TURUN YLIOPISTO

DISKREETTIAIKAISET HAARAUTUMISPROSESSIT

Hanna Pyysalo

Pro gradu -tutkielma
Marraskuu 2019

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PYYSALO, HANNA: Diskreettiaikaiset haarautumisprosessit
Pro gradu -tutkielma, 38 s.
Matematiikka
Marraskuu 2019

Tutkielman aiheena on diskreettiaikaiset haarautumisprosessit, jotka lukeutuvat Markovin prosesseihin. Haarautumisprosessit ovat erittäin laaja ja paljon tutkittu aihe ja ne ovat hyvin monikäyttöisiä useilla eri aloilla. Aihe on siten aina ajankohtainen ja mielenkiintoinen.

Työssä on käsitelty aihetta yleisesti tavoitteena luoda lukijalle kohtuullisen kattava ja helppolukuinen kokonaiskuva aiheesta. Työn ensimmäisessä luvussa on käsitelty Markovin prosesseja ja niiden keskeistä teoriaa. Toisessa luvussa esitellään yhden tyypin diskreettiaikainen haarautumisprosessi, jota usein kutsutaan Galton-Watson- prosessiksi. Se on tunnetuin ja käytetyin haarautumisprosessien tyyppi ja siitä on esitelty tärkein teoria, jota on havainnollistettu yksinkertaisilla esimerkeillä. Tutkielman viimeinen luku seuraa pääpiirteittäin toisen luvun rakennetta, mutta siinä on käsitelty usean tyypin prosessia, joka on hieman monimutkaisempi kuin yhden tyypin prosessi ja mahdollistaa käytännössä huomattavasti monimutkaisempien ilmiöiden mallintamisen.

Haarautumisprosessien laajasta tutkimuksesta johtuen aiheeseen liittyvää kirjallisuutta on olemassa runsaasti. Tämä työ perustuukin useisiin eri lähteisiin.

Asiasanat: haarautumisprosessit, Galton- Watson- prosessi

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tutkielman aiheena olevat diskreettiaikaiset haarautumisprosessit ovat stokastisia prosesseja, jotka mallintavat jonkin populaation evoluutiota. Niiden tutkiminen juontaa juurensa jo 1800- luvulta, jolloin J. Bienayme, F. Galton ja H.W. Watson kiinnostuivat sukunimien periytymisestä. Alkuperäisessä mallissa oletettiin sen ajan hengessä, että sukunimi periytyy isältä pojalle ja tarkasteltiin sellaista prosessia, jossa kukin tietyn sukunimen haltija saa jonkin todennäköisyysjakauman mukaan jälkeläisiä, jotka ovat joko miehiä tai naisia. Keskeinen tutkimuskysymys oli siis, millä todennäköisyydellä yksikään sukunimen haltija ei saa enää miespuolista jälkeläistä ja sukulinja katkeaa. Vielä nykyäänkin käytetyin matemaattinen malli tunnetaan nimellä Galton- Watson- Prosessi tai joskus Bienayme- Galton- Watson-prosessi ja siihen perustuukin suurin osa tämän tutkielman sisällöstä.

Sittemmin haarautumisprosessit ovat olleet melko suosittu tutkimusaihe ja niihin liittyvistä matemaattisista malleista on tullut yhä monimutkaisempia ja realistisempia. Galtonin ja Watsonin alkuperäisessä mallissa populaatio koostui vain yhden tyyppisistä yksilöistä eli miehistä, sillä sukunimi periytyi vain isältä pojalle. Mallissa voitiin siis yksikertaisesti jättää naiset kokonaan huomioitta. Tällaisia malleja toki käytetään edelleen, mutta perinteisen Galton- Watson- mallin rinnalla paljon tutkittuja ovat muun muuassa prosessit, joissa on otettu huomioon

- Sukupolvien päällekkäisyys
- Riippuvaisuus joko tilasta tai populaatiosta itsestään
- Muuttoliike eli migraatio
- Ympäristön vaihtelu
- Biseksuaalinen eli pariutumisen vaativa lisääntyminen
- Usean eri tyypin olemassaolo.

On myös hyvin tavallista, että tarkastellaan esimerkiksi usean tyypin prosessia, jossa otetaan huomioon muuttoliike. Populaatio voidaan usean tyypin prosesseissa jakaa eri kategorioihin mm. iän, koon tai kehitysvaiheen perusteella. Paljon tutkittu aihe on Galton- Watson- prosessin laajennus, biseksuaalinen prosessi, jonka esitteli alunperin vuonna 1968 D.J. Daley. Viime vuosina asiaan on perehtynyt mm. Manuel Molina. Haarautumisprosessien sovelluksia on lukemattomia ja erityisen käyttökelpoisia ne ovat biologian, lääketieteen, fysiikan, sosiologian ja tietotekniikan aloilla.

Tämä tutkielma on jaettu kolmeen päälukuun, joista ensimmäinen koskee Markovin ketjuja. Luvussa käydään läpi joitakin tärkeimpiä määritelmiä ja tuloksia useimmiten ilman todistuksia, mutta odotetaan, että lukijalla on hallussa todennäköisyyslaskennan perusteet. Markovin ketjujen käsittely on tutkielman kannalta tärkeää, sillä haarautumisprosessit lukeutuvat Markovin ketjuihin. Vaikka tutkielmassa käsitellään ainoastaan diskreettiaikaisia haarautumisprosesseja, on Markovin ketjuista esitelty pääpiirteittäin myös jatkuva-aikaiset prosessit. Toisessa luvussa käsitellään yhden tyypin Galton-Watson-prosessia ja siihen liittyviä tärkeimpiä määritelmiä ja tuloksia. Kolmannessa luvussa tarkastellaan kahden tai useamman tyypin haarautumisprosesseja, mutta niihin liittyvä teoria on hyvin samankaltainen yhden tyypin prosessien kanssa, joten käsittely jätetään tarkoituksella hieman suppeaksi ja suurimmaksi osaksi vain esitetään tuloksia. Kolmannen luvun lopussa tarkastellaan vielä erikseen biseksuaalista Galton- Watson- prosessia. Sekä toisessa, että kolmannessa luvussa suurin huomio kiinnittyy Galtoninkin alkuperäiseen kysymykseen, eli sukupuuton todennäköisyyteen.

Tutkielman tavoitteena on esittää diskreettiaikaisten haarautumisprosessien teoria selkeästi ja yksinkertaisesti ja havainnollistaa teoriaa useilla esimerkeillä. Tarkoituksena on muodostaa helppolukuinen kokonaisuus, josta lukijalle jää hyvä kokonaiskuva aiheesta. Haarautumisprosessien kirjo on niin laaja, että tutkielmassa on tarkasteltu lähinnä yksinkertaisimpia ja yleisimpiä prosesseja.

2 Markovin ketjut

Oletetaan tunnetuiksi stokastiikan peruskäsitteet. Tiettyyn satunnaisuutta sisältävään ilmiöön tai systeemiin liittyvää todennäköisyysmallia sanotaan stokastiseksi (=satunnaiseksi) prosessiksi. Tällainen prosessi voidaan esittää satunnaismuuttujien $\{X_n, n \geq 0\}$ tai $\{X(t), t \geq 0\}$ kokoelmana riippuen siitä, kehittyykö systeemi "askeleittain", eli siirtyy tilasta toiseen aina yhden aikayksikön välein vai satunnaisin aikavälein. [1, s. 3]

2.1 Diskreettiaikaiset Markovin ketjut

Olkoon $\{X_n\}$ sellainen stokastinen prosessi, joka kehittyy vaiheittain (t.s. askeleittain). Olkoon lisäksi X_n systeemin tila hetkellä n, $n \geq 0$, sekä S kaikkien mahdollisten tilojen joukko eli tila-avaruus.

Määritelmä 2.1. Jos prosessi toteuttaa Markovin ominaisuuden

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

kaikilla $n \geq 0$ ja kaikilla $i_0, ..., i_{n-1}, i, j$, se on diskreettiaikainen Markovin ketju.

Markovin ketjussa systeemin tila X_{n+1} riippuu siis ainoastaan tilasta X_n. Seuraava tila on siis riippuvainen ainoastaan nykytilasta, eikä lainkaan menneisyyden tiloista $X_{n-1}, ..., X_0$. [1] Jos todennäköisyys $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ ei riipu muuttujan n arvosta, sanotaan, että Markovin ketjulla on stationaariset siirtymätodennäköisyydet (t.s. Markovin ketju on stationaarinen), ja voidaan merkitä

$$p_{i,j} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

Nämä siirtymätodennäköisyydet voidaan esittää siirtymämatriisina

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & \cdots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

jossa matriisin rivi i on tilan X_{n+1} todennäköisyysjakauma ehdolla $X_n = i$. Selvästi todennäköisyyksille $p_{i,j}$ pätee seuraavat ehdot:

$$p_{i,j} \geq 0, \quad i, j = 0, 1, 2, ...,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = 1 \quad i = 0, 1, 2, ... \quad [2, s.45 - 46]$$

Määritellään vielä n:n askeleen siirtymätodennäkösyys:

$$p_{i,j}(n) = P(X_{m+n} = j \mid X_m = i)$$

Stationaarisuudesta seuraa, että $p_{i,j}(n) = P(X_n = j \mid X_0 = i)$. Matriisi $\boldsymbol{P}(n) = \{p_{i,j}(n)\}$ on n:n askeleen siirtymätodennäköisyysmatriisi. Selvästi $\boldsymbol{P}(1) = \boldsymbol{P}$. Markovin ketjulle pätee

$$P(X_{n+m} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_{n+m} = j \mid X_n = i),$$
$$m \leq 1.$$

Määritellään tilatodennäköisyys hetkellä n:

$$p_i(n) = P(X_n = i).$$

Olkoon lisäksi tilatodennäköisyysvektori $\boldsymbol{p}(n) = (p_0(n), p_1(n), ...)$. Tilatodennäköisyydet $p_j(n)$ toteuttavat *Chapmanin- Kolmogorovin yhtälön*

$$p_j(n) = \sum_i P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) P(X_{n-1} = i).$$

Siis $\boldsymbol{p}(n) = \boldsymbol{p}(n-1)\boldsymbol{P}$, josta seuraa, että $\boldsymbol{p}(n) = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}^n, n = 1, 2, ...$ [1, s. 14]

2.1.1 Yksinkertainen satunnaiskulku

Ajatellaan tilannetta, jossa hiukkanen liikkuu satunnaisesti kokonaislukujen joukossa. Hetkellä $n = 0$ hiukkanen on origossa ja hetkellä $n = 1$ se liikkuu joko yhden askeleen eteenpäin tai yhden askeleen taaksepäin todennäköisyyksillä p ja $q = 1 - p$. Oletetaan tässä, että $p = 0.5$ ja että satunnaisuus tuotetaan heittämällä tasapainotettua kolikkoa siten, että heitettäessä kruuna liikutaan eteenpäin ja vastaavasti heitettäessä klaava liikutaan taaksepäin. Selvästi $p_{i,i+1} = 0.5$, $p_{i,i-1} = 0.5$ ja $p_{i,j} = 0$ muulloin. Olkoon S tila-avaruus, eli kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$. Hetkellä n hiukkanen liikkuu siis sen nykyisestä tilasta S_{n-1} yhden yksikön verran eteenpäin tai taaksepäin riippuen kolikonheiton tuloksesta. Olkoon X_n= hiukkasen siirtymä askeleella n sen edellisestä tilasta S_{n-1}. Nyt siis $P(X_n = +1) = p$ ja $P(X_n = -1) = 1 - p = q$ kaikille $n \geq 1$. *Tilaprosessi* $\{S_n\}$ saadaan kaavasta

$$S_n := X_1 + X_2 + ... + X_n, \quad S_0 = 0.$$

Määritelmä 2.2. Stokastista prosessia $\{S_n : n = 0, 1, 2, ...\}$ kutsutaan *yksinkertaiseksi satunnaiskuluksi*. Prosessi $S_n^x = S_n + x, n = 0, 1, 2, ...$ on yksinkertainen satunnaiskulku alkaen tilasta x.

N.s. pelikassan koko- prosessi on yksinkertainen esimerkki tietystä kohdasta x alkavasta satunnaiskulusta. Kyseessä on hyvin samanlainen prosessi, kuin edellä esitetty hiukkasen siirtymä. Jokaisella askeleella siirrytään tässäkin yksi yksikkö eteenpäin tai taaksepäin. Oletetaan, että jokainen pelikierros on stokastisesti riippumaton. Olkoon nyt X_n pelaajan voitto (negatiivinen voitto= häviö/tappio) n:nnessä pelissä. Silloin $S_0^x = x$ on pelaajan alkuperäinen pelikassa ja S_n^x pelikassan suuruus (positiivinen tai negatiivinen) hetkellä n. Tällaisen prosessin tapauksessa voidaan helposti laskea muuttujan S_n^x jakauma eli tapausten $S_n^x = y$ todennäköisyydet: Olkoon v voittojen, eli tapausten $X_i = +1$, $0 < i \leq n$, lukumäärää hetkien 0 ja n välillä. Selvästi tappioiden lukumäärä on $n - v$, josta seuraa, että $v - (n - v) = y - x$ tai $v = \frac{n+y-x}{2}$. Tästä seuraa ehdot, että sekä lukujen n ja $y - x$ pariteetin on oltava sama ja lisäksi $|y - x| \leq n$. Näiden ehtojen ollessa voimassa saadaan jakaumaksi

$$P(S_n^x = y) = \binom{n}{\frac{n+y-x}{2}} p^{(n+y-x)/2} q^{(n-y+x)/2}. \quad [3]$$

2.1.2 Tilojen luokat ja ominaisuudet

Tilan j sanotaan olevan *saavutettavissa* tilasta i, jos jollekin $n \geq 0$, $p_{ij}(n) > 0$, eli on olemassa positiivinen todennäköisyys, että äärellisellä määrällä siirtymiä/askeleita saavutaan tilasta i tilaan j. Jos sekä tila j on saavutettavissa tilasta i ja tila i saavutettavissa tilasta j, sanotaan, että tilat i ja j *kommunikoivat* ja merkitään $i \leftrightarrow j$. Jos tilat i ja j eivät kommunikoi, niin silloin joko

$$p_{i,j}(n) = 0 \quad \text{kaikilla } n \geq 0$$

tai

$$p_{j,i}(n) = 0 \quad \text{kaikilla } n \geq 0$$

tai molemmat relaatiot ovat tosia.

Kommunikoivat tilat kuuluvat samaan luokkaan. Markovin ketjun sanotaan olevan *redusoimaton*, jos luokkia on vain yksi, eli kaikki tilat kommunikoivat toistensa kanssa. Jos $p_{i,i} = 1$, eli tilaan i jouduttaessa ei sieltä enää päästä pois, sanotaan, että tila i on absorboiva.

Tilan i jakso, merk. $d(i)$, on kaikkien sellaisten kokonaislukujen $n \geq 1$, joille $p_{i,i}(n) > 0$, suurin yhteinen tekijä (s.y.t) (Jos $p_{i,i}(n) = 0 \quad \forall \quad n \geq 1$, määritellään $d(i) = 0$). Jos $i \leftrightarrow j$, niin $d(i) = d(j)$. Jos ketju on redusoimaton, niin kaikilla tiloilla on sama jakso. Jos taas ketjun jakso on 1, sanotaan, että ketju on jaksoton. Merkitään

$$f_i = \text{todennäköisyys, että tilaan } i \text{ palataan joskus jos tilasta } i \text{ lähdetään.}$$

Jos $f_i = 1$, sanotaan, että tila i on toistuva. Jos $f_i < 1$, tila on tilapäinen.

Markovin ketjun tila i in toistuva silloin ja vain silloin, kun

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{i,i}(n) = \infty.$$

Tila i on tilapäinen silloin ja vain silloin, kun

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{i,i}(n) < \infty.$$

Redusoimattoman ketjun kaikki tilat ovat joko toistuvia tai tilapäisiä. Äärellistilaisen, redusoimattoman ketjun kaikki tilat ovat toistuvia. [2], [1]

2.1.3 Rajajakauma

Tarkastellaan kuvitteellista tilannetta, jossa tutkitaan asiakkaiden ostokäyttäytymistä, kun markkinoilla on kolme eri automerkkiä. Asiakas joko ostaa uudelleen samaa merkkiä i, kuin hänellä jo ennestään on todennäköisyydellä $p_{i,i}$, tai sitten vaihtaa toiseen merkkiin todennäköisyydellä $p_{i,j} = \frac{1-p_{i,i}}{2}$, $i \neq j$. Olkoon parametrit $p_{1,1} = 0.6$, $p_{2,2} = 0.4$ ja $p_{3,3} = 0.2$. Oletetaan, että kaikilla automerkeillä on sama käyttöaika, jonka jälkeen vaihdetaan uuteen. Asiakkaan automerkkiä n:nnen ostohetken jälkeen voidaan mallintaa Markovin ketjulla $X_0, X_1, ...$, jonka siirtymämatriisi on

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Lasketaan matriisin $\boldsymbol{P}$ potensseja:

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.28 & 0.22 \\ 0.42 & 0.34 & 0.24 \\ 0.44 & 0.32 & 0.24 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^4 = \begin{pmatrix} 0.4644 & 0.3056 & 0.2300 \\ 0.4584 & 0.3100 & 0.2316 \\ 0.4600 & 0.3088 & 0.2312 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{12} = \begin{pmatrix} 0.4615 & 0.3077 & 0.2308 \\ 0.4615 & 0.3077 & 0.2308 \\ 0.4615 & 0.3077 & 0.2308 \end{pmatrix}.$$

Huomataan, että mitä enemmän aikaa kuluu, sitä vähemmän alkutilalla on merkitystä, sillä matriisin rivit ovat lähes samat jo 12 siirtymän jälkeen ja näyttävät lähestyvän tiettyä raja-arvoa.. Matriisin alkioiden arvot siis stabiloituvat kohti *rajajakaumaa*

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.4615, 0.3077, 0.2308). \quad [4]$$

Määritelmä 2.3. Jos raja-arvot $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j), j = 0, 1, ...$, ovat olemassa ja $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$, niin vaakavektori $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, ...)$ on diskreettiaikaisen Markovin ketjun rajajakauma.

Jos rajajakauma on olemassa, niin seuraavat yhtälöt (ns. tasapainoyhtälöt) ovat voimassa:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij} = \pi_j, \quad j = 0, 1, ...,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

eli

$$\boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi}$$

$$\boldsymbol{\pi 1} = 1$$

Jos Markovin ketju on äärellistilainen, redusoimaton ja jaksoton, on sen rajajakauma yksikäsitteinen. [1, s. 17-18]

Kaikilla Markovin ketjuilla ei ole olemassa rajajakaumaa. Tarkastellaan esimerkiksi sellaista satunnaiskulkua kokonaislukujen $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ joukossa, jolla on kaksi absorboivaa tilaa. Olkoon ketjun siirtymämatriisi

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laskemalla voidaan todeta, että

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Selvästi tällaisella ketjulla ei voi olla rajajakaumaa, sillä $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}(n)$ riippuu alkuperäisestä tilasta. [6]

2.2 Jatkuva-aikaiset Markovin ketjut

Diskreettiaikaisissa Markovin ketjuissa kussakin tilassa vietetään yksi aikayksikkö. Jatkuva-aikaisessa Markovin ketjussa vietetään kussakin tilassa satunnainen aika, mutta kuitenkin siten, että Markovin ominaisuus on voimassa.

Olkoon tila-avaruus $S = \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ tai jokin S:n osajoukko. Olkoon systeemin saapuessa tilaan $i \in S$ tilassa vietettävä *vierailuaika* $T_i > 0$. Kun vierailuaika päättyy, systeemi siirtyy tilaan j siirtymätodennäköisyydellä $p_{i,j}$. Merkitään $X(t)$= systeemin tila hetkellä t. Markovin ominaisuuden mukaisesti siis tulevaisuus $\{X(s+t) : t \geq 0\}$ riippuu vain nykytilasta $X(s)$, eikä menneisyydestä $\{X(u) : 0 \leq u < s\}$.

Määritelmä 2.4. Stokastinen prosessi $\{X(t) : t \geq 0\}$, jolla on diskreetti tila-avaruus S, on jatkuva-aikainen Markovin ketju, jos kaikille $t \geq 0$, $s \geq 0$, $i \in S$, $j \in S$,

$$\begin{aligned} P(X(s+t) = j \mid X(s) = i, \{X(u) : 0 \leq u < s\}) &= P(X(s+t) = j \mid X(s) = i) \\ &= p_{i,j}(t) \end{aligned}$$

Siis $p_{i,j}(t)$ on todennäköisyys, että t:n aikayksikön päästä siirrytään nykyisestä tilasta i tilaan j. Kaikille $t \geq 0$ on olemassa siirtymämatriisi

$$P(t) = (p_{i,j}(t)),$$

ja $P(0) = I$. Erityisesti,

$$p_{i,j}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i).$$

Näytetään, että muistittomuus-ominaisuuden vuoksi vierailuaikojen on noudatettava eksponenttijakaumaa. Olkoon $X(t) = i$. Ajanhetki t sijoittuu nyt jonnekin tilassa i vietettävän vierailuajan T_i keskelle. Tulevaisuus hetken t jälkeen kertoo erityisesti jäljellä olevan vierailuajan pituuden tilassa i. Vastaavasti menneisyys, eli aika ennen hetkeä t kertoo vierailuajan senhetkisen keston tilassa i. Jotta tulevaisuus olisi nyt riippumaton menneisyydestä, niin selvästi jäljellä oleva vierailuaika voi olla riippuvainen vain tilasta i, eikä siitä, kuinka kauan tilassa on jo oltu. Koska eksponenttijakauma on täysin rate-parametrinsa eli nopeutensa määräämä seuraa, että kaikille $i \in S$ on olemassa vakio $q_i > 0$ siten, että kun ketju saapuu tilaan i, se viettää siellä menneisyydestä riippumatta ajan $T_i \sim \mathrm{Exp}(q_i)$ [5].

2.2.1 Jatkuva-aikaisen Markovin ketjun siirtymänopeusmatriisi Q (Generaattori)

Jatkuva-aikaisen Markovin prosessin määrittelee täydellisesti sen siirtymänopeusmatriisi eli generaattori. Systeemi siirtyy tilasta i tilaan j jonkin tapauksen sattumisen seurauksena. Tällaista tapausta sanotaan siirtymän $i \to j$ *laukaisevaksi tapaukseksi*. Olkoon $T_{i,j}$ aika, jonka systeemi viettää tilassa i, jos se sitten siirtyy tilaan j. Siis jos siis systeemi saapuu tilaan i hetkellä t, niin siirtymän $i \to j$ laukaisevan tapauksen sattuessa systeemi siirtyy tilaan j hetkellä $t + T_{ij}$. Oletetaan, että

$$T_{i,j} \sim \mathrm{Exp}(q_{i,j})$$

ja että satunnaismuuttujat $T_{i,j}$ ovat riippumattomat sekä toisistaan, että menneisyyden tiloista ja vierailuajoista ennen saapumista tilaan i. Tämä on jatkuva-aikainen Markovin ketju, jossa

$$q_i = \sum_{k \neq i} q_{i,k}, \quad p_{i,j} = \frac{q_{i,j}}{q_i}$$

Normaalisti jatkuva-aikaisella Markovin ketjulla $p_{i,i} = 0$ kaikilla i, mutta jos $q_i = 0$, niin $p_{i,j}$ ei ole määritelty. Tila i on absorboiva, kun $q_i = 0$, joten määritellään $p_{i,i} = 1$ ja $p_{i,j} = 0$, kun $j \neq i$. Nämä parametrit voidaan koota matriisiksi, kun määritellään vielä parametrit $q_{i,i}$. Tässä perustelematta (perustelu löytyy esim [5, s. 3]) todetaan, että on osoittautunut hyväksi määritellä $q_{i,i} = -\sum_{k\neq i} q_{i,k}$.

Määritelmä 2.5. Matriisi $\boldsymbol{Q} = \{q_{i,j}\}$ on jatkuva-aikaisen Markovin ketjun generaattori.

Generaattorin avulla saadaan määrätyksi vierailuajat, siirtymätodennäköisyydet sekä rajajakauma. [1]

Esimerkki 2.1. Molekyyli siirtyy tilojen 0 ja 1 välillä parametrien $q_{0,1} = 2$ ja $q_{1,0} = 4$ mukaisesti. Tämän Markovin ketjun generaattorimatriisi on

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Upotettu Markovin ketju

Jatkuva-aikaiseen Markov-prosessiin X_t voidaan liittää diskreettiaikainen Markovin ketju, ns *upotettu (embedded) Markovin ketju* $\{X_n^{(e)}\}$. Jos X_t:n siirtymät tilasta toiseen tapahtuvat hetkillä $t_0, t_1, ...,$ määritellään

$X_n^{(e)} = X_t$:n arvo heti hetkellä t_n tapahtuneen tilasiirtymän jälkeen (hetki t_n^+).

Siis $X_n^{(e)} = X_{t_n^+}$. [7]

2.2.3 Tilojen luokat ja ominaisuudet

Jatkuva-aikaisen Markovin ketjun tilan j sanotaan olevan saavutettavissa tilasta i, jos

$$P(X(s) = j \mid X(0) = i) = p_{i,j}(s) > 0 \text{ jollekin } s \geq 0$$

Kuten diskreettiaikaisillakin ketjuilla, tilojen i ja j sanotaan kommunikoivan, jos tila i on saavutettavissa tilasta j, ja lisäksi tila j on saavutettavissa tilasta i (merk. $i \leftrightarrow j$)

Tilat i ja j kommunikoivat jatkuva-aikaisessa Markovin ketjussa jos ja vain jos ne kommunikoivat myös upotetussa diskreettiaikaisessa ketjussa $\{X_n^{(e)}\}$.

Tilat voidaan jakaa ekvivalenssiluokkiin $C(i) = \{j \in S : j \leftrightarrow i\}$. Jos luokkia on vain yksi ($C(1)$), ketju on redusoimaton.

Jatkuva-aikainen Markovin ketju on redusoimaton jos ja vain jos sen upotettu ketju on redusoimaton

Olkoon $H_{i,i}$ jäljellä oleva aika, kunnes ketju saapuu uudestaan tilaan i. Määritellään lisäksi, että $H_{i,i} = \infty$, jos ketju ei enää palaa tilaan i. Tila i on *toistuva*, jos ketju palaa varmasti tilaan i, eli $P(T_{i,i} < \infty) = 1$. Jos tila ei ole toistuva, se on *tilapäinen*.

Jatkuva-aikaisen Markovin ketjun tila i on toistuva/tilapäinen jos ja vain jos se on toistuva/tilapäinen myös upotetussa diskreettiaikaisessa ketjussa.

Jatkuva-aikainen Markovin ketju on *positiivisesti toistuva*, jos se on redusoimaton ja kaikki tilat ovat toistuvia. [5]

2.2.4 Rajajakauma

Määritelmä 2.6 Jos raja-arvot $\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t), j = 0, 1, ...,$ ovat olemassa ja $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$, niin vaakavektori $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, ...)$ on jatkuva-aikaisen Markovin ketjun rajajakauma.

Jos rajajakauma on olemassa, niin seuraavat yhtälöt (ns. tasapainoyhtälöt) ovat voimassa:

$$\sum_{i \neq j} \pi_j q_{j,i}, \quad j = 0, 1, ...,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

eli

$$\boldsymbol{\pi Q} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\pi} \mathbf{1} = 1$$

Jos Markovin ketju on positiivisesti toistuva, on sen rajajakauma yksikäsitteinen. [1, s. 24-25]

2.2.5 Esimerkkejä jatkuva-aikaisista Markovin ketjuista

Määritellään aluksi Poisson- prosessi, joka on yksi tärkeimmistä Markov- prosesseista. Olkoon $N(t)$ hetkeen t mennessä sattuvien tapauksien lukumäärä ja $N(0) = 0$. Prosessi $\{N(t), t \geq 0\}$ on *laskuriprosessi.*

Määritelmä 2.7 Laskuriprosessi $\{N(t), t \geq 0\}$ on *Poisson-prosessi* nopeudella λ, jos prosessilla on riippumattomat ja stationaariset lisäykset ja $N(t) \sim \mathrm{Po}(\lambda t)$

Esimerkki 2.2. Olkoon $\{N(t) : t \geq 0\}$ Poisson- prosessi nopeudella λ. Silloin $\{N(t)\}$ on jatkuva-aikainen Markovin ketju, jonka tila-avaruus on $S = \{0, 1, 2, ...\}$ ja jolle $p_{i,i+1}$=1, $q_i = \lambda$, $i \geq 0$. Jos $N(t) = i$, niin silloin muistittomuusominaisuuden nojalla seuraava lisäys $i + 1$ tapahtuu menneisyydestä riippumatta eksponentiaalisesti jakautuneen ajan kuluttua nopeudella λ. Vierailuaika tilassa i on selvästi lisäysaikojen t_{i+1} ja t_i erotus $t_{i+1} - t_i$. Olettaen, että $N(0) = 0$ huomataan, että $X_n = N(t_n^+) = n, n \geq 0$, eli upotettu Markovin ketju on deterministinen. Tämä on erityinen esimerkki jatkuva-aikaisista Markovin ketjuista, sillä sen lisäksi, että kaikilla vierailuajoilla T_i on sama nopeus $q_i = \lambda$, on $N(t)$ on kasvava prosessi. Siis kun $t \to \infty$, niin $N(t) \to \infty$. [5]

Esimerkki 2.3. FIFO- jono (First in- first out) Asiakkaita saapuu palvelupisteelle Poisson- prosessin mukaisesti nopeudella λ. Asiakkailla on toisistaan riippumattomat palveluajat $\{S_n\}, S_n \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ ja heitä palvellaan saapumisjärjestyksessä eli FIFO- periaatteen mukaisesti. Olkoon $X(t)$ asiakkaiden lukumäärä systeemissä hetkellä t. (Systeemillä tarkoitetaan tässä sekä palvelupistettä, että sille olevaa jonoa). Esimerkiksi $X(t)$=5 tarkoittaa, että palvelupisteellä on yksi asiakas ja jonossa neljä asiakasta. Selvästi siirtyminen tilasta toiseen voi tapahtua vain, kun systeemiin saapuu uusi asiakas, tai sieltä poistuu jo palveltu asiakas. Jos $X(t)$=0, niin seuraava tapahtuma on (välttämättä) asiakkaan saapuminen systeemiin eli vierailuaika tilassa on $T_0 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$; siis aika, joka kuluu, kunnes systeemiin saapuu uusi asiakas. ($q_0 = \lambda =$ saapumisnopeus). Jos $X(t) = i, i \geq 1$, niin silloin vierailuaika tilassa i on $T_i = \min\{S_r, X\}$, missä S_r on palvelutiskillä olevan asiakkaan jäljellä oleva aika systeemissä, ja X on aika, joka kuluu, kunnes systeemiin saapuu seuraava asiakas. Muistittomuusominaisuudesta (koskee sekä palveluaikoja, että saapumisten välisiä aikoja) seuraa, että menneisyydestä riippumatta $S_r \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ ja $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Palveluajat ovat riippumattomia myös Poissonprosessista, jonka mukaisesti asiakkaita saapuu. Siten $T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda + \mu), i \geq 1$.

Siirtymätodennäköisyydet $p_{i,j}$ upotetulla diskreettiaikaiselle ketjulle voidaan johtaa seuraavasti: Merkitään X_n= asiakkaiden lukumäärä systeemissä siirtymähetken n jälkeen. Siirtymä tilasta toiseen voi siis tapahtua vain asiakkaan poistuessa tai uuden asiakkaan saapuessa. Jos $X_n = 0$ on systeemi tyhjä ja odotetaan vain asiakkaan saapumista;

$$P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = 1.$$

Mutta jos $X_n = i, i \geq 1$, niin silloin

$$X_{n+1} = i + 1, \text{kun } P(X < S_r) = \lambda/(\lambda + \mu) \text{ ja}$$

$$X_{n+1} = i - 1, \text{kun } P(S_r < X) = \mu/(\lambda + \mu).$$

Siis $p_{0,1} = 1$ ja $p_{i,i+1} = p = \lambda/(\lambda + \mu)$, $p_{i,i-1} = 1 - p = \mu/(\lambda + \mu)$, kun $i \geq 1$. Tällainen upotettu Markovin ketju on myös yksinkertainen satunnaiskulku. FIFO- jonojen muodostamista Markovin prosesseista on olemassa useita eri versioita, joissa yleensä palvelupisteiden määrä vaihtelee. Niitä ei kuitenkaan käsitellä tässä enempää. [5]

2.2.6 Syntymä- kuolema- prosessit

Edellä esitetyt Poisson-prosessi, sekä FIFO- jono ovat yksinkertaisia esimerkkejä jatkuva-aikaisista Markovin ketjuista, mutta erityisesti ne ovat myös n.k. *syntymä- kuolema- prosesseja*. Syntymä- kuolema- prosessiksi kutsutaan sellaista Markov- prosessia, jonka tila-avaruus on diskreetti ja jossa tilasiirtymiä voi tapahtua vain naapuritilojen välillä; $i \to i + 1$ tai $i \to i - 1$ siten, että $p_{i,i+1} + p_{i,i-1} = 1, i \in S$. Jos esimerkiksi $p_{2,4} > 0$, ei kyseessä ole syntymä-kuolema- prosessi. Aina, kun $i \to i + 1$ sanotaan, että tapahtuu syntymä ja aina, kun $i \to i - 1$ sanotaan, että tapahtuu kuolema.

Tarkastellaan hyvin yksinkertaista tilannetta, jossa $S = \{0, 1, 2, ...\}$ ja $X(t)$ on tietyn populaation koko hetkellä t. Olkoon λ_i= syntymisnopeus tilassa $i \geq 0$ ja μ_i= kuolemisnopeus tilassa $i \geq 0$. Oletetaan, että $\mu_0 = 0$, sillä kun populaation koko on 0, ei voi tapahtua kuolemaa. Aina, kun $X(t) = i$, niin menneisyydestä riippumatta seuraavaan syntymään kuluva aika on $X \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ ja edelleen syntymästä riippumatta seuraavaan kuolemaan kuluva aika on $Y \sim \text{Exp}(\mu_i)$. Vierailuajat noudattavat nyt nopeutta $q_i = \lambda_i + \mu_i$, sillä $T_i = \min\{X, Y\} \sim \text{Exp}(\lambda_i + \mu_i)$.

Nyt aina, kun $X(t) = i \geq 1$, on seuraava tapahtuma syntymä todennäköisyydellä

$$p_{i,i+1} = P(X < Y) = \lambda_i/(\lambda_i + \mu_i)$$

ja kuolema todennäköisyydellä

$$p_{i,i-1} = P(Y < X) = \mu_i/(\lambda_i + \mu_i).$$

Kun $\mu_i = 0, i \geq 0$ ja $\lambda_i > 0, i \geq 0$ sanotaan, että prosessi on *puhdas syntymäprosessi*. Tällaisessa prosessissa siis populaation koko voi siirtymähetkellä ainoastaan kasvaa yhdellä. [5]

3 Galton- Watson- prosessi

Olkoon $\{X_n\}$ Markovin ketju, jonka tila-avaruus on $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, ...\}$ ja joka mallintaa sellaisen populaation kokoa, jossa jokainen sukupolven n yksilö tuottaa elinkaarensa lopussa (yksilöiden elinajat oletetaan tässä mallissa samoiksi) jälkeläisiä muista yksilöistä ja niiden jälkeläisten lukumäärästä riippumatta satunnaisen määrän k noudattaen *lisääntymisjakaumaa*

$$P(Y = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{1}$$

missä $p_k \geq 0$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Jälkeläiset muodostavat sukupolven $n + 1$. Jos sukupolvessa X_n on $r \geq 1$ yksilöä, niin silloin populaation koko sukupolven $n + 1$ kohdalla voidaan kirjoittaa riippumattomien ja jakaumaa (1) noudattavien satunnaismuuttujien $Y_1, Y_2, ...$ summana

$$X_{n+1} = Y_1 + Y_2 + ... + Y_r.$$

Siirtymätodennäköisyys tilasta $i \geq 1$ tilaan $j \geq 0$ on siten

$$p_{i,j} = P(Y_1 + ... + Y_r = j) \tag{2}$$

Prosessin oletetaan alkavan aina tilasta $X_0 = 1$, sillä jos $X_0 = k, k > 1$, on tuloksena prosessi, joka koostuu k kappaleesta itsenäisiä, toisistaan riippumattomia Galton- Watson- prosesseja, joissa kussakin populaation koko on alussa yksi. Prosessi jatkuu joko äärettömästi, tai kunnes se saapuu tilaan 0. Jos jossakin sukupolvessa ei synny yhtään uutta yksilöä, on myös seuraava sukupolvi luonnollisesti tyhjä ja populaatio kuolee sukupuuttoon. Tila 0 on siis absorboiva ja

$$p_{0,j} = \begin{cases} 1, & \text{kun j=0,} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

[2] [4]

3.1 Todennäköisyydet generoiva funktio

Siirtymätodennäköisyyksien laskeminen kaavan (2) avulla voi olla erittäin hankalaa ja epäkäytännöllistä. Kaikki siirtymämatriisin alkiot voidaankin huomattavasti helpommin määrittää todennäköisyydet generoivan funktion avulla. Yleisesti, kun X on diskreetti satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on $f(x)$, niin todennäköisyydet generoiva funktio $G(s)$ määritellään seuraavasti:

$$G(s) = E(s^X) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) s^{x_i}.$$

Selvästi $G(1) = 1$. Todennäköisyydet generoiva funktio on aina määritelty kaikilla $s \in [-1, 1]$, mutta myös sellaisilla muuttujan s arvoilla, joilla sarja suppenee. Derivoimalla termeittäin saadaan

$$G'(s) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) s^{x_i - 1}.$$

Jos $G(s)$ on olemassa jollakin välillä $[-s-1, s+1], s > 0$, niin $G'(1) = E(X)$. Yleisesti on voimassa

$$G^{(r)}(1) = E(X^{(r)}) = E[X(X-1)\cdots(X-r+1)]. \quad [8, s.101]$$

Galton-Watson prosessin kohdalla oletetaan edelleen, että alkuperäisen populaation koko on 1, eli $X_0 = 1$. Selvästi nyt jokaiselle n= 0, 1, 2, ...

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Y_i$$

missä satunnaismuuttujat $Y_r, r \geq 1$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja noudattavat todennäköisyysjakaumaa

$$P(Y_r = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Määritellään todennäköisyydet generoiva funktio

$$\phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

ja

$$\phi_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) s^k, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

Lisäksi $\phi_1(s) = \phi(s)$.

Tästä edelleen saadaan

$$
\begin{aligned}
\phi_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k)s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k | X_n = j) P(X_n = j) s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{j=0}^{\infty} P(X_n = j) P(Y_1 + Y_2 + ... + Y_j = k) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} P(X_n = j) \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_1 + ... + Y_j = k) s^k.
\end{aligned}
$$

Summalla $Y_1 + ... + Y_j$ on todennäköisyydet generoiva funktio $(\phi(s))^j$, sillä satunnaismuuttujat Y_r ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Siten

$$\phi_{n+1}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X_n = j)(\phi(s))^j.$$

Kaavasta (3) nähdään nyt, että summa $\sum\limits_{j=0}^{\infty} P(X_n = j)(\phi(s))^j$ on generoiva funktio $\phi_n(s)$ laskettuna pisteessä $\phi(s)$. Saadaan

$$\phi_{n+1}(s) = \phi_n(\phi(s)). \quad [2, s.394 - 395] \tag{4}$$

3.2 Populaation koon odotusarvo

Olkoon edelleen sukupolven n koko edellisen sukupolven jälkeläisten kokonaismäärä $X_n = \sum\limits_{r=1}^{X_{n-1}} Y_r$ ja riippumattomuusoletukset voimassa. Olkoon lisäksi $\mu = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kp_k$ lisääntymisjakauman keskiarvo. Kun halutaan selvittää populaation koko sukupolven n kohdalla, saadaan kokonaistodennäköisyyden kaavasta

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{k=0}^{\infty} E(X_n \mid X_{n-1} = k)P(X_{n-1} = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E(\sum_{i_1}^{X_{n-1}} Y_i \mid X_{n-1} = k)P(X_{n-1} = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E(\sum_{i_1}^{k} Y_i \mid X_{n-1} = k)P(X_{n-1} = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{k} Y_i)P(X_{n-1} = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k\mu P(X_{n-1} = k) \\
&= \mu E(X_{n-1})
\end{aligned}$$

(Yhtälön neljäs rivi seuraa suoraan riippumattomuudesta). Tätä tulosta iteroimalla saadaan

$$E(X_n) = \mu E(X_{n-1}) = \mu^2 E(X_{n-2}) = \cdots = \mu^n E(X_0) = \mu^n, \quad n \geq 0.$$

(tulos seuraa siis siitä, että $X_0 = 1$) Pitkällä aikavälillä populaation koon odotusarvolle on siis voimassa

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty} \mu^n = \begin{cases} 0, & \text{kun } \mu < 1, \\ 1, & \text{kun } \mu = 1, \\ \infty, & \text{kun } \mu > 1. \end{cases}$$

[9, s. 160-161]

Esimerkki 3.1. Tarkastellaan sellaista bakteeripopulaatiota, jossa bakteerit lisääntyvät jakautumalla kahdeksi. Yhden aikayksikön kuluessa yksittäinen bakteeri joko kuolee todennäköisyydellä 0.2, pysyy samanlaisena todennäköisyydellä 0.3 tai jakautuu kahdeksi todennäköisyydellä 0.5. Oletetaan, että $X_0 = 250$. Lisääntymisjakauman generoiva funktio on

$$\phi(s) = 0.2 + 0.3s + 0.5s^2.$$

Koska $\phi'(1) = E(X_1)$, saadaan generoivan funktion avulla helposti laskettua bakteeripopulaation koon odotusarvo hetkellä $n = 1$. Jokaisen yksittäisen bakteerin jälkeläisten odotusarvo on $\phi'(1) = 0.3 + 2 \cdot 0.5 \cdot 1 = 1.3$, joten koko alkuperäisen populaation sukupolven $n = 1$ koon odotusarvo on $250 \cdot 1.3 = 325$.

3.3 Sukupuuton todennäköisyys

Populaation sanotaan kuolevan sukupuuttoon, kun $X_n = 0$ jollakin n, sillä selvästi, kun $X_n = 0$ seuraa, että $X_k = 0$ kaikille $k > n$. Jos yksilön todennäköisyys saada 0 jälkeläistä on 0, eli $p_0 = 0$, ei sukupuuttoa voi tapahtua, joten oletetaan, että $0 < p_0 < 1$. Olkoon sukupuuton todennäköisyys hetkeen n mennessä

$$q_n = P(X_n = 0) = \phi_n(0).$$

Kaavasta (4) seuraa, että

$$q_{n+1} = \phi_{n+1}(0) = \phi(\phi_n(0)) = \phi(q_n). \tag{5}$$

Derivoimalla funktiota ϕ saadaan

$$\phi'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} \geq 0,$$
$$\phi''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-2} \geq 0, \text{ kun } s < 1.$$

Nähdään, että ϕ on kasvava ja konveksi. Lisäksi $q_1 = \phi_1(0) = p_0 > 0$ ja $q_2 = \phi(q_1) > \phi(0) = q_1$. Oletetaan nyt, että $q_n > q_{n-1}$. Silloin

$$q_{n+1} = \phi(q_n) > \phi(q_{n-1}) = q_n.$$

Tästä nähdään, että jono $q_1, q_2, ..., q_n, ...$ on kasvava ja lisäksi ylhäältä rajoitettu (ylärajana 1). Siten on olemassa raja-arvo

$$\pi = \lim_{n\to\infty} q_n, \quad 0 < \pi \leq 1.$$

Koska $\phi(s)$ on jatkuva ($0 \leq s \leq 1$), niin kun $n \to \infty$ seuraa, että

$$\pi = \phi(\pi). \tag{6}$$

Kun q_n määriteltiin sukupuuton todennäköisyydeksi tietyllä hetkellä, on π todennäköisyys, että sukupuutto tapahtuu ennen pitkää. Kaavasta (6) nähdään, että π on yhtälön $\phi(s) = s$ juuri.

Näytetään lisäksi, että π on myös pienin positiivinen juuri. Olkoon s_0 nyt jokin positiivinen juuri. Silloin $q_1 = \phi(0) < \phi(s_0) = s_0$. Olkoon $q_n < s_0$. Silloin kaavan (5) perusteella $q_{n+1} = \phi(q_n) < \phi(s_0) = s_0$. Induktiolla voidaan päätellä, että $q_n < s_0$ on voimassa kaikilla n. Seuraa, että

$$\pi = \lim_{n\to\infty} q_n \leq s_0,$$

joten π on yhtälön $\phi(s) = s$ pienin positiivinen juuri. [2, s. 396-397]

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan sellaista haarautumisprosessia, jonka lisääntymisjakauma on $p = (0.2, 0.5, 0.3)$. Keskimääräinen jälkeläisten määrä on

$$\mu = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.3 = 1.1.$$

Generoiva funktio on nyt

$$\phi(s) = 0.2 \cdot s^0 + 0.5 \cdot s^1 + 0.3 \cdot s^2 = 0.2 + 0.5s + 0.3s^2.$$

Ratkaisemalla yhtälö

$$s = \phi(s) = 0.2 + 0.5s + 0.3s^2$$

sukupuuton todennäköisyyden selvittämiseksi saadaan juuriksi $s_1 = 1$ ja $s_2 = 0.666....$ Pienempi näistä on ennen pitkää tapahtuvan sukupuuton todennäköisyys, $\pi = 0.666....$ [9]

Esimerkki 3.3. Olkoon

$$p_k = p^k(1-p), k = 0, 1, 2, ...$$

Lisääntymisjakauma on siten Geom$(1-p)$, ja

$$\mu = \frac{p}{1-p}.$$

Selvästi jos $p \leq 0.5$, $\pi = 1$. Oletetaan kuitenkin tässä, että $p > 0.5$. Todennäköisyydet generoiva funktio on

$$\phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p^k (1-p) = \frac{1-p}{1-ps}.$$

Nyt yhtälöllä $\phi(s) = s$ on kaksi ratkaisua, $s_1 = 1$ ja $s_2 = \frac{1-p}{p}$. Koska $p > 0.5$, on s_2 näistä pienempi, joten sukupuuton todennäköisyydeksi saadaan

$$\pi = \frac{1-p}{p}. \quad [10]$$

Sukupuuton todennäköisyys riippuu merkittävästi jälkeläisten lukumäärän keskiarvosta μ. Sen perusteella prosessi voidaan jakaa kolmeen tapaukseen:

- Kun $\mu < 1 \rightarrow \pi = 1$ eli sukupuutto on varmaa. *(Alikriittinen prosessi.)*

- Kun $\mu = 1 \rightarrow \pi = 1$ paitsi silloin, kun yksilön jälkeläisten määrä on yksi eli $p_1 = 1$. *(Kriittinen prosessi.)*
- Kun $\mu > 1 \rightarrow \pi < 1$. Sukupuutto on kuitenkin tällaisessakin tapauksessa mahdollinen. *(Ylikriittinen prosessi.)*

Nämä tulokset seuraavat suoraan populaation koon estimaateista pitkällä aikavälillä. Intuitiivisestikin on selvää, että jos jokainen yksilö saa keskimäärin yhden tai vähemmän kuin yhden jälkeläisen, on sukupuutto ennen pitkää väistämätön. Jos taas yksilö saa aina tasan yhden jälkeläisen, eli $p_1 = 1$, tilanne on täysin triviaali. Ylikriittinen prosessi on hieman mielenkiintoisempi, sillä vaikka populaation koon odotusarvo kasvaakin äärettömän suureksi, on sukupuutto silti mahdollinen. Prosessi ei silti voi koskaan saavuttaa minkäänlaista tasapainotilaa, jossa populaation koko stabiloituisi tietylle tasolle. Galton- Watson- prosessin kaikki tilat $1, 2, ..$ ovat siis tilapäisiä ja lisäksi, jos $\mu > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \pi \text{ ja } \lim_{n\to\infty} P(X_n = \infty) = 1 - \pi, \quad 0 < \pi < 1$$

Todistetaan tämä tulos:

Oletetaan jälleen, että prosessi alkaa tilasta $X_0 = 1$. Olkoon m ensimmäinen sellainen kerta, että $X_m = k, k \neq 1$. Jos sellaista hetkeä m ei ole olemassa, niin tila k on selvästi tilapäinen. Jos taas sellainen hetki m on olemassa, niin määritellään silloin ensimmäinen palaaminen tilaan $k, k \neq 1$ sukupolven n kohdalla seuraavasti:

$$\phi_{kk}^{(n)} = P(X_{m+n} = k, X_{m+j} \neq k, j = 1, 2, ..., n-1 \mid X_m = k),$$

missä $\phi_{kk}^{(0)} = 0$. Määritellään lisäksi

$$\phi_{kk} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{kk}^{(n)}.$$

Tila k on siis tilapäinen, jos $\phi_{kk} < 1$.

Olkoon nyt $p_{k,0}$ todennäköisyys, että prosessi siirtyy yhdessä sukupolvessa tilasta k tilaan 0, eli

$$p_{k,0} = P(X_{m+1} = 0 \mid X_m = k).$$

Selvästi $X_n = 0$ kaikille $n \geq m+1$, sillä tila 0 on absorboiva, eikä sinne saavuttaessa ole enää mahdollista siirtyä muihin tiloihin. Siksi täytyy olla olemassa positiivinen todennäköisyys $p_{k,0}$, että prosessi ei koskaan enää palaa tilaan k ja siten

$$\phi_{kk} \leq 1 - p_{k,0} < 1.$$

Jokainen tila $k \in \{1, 2, ...\}$ on siis tilapäinen. Tilapäiselle tilalle k ja jokaiselle tilalle j $\lim_{n\to\infty} p_{k,j} = 0$, eli

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = 0.$$

Koska X_n ei voi konvergoida (kun $n \to \infty$) kohti mitään äärellistä tilaa k, niin silloin se konvergoi joko kohti tilaa 0 tai kasvaa äärettömän suureksi. [14]

Galton- Watson prosessille on voimassa, että ylikriittinen prosessi, $\mu > 1$, joka on ehdollistettu päättymään sukupuuttoon, muuttuu alikriittiseksi prosessiksi. Olkoon siis $\{p_k\}$ ylikriittisen prosessin lisääntymisjakauma, eli

$$\sum_{k\geq 0} kp_k > 1.$$

Olkoon edelleen ϕ todennäköisyydet generoiva funktio ja π sukupuuton todennäköisyys eli yhtälön $\phi(\pi) = \pi$ ratkaisu, $\pi \in [0, 1]$. Voidaan osoittaa (ks. [16, s. 259-260]), että jos prosessi ehdollistetaan päättymään sukupuuttoon, niin silloin sen lisääntymisjakauma on

$$p_k^* = p_k \pi^{k-1}, \quad k \geq 0.$$

Tarkistetaan ensin, että kyseessä todella on todennäköisyysjakauma. Koska

$$\pi = \sum_{k\geq 0} p_k \pi^k = \pi \sum_{k\geq 0} p_k^*,$$

niin $\sum_{k\geq 0} p_k^* = 1$. Merkitään nyt jakauman $\{p_k^*\}$ generoivaa funktiota ϕ^*. Voidaan helposti todeta, että $\phi^*(s) = \pi^{-1}\phi(\pi s)$ ja siten $\phi^{*\prime}(s) = \phi'(\pi s)$. Tästä seuraa, että

$$\sum_{k\geq 0} kp_k^* = \phi^{*\prime}(1) = \phi'(\pi) < 1,$$

joten kyseessä on alikriittinen prosessi.

Esimerkki 3.4. Olkoon yksilön jälkeläisten määrä Poisson- jakautunut ja jälkeläisten lukumäärän keskiarvo $\mu = \lambda > 1$. Edellä olevan perusteella, jos prosessi ehdollistetaan päättymään sukupuuttoon, niin silloin

$$p_k^* = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\pi^{k-1} = \frac{1}{\pi}e^{-\lambda}\frac{(\lambda\pi)^k}{k!}.$$

Jakaumaan p_k liittyvä sukupuuton todennäköisyys on yhtälön $\pi = \phi(\pi)$ ratkaisu, eli

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\pi^k.$$

Tästä saadaan $\pi = e^{\lambda(\pi-1)}$, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{\pi}e^{-\lambda} = e^{-\lambda\pi}.$$

Siten

$$p_k^* = e^{-\lambda\pi}\frac{(\lambda\pi)^k}{k!},$$

joka vastaa Poisson-jakaumaa keskiarvolla $\mu = \lambda\pi$. [16]

3.4 Sukupuuttoon kuluva aika

Aiemmin on tarkasteltu ainoastaan hetkeen n mennessä tapahtuvan sukupuuton todennäköisyyttä. Olkoon nyt T sukupuuton tarkka tapahtumahetki eli $T = n$, kun n on ensimmäinen sellainen sukupolvi, jolle $X_n = 0$. Siis tarkalleen

$$T = n \Longleftrightarrow X_n = 0 \text{ ja } X_{n-1} > 0.$$

Kokonaistodennäköisyyden perusteella voidaan kirjoittaa

$$P(X_n = 0 \cap X_{n-1} > 0) + P(X_n = 0 \cap X_{n-1} = 0) = P(X_n = 0).$$

Mutta nyt tapahtuma $(X_n = 0 \cap X_{n-1} = 0)$ on sellainen, että tiedetään, että jos sukupuutto on tapahtunut jo sukupolven $n-1$ kohdalla, se on varmasti tapahtunut myös sukupolven n kohdalla, sillä tila 0 on absorboiva. Siten

$$P(X_n = 0 \cap X_{n-1} = 0) = P(X_{n-1} = 0) = \phi_{n-1}(0).$$

Vastaavasti edelleen

$$P(X_n = 0) = \phi_n(0).$$

Nyt saadaan

$$P(T = n) = P(X_n = 0 \cap X_{n-1} > 0) = \phi_n(0) - \phi_{n-1}(0) = q_n - q_{n-1}.$$

Tämä antaa muuttujan T jakauman.

Sukupuuttoon kuluvan ajan odotusarvolle $E(T)$ on voimassa

$$E(T) = \begin{cases} < \infty, & \text{kun } \mu < 1, \\ \infty, & \text{kun } \mu = 1, \\ \infty, & \text{kun } \mu > 1. \end{cases}$$

[15]

Esimerkki 3.5. Tarkastellaan populaatiota, jossa yksilö saa yhden jälkeläisen todennäköisyydellä p ja nolla jälkeläistä todennäköisyydellä $q = 1 - p$ ja etsitään muuttujan T jakauma:

Kun nyt

$$\phi(s) = qs^0 + ps^1 = q + ps,$$

$$\phi_2(s) = \phi(\phi(s)) = q + p(q + ps) = q(1 + p) + p^2 s$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(s) = q(1 + p + p^2 + ... + p^{n-1}) + p^n s,$$

niin saadaan

$$\begin{aligned} P(T = n) &= \phi_n(0) - \phi_{n-1}(0) \\ &= q(1 + p + p^2 + ... + p^{n-1}) - q(1 + p + p^2 + ... + p^{n-2}) \\ &= qp^{n-1}, \quad n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Siten

$$T - 1 \sim \mathrm{Geom}(q).$$

Geometriselle jakaumalle on voimassa $E(T - 1) = \frac{p}{q}$, joten

$$E(T) = 1 + \frac{p}{q} = \frac{1 - p + p}{q} = \frac{1}{q}. \quad [15]$$

3.5 Migraatio

Yhden tyypin haarautumisprosessi on yksinkertaisimmillaan sellainen, että koko populaatio jollakin hetkellä n on peräisin yhdestä alkuperäisestä yksilöstä. On myös mahdollista, että populaation kokoon vaikuttaa positiivinen tai negatiivinen migraatio, eli yksilöitä voi saapua populaation ulkopuolelta tai niitä voi poistua olemassa olevasta populaatiosta syystä tai toisesta.

Kun prosessiin liittyy positiivista migraatiota, niin silloin satunnainen määrä yksilöitä saapuu populaation ulkopuolelta lisääntymishetkien $i-1$ ja $i, i = 1, 2, ...$, välisenä aikana. Tehdään oletus, että saapuvat yksilöt ovat samaa tyyppiä, kuin alkuperäisen populaation yksilöt ja niillä on siten myös sama lisääntymisjakauma. Oletetaan, että hetkellä $n = 0$ populaatio koostuu X_0 yksilöstä. Olkoon $\delta_n, n = 1, 2, ...$, saapuvien yksilöiden lukumäärä hetkien $n-1$ ja n välisenä aikana. Jos populaation koko ennen seuraavan sukupolven syntymistä ja migraation tapahtumista on X_{n-1}, niin silloin

$$X_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_{X_{n-1}} + \delta_n,$$

missä Y_i on edelleen sukupolven $n-1$ yksilön i jälkeläisten lukumäärä. Oletetaan, että saapuvien yksilöiden lukumäärän keskiarvo lisääntymishetkien välillä on vakio λ ja edelleen yhden yksilön jälkeläisten lukumäärän keskiarvo on μ. Koko populaation koon odotusarvoksi saadaan nyt

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= E(E(X_n \mid X_{n-1})) \\
&= E(E(Y_1 + ... + Y_{X_{n-1}} + \delta_n \mid X_{n-1})) \\
&= E(E(Y_1 \mid X_{n-1})) + ... + E(E(Y_{X_{n-1}} \mid X_{n-1})) + E(E(\delta_n \mid X_{n-1})) \\
&= E(\mu X_{n-1}) + \lambda \\
&= \mu E(X_{n-1}) + \lambda \\
&= \mu(\mu E(X_{n-2}) + \lambda) + \lambda ... \\
&= \mu^n E(X_0) + \lambda\mu^{n-1} + \lambda\mu^{n-2} + ... + \lambda\mu + \lambda \\
&= X_0\mu^n + \lambda\mu^{n-1} + ... + \lambda\mu + \lambda.
\end{aligned}$$

Helposti nähdään, että kun $\mu \neq 1$, niin

$$E(X_n) = X_0\mu^n + \lambda\frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}$$

ja kun $\mu = 1$, niin

$$E(X_n) = X_0 + n\lambda.$$

Alikriittisessä tapauksessa siis

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty}\left(X_0\mu^n + \lambda\frac{\mu^n-1}{\mu-1}\right)$$
$$= \frac{\lambda}{1-\mu}.$$

Populaation koko pysyy rajoitettuna, ja vaikka hetkellinen sukupuutto onkin mahdollinen, ei koko populaatio voi kuolla sukupuuttoon edes alikriittisessä tapauksessa, sillä positiivinen migraatio pysyy vakiona.

Tarkastellaan sitten sellaista negatiivista migraatiota, jossa jokainen yksilö, muista riippumatta, voi heti syntymänsä jälkeen valita populaatiosta poistumisen. Tällaista tapausta voidaan käsitellä kuten syntymä-kuolema-prosessia eli poistuneita yksilöitä ei oteta huomioon jälkeläisten lukumäärässä. Olkoon edelleen p_k todennäköisyys, että yksilö saa k jälkeläistä. Olkoon lisäksi q todennäköisyys, että yksilö poistuu populaatiosta. Nyt yksilön todennäköisyys saada k populaatioon jäävää jälkeläistä on

$$\sum_{j\geq k}\binom{j}{k}(1-q)^k q^{j-k} p_j.$$

Yhden yksilön jälkeläisten lukumäärän keskiarvo on selvästi $\mu^* = \mu(1-q)$. Käytännössä tämä tarkoittaa, että mikäli edellä kuvatun kaltaista negatiivista migraatiota tapahtuu ja $\mu^* < 1 < \mu$, saattaa ylikriittisestä prosessista tulla alikriittinen ja siten sukupuuton todennäköisyys voi muuttua merkittävästi. Negatiivinen migraatio voi olla riippuvaista esimerkiksi populaation koosta, mutta sellaisia tapauksia ei käsitellä tässä. [12, s. 52-55]

3.6 Ympäristön vaihtelu

Prosessi, jossa ympäristön vaikutus on otettu huomioon on myös perinteisen Galton- Watson prosessin modifikaatio, jossa lisääntymisjakauma vaihtelee sukupolvien välillä. Ympäristön vaihtelulla voidaan tarkoittaa kirjaimellista ympäristön vaihtelua esimerkiksi tutkittaessa eläinpopulaatiota. Sääolosuhteet, ravinnon saatavuus, ihmisen toimet ymv. voivat vaikuttaa populaatioiden kokoon ja lisääntymiseen merkittävästi. Puhtaasti matemaattisesta näkökulmasta sillä viitataan lisääntymisjakauman satunnaisuuteen ja vaihteluun. Tällainen prosessi ei enää ole täysin Galton- Watson- prosessin määritelmän mukainen, mutta jos oletetaan, että populaation jokainen sukupolven k yksilö saa Y_k jälkeläistä (Tässä Y_k on diskreetti satunnaismuuttuja) ja että jokainen yksilö lisääntyy muista riippumatta, niin tietyin ehdoin tällaistakin prosessia voidaan käsitellä kuten Galton- Watson- prosessia. Oletetaan esimerkiksi, että ympäristön vaihtelu on jaksottaista ja satunnaismuuttujat Y_k muodostavat jonon $Y_1, Y_2, Y_1, Y_2, ...$ jne. Tällaisessa tapauksessa voidaan kahdesta peräkkäisestä vuodesta muodostaa yksi yksikkö, jolloin Galton- Watson- mallia voidaan soveltaa. Tilanne voi olla myös sellainen, että ympäristön vaihtelu on satunnaista ja noudattaa jotain tiettyä todennäköisyysjakaumaa.

Olkoon nyt m_n sukupolven n jälkeläisten lukumäärän odotusarvo. Koska selvästi se on riippuvainen sukupolvesta $n-1$, saadaan populaation koon odotusarvoksi

$$E(X_n) = E(E(X_n \mid X_{n-1})) = m_{n-1}E(X_{n-1}),$$

joka saadaan iteroimalla muotoon

$$E(X_n) = m_{n-1}m_{n-2}\cdots m_0 E(X_0) = \prod_{i=0}^{n-1} m_i E(X_0).$$

Oletetaan nyt, että ympäristön muutos on jaksottaista ja jakson pituus on T, jolloin jälkeläisten lukumäärän odotusarvo peräkkäisinä sukupolvina on $m_i, i = 1, 2, ..., T$. Populaation koon odotusarvo sukupolven nT kohdalla on

$$E(X_{nT}) = (m_T \cdots m_1)^n E(X_0).$$

Lisäksi populaation kasvunopeuden odotusarvo yhden sukupolven aikana on odotusarvojen $\{m_i\}, i = 1, 2, ..., T$ geometrinen keskiarvo $(m_T \cdots m_1)^{1/T}$. Huomionarvoista on, että populaation kasvunopeuden odotusarvo on pienempi kuin kasvunopeuksien aritmeettinen keskiarvo,

$$(m_T \cdots m_1)^{1/T} \leq \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} m_i.$$

Olkoon nyt $m_k = E(Y_k)$ sukupolven k jälkeläisten lukumäärän odotusarvo ja olkoon lisäksi $\{m_k\}, k = 0, 1, 2, ...$ riippumattomia, samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joille $E(m_k) = \mu$. Kasvunopeuksien odotusarvo μ ei ole sama kuin populaation kasvunopeuden odotusarvo, joka voidaan määritellä joukon $\{\ln m_k\}, k = 0, 1, 2, ...$ avulla siten, että n:n sukupolven jälkeen kasvunopeuden odotusarvo on

$$\begin{aligned}(m_{n-1}m_{n-2}\cdots m_0)^{1/n} &= e^{(1/n)\ln(m_{n-1}m_{n-2}\cdots m_0)} \\ &= e^{(1/n)(\ln m_{n-1} + \ln m_{n-2} + ... + \ln m_0)}.\end{aligned}$$

Suurten lukujen lain nojalla riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien $\{\ln m_i\}, i = 0, 1, 2, ...$ jonolle, jolla on äärellinen odotusarvo $\ln \mu_r$, pätee

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln m_i = \ln \mu_r = E(\ln m_k).$$

Satunnaisessa ympäristössä haarautumisprosessille on voimassa seuraava tulos:

- Kun $E(\ln m_k) < 0 \to$ prosessi on alikriittinen,
- Kun $E(\ln m_k) = 0 \to$ prosessi on kriittinen,
- Kun $E(\ln m_k) > 0 \to$ prosessi on ylikriittinen.

Jensenin epäyhtälöstä (ks. esim [17]) seuraa, että satunnaisessa ympäristössä kasvunopeuksille on voimassa

$$\mu_r = e^{\ln \mu_r} = e^{E(\ln m_k)} \leq E(e^{\ln m_k}) = E(m_k) = \mu,$$

Siten on mahdollista, että ylikriittinenkin prosessi voi päättyä sukupuuttoon. [14]

Esimerkki 3.6. Oletetaan nyt, että Y_1 merkitsee populaatiolle ns. hyvää vuotta ja vastaavasti Y_2 huonoa vuotta. Hyvänä vuonna lisääntymisjakauma on $p_0 = 0.2, p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.2$ ja $p_3 = 0.2$ ja huonona vuonna $p_0 = 0.3$ ja $p_1 = 0.7$. Hyvänä vuonna jälkeläisiä syntyy keskimäärin $m_1 = 1.4$ ja huonona vuonna $m_2 = 0.7$. Jos nyt oletetaan lisäksi, että hyvä ja huono vuosi seuraavat aina toisiaan, eli muodostavat jonon $Y_1, Y_2, Y_1, Y_2, ...$, niin silloin voidaan kahden vuoden jaksoa käsitellä yksikkönä siten, että populaation odotettu kasvunopeus on $\sqrt{m_1 m_2} = 0.990 < 1$.

Oletetaan nyt vaihtoehtoisesti, että hyvän vuoden todennäköisyys on 0.5 ja huonon vuoden todennäköisyys samoin 0.5. Silloin $E(m_k) = \mu = 1.05$. Nyt kummassakin tapauksessa prosessi on alikriittinen, sillä

$$E(\ln m_k) = \ln(0.990) = -0.010 < 0.$$

4 Usean tyypin haarautumisprosessit

Yhden tyypin Galton- Watson- prosessissa jokainen yksilö saa muista riippumatta elinkaarensa lopussa tietyn määrän jälkeläisiä, jotka ovat aina samaa tyyppiä kuin edeltäjänsä. Jokaisella yksilöllä on sama lisääntymisjakauma sukupolvesta toiseen. Usean tyypin prosessissa jokainen yksilö voi saada k:n eri tyypin jälkeläisiä ja lisäksi eri tyyppien lisääntymisjakaumat voivat poiketa toisistaan. Useimmiten oletetaan, että saman tyypin edustajilla on aina sama lisääntymisjakauma.

4.1 Todennäköisyydet generoiva funktio

Merkitään usean tyypin haarautumisprosessia $\{\boldsymbol{X}(n)\}_{n\to\infty}$, missä $\boldsymbol{X}(n)$ on satunnaismuuttujista $X_i(n), i = 1, 2, ..., k$ koostuva vektori

$$\boldsymbol{X}(n) = (X_1(n), X_2(n), ..., X_k(n)).$$

Lisäksi jokaiseen satunnaismuuttujaan $X_i(n)$ liittyy k satunnaismuuttujaa $\{Y_{1i}, Y_{2i}, ..., Y_{ki}\}$, missä Y_{ji} on tyypin i yksilön tyypin j jälkeläisten lukumäärä.

Oletetaan, että $X_i(0) = 1$. Olkoon $p_i(r_1, r_2, ..., r_k)$ tyypin i yksilön todennäköisyys saada r_1 tyypin 1 jälkeläistä, r_2 tyypin 2 jälkeläistä,..., r_k tyypin k jälkeläistä, eli

$$p_i(r_1, r_2, ..., r_k) = P(Y_{1i} = r_1, Y_{2i} = r_2, ..., Y_{ki} = s_k),$$

Lisääntymisjakaumaan liittyvä todennäköisyydet generoiva funktio on

$$f_i(s_1, s_2, ..., s_k) = \sum_{r_k=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_2=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{\infty} p_i(r_1, r_2, ..., r_k) s_1^{r_1} s_2^{r_2} \cdots s_k^{r_k}, \quad i = 1, 2, ..., k.$$

Olkoon nyt $\boldsymbol{e}_i$ sellainen k- ulotteinen vektori, jonka i:s komponentti on 1 ja muut komponentit ovat nollia. Siis esimerkiksi $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{e}_i$ tarkoittaa, että alkuperäinen populaatio koostuu vain yhdestä tyypin i yksilöstä. Todennäköisyydet generoiva funktio muuttujalle $X_i(0)$, kun $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{e}_i$ on selvästi

$$f_i^0(s_1, s_2, ..., s_k) = s_i,$$

Merkitään muuttujan $X_i(n)$ todennäköisyydet generoivaa funktiota $f_i^n(s_1, s_2, ..., s_k)$. Olkoon nyt

$$F = F(s_1, s_2, ..., s_k) = (f_1(s_1, ..., s_k), ..., f_k(s_1, ..., s_k))$$

vektori, jonka komponentteina on todennäköisyydet generoivat funktiot f_i. Funktiolla F on kiintopiste $(1, 1, ...,1)$, sillä kaikille i on voimassa $f_i(1, 1, ..., 1) = 1$. Ennen pitkää tapahtuvan sukupuuton todennäköisyys riippuu siitä, onko funktiolla F toista kiintopistettä. [14] Palataan siihen sukupuuton yhteydessä, ja määritellään nyt usean tyypin prosessille odotusarvomatriisi $\boldsymbol{M}$.

4.2 Odotusarvomatriisi

Määritellään usean tyypin haarautumisprosessille odotusarvomatriisi

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1k} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k1} & \ddots & \ddots & m_{kk} \end{pmatrix},$$

jossa m_{ji} on tyypin i yksilön tyypin j jälkeläisten lukumäärän odotusarvo, eli

$$m_{ji} = E(X_j(1) \mid \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{e}_i), \quad i, j = 1, 2, ..., k.$$

Matriisin alkiot m_{ji} voidaan määritellä myös todennäköisyydet generoivien funktioiden avulla siten, että

$$m_{ij} = \frac{\partial f_i(s_1, s_2, ..., s_m)}{\partial s_j} \,|_{s_1=1,...,s_k=1} .[14]$$

Määritelmä 4.1. Usean tyypin haarautumisprosessi on redusoimaton jos ja vain jos jokaiselle parille i, j on olemassa luonnollinen luku n siten, että

$$P(X_j(n) \geq 1 \mid \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{e}_i) > 0.$$

Tässä siis $X_j(n)$ on tyypin j yksilöiden lukumäärä sukupolven n kohdalla. Jos väite pätee kaikille i, j jollakin n, sanotaan, että prosessi on positiivisesti säännöllinen [13].

Seuraava lause on hyvin keskeinen usean tyypin prosesseille.

Perron- Frobeniuksen lause. Jos matriisi $\boldsymbol{M}$ on positiivisesti säännöllinen, niin silloin sillä on sellainen positiivinen ominaisarvo λ (Matriisin $\boldsymbol{M}$ Perron- Frobeniuksen juuri), että kaikille muille ominaisarvoille λ^* on voimassa $|\lambda^*| < \lambda$. Lisäksi ominaisarvon λ algebrallinen kertaluku on 1. Ominaisarvoon λ liittyy sellaiset ominaisvektorit $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$, joiden kaikki komponentit ovat

> 0 ja joille $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{vM}$, $\mathbf{Mw} = \lambda\mathbf{w}$ ja $\mathbf{vw} = 1$. Olkoon $\mathbf{M}_1 = \mathbf{wv} = (w_i v_j)$ ja $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M} - \lambda\mathbf{M}_1 = (m_{2ij})$. Seuraa, että $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 = \mathbf{0}$ ja

$$\mathbf{M}^n = \lambda^n\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad [13, s.8-9]$$

Sukupuutto riippuu merkittävästi ominaisarvon λ suuruudesta, ja usean tyypin prosessiin liittyvä sukupuuttoteoria nojaakin oletukseen, että odotusarvomatriisi $\boldsymbol{M}$ on ei-negatiivinen säännöllinen matriisi.

4.3 Sukupuuton todennäköisyys

Usean tyypin haarautumisprosessi päättyy sukupuuttoon, jos on olemassa $N \in \mathbb{N}$, että kun $n \geq N$, niin silloin $\boldsymbol{X}(n) = \mathbf{0}$, missä $\mathbf{0}$ on k-ulotteinen nollavektori.

Oletetaan nyt, että funktio $F = (s_1, ..., s_k) = (f_1(s_1, ..., s_k), ..., f_k(s_1, ..., s_k))$ on muuttujien $s_1, ..., s_k$ epälineaarinen funktio. Oletetaan lisäksi että odotusarvomatriisi $\boldsymbol{M}$ on säännöllinen ja että sillä on sellainen ominaisarvo λ, että kaikille muille ominaisarvoille r pätee $|r| < \lambda$. Jos $\lambda \leq 1$, niin

$$\lim_{n\to\infty} P(\boldsymbol{X}(n) = \mathbf{0} \mid \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{e}_i) = 1, \quad i = 1, 2, ..., k.$$

Jos $\lambda > 1$ silloin on olemassa sellainen yksikäsitteinen vektori $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, ..., q_k)$, $0 < q_i < 1, i = 1, 2, ..., k$, että

$$P(\boldsymbol{X}(n) = \mathbf{0} \mid \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{e}_i) = q_i,$$

missä q_i on generoivien funktioiden f_i kiintopiste, $f_i(q_1, q_2, ..., q_n) = q_i$. [14] Tämän tuloksen todistus löytyy esimerkiksi teoksesta [11].

Merkitään lisäksi todennäköisyyttä, että prosessi päättyy sukupuuttoon sukupolveen n mennessä q_{in} (edelleen $X(0) = e_i$). Selvästi

$$q_{i0} \leq q_{i1} \leq \cdots \leq q_{in}.$$

Nyt

$$q_i = \lim_{n\to\infty} q_{in}, \quad i = 1, 2, ..., k.$$

Olkoon $q_n = (q_{1n}, q_{2n}, ..., q_{kn})$, jolloin

$$q = \lim_{n\to\infty} q_n.$$

Kaikille q_i on voimassa yhtälö

$$q_i = f_i(q_1, ...q_n), \quad i = 1, 2, ..., k.$$

Tämän todistus löytyy esimerkiksi [13, s. 11].

Esimerkki 4.1. Tarkastellaan kaksiulotteista prosessia. Olkoon

$$f_1(s_1, s_2) = \frac{1}{4}(1 + s_1 + s_2^2 + s_1^2 s_2)$$

ja

$$f_2(s_1, s_2) = \frac{1}{4}(1 + s_1 + s_2^2 + s_1 s_2^2).$$

Odotusarvomatriisiksi saadaan

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m_{11} = \frac{\partial f_1(s_1,s_2)}{\partial s_1} & m_{12} = \frac{\partial f_2(s_1,s_2)}{\partial s_1} \\ m_{21} = \frac{\partial f_1(s_1,s_2)}{\partial s_2} & m_{22} = \frac{\partial f_2(s_1,s_2)}{\partial s_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Selvästi $\boldsymbol{M}$ on säännöllinen. Sillä on ominaisarvot $\lambda_1 = 3/2 > \lambda_2 = 1/4$. Koska $\lambda > 1$, on olemassa sellaiset $q_1, q_2 \in (0, 1)$, että $f_1(q_1, q_2) = q_1$ ja $f_2(q_1, q_2) = q_2$. Tästä saadaan kiintopisteeksi $(q_1, q_2) = (\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$. Siis jos $\boldsymbol{X}(0) = (t_1, t_2)$, niin

$$\lim_{n\to\infty} P(\boldsymbol{X}(n) = \boldsymbol{0}) = (\sqrt{2}-1)^{t_1+t_2}. \quad [14]$$

4.4 Populaation koon odotusarvo

Matriisi $\boldsymbol{M}$ on hyödyllinen, kun halutaan selvittää populaation koon odotusarvo. Ehdollinen odotusarvo saadaan yhtälöstä

$$E(\boldsymbol{X}(n+1) \mid \boldsymbol{X}(n)) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}(n).$$

Yleisesti usean tyypin haarautumisprosessille on voimassa

$$E(\boldsymbol{X}(n+t) \mid \boldsymbol{X}(n)) = \boldsymbol{M}^t \boldsymbol{X}(n),$$

josta saadaan

$$E(\boldsymbol{X}(n)) = E(E(\boldsymbol{X}(n) \mid \boldsymbol{X}(0)) = \boldsymbol{M}^n E(\boldsymbol{X}(0)).$$

Tarkastellaan vielä esimerkin 4.1 prosessia ja oletetaan, että $\boldsymbol{X}(0) = (1, 2)$ Nyt

$$E(\boldsymbol{X}(1) \mid \boldsymbol{X}(0)) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}(0) = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 11/4 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
E(\boldsymbol{X}(2) \mid \boldsymbol{X}(1)) &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}(1) \\
&= \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/4 \\ 11/4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 43/16 \\ 65/16 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 15/16 & 14/16 \\ 21/16 & 22/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{X}(0).
\end{aligned}
$$

[14]

4.5 Ympäristön vaihtelu

Ympäristön vaihtelua voidaan usean tyypin haarautumisprosessin tapauksessa käsitellä hyvin samalla tavalla kuin yhden tyypin Galton- Watson- prosessissa. Usean tyypin tapauksessa odotusarvomatriisi $\boldsymbol{M}$ voi vaihtua eri sukupolvien välillä satunnaisesti jonkin todennäköisyysjakauman mukaan. Olkoon nyt $\boldsymbol{M_1}$ odotusarvomatriisi hyvänä vuonna ja $\boldsymbol{M_2}$ huonona vuonna. Silloin

$$E(\boldsymbol{X}(2n)) = (\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1)^n E(\boldsymbol{X}(0)).$$

Jos λ_r on matriisin $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$ suurin ominaisarvo, niin silloin populaation kasvunopeuden odotusarvo on $\sqrt{\lambda_r}$. Yleensä $\lambda_r \neq \lambda_1\lambda_2$, jossa λ_1 ja λ_2 ovat matriisien $\boldsymbol{M}_1$ ja $\boldsymbol{M}_2$ suurimmat ominaisarvot

Oletetaan nyt, että ympäristön vaihtelu on satunnaista niin, että odotusarvomatriisit $\{\boldsymbol{M}_i\}, i = 1, 2, ...$ muodostavat joukon riippumattomia, samoin jakautuneita ja säännöllisiä matriiseja. Olkoon matriisin $E(\boldsymbol{M}_k)$ suurin ominaisarvo λ. Silloin on olemassa stokastinen kasvunopeus, eli populaation odotettu kasvunopeus $\lambda_r \neq \lambda$. Populaation koon odotusarvo

$$E(\boldsymbol{X}(n)) = \sum_{i=1}^{k} E(X_i(n)) = \|E(\boldsymbol{X}(n))\|_1 = \|\boldsymbol{M}_{n-1} \cdots \boldsymbol{M}_0 E(\boldsymbol{X}(0))\|_1$$

kasvaa tämän stokastisen kasvunopeuden mukaisesti,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(E(\boldsymbol{X}(n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|\boldsymbol{M}_{n-1} \cdots \boldsymbol{M}_0 E(\boldsymbol{X}(0))\|_1 = \ln \lambda_r.$$

Yleensä stokastinen kasvunopeus $\lambda_r < \lambda$. Jos $\lambda_r < 1$, niin populaation koon odotusarvo konvergoi kohti nollaa, eli prosessi päättyy ennen pitkää sukupuuttoon.

4.6 Bi-seksuaalinen haarautumisprosessi

Biseksuaalisessa haarautumisprosessissa tarkasteltava populaatio koostuu kahdenlaisista yksilöistä, uroksista ja naaraista. Malli on kaksivaiheinen; pariutumisvaiheessa muodostetaan parit jonkin *pariutumisfunktion* mukaisesti. Tässä oletetaan, että pari koostuu aina yhdestä uroksesta ja yhdestä naaraasta, jotka ovat aina samasta sukupolvesta. Lisääntymisvaiheessa jokainen pari tuottaa muista pareista riippumatta jälkeläisiä saman lisääntymisjakauman mukaisesti. Jälkeläiset voivat olla sekä uroksia, että naaraita.

Merkitään naaraiden (female) ja urosten (male) lukumäärää sukupolven n kohdalla (F_n, M_n). Hetkellä n naaraat ja urokset muodostavat pareja lisääntymisfunktion L mukaisen määrän Z_n. Merkitään lisäksi sukupolven n parin i naaras- ja urospuolisten jälkeläisten lukumäärää $(f_{n,i}, m_{n,i})$. Jos nyt $Z_n = N \geq 1$, niin

$$(F_{n+1}, M_{n+1}) = \sum_{i=1}^{Z_n} (f_{n,i}, m_{n,i}), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Jono $\{Z_n\}, n = 0, 1, 2, ...$ on Markovin ketju, jonka tila-avaruus on $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, ...\}$ ja jolla on stationaariset yhden askeleen siirtymätodennäköisyydet

$$P(Z_{n+1} = k \mid Z_n = j) = P\left(L\left(\sum_{i=1}^{j} (f_{n,i}, m_{n,i})\right) = k\right).$$

Biseksuaalisen haarautumisprosessin sanotaan olevan *superadditiivinen*, jos kaikilla $n > 0$ pariutumisfunktiolle L pätee

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i, y_i)\right) \geq \sum_{i=1}^{n} L(x_i, y_i) \quad \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad n \geq 2.$$

Käytännössä superadditiivisuus tarkoittaa, että samassa populaatiossa elävät naaraat ja urokset muodostavat vähintään yhtä monta paria, kuin jos sama määrä yksilöitä eläisi kahdessa tai useammassa populaatiossa.

Määritellään nyt biseksuaaliselle haarautumisprosessille asymptoottinen kasvunopeus

$$R = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} E(Z_{n+1} \mid Z_n = k)$$

Merkitään nyt q_j= sukupuuton todennäköisyys, kun $Z_0 = j$. Silloin

$$q_j = 1 \quad \text{kaikilla } j \text{ jos ja vain jos } R \leq 1.$$

Biseksuaalinen prosessi voidaan jakaa kolmeen tapaukseen kasvunopeuden perusteella seuraavasti:

- Kun $R < 1$, prosessi on alikriittinen.
- Kun $R = 1$, prosessi on kriittinen.
- Kun $R > 1$ prosessi on ylikriittinen.

[18] [19]

Kirjallisuus

[1] H. Ruskeepää: *Stokastiset prosessit*. Luentomoniste, Turun Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2013

[2] S. Karlin, H. M. Taylor: *A first course in stochastic processes*. Academic Press Inc, Second edition, 1975

[3] R. N. Bhattacharya, E. C. Waymire: *Stochastic processes with applications*. Wiley, 1990

[4] L. Leskelä: *Stokastiset prosessit*. Luentomoniste, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu, 2015

[5] K. Sigman: *Continuous-Time Markov Chains*. Luentomuistiinpanot, Columbia University, Department of Industrial Engineering and Opeartions Research, 2009

[6] Y. Huang: *Introduction to Probability Models*. STAT 253/317 Luentokalvot, University of Chicago, Department of Statistics, 2014

[7] J. Virtamo: *Jonoteoria/Markov-prosessit*. Tietoverkkolaboratorion kurssin S-38.143 Jonoteoria luentokalvot, Teknillinen korkeakoulu, 2001

[8] E. Liski: *Matemaattinen Tilastotiede*. Tampereen Yliopisto, Matematiikan, Tilastotieteen ja Filosofian laitos, 2004

[9] R. P. Dobrow: *Introduction to Stochastic Processes with R*. John Wiley & Sons Inc, First Edition, 2016

[10] J. Gravner: *Lecture Notes for Introductory Probability*. University of California, Mathematics Department, 2017

[11] T: E. Harris: *The Theory of Branching Processes*. Springer-Verlag, 1963

[12] P. Haccou, P. Jagers, V. A. Vatutin: *Branching Processes: Variation, Growth, and Extinction of Populations*. Cambridge University Press, 2005.

[13] T. Csernica: *Extinction in Single and Multi-type Branching Processes*, 2015

[14] L. Allen: *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology*. Taylor & Francis Group, 2010

[15] R. Fewster: *Stochastic Processes*. Course notes stats 325, University of Auckland, Department of statictics, 2014

[16] P. Brémaud: *Discrete Probability Models and Methods: Probability on Graphs and Trees, Markov Chains and Random Fields, Entropy and Coding*. Springer, 2017

[17] J. G. Liao, A. Berg: *Sharpening Jensen's Inequality*. Penn State University College of Medicine, Division of Biostatistics and Bioinformatics, 2017

[18] M. Molina: *Seventh Workshop Dynamical Systems Applied to Biology and Natural Sciences, Two-sex Branching Populations*. University of Extremadura, Department of Mathematics, 2016

[19] M. González, M. Molina: *Some Theoretical Results on the Progeny of a Bisexual Galton-Watson Branching Process*. Serdica Mathematical Journal, J. 23, 15-24, 1997