADE$ ja $\angle EDB$ ovat yhteensä yhtäsuuret kuin kaksi suoraa kulmaa.
Tapauksessa, jossa $E$ sijaitsisi kohtisuoralla $k$, olisivat vieruskulmat $\angle ADE$ ja $\angle EDB$ yhtäsuuret eli kumpikin suoria kulmia ja yhdessä kaksi suoraa kulmaa. □

**Lause 4.3** (SKK)**.** Kolmiot, joiden kaksi kulmaa ja yksi sivu ovat yhtäsuuret, ovat kongruentteja.

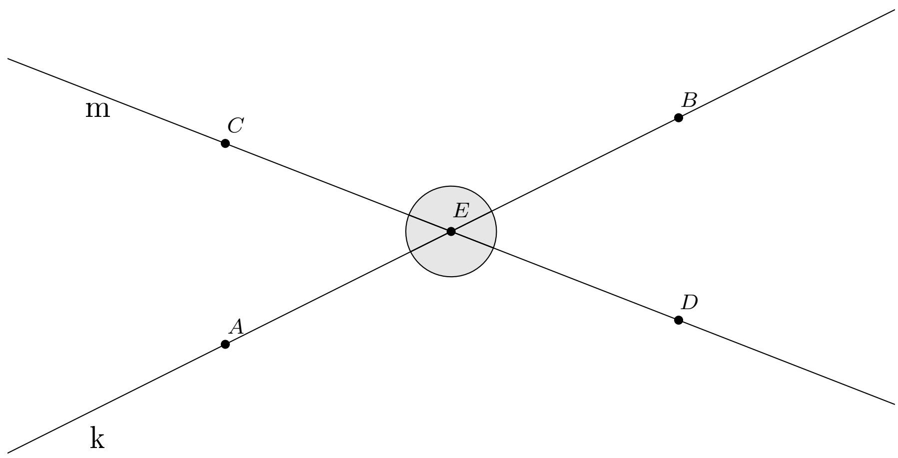
*Todistus.* Todistus ohitetaan.

**Lause 4.4** (Ristikulmalause)**.** Kahden suoran leikkauspisteeseen muodostuvat vastakkaiset kulmat, eli ristikulmat, ovat yhtäsuuret.




Kuva 4.5: Ristikulmat.

*Todistus.* Olkoot $AB$ ja $DC$ toisiaan leikkaavat janat, jotka sijaitsevat suorilla $k$ ja $m$ kuvan 4.6 mukaisesti.




Kuva 4.6: Leikkaavat janat $AB$ ja $DC$.

Nyt kulmat $\angle AEC$ ja $\angle CEB$ sekä $\angle CEB$ ja $\angle BED$ ovat vieruskulmia. Yhtälömuodossa saadaan vieruskulmalauseen 4.2 nojalla:

$$\angle AEC + \angle CEB = 180°$$

$$\angle CEB + \angle BED = 180°$$

Joten

$$\angle AEC + \angle CEB = \angle CEB + \angle BED$$

$$\angle AEC = \angle BED.$$

Vastaavasti $\angle DEA$ ja $\angle AEC$ sekä $\angle AEC$ ja $\angle CEB$ ovat vieruskulmia. Yhtälömuodossa saadaan vieruskulmalauseen 4.2 nojalla:

$$\angle DEA + \angle AEC = 180°$$

$$\angle AEC + \angle CEB = 180°$$

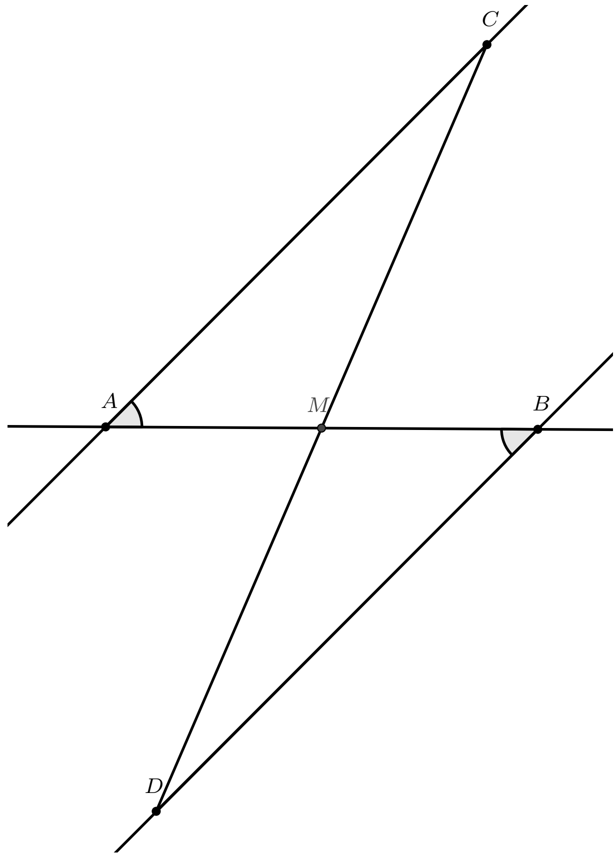
Joten

$$\angle DEA + \angle AEC = \angle AEC + \angle CEB$$

$$\angle DEA = \angle CEB.$$

□

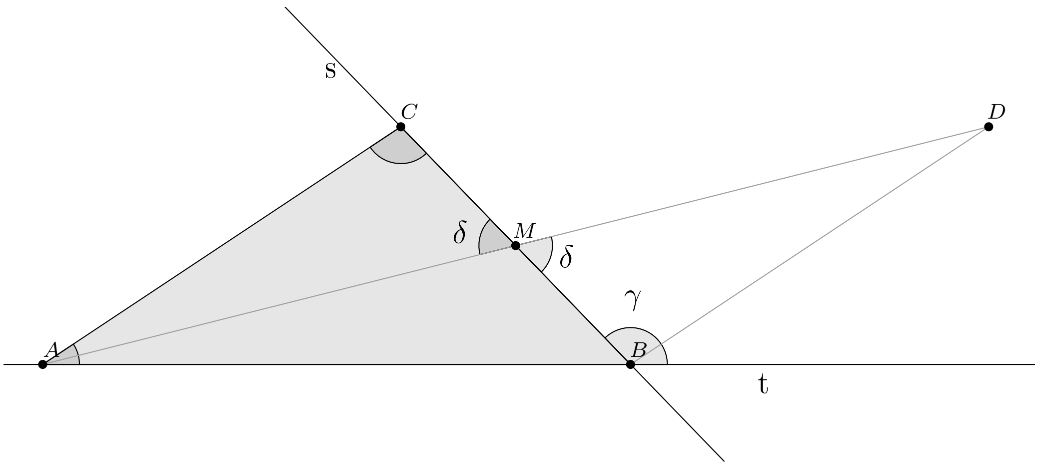
**Konstruktio 4.1** (Janan keskipiste)**.** Olkoon $AB$ annettu jana. Tehtävänä on määrittää janan keskipiste $M$. Valitaan mielivaltainen piste $C$ janan ulkopuolelta. Muodostuu kulma $\angle CAB$. Kongruenssin aksiooman 3.11 nojalla on olemassa kulman $\angle CAB$ kanssa kongruentti kulma pisteessä $B$ ja kongruenssin aksiooman 3.8 nojalla on olemassa myös piste $D$ tämän kulman sivulla siten, että $AC = BD$. Merkitään jana $CD$ ja leikkauspiste $M$ (kuva 4.7). Nyt ristikulmalauseen 4.4 ja SKK lauseen 4.2 perusteella kolmiot $\Delta AMC$ ja $\Delta BMD$ ovat kongruentteja, eli $AM = MB$.




Kuva 4.7: Janan keskipisteen konstruktio.

**Lause 4.5** (Ulkokulmalause)**.** Kolmion mikä tahansa ulkokulma on suurempi kuin kumpikaan kahdesta muusta sisäkulmasta.

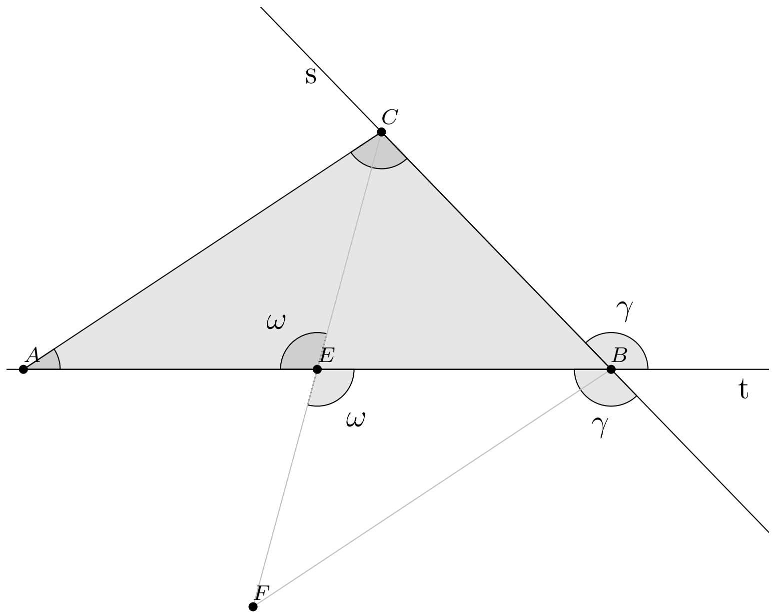
*Todistus.* Olkoon $\Delta ABC$ annettu kolmio. Osoitetaan, että kulman $\angle B$ ulkokulma on suurempi kuin kulma $\angle A$ ja $\angle C$. Jatketaan kolmion sivut $AB$ ja $CB$ suoriksi $t$ ja $s$, ja merkitään kolmion kulman $\angle B$ ulkokulma $\gamma$ (katso kuva 4.8). Merkitään kolmion sivun $CB$ keskipiste $M$ (konstruktio 4.1). Piirretään jana $AM$ ja jatketaan janaa $AM$ pisteeseen $D$ asti siten, että $AM = MD$ (kongruenssin aksiooma 3.8). Lopuksi piirretään jana $BD$.




Kuva 4.8: Ulkokulmalauseen todistus.

Nyt kolmiot $\Delta AMC$ ja $\Delta DMB$ ovat SKS-aksiooman (Aksiooma 3.13) nojalla kongruentteja, koska $AM = MD$, $CM = MB$ ja ristikulmat $\angle AMC$ ja $\angle DMB$ yhtäsuuret (Lause 4.4.). Erityisesti kulmat $\angle MCA$ ja $\angle MBD$ ovat yhtäsuuret. Koska kulma $\angle MBD$ on osa ulkokulmaa $\gamma$, on se pienempi kuin kulma $\gamma$.

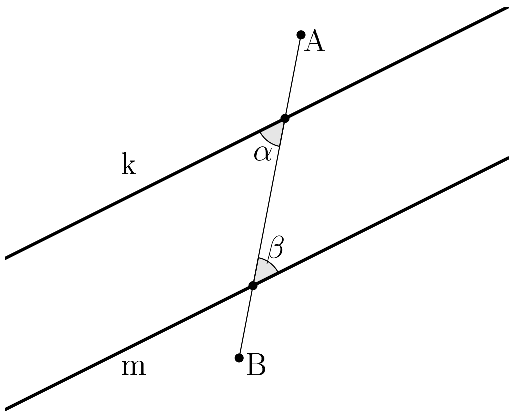
Tehdään vastaava konstruktio sivulle $AB$ kuvan 4.9 merkinnöin:




Kuva 4.9: Ulkokulmalauseen todistus.

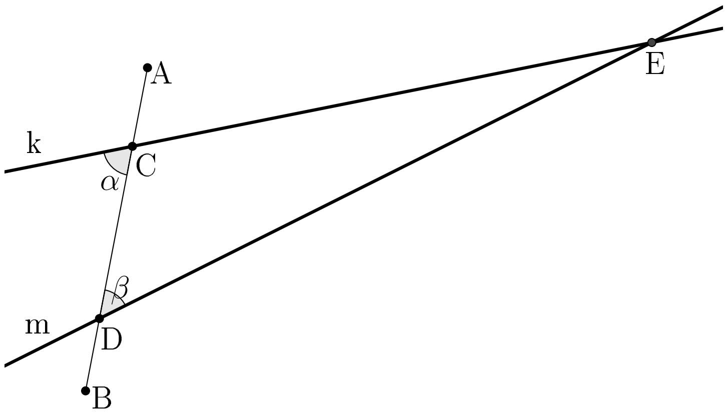
Nyt kolmiot $\Delta AEC$ ja $\Delta BEF$ ovat kongruentteja SKS-aksiooman 3.13 nojalla ja kulmat $\angle CAE$ ja $\angle FBE$ ovat yhtäsuuret. Kulma $\angle FBE$ on osa kulmaa $\gamma$ ja siten pienempi kuin kulma $\gamma$. $\square$

**Lause 4.6** (Vuorokulmalause)**.** Jos jana leikkaa kahta suoraa ja muodostuvat vuorokulmat ovat yhtäsuuret, ovat suorat yhdensuuntaiset. Kuvan 4.10 merkinnöillä $\alpha = \beta \Rightarrow k \,||\, m$.




Kuva 4.10: Vuorokulmat.

*Todistus.* Tehdään vastaoletus. Oletetaan, että suorat eivät ole yhdensuuntaiset. Nyt yhdensuuntaisuuden määritelmän 2.1 nojalla niillä on leikkauspiste. Piirretään leikkaavat suorat $k$ ja $m$ ja niitä molempia leikkaava jana $AB$. Merkitään janan $AB$ ja suorien $k$ ja $m$ leikkauspisteet $C$ ja $D$ sekä muodostuvat vuorokulmat $\alpha$ ja $\beta$. Merkitään suorien $k$ ja $m$ leikkauspiste $E$. Katso kuva 4.11.




Kuva 4.11: Leikkaavat suorat $k$ ja $m$, sekä niitä leikkaava jana $AB$.

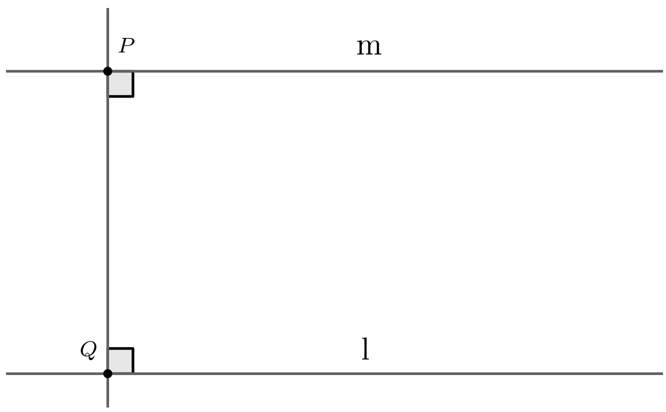
Tarkastellaan muodostunutta kolmiota $\Delta DEC$. Jos nyt $\alpha = \beta$, syntyy ristiriita ulkokulmalauseen 4.5 kanssa, sillä ulkokulmalauseen mukaan on ulkokulman $\alpha$ oltava suurempi kuin sisäkulman $\beta$. Näin ollen suorien $k$ ja $m$ on oltava yhdensuuntaiset. □

**Lause 4.7** (Vuorokulmalauseen seuraus 1.)**.** Mikäli kaksi suoraa $m$ ja $l$ ovat kohtisuorassa kolmatta suoraa $t$ kohtaan, ovat suorat $m$ ja $l$ yhdensuuntaiset. Täten pisteen $P$, joka ei sijaitse suoralla $l$, kautta kulkeva kohtisuora suoralle $l$ on yksikäsitteinen.

*Todistus.* Jos $m$ ja $l$ ovat kohtisuorassa suoraa $t$ kohtaan, ovat molemmat vuorokulmat suoria kulmia ja siten kongruentteja. □

**Lause 4.8** (Vuorokulmalauseen seuraus 2.)**.** Olkoon $l$ suora ja $P$ piste joka ei sijaitse suoralla $l$. On olemassa vähintään yksi suora $m$, joka kulkee pisteen $P$ kautta ja on yhdensuuntainen suoran $l$ kanssa (kuva 4.12).

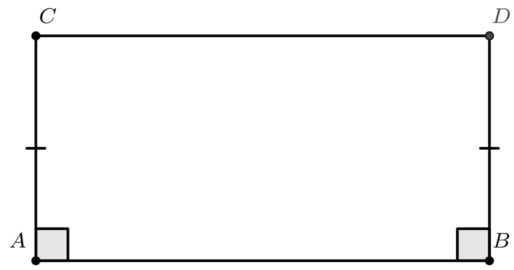
*Todistus.* Lauseen 4.1 nojalla on olemassa suora $t$, joka kulkee pisteen $P$ kautta ja on kohtisuorassa suoraa $l$ kohtaan. Vastaavasti on olemassa suora $m$, joka kulkee pisteen $P$ kautta ja on kohtisuorassa suoraa $t$ vastaan. Koska $l$ ja $m$ ovat molemmat kohtisuorassa suoraa $t$ kohtaan, Vuorokulmalauseen seurauksen 4.7 mukaan suorat $l$ ja $m$ ovat yhdensuuntaisia.




Kuva 4.12: Suorat $m$ ja $l$, sekä niitä leikkaava suora $t$.

□

**Määritelmä 4.3.** Nelikulmiota $\square ABCD$ (kuva 4.13), jossa vierekkäiset kulmat $\angle A$ ja $\angle B$ ovat suoria kulmia, kutsutaan puolisuoraksi nelikulmioksi. Sivua $AB$ kutsutaan kannaksi ja sivua $CD$ huipuksi. Vastaavasti nelikulmion kulmia kutsutaan kanta- tai huippukulmiksi.




Kuva 4.13: Nelikulmio $\square ABCD$

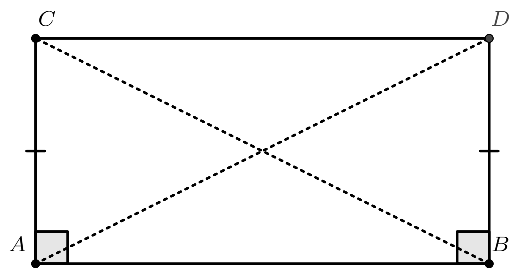
Lisäksi nelikulmiota, jonka kantakulmat ovat suoria kulmia ja viereiset sivut (kuvassa 4.13 $CA$ ja $DB$) ovat kongruentteja, kutsutaan Saccherin nelikulmioksi. Saccherin nelikulmio voidaan konstruoida annetulle janalle konstruoimalla kahteen pisteeseen kohtisuora ja kongruenssin aksiooman 3.8 avulla voidaan valita sivut kongruenteiksi.

**Lause 4.9** (SSS)**.** Kolmiot, joiden kolme vastinsivua ovat yhtäsuuret, ovat yhtenevät.

*Todistus.* Todistus ohitetaan.

**Lause 4.10** (Saccheri I)**.** Huippukulmat Saccherin nelikulmiossa ovat kongruentteja keskenään (kuvassa 4.13 $\angle C = \angle D$).

*Todistus.* Tarkastellaan Saccherin nelikulmiota (kuva 4.14).

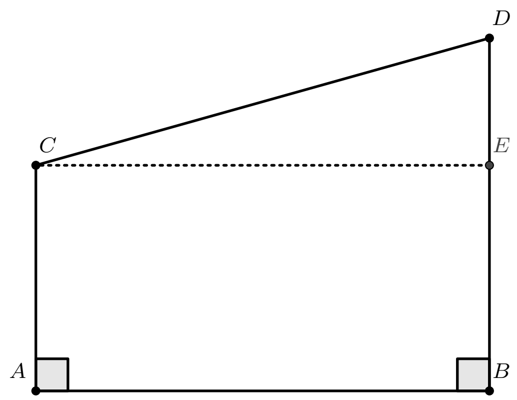



Kuva 4.14: Saccherin nelikulmio.

Hypoteesin ja SKS-aksiooman 3.13 perusteella $\triangle DBA = \triangle CAB$. Lisäksi SSS-lauseen perusteella $\triangle DCB = \triangle CDA$. Näin ollen kulmien summauksen perusteella $\angle C = \angle D$. $\square$

**Lause 4.11.** Puolisuorassa nelikulmiossa pidempi sivu on suurempaa huippukulmaa vastapäätä.

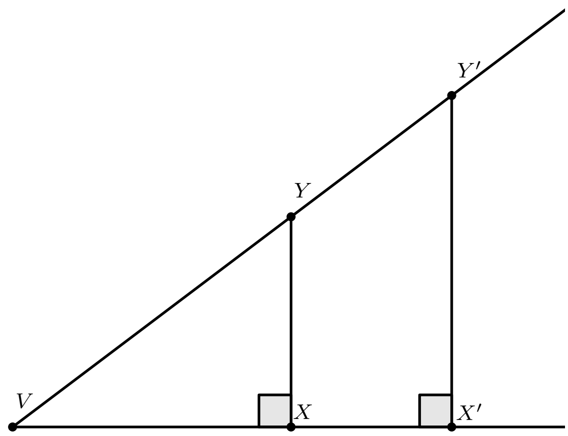
*Todistus.* Olkoon $\square ABDC$ puolisuora nelikulmio (kuva 4.15).




Kuva 4.15: Puolisuora nelikulmio.

Oletetaan ensin, että $BD > AC$. Nyt on olemassa piste $E$ pisteiden $B$ ja $D$ välissä siten, että $AC = BE$ ja muodostuva $\square ABEC$ on Saccherin nelikulmio. Lauseen 4.10 mukaan $\angle ACE = \angle BEC$. Ulkokulmalauseen mukaan $\angle BEC > \angle D$, eli myös $\angle ACE > \angle D$. Lisäksi $\angle ACE$ sisältyy kulmaan $\angle ACD$, eli $\angle D < \angle ACE < \angle ACD$, kuten pitikin olla. Oletetaan seuraavaksi, että $C > D$. Tehdään vastaoletus, että $BD$ ei ole pidempi kuin $AC$, eli $BD < AC$ tai $BD = AC$. Ensimmäinen tapaus on ristiriidassa ylläolevan todistuksen kanssa ja kongruenssin tapauksessa $\square ABDC$ on Saccherin nelikulmio, eli $C$ ja $D$ ovat kongruentteja mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa, eli $BD > AC$. $\square$

**Lause 4.12** (Lauseen 4.11 seuraus)**.** Olkoon $\angle V$ annettu terävä kulma, piste $Y$ mielivaltaisesti kulman $\angle V$ sivulla ja piste $Y'$ samalla sivulla siten, että $V * Y * Y'$. Olkoon lisäksi kohtisuorat pisteistä $Y$ ja $Y'$ kulman toiselle sivulle ja merkitään kohtisuorien kannoiksi $X$ ja $X'$. Nyt kuvassa 4.16 havainnollistetussa tilanteessa pätee $Y'X' > YX$.

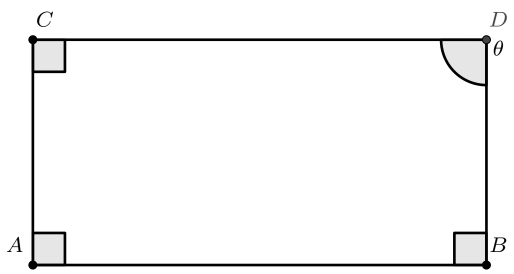



Kuva 4.16: Kulma $\angle V$ ja konstruoitu puolisuora nelikulmio $\square XX'YY'$

*Todistus.* Ulkokulmalauseen nojalla kulmat $\angle VYX$ ja $\angle VY'X'$ ovat teräviä kulmia. Lisäksi kulma $\angle Y'YX$ on kulman $\angle VYX$ vieruskulmana tylppä kulma ja siten myös suurempi kuin $\angle VY'X'$. Nyt käyttämällä lausetta 4.11 puolisuoraan nelikulmioon $\square XX'YY'$, saadaan $Y'X' > YX$. $\square$

**Määritelmä 4.4.** Nelikulmiota, jonka kulmista vähintään kolme ovat suoria kulmia, kutsutaan Lambertin nelikulmioksi. Jäljelle jäävää kulmaa kutsutaan *neljänneksi kulmaksi*.

**Lause 4.13.** Lambertin nelikulmion neljännen kulman viereiselle sivulle pätee:
i) Jos neljäs kulma on terävä kulma, sen sivu on pidempi, kuin vastakkainen sivu.
ii) Jos neljäs kulma on suora kulma, sen sivu on kongruentti vastakkaiseen sivuun.
iii) Jos neljäs kulma on tylppä kulma, sen sivu on lyhyempi, kuin vastakkainen sivu.




Kuva 4.17: Lambertin nelikulmio.

*Todistus.* Seuraa lauseesta 4.11. □

# 5 Paralleeliaksiooma

## 5.1 Historia

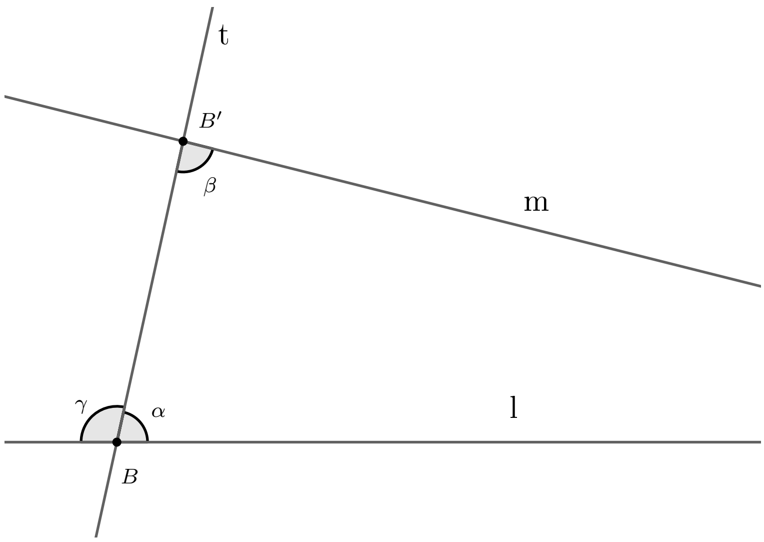
Eukleides Aleksandrialainen esitteli paralleeliaksiooman ensimmäistä kertaa kirjassaan Alkeet[1] noin 300 eaa. Tästä lähtien noin kaksi tuhatta vuotta paralleeliaksiooma oli kiistelty aksiooma, sillä monet matemaatikot näkivät paralleeliaksiooman tarpeettomana. Aksiooman kriteerinä on riippumattomuus muista valituista aksioomista, joten monet matemaatikot pyrkivät johtamaan paralleeliaksiooman neljästä ensimmäisestä Eukleideen aksioomasta. Yksi tunnettu geometrian lause ja ekvivalentti paralleeliaksiooman muoto on, että tasossa sijaitsevan kolmion kulmien summa on 180 astetta. Näin ollen matemaatikot Saccheri ja Legendre yrittivät osoittaa paralleeliaksiooman tarpeettomaksi todistamalla, että kolmion kulmien summa on 180 astetta käyttämättä paralleeliaksioomaa. Tässä he eivät kuitenkaan onnistuneet, sillä he pystyivät todistamaan vain, että kolmion kulmien summa on enintään 180 astetta, kun paralleeliaksiooma ei ole voimassa. Nikolai Lobachevskyn julkaisut imaginäärisestä geometriasta vuosina 1835, 1836 ja 1856 sisälsivät todistuksen paralleeliaksiooman riippumattomuudelle ja 1800-luvun lopulla paralleeliaksiooma hyväksyttiin yleisesti aksioomaksi. Pitkän paralleeliaksiooman tutkimuksen myötä alettiin tarkastelemaan myös epä-Euklidisia geometrioita, joissa paralleeliaksiooma ei ole voimassa.

## 5.2 Eukleideen paralleeliaksiooma ja Hilbertin paralleeliaksiooma

Myöhemmin Euklidisen geometrian tutkimuksessa yleistyi David Hilbertin aksioomasysteemi, jossa yksi aksioomista on Hilbertin paralleeliaksiooma. Ennen paralleeliaksiooman ekvivalenttien muotojen tarkastelua on mielekästä todistaa Eukleideen ja Hilbertin paralleeliaksioomat ekvivalenteiksi.

**Lause 5.1.** Eukleideen paralleeliaksiooma on ekvivalentti Hilbertin paralleeliaksiooman kanssa.

*Todistus.* Oletetaan ensin, että Hilbertin paralleeliaksiooma on voimassa ja tarkastellaan Eukleideen paralleeliaksiooman tilannetta: Konstruoidaan kolme suoraa $l$, $m$ ja $t$ siten, että suora $t$ leikkaa suoria $l$ ja $m$. Muodostetaan konstruktio siten, että sisäkulmien summa on alle $180°$. Käytetään kuvan 5.1 merkintöjä.




Kuva 5.1: Eukleideen paralleeliaksiooma.

Olkoon siis:

$$\alpha + \beta < 180°.$$

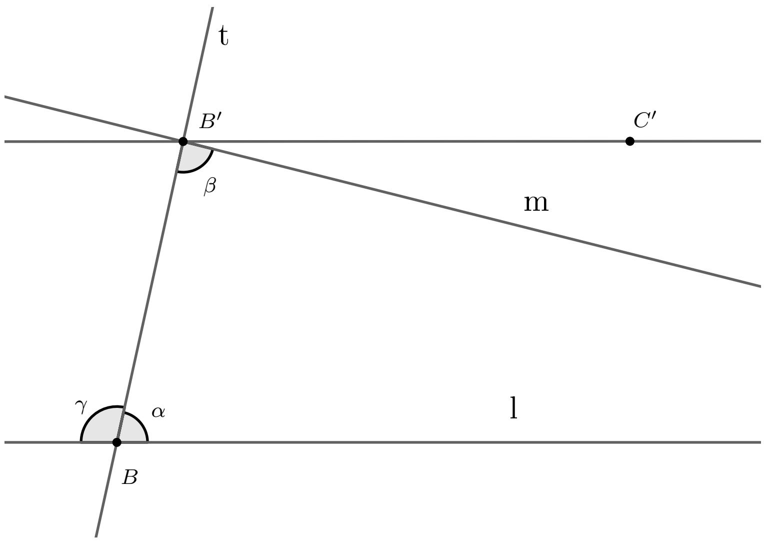
Lisäksi vieruskulmalauseen 4.2 nojalla

$$\alpha + \gamma = 180°.$$

Näistä kahdesta yhtälöstä saadaan

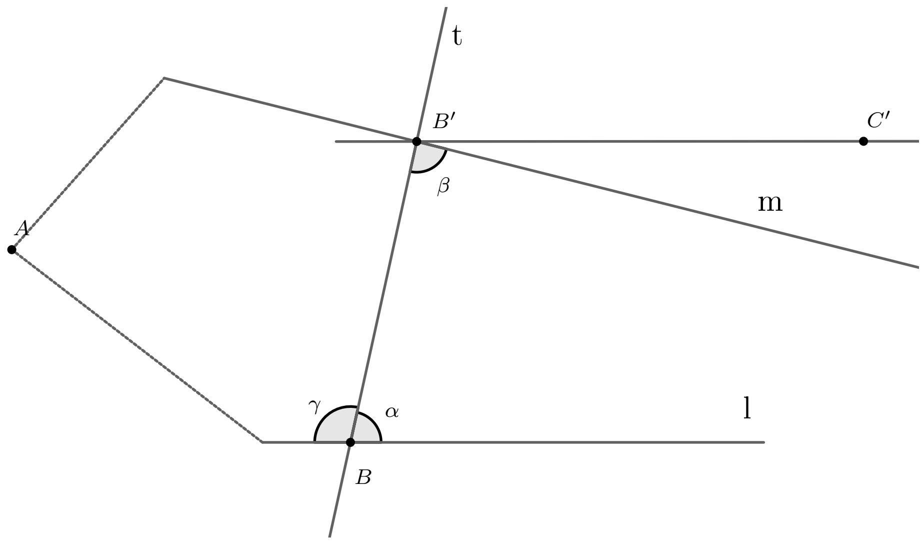
$$\beta < 180° - \alpha = \gamma.$$

Konstruoidaan seuraavaksi pisteen $B'$ kautta kulkeva suora ja sille piste $C'$ siten, että kulma $\gamma$ ja kulma $\angle C'B'B$ ovat kongruentteja vieruskulmia (kongruenssin aksiooma 3.11) (Kuva 5.2).




Kuva 5.2: Eukleideen paralleeliaksiooma.

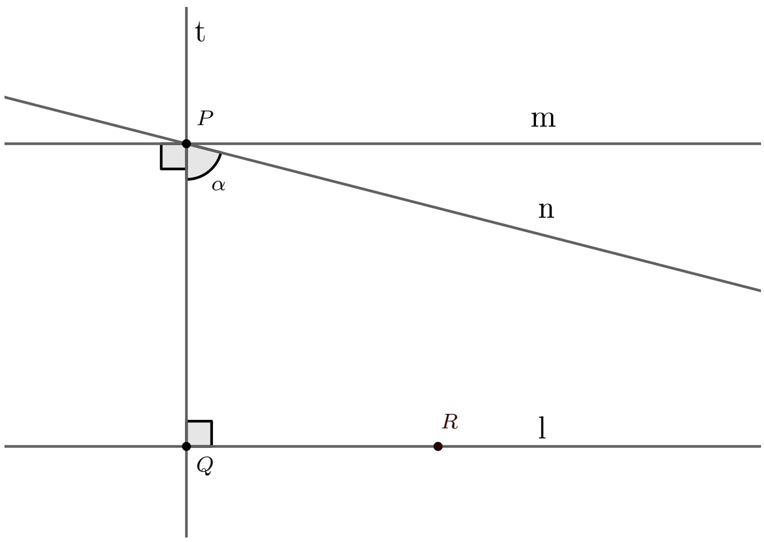
Vuorokulmalauseen 4.6 nojalla jana $B'C'$ on yhdensuuntainen suoran $l$ kanssa. Nyt Hilbertin paralleeliaksiooman 3.14 mukaan suorat $m$ ja $l$ leikkaavat toisensa, koska $m$ ei ole yhdensuuntainen suoran $l$ kanssa.
Todistetaan vielä, että $m$ leikkaa suoran $l$ pisteen $C'$ puolella suoraa $t$. Tehdään vastaoletus: suorat $l$ ja $m$ leikkaavat pisteessä $A$, joka sijaitsee vastakkaisella puolella suoraa $t$ kuin piste $C'$ (Kuva 5.3).




Kuva 5.3: Vastaoletus.

Tällä oletuksella kulma $\beta$ on kolmion $\Delta ABB'$ ulkokulma. Kuitenkin kulma $\beta$ on pienempi kuin kolmion $\Delta ABB'$ sisäkulma $\gamma$ ja tämä on ristiriidassa ulkokulmalauseen 4.5 kanssa. Joten suorat $l$ ja $m$ leikkaavat toisensa sillä puolella suoraa $t$ missä kulmat $\alpha$ ja $\beta$ sijaitsevat ja lisäksi $\beta < \gamma$. Näin ollen Eukleideen paralleeliaksiooma 2.5 seuraa oletuksesta, että Hilbertin paralleeliaksiooma 3.14 on voimassa.

Oletetaan seuraavaksi, että Eukleideen paralleeliaksiooma on voimassa ja tarkastellaan Hilbertin paralleeliaksiooman tilannetta (Kuva 5.4).




Kuva 5.4: Hilbertin paralleeliaksiooma.

Olkoon suora $t$, joka kulkee pisteen $P$ kautta ja suora $l$, joka on suoraa $t$ kohtaan kohtisuorassa, merkitään suorien leikkauspisteeksi $Q$. Olkoon lisäksi suora $m$, joka kulkee pisteen $P$ kautta ja on kohtisuorassa suoraa $t$ kohtaan. Vuorokulmalauseen seurauksen 4.7 mukaan suorat $m$ ja $l$ ovat yhdensuuntaisia. Olkoon $n \neq m$ suora, joka kulkee myös pisteen $P$ kautta. Todistetaan seuraavaksi, että $n$ kohtaa suoran $l$: Olkoon $\alpha$ suorien $n$ ja $t$ väliin muodostuva terävä kulma (koska $n \neq m$, ei suoraa kulmaa voi muodostua, joten vieruskulmalauseen 4.2 nojalla on olemassa kulma $\alpha < 90°$). Nyt

$$\alpha + \angle PQR < 90° + 90° = 180°.$$

Näin ollen Eukleideen paralleeliaksiooman mukaan suora $n$ kohtaa suoran $l$ ja Hilbertin paralleeliaksiooma seuraa tästä. $\square$

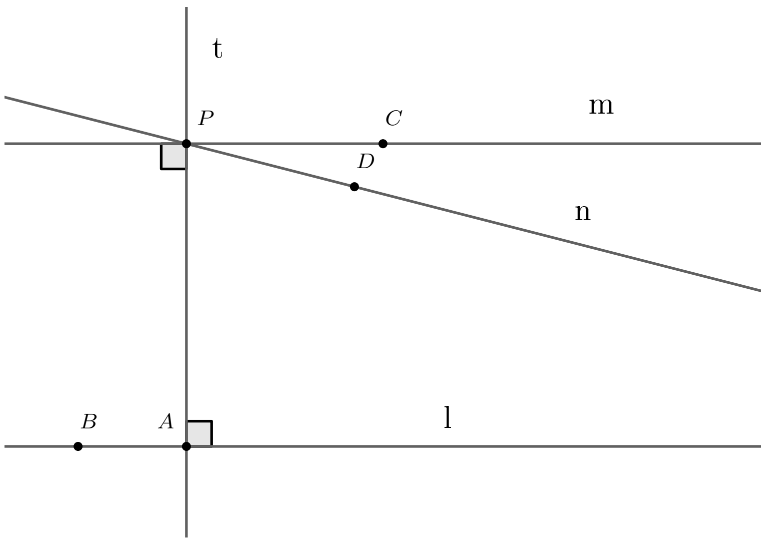
# 6 Ekvivalentit muodot paralleeliaksioomalle

Ajan saatossa on löydetty monta ekvivalenttia muotoa paralleeliaksioomalle. Tässä kappaleessa todistetaan viisi aksioomaa ekvivalentiksi paralleeliaksiooman kanssa.

## 6.1 Käänteinen vuorokulmalause

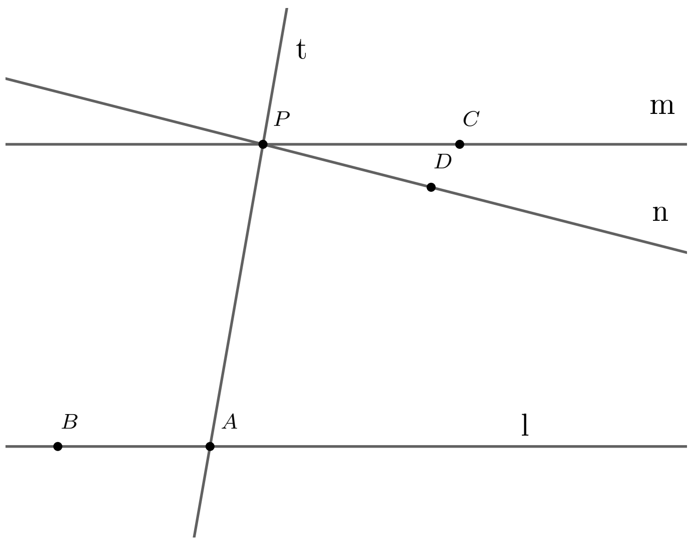
**Lause 6.1.** Hilbertin paralleelipostulaatti on ekvivalentti käänteisen vuorokulmalauseen kanssa (Käänteinen vuorokulmalause: Mikäli kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset ja niitä leikkaa kolmas suora, muodostuvat vuorokulmat ovat kongruentteja).

*Todistus.* Oletetaan ensin, että käänteinen vuorokulmalause on voimassa ja pyritään todistamaan Hilbertin paralleeliaksiooma. Olkoon suora $l$ ja piste $P$, joka ei sijaitse suoralla. Todistettavana on, että enintään yksi suoran $l$ kanssa yhdensuuntainen suora sisältää pisteen $P$. Jatketaan konstruktiota kohtisuoralla $t$ suoraa $l$ kohtaan siten, että $t$ sisältää pisteen $P$ (Lause 4.1). Konstruoidaan myös kohtisuora $m$ suoraa $t$ kohtaan pisteeseen $P$ (Lause 4.1). Olkoon piste $A$ suorien $l$ ja $t$ leikkauspiste, piste $B$ suoralla $l$ ja piste $C$ suoralla $m$ (kuva 6.1).




Kuva 6.1: Konstruktio.

Tehdään seuraavaksi vastaoletus Hilbertin paralleeliaksioomalle, eli oletetaan, että on olemassa suora $n$ joka sisältää pisteen $P$ ja on yhdensuuntainen suoran $l$ kanssa. Olkoon $D$ piste suoralla $n$ (kuva 6.2).




Kuva 6.2: Konstruktio.

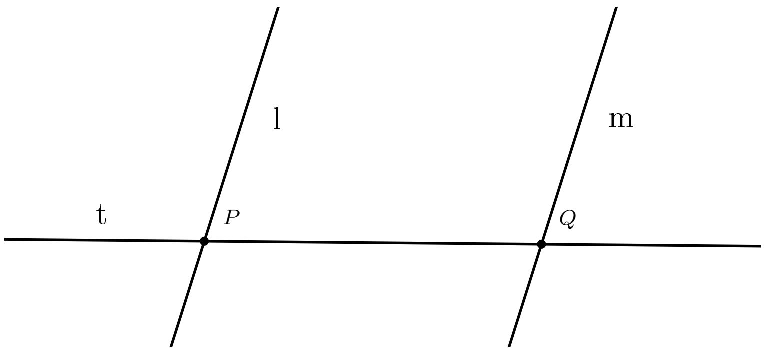
Nyt käänteisen vuorokulmalauseen mukaan, koska $n$ ja $l$ ovat yhdensuuntaisia ja kulmat $\angle BAP$ ja $\angle APD$ ovat vuorokulmia, tulisi kulmien olla kongruentteja. Mutta tämä johtaa ristiriitaan Hilbertin paralleeliaksiooman kanssa, sillä kongruenssin aksiooman 3.11 mukaan $m = n$ tässä tapauksessa.

Oletetaan seuraavaksi, että Hilbertin paralleeliaksiooma on voimassa ja todistetaan, että käänteinen vuorokulmalause on voimassa. Olkoon suora $l$ ja sitä leikkaava suora $t$. Olkoon lisäksi suora $n$ joka on yhdensuuntainen suoran $l$ kanssa (olemassa vuorokulmalauseen seurauksen 4.8 nojalla). Tehdään vastaoletus, että muodostuvat vuorokulmat $\angle BAP$ ja $\angle APD$ eivät ole kongruentteja. Nyt voidaan kongruenssin aksiooman 3.11 perusteella muodostaa suora $m$ siten, että kulmat $\angle BAP$ ja $\angle APC$ ovat kongruentteja. Käyttämällä vuorokulmalausetta 4.6 nähdään että $l$ ja $m$ ovat yhdensuuntaisia, mutta tämä johtaa ristiriitaan Hilbertin paralleeliaksiooman kanssa, koska nyt on kaksi suoraa sisältäen pisteen $P$ ja yhdensuuntaisia suoraa $l$ kohtaan. $\square$

## 6.2 Yhdensuuntaisia suoria leikkaava suora

**Lause 6.2.** Hilbertin paralleeliaksiooma on ekvivalentti seuraavan ehdon kanssa: Jos suora leikkaa yhden kahdesta yhdensuuntaisesta suorasta, se leikkaa myös toisen.

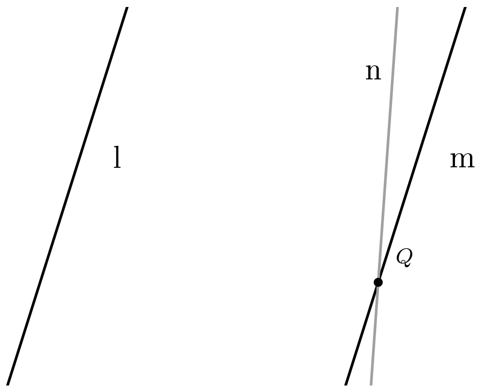
*Todistus.* Oletetaan ensin, että Hilbertin paralleeliaksiooma on voimassa. Olkoon $l$ ja $m$ yhdensuuntaisia suoria, ja $t$ suora, joka leikkaa suoran $l$ pisteessä $P$ (kuva 6.3).




Kuva 6.3: Konstruktio

Todistettavana on, että on myös olemassa piste $Q$, jossa suorat $t$ ja $m$ leikkaavat. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että tällaista pistettä ei ole, joten $t$ ja $m$ ovat yhdensuuntaisia. Kuitenkin oletetun Hilbertin paralleeliaksiooman mukaan on olemassa vain yksi suora, joka sisältää pisteen $P$ ja on yhdensuuntainen suoran $m$ kanssa. Ristiriidan johdosta piste $Q$ on oltava olemassa, eli $t$ leikkaa molemmat suorat $l$ ja $m$.

Oletetaan seuraavaksi: Jos suora leikkaa yhden kahdesta yhdensuuntaisesta suorasta, se leikkaa myös toisen. Todistettavana on, että oletuksen perusteella Hilbertin paralleeliaksiooma on voimassa. Olkoon $l$ suora ja piste $Q$ joka ei sijaitse suoralla $l$. Tehdään vastaoletus: on olemassa kaksi suoraa $m$ ja $n$, jotka sisältävät pisteen $Q$ ja ovat yhdensuuntaisia suoran $l$ kanssa (kuva 6.4).



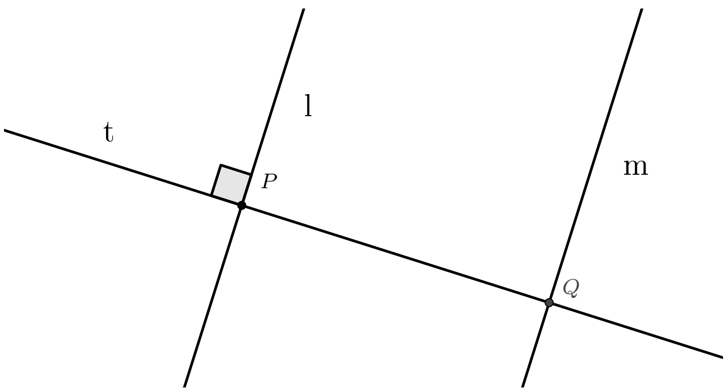
Kuva 6.4: Konstruktio.

Tällöin $m$ ja $l$ ovat yhdensuuntaisia ja suora $n$ leikkaa suoraa $m$ pisteessä $Q$. Oletuksen mukaan suoran $n$ täytyy myös leikata suora $l$, mutta tämä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa, jonka mukaan $l$ ja $n$ ovat yhdensuuntaisia. Näin ollen Hilbertin paralleeliaksiooma on voimassa. $\square$

## 6.3 Yhdensuuntaiset suorat ja kohtisuora

**Lause 6.3.** Hilbertin paralleeliaksiooma on ekvivalentti seuraavan ehdon kanssa: Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa ja on kohtisuorassa toista suoraa kohtaan, se on kohtisuorassa molempia suoria kohtaan.

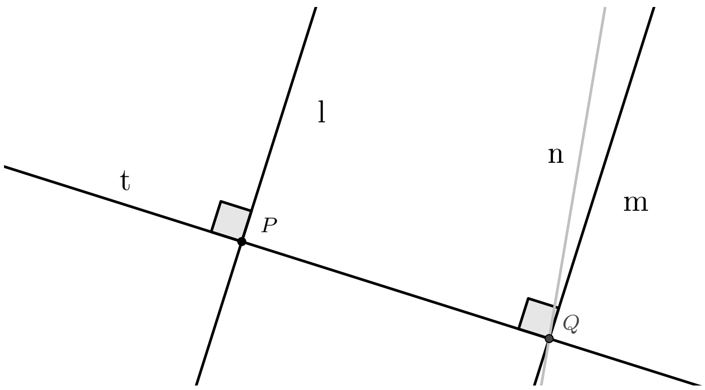
*Todistus.* Oletetaan ensin, että Hilbertin paralleeliaksiooma on voimassa. Olkoon $t$, $l$ ja $m$ suoria siten, että $t$ leikkaa yhdensuuntaisia suoria $l$ ja $m$. Lisäksi $t$ on kohtisuorassa suoraa $l$ kohtaan (kuva 6.5). Merkitään suorien $t$ ja $m$ leikkauspiste $Q$.




Kuva 6.5: Konstruktio.

Vuorokulmalauseen seurauksen 4.8 perusteella on olemassa suora, joka kulkee pisteen $Q$ kautta, on yhdensuuntainen suoran $l$ kanssa ja on kohtisuorassa suoraa $t$ kohtaan. Lisäksi Hilbertin paralleeliaksiooman perusteella tämä suora on yksikäsitteinen, joten suora $m$ on kohtisuorassa suoraa $t$ kohtaan.

Oletetaan seuraavaksi: Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa ja on kohtisuorassa toista suoraa kohtaan, se on kohtisuorassa molempia suoria kohtaan. Tarkastellaan kuvan 6.5 tilannetta uudelleen ja oletetaan, että on olemassa myös suora $n$, joka kulkee pisteen $Q$ kautta ja on yhdensuuntainen suoran $l$ kanssa (kuva 6.6).



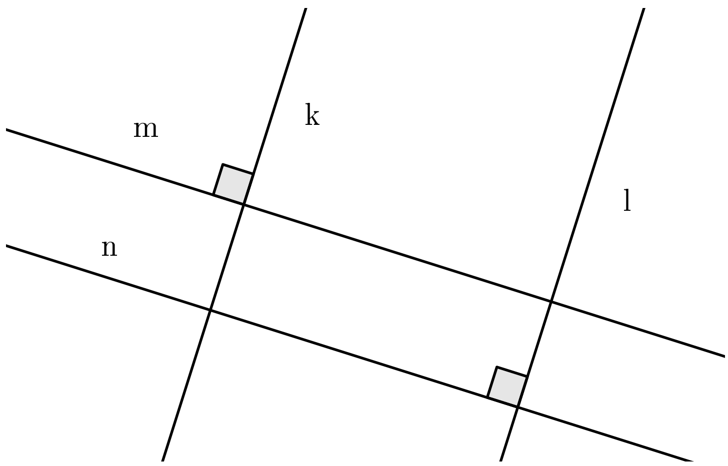

Kuva 6.6: Konstruktio.

Oletuksen mukaan $t$ on kohtisuorassa myös suoraa $n$ kohtaan, mutta tämä on ristiriidassa kongruenssin aksiooman 3.11 kanssa, jonka mukaan suora, joka kulkee pisteen $Q$ kautta ja on kohtisuorassa suoraa $t$ kohtaan on yksikäsitteinen. Täten $m = n$ ja Hilbertin paralleeliaksiooma on voimassa. $\square$

## 6.4 Yhdensuuntaiset suorat ja kohtisuorat

**Lause 6.4.** Hilbertin paralleeliaksiooma on ekvivalentti seuraavan ehdon kanssa: Jos $k$ ja $l$ ovat yhdensuuntaisia suoria ja suora $m$ on kohtisuorassa suoraa $k$ kohtaan ja suora $n$ on kohtisuorassa suoraa $l$ kohtaan, ovat $m$ ja $n$ yhdensuuntaisia tai sama suora.

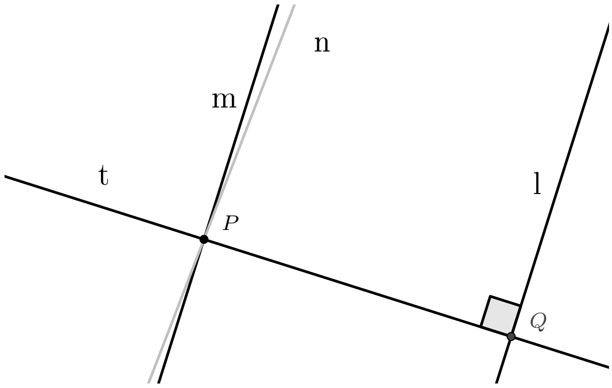
*Todistus.* Oletetaan ensin, että Hilbertin paralleeliaksiooma on voimassa. Olkoon suorat $k$ ja $l$ yhdensuuntaisia, suora $m$ kohtisuorassa suoraa $k$ kohtaan ja $n$ kohtisuorassa $l$ kohtaan. Oletetaan lisäksi, että $m \neq n$ (kuva 6.7).




Kuva 6.7: Konstruktio.

Aikaisemman lauseen 6.3 perusteella nyt $m$ ja $l$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten $m$ ja $n$ ovat molemmat kohtisuorassa suoraa $l$ kohtaan. Vuorokulmalauseen seurauksen 4.7 mukaan $m$ ja $n$ ovat yhdensuuntaisia.

Oletetaan seuraavaksi: Jos $k$ ja $l$ ovat yhdensuuntaisia suoria ja suora $m$ on kohtisuorassa suoraa $k$ kohtaan ja suora $n$ on kohtisuorassa suoraa $l$ kohtaan, ovat $m$ ja $n$ yhdensuuntaisia tai sama suora. Oletetaan, että $l$ on suora ja $P$ on piste, joka ei sijaitse suoralla $l$. Nyt todistettavana on, että enintään yksi suora $m$ pisteen $P$ kautta, on yhdensuuntainen suoran $l$ kanssa. Lisäksi vuorokulmalauseen seurauksen 4.8 nojalla on olemassa vähintään yksi suora pisteen $P$ kautta, joka on yhdensuuntainen suoran $l$ kanssa. Olkoon $n$ suora pisteen $P$ kautta, joka on yhdensuuntainen suoran $l$ kanssa. Tehtävänä on todistaa $m = n$. Olkoon $t$ suora pisteen $P$ kautta joka on kohtisuorassa suoraa $l$ kohtaan. Olkoon $Q$ suorien $t$ ja $l$ leikkauspiste (kuva 6.8).



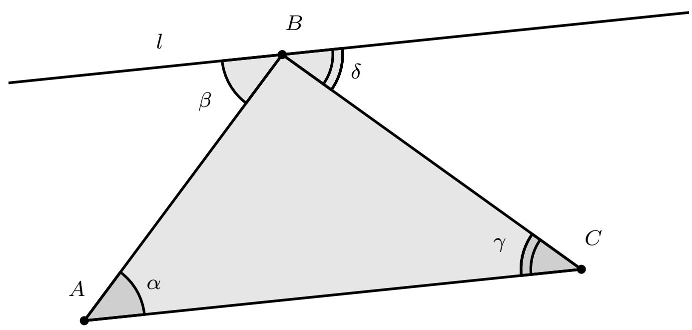

Kuva 6.8: Konstruktio.

Olkoon nyt $s$ pisteen $P$ kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa suoraa $n$ kohtaan. Koska $t$ on kohtisuorassa $l$ kohtaan, $s$ on kohtisuorassa $n$ kohtaan, ja $l$ ja $n$ ovat yhdensuuntaisia, on oltava joko $s = t$ tai $s$ ja $t$ ovat yhdensuuntaisia. Mutta $P$ on suorilla $t$ ja $s$, joten ne eivät voi olla yhdensuuntaisia, joten $s = t$. Mutta kongruenssin aksiooman 3.11 takia suora joka kulkee pisteen $P$ kautta ja on kohtisuorassa suoraa $t$ kohtaan on yksikäsitteinen ja molemmat $m$ ja $n$ kulkevat pisteen $P$ kautta ja ovat kohtisuorassa suoraa $t$ kohtaan, joten $m = n$. □

## 6.5 Kolmion kulmien summa

**Lause 6.5.** Jos Hilbertin paralleeliaksiooma on voimassa, jokaisen kolmion kulmien summa on 180°.

*Todistus.* Tarkastellaan mielivaltaista kolmiota $\Delta ABC$. Vuorokulmalauseen seurauksen 4.8 nojalla on olemassa suora $l$ joka kulkee pisteen $B$ kautta ja on sivun $AC$ kanssa yhdensuuntainen. Merkitään muodostuneet kulmat $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ja $\delta$ (Kuva 6.9).




Kuva 6.9: Kolmio $ABC$ ja suora $l$.

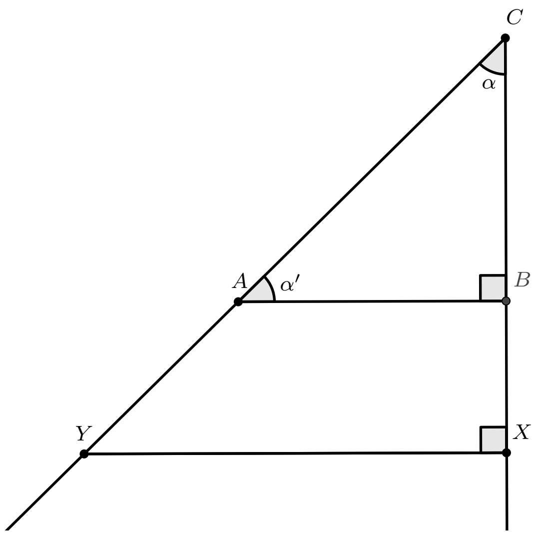
Aikaisemmin todistettiin, että käänteinen vuorokulmalause on ekvivalentti Hilbertin paralleelipostulaatin kanssa (Lause 6.1). Nyt käänteisen vuorokulmalauseen nojalla $\alpha = \beta$ ja $\gamma = \delta$. Pisteessä $B$ olevat kolme kulmaa muodostavat yhdessä oikokulman, eli 180°. Koska kulmat $\alpha$ ja $\gamma$ ovat kolmion kahden kulman kanssa kongruentteja ja kulma $\angle ABC$ on yksi kolmion kulmista, on kolmion kulmien summa 180°. □

Jotta edeltävä lause voidaan todistaa toiseen suuntaan, on otettava käyttöön Aristoteleen kulman rajoittamattomuuden aksiooma.

**Aksiooma 6.1** (Aristoteleen kulman rajoittamattomuuden aksiooma)**.** Annetun terävän kulman sivun ja minkä tahansa janan $AB$ tapauksessa on aina valittavissa piste $Y$ sivulta seuraavasti: Jos toiselle sivulle konstruoidaan kohtisuora, joka kulkee pisteen $Y$ kautta ja kantana on piste $X$, on jana $XY$ pidempi kuin $AB$.

**Lause 6.6.** Eukleideen paralleeliaksiooman ollessa voimassa on Aristoteleen kulman rajoittamattomuuden aksiooma voimassa.

*Todistus.* Oletetaan, että Eukleideen paralleeliaksiooma on voimassa. Olkoon $\alpha$ annettu terävä kulma ja $AB$ mielivaltainen jana. Olkoon lisäksi $\alpha'$ kulman $\alpha$ komplementtikulma, eli $\alpha + \alpha' = 90°$. Valitaan puoli janasta $AB$ ja konstruoidaan tälle puolelle pisteeseen $A$ kulma $\alpha'$ ja pisteeseen $B$ suorakulma (kongruenssin aksiooma 3.11). Nyt Eukleideen paralleeliaksiooman mukaan konstruoitujen kulmien sivut kohtaavat valitulla puolella pisteessä $C$ ja lauseen 6.5 nojalla $\alpha = \angle C$. Olkoon seuraavaksi piste $Y$ siten, että $C * A * Y$ ja konstruoidaan pisteestä $Y$ puolisuoralle $\overrightarrow{CB}$ kohtisuora (kuva 6.10). Lauseen 4.12 nojalla $YX > AB$.

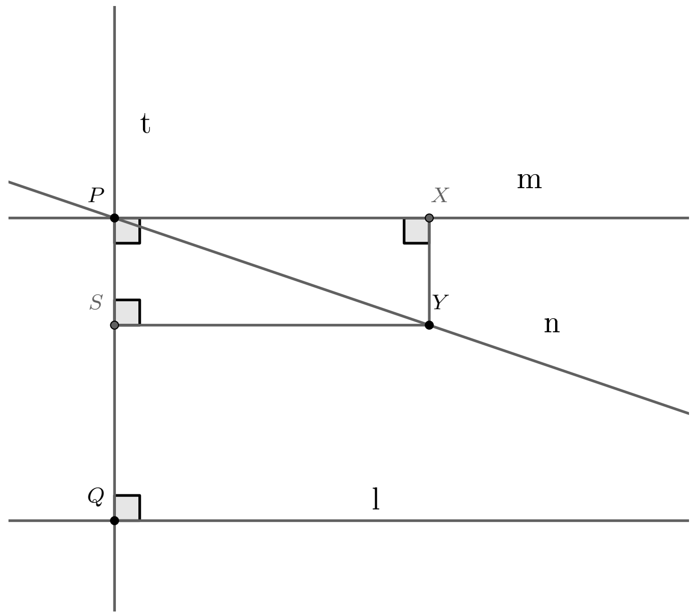



Kuva 6.10: Konstruktio janalle AB.

□

**Lause 6.7.** Jos kolmion kulmien summa on 180° ja Aristoteleen kulman rajoittamattomuuden aksiooma on voimassa, on Hilbertin paralleeliaksiooma voimassa.

*Todistus.* Oletetaan, että kolmion kulmien summa on 180 astetta. Palataan kuvan 6.1 konstruktioon. Olkoon piste $Y$ pisteestä $P$ lähtevällä puolisuoralla $n$. Kyseessä oleva puolisuora $n$ on pisteestä $P$ lähtevän puolisuoran $m$ ja pisteestä $P$ lähtevän puolisuoran $\overrightarrow{PQ}$ välissä. Konstruoidaan kohtisuorat (Lause 4.1) pisteestä $Y$ suorille $m$ ja $t$ ja merkitään kohtisuorien kannoiksi $X$ ja $S$ kuvan 6.11 mukaisesti.




Kuva 6.11: Konstruktio.

Koska kohtisuora $\overleftrightarrow{YS}$ on yhdensuuntainen suoran $m$ kanssa (Vuorokulmalauseen seuralauslause 4.7), on piste $S$ samalla puolella suoraa $m$, kuin piste $Y$. Lisäksi, koska kolmion kulmien summa on 180 astetta, on muodostunut nelikulmio $\square XPSY$ suorakulmio, koska se voidaan nähdä kahtena kolmiona $\Delta SPY$ ja $\Delta YPX$ ja kolme nelikulmion kulmista ovat suoria kulmia, joten jäljelle jäävä kulma $\angle Y$ on oltava suuruudeltaan 90 astetta. Tästä johtuen sivut $PS$ ja $XY$ ovat kongruentteja lauseen 4.13 nojalla. Käytetään seuraavaksi Aristoteleen aksioomaa: On olemassa piste $Y$ suoralla $n$ siten, että $XY > PQ$, eli $P * Q * S$. Koska pisteet $Y$ ja $S$ ovat samalla puolella suoraa $l$, on suora $n$ kohdannut suoran $l$ (Hilbertin paralleeliaksiooma). $\square$

# Lähteet

[1] Eukleides (300 eaa.). Alkeet. Käännös eng. David E. Joyce. Julkaistu http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/elements.html

[2] Greenberg M. (2007). Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and History. W.H. Freeman and Co, New York, 2007.