TURUN YLIOPISTO

KOLMIOIDEN GEOMETRIAA

Vjendite Ramadani

Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2020

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

RAMADANI, VJENDITE: Kolmioiden geometria
Pro gradu -tutkielma, 31 s.
Matematiikka
Toukokuu 2020

Tutkielmassa keskitytään kolmioiden geometriaan. Tutkielma on kirjoitettu aiheesta kiinnostuneneille, joilla on kuitenkin hyvät pohjatiedot geometrian perusteista. Tämän esityksen lähestymistapa on *intuitiivinen* eli *koulugeometrinen.* Teoriaa ei siis lähdetä rakentamaan aksioomien pohjalta, vaan joitakin käsitteitä ja niitä koskevia tuloksia oletetaan tunnetuiksi, kuten esimerkiksi pisteet, suorat, pituus, suunta, verrannollisuus sekä kolmioiden ominaisuudet.

Peruskäsitteiden ja tulosten jälkeen käsitellään Menelauksen lausetta, jolle esitetään kaksi todistusta. Tämän jälkeen esitetään Cevan lause, jonka todistamiseen on käytetty Menelauksen lausetta sekä toisena tapana yhdenmuotoisia kolmioita. Tämän lisäksi käsitellään van Aubelin lausetta, joka täydentää Cevan lausetta.

Tämän jälkeen esitellään kolmion merkilliset pisteet ja niihin liittyviä tuloksia. Sitä seuraavassa luvussa annetaan sitten merkillisiä pisteitä koskevat lauseet ja niiden tarkat todistukset. Lisäksi käydään aiheeseen liittyviä esimerkkejä läpi.

Jokaiseen tulokseen on lisätty linkki, josta pääsee tutkimaan ja havainnollistamaan tuloksia interaktiivisten kuvien avulla. Kyseiset interaktiiviset kuvat on tehty GeoGebralla.

Asiasanat: Yhtenevyys, yhdenmuotoisuus, Menelaus, Ceva, kolmion merkilliset pisteet.

Sisältö

1 Johdanto

Geometria (kreikaksi $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$; *geo* = 'maa' ja *metrein*= 'mitata') on matematiikan ala, joka tutkii kuvioita ja kappaleita ja niiden ominaisuuksia. Geometria on vanhin matematiikan ala, jota on pyritty esittämään aksiomaattisesti. *Aksiomaattinen geometria* koostuu määrittelemättömistä peruskäsitteistä (piste, suora, jne.), sekä perusoletuksista (aksioomat eli postulaatit).

Ensimmäinen, joka lähestyi geometriaa aksiomaattisesti, oli Eukleides Aleksandrialainen (325-265 eaa.). Hänen kirjoittama kirja *Stoikheia* (Alkeet), joka julkaistiin noin 300 eaa., oli ensimmäisiä teoksia, jossa geometriaa on pyritty todistamaan loogisella päättelyllä tietyistä perusolettamuksista lähtien, eikä kuvien ja oletuksien avulla. Myöhemmin on kuitenkin osoittatunut, että Eukleideen postulaatit eivät olleet täysin ristiriidattomia eivätkä tulokset täysin päteviä. Näitä on kuitenkin myöhemmin kehitetty ja korjattu.

Tämä tutkielma perustuu pitkälti Tero Harjun luentomonisteeseen *Geometria* [2] sekä Matti Lehtisen luentomonisteeseen *Geometrian perusteita* [4]. Tutkielma on suunnattu aiheesta kiinnostuneille, jotka haluavat perehtyä kolmioiden geometriaan.

Tutkielmassa on kuvioiden piirtämiseen käytetty ilmaista selainohjelmaa GeoGebraa [1]. Tämän lisäksi on jokaiseen todistukseen liitetty sitä vastaava "interaktiivinen kuva", joka löytyy linkistä (kuvatekstissä). Linkin takaa löytyy siis kuva, jossa voi liikuttaa kuvioiden pisteitä ja suoria. Pisteitä ja suoria liikuttamalla, voidaan huomata, että lauseet tosiaan pitävät paikkansa, oli kolmio millainen tahansa. Seuraavasta linkistä löytyvät kuitenkin kaikki sähköiset materiaalit: https://www.geogebra.org/u/vjendite.

2 Peruskäsitteitä

Tässä osiossa kerrataan Euklidisen geometrian peruskäsitteitä sekä niiden välisiä yhteyksiä. Euklidinen geometria on geometrian osa-alue, joka tutkii tasoa ja kolmiulotteista avaruutta. Esitellään seuraavaksi määritelmiä ja tuloksia, joita tullaan tarvitsemaan jatkossa. Pääsääntöisesti tuloksien todistuksia ei ole esitetty, muttta kiinnostunut lukija voi tarkastella niitä lähemmin lähteissä [2] ja [4].

2.1 Pisteet ja suorat

Pisteitä, jotka sijaitsevat Euklidisella tasolla $\mathbb{E}$ merkitään tässä tutkielmassa isoilla kirjaimilla A, B, C ... Merkitään suorat pienillä kirjaimilla kuten esimerkiksi ℓ, a, b... Jos piste P on suoralla ℓ, merkitään se $P \in \ell$. Jos $P \notin \ell$, on tällöin piste P suoran ℓ ulkopuolella.

Pisteet ovat *kollineaariset*, jos pisteet $P_1, P_2, ..., P_n, n \geq 2$, ovat samalla suoralla a. Tällöin merkitään $a = \ell(P_1, P_2, ..., P_n)$.

Jos suorilla on yhteinen piste, sanotaan että suorat *leikkaavat*. Vastaavasti, jos esimerkiksi suorilla a ja b ei ole yhteisiä pisteitä, ovat suorat *yhdensuuntaisia*. Käytetään suorien yhdensuuntaisuudesta merkintää $a \| b$. Tällöin joko $a = b$ tai $a \cap b = \emptyset$. Toisin sanoen suorat a ja b ovat joko indenttiset tai ne eivät leikkaa koskaan. Vastaavasti, jos suorat a ja b eivät ole yhdensuuntaisia, merkitään $a \nparallel b$. Tämän lisäksi tietystä pisteestä alkavaa, vain toiseen suuntaan rajattomasti jatkuvaa, suoraa viivaa kutsutaan *puolisuoraksi*.

Määritelmä 2.1. Jokaista kahta eri pistettä P ja Q kohden on olemassa tarkalleen yksi sellainen suora $\ell(P, Q)$, että $P \in \ell$ ja $Q \in \ell$. Suorasta $\ell(P, Q)$ käytetään jatkossa merkintää PQ.

Määritelmä 2.2. Jokaisella suoralla ℓ on ainakin kaksi pistettä. Lisäksi tasossa on ainakin kolme pistettä, jotka eivät ole saman suoran pisteitä.

Janalla on alku- ja loppupiste, jotka ovat suoralla. Janaan kuuluvat kaikki päätepisteiden välissä olevat pisteet sekä itse päätepisteet. Janaa merkitään sen päätepisteiden avulla, kuten esimerkiksi jana AB. Vaikka suoraa ja janaa merkitään samalla tavalla, myöhemmin näistä puhuttaessa kerrotaan, kummasta on kyse.

2.1.1 Paralleelipostulaatti

Euklidisessa geometriassa on eräs keskeinen oletus. Tätä oletusta sanotaan *paraleellipostulaatiksi*. Paralleelipostulaatin esittämiseksi annetaan ensin neljä Eukleideen geometrian *postulaattia*. Postulaatilla tarkoitetaan todeksi uskottua oletusta, jonka pohjalta teoriaa voidaan lähteä rakentamaan.

Postulaatti 2.3. Kaksi pistettä voidaan yhdistää yhdellä janalla.

Postulaatti 2.4. Jokainen jana voidaan jatkaa suoraksi.

Postulaatti 2.5. Jos kaksi pistettä on annettu, voidaan piirtää ympyrä, jonka keskipiste on toinen pisteistä ja kehäpiste on toinen pisteistä.

Postulaatti 2.6. Kaikki suorakulmat ovat yhtäsuuria.

Esitellään seuraavaksi paraleellipostulaatti.

Postulaatti 2.7. Olkoon piste P suoran ℓ ulkopuolella. Tällöin pisteen P kautta kulkee täsmälleen yksi suora, joka on suoran ℓ suuntainen suora. Jos P on suoralla ℓ, eli $P \in \ell$, niin kysytty suora on suora ℓ itse.

Seuraavat ehdot ovat paralleelipostulaatin kanssa yhtäpitäviä [3]. Ehtoja ei todisteta, mutta niiden todistukset löytyvät Lehtisen luentomonisteestaa [4].

Ehto 2.8. Olkoon suorat a ja b yhdensuuntaisia suoria. Jos suora ℓ leikkaa suoraa a, leikkaa se myös suoraa b.

Ehto 2.9. Olkoon suorat a ja b yhdensuuntaisia suoria. Jos suora ℓ leikkaa suoraa a kohtisuoraan, leikkaa se myös suoraa b kohtisuoraan.

2.2 Pituus ja suunta

Koska suora on molempiin suuntiin rajattomasti jatkuva suora viiva, on suoralla aina kaksi *suuntaa*. Suunta voidaan tilanteen mukaan valita, ja jos niin tehdään on suora *suunnattu*. Silloin kun valitaan suunnaksi esimerkiksi $A \to B$, eli mennään pisteestä A pisteeseen B, voidaan suora merkitä seuraavasti: $\overrightarrow{\ell}(A, B)$. Vastaavasti, jos suunnatun suoran $\overrightarrow{\ell}(A, B)$ jana AB on suunnattu, niin voidaan se merkitä seuraavasti: $\overline{AB}$.

Määritelmä 2.10. Jokaisella suunnatulla janalla on myös *pituus*, josta käytetään merkintää $|\overline{AB}|$. Janan pituus riippuu valitusta suunnasta seuraavasti:

$$|\overline{AB}| = -|\overline{BA}|.$$

Suunnatut janat $\overline{AB}$ ja $\overline{BA}$ ovat siis toistensa vastajanoja, joten näiden pituudet ovat toistensa vastalukuja. Suunnatun janan pituus voi siis olla negatiivinen.

Jatkossa kuitenkin, yksinkertaisuuden vuoksi, käytetään janalle AB ja sen pituudelle samaa merkintää.

Kerrataan seuraavaksi janojen pituuksien ominaisuuksia, silloin kun jana ei ole suunnattu. Silloin, kun ajatellaan, että janalla ei ole suuntaa, niin janan pituus tulkitaan aina positiiviseksi.

Lause 2.11. *Kaikille tason $\mathbb{E}$ pisteille A,B,C pätee seuraavat ehdot:*
(1) $AB \geqslant 0$
(2) $AB = 0 \Rightarrow A = B$
(3) $AB = BA$
(4) $AB \leqslant AC + CB$
(5) $AB = AC + CB \Leftrightarrow C \in AB.$

2.3 Verrannollisuus

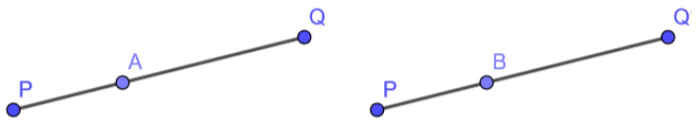
Verrannollisuudella tarkoitetaan tässä janojen välistä *riippuvuutta*, jota ilmaistaan yhtälöllä.

Seuraavan esimerkin tulos on hyvin luonnollinen ja intuition mukainen.

Esimerkki 2.12. Jos pisteet A ja B jakavat suunnatun janan PQ samassa suhteessa, eli

$$\frac{PA}{AQ} = \frac{PB}{BQ},$$

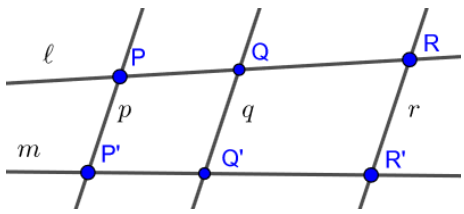
niin $A = B$ (kuva 1).



Kuva 1: Pisteet A ja B, jotka jakavat suunnatun janan PQ

Lause 2.13. *Olkoot suorat p, q ja r yhdensuuntaisia, $p \parallel q \parallel r$. Leikatkoon suora ℓ suorat p, q ja r pisteissä P, Q ja R ja suora m samat suorat pisteissä P', Q' ja R' kuvan 2 mukaisesti. Tällöin*

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{P'Q'}{Q'R'}.$$

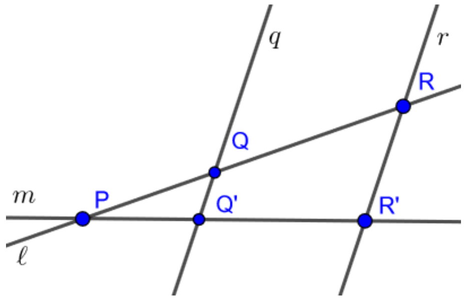


Kuva 2: Suorien verrannollisuus
https://www.geogebra.org/m/ftpn3pyz

Käydään seuraavaksi esimerkki läpi, jossa kuvan 1 suorat ℓ ja m leikkaavat pisteessä P, jolloin $P = P'$.

Esimerkki 2.14. Olkoon suorat $q = \ell(Q, Q')$ ja $r = \ell(R, R')$ yhdensuuntaiset, eli $q \parallel r$. Leikatkoon suorat ℓ ja m pisteessä P, jonka suora (suora p) on yhdensuuntainen suorien q ja r kanssa. Jätetään suora p kuitenkin merkkaamatta, koska $P = P'$, kuten kuvassa 3 nähdään. Tällöin lauseen 2.13 mukaan

$$\frac{PR}{PQ} = \frac{PQ + QR}{PQ} = 1 + \frac{QR}{PQ} = 1 + \frac{Q'R'}{PQ'} = \frac{PQ' + Q'R'}{PQ'} = \frac{PR'}{PQ'}.$$



Kuva 3: Suorien verrannollisuus

2.4 Kulmat

Kulma on kahden samasta pisteeestä (*kärki*) alkavan puolisuoran (*kyljet*) rajoittama tason osa. Kylkien välistä aluetta kutsutaan *aukeamaksi.* Puolisuorat jakavat tason kahteen osaan, joiden erottamiseksi kulmia merkitään eri tavalla. Kulman merkintä aloitetaan ilmoittamalla järjestyksessä ensin se piste, joka on oikealla kyljellä, kärkipiste ja lopuksi piste, joka on vasemmalla kyljellä. Kuvassa 4 huomataan merkinnän vaikutus. Kulmaa ABC merkitään $\angle ABC$.

(a) $\angle CBA$

(b) $\angle ABC$

Kuva 4: Kulmien merkinnän vaikutus

Jatkossa voidaan kulma $\angle ABC$ lyhentää muotoon $\angle B$ tai sitä voidaan merkitä myös pienellä kreikkalaisella kirjaimella, α (alfa), β (beeta), γ (gamma) ja δ (delta), mikäli nämä ovat asiayhteydessä selviä.

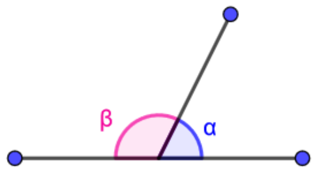
Kulman *suuruutta* mitataan monella eri tavalla, mutta tässä tutkielmassa suuruus ilmoitetaan asteina. Tämän lisäksi käytetään jatkossa kulmalle ja kulman suuruudelle sama merkintätapa.

Määritelmä 2.15. Kun kaksi kulmaa ovat vierekkäin siten, että niiden kärjet ja erinimiset kyljet (eli vasen ja oikea kylki) yhtyvät ja toiset erinimiset kyljet ovat samalla suoralla, ovat kulmat toistensa *vieruskulmia*. Tämän lisäksi on vieruskulmien summa $180°$.

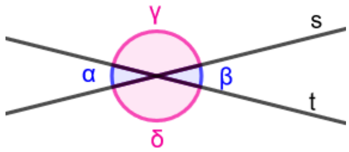
Kuvassa 5 on kulmien α ja β summa $180°$.

Määritelmä 2.16. Kun kaksi erisuuntaista suoraa leikkaavat, muodostuu neljä kulmaa. Näistä vastakkaiset ovat *ristikulmia*. Ristikulmat ovat aina yhtä suuret.

Kuvassa 6 ovat kulmat α ja β sekä γ ja δ ristikulmia.

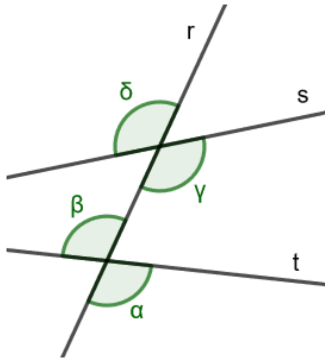


Kuva 5: Vieruskulmat



Kuva 6: Ristikulmat

Kun suora r leikkaa suorat s ja t, muodostuu molempien leikkaupisteiden ympärille neljän kulman joukko, kuten kuvassa 7 nähdään.

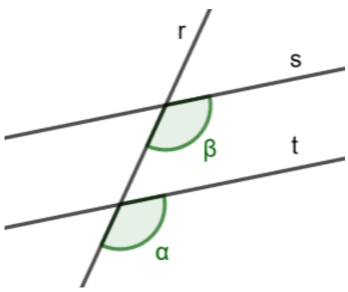


Kuva 7: Samankohtaiset kulmat, missä $s \nparallel t$

.

Kulmilla α, β, γ ja δ on suora r oikeana kylkenä. Tällaisia kulmia, joilla on sama suora samannimisenä kylkenä, kutsutaan siis *samankohtaisiksi* kulmiksi.

Lause 2.17. *Olkoot r, s ja t sellaisia suoria, että suora r leikkaa suorat s ja t, kuten kuvassa 7 ja 8. Muodostuvat samankohtaiset kulmat ovat yhtäsuuret, jos ja vain jos suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset.*



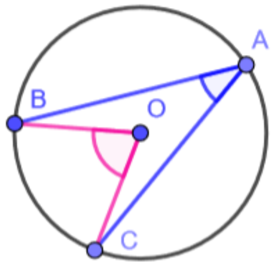
Kuva 8: Samankohtaiset kulmat, missä $s \parallel t$ ja $\alpha = \beta$

.

Määritelmä 2.18. Suorat s ja t ovat *kohtisuoria*, jos niiden leikkaukseen muodostuvat neljä kulmaa ovat kaikki yhtäsuuria eli $90°$. Kohtisuorat suorat merkitään $s \perp t$. Lisäksi jos $s \perp t$ ja $P \in t$, on t *normaali* pisteestä P suoralle s.

Siirrytään seuraavaksi ympyrän kehäkulmiin ja keskuskulmiin.

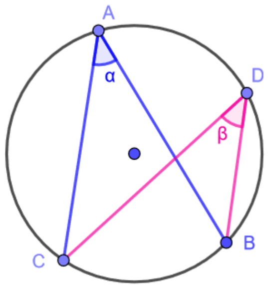
Olkoon γ ympyrä, jonka keskipiste on O ja säde r. Tällöin merkitään $\gamma = \gamma(O, r)$. Olkoon tämän lisäksi pisteet A, B ja C sen kehällä. Tällöin kulma $\angle BAC$ on *kehäkulma*. Vastaavasti kulma $\angle BOC$, on sitä vastaava *keskuskulma* (kuva 9).



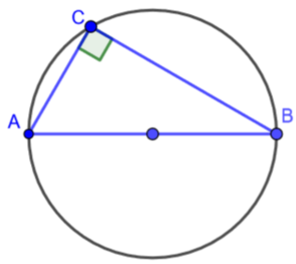
Kuva 9: Kehäkulma $\angle BAC$ on puolet vastaavasta keskuskulmasta $\angle BOC$
https://www.geogebra.org/m/aaqv2vpj
.

Lause 2.19. *Ympyrän kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta (kuva 9).*

Lause 2.20. *Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtäsuuret. Kuvassa 10 ovat kulmat α ja β yhtäsuuret.*



Kuva 10: Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat $\angle CAB$ ja $\angle CDB$
https://www.geogebra.org/m/gjmeh6tv



Kuva 11: Thaleen lause
https://www.geogebra.org/m/uyt9mcj9

Lause 2.21. ***(Thaleen lause)*** *Olkoon AB ympyrän γ halkaisija ja C jokin muu ympyrän γ piste kuin A ja B, kuten kuvassa 11. Silloin $\angle ACB$ on suora kulma.*

Esitellään seuraavaksi Thaleen lauseen käänteinen tulos.

Lause 2.22. *Olkoon kulma $\angle ACB$ suora. Tällöin piste C on ympyrällä γ, jonka halkaisija on AB.*

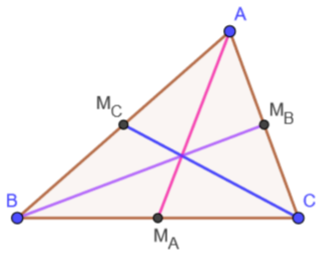
2.5 Kolmioiden ominaisuudet

Esitellään seuraavaksi joitakin kolmioihin liittyviä määritelmiä ja tuloksia.

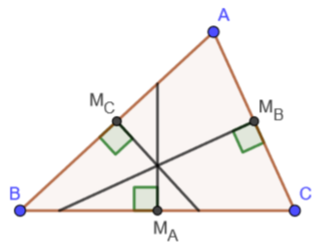
Määritelmä 2.23. Kolmiossa $\triangle ABC$ kulman $\angle BAC$ *vastainen sivu* on se sivu, joka ei ole kyseisen kulman kyljillä. Toisin sanoen sivu BC on kulman $\angle BAC$ vastainen sivu.

Määritelmä 2.24. Olkoon kolmion $\triangle ABC$ sivujen AB, BC ja CA keskipisteet M_C, M_A ja M_B, kuten kuvassa 12. Tällöin janat AM_C, BM_B ja CM_C ovat kolmion *keskijanat* eli *mediaanit*. Toisin sanoen mediaani kulkee kärjestä vastaisen sivun keskipisteeseen.

Määritelmä 2.25. Kolmion $\triangle ABC$ *keskinormaalit*, ovat kolmion sivujen keskipisteiden M_A, M_B ja M_C kautta kulkevat normaalit (kuva 13).



Kuva 12: Mediaanit



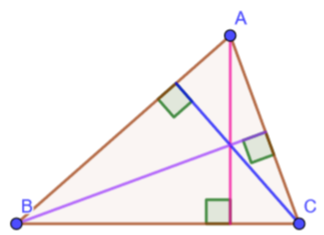
Kuva 13: Keskinormaalit

Määritelmä 2.26. Kolmion $\triangle ABC$ *korkeusjanat* ovat kolmion kärjistä A, B ja C vastaisille sivuille BC, CA ja AB tai niiden jatkeille piirretyt kohtisuorat suorat eli normaalit. (Kuva 14)

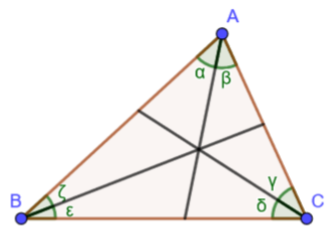
Määritelmä 2.27. Kulman puolittaja on puolisuora, joka jakaa kulman kahdeksi yhtäsuureksi osaksi. Kuvassa 15 kulmat $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$ ja $\varepsilon = \zeta$.

Lause 2.28. *Leikatkoon kulman $\angle BAC$ puolittaja sivua BC pisteessä L. Tällöin kolmion kulmanpuolittaja $\ell(A, L)$ jakaa vastakkaisen sivun viereisten sivujen suhteessa:*

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BA}{CA}.$$



Kuva 14: Korkeusjanat



Kuva 15: Kulmanpuolittajat

2.5.1 Yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus

Jos kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ vastinsivut ovat yhtäpitkiä sekä vastinkulmat yhtäsuuria, ovat kolmiot *yhteneviä*, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Toisin sanoen kolmioita, jotka voidaan asettaa päällekkäin niin, että yhtyvät täysin, sanotaan yhteneviksi.

Esitellään seuraavaksi yhtenevyyden toteavia sääntöjä. Käytetään seuraavaksi lyhenteitä, jossa S tarkoittaa sivua ja K tarkoittaa kulmaa.

Lause 2.29. ***(SKS)*** *Jos kolmion $\triangle ABC$ kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtäsuuret kuin vastinosat kolmiossa $\triangle DEF$, ovat kolmiot yhtenevät.*

Lause 2.30. ***(SSS)*** *Jos kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kaikki toisiaan vastaavat sivut ovat yhtäsuuret, ovat kolmiot yhtenevät.*

Lause 2.31. ***(KSK)*** *Jos kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu ovat yhtä suuret, ovat kolmiot yhtenevät.*

Lause 2.32. ***(SKK)*** *Jos kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat kaksi kulmaa ja toisen kulman vastainen sivu yhtä suuret, ovat kolmiot yhtenevät.*

Jos kolmioilla $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kaikki vastinkulmat ovat yhtäsuuret ja vastinsivujen suhteet ovat yhtäsuuria, eli

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF},$$

ovat kolmiot *yhdenmuotoisia*. Yhdenmuotoisia kolmioita merkitään $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Kolmioiden yhdenmuotoisuus voidaan todeta myös vain kahden kulmaparin avulla, sillä jos kolmioilla on kaksi yhtä suurta kulmaa, ovat kolmannet kulmat myös yhtäsuuret, tämä johtuu siitä, että kolmas kulma voidaan laskea kahden muun kulman avulla.

Lause 2.33. *Kolmioille $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat seuraavat ehdot ekvivalentit.*
(1) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
(2) Kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kaksi vastinkulmaa ovat yhtäsuuret (KK).
(3) Kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ vastinsivujen pituuksien suhde on vakio (SSS$\sim$).

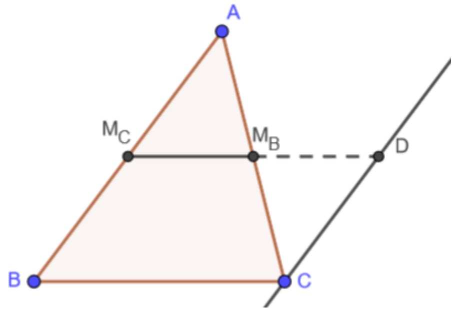
Esitellään seuraavaksi kolmioiden muut yhdenmuotoisuuslauseet. Seuraavassa, kuten aikaisemmin, tarkoittaa S sivua ja K kulmaa.

Lause 2.34. ***(SKS$\sim$)*** *Kolmiot $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, jos kolmioissa on kahdet vastinsivut, joiden pituuksien suhde on vakio, ja lisäksi näiden sivujen väliset kulmat ovat yhtäsuuret.*

Lause 2.35. ***(SSK$\sim$)*** *Kolmiot $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, jos kolmioissa on kahdet vastinsivut, joiden pituuksien suhde on vakio, ja jos sivujen vastaisista kulmista toiset ovat yhtäsuuret.*

Esimerkki 2.36. Olkoon kolmion $\triangle ABC$ sivujen AB ja CA keskipisteet pisteet M_C ja M_B. Osoita, että jana M_CM_B on yhdensuuntainen janan BC kanssa ja että jana M_CM_B on puolet janasta BC, eli $M_CM_B = \frac{1}{2}BC$.

Piirretään janan AB kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen C, kautta. Tämän lisäksi jatketaan janaa M_CM_B siten, että se leikkaa piirrettyä suoraa kuvan 16 mukaisesti pisteessä D.



Kuva 16: Kolmio $\triangle ABC$ ja sivun AB yhdensuuntainen suora.
https://www.geogebra.org/m/rkajrmpq

Koska M_B on sivun CA keskipiste on $AM_B = CM_B$. Tämän lisäksi $\angle AM_BM_C = \angle CM_BD$, koska kyseiset kulmat ovat toistensa ristikulmia. Koska $AB \| CD$, ovat kulmat $\angle M_CAM_B$ ja $\angle DCM_B$ samankohtaisia, jolloin $\angle M_CAM_B = \angle DCM_B$. Tästä johtuen ovat kolmiot $\triangle AM_CM_B \cong \triangle CDM_B$ (KSK-kriteeri). Tästä seuraa, että $M_CM_B = M_BD$ ja $AM_C = CD$. Lisäksi tiedetään, että $AM_C = BM_C$. Näin ollen $BM_C = CD$.

Huomataan vielä, että kolmiot $\triangle AM_CM_B \sim \triangle ABC$ (SKS-kriteeri). Jolloin samankohtaiset kulmat $\angle M_BM_CA$ ja $\angle CBA$ ovat yhtä suuret ja siten $BC \| M_CM_B$ ja $BC \| M_CD$.

Koska kolmiot AM_CM_B ja ABC ovat yhdenmuotoiset, niin niiden vastinsivujen suhteet ovat yhtäsuuret, joten $\dfrac{M_CM_B}{BC} = \dfrac{AM_C}{AB} = \dfrac{1}{2}$ ja $M_CM_B = \dfrac{1}{2}BC$.

3 Menelaus

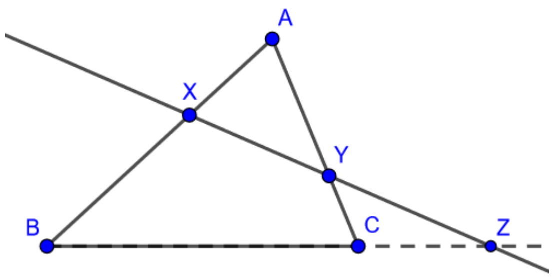
Menelaus, joka tunnetaan myös nimellä Menelaus Aleksandrialainen (Meneleaus of Alexandria), oli kreikkalainen matemaatikko ja tähtitieteilijä, joka eli noin vuosina 70-130. Menelaus tunnetaan parhaiten Menelauksen lauseesta. [6]

Oletetaan seuraavaksi, että suorat tulkitaan suunnatuiksi ja janojen pituudet varustetaan suunnan mukaisilla etumerkeillä.

Lause 3.1. *Olkoon kolmion $\triangle ABC$ janoilla AB, BC ja AC, tai niiden jatkeilla, pisteet X, Y ja Z, jotka eivät kuitenkaan ole janojen päätepisteet (ks. kuva 17). Tällöin pisteet X, Y ja Z ovat kollineaariset jos ja vain jos*

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1. \tag{1}$$

Tässä tapauksessa kolmio $\triangle ABC$ kierretään seuraavasti: $A \to X \to B \to Z \to C \to Y \to A$.



Kuva 17: Menelauksen lause
https://www.geogebra.org/m/j6nk3xjr

Todistus. Aloitetaan näyttämällä lauseen tulos suuntaan $\Rightarrow$. Annetaan ensin tähän suuntaan ensimmäinen todistus vaihtoehto.

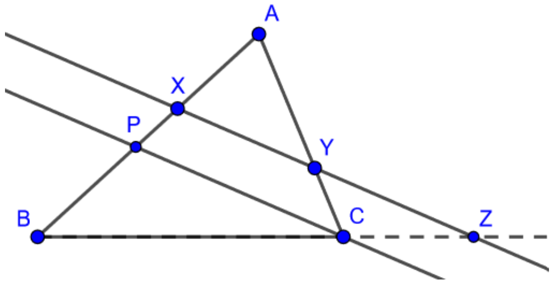
Oletetaan, että pisteet X, Y ja Z ovat kollineaariset, ja piirretään suora a, joka on yhdensuuntainen suoran $\ell(X, Y, Z)$ kanssa, eli $a \parallel \ell(X, Y, Z)$, ja $C \in a$. Olkoon tämän lisäksi $P = \ell(A, B) \cap a$, kuten kuvassa 18.

Lauseesta 2.13 seuraa, että

$$\frac{BZ}{ZC} = \frac{BX}{XP} \tag{2}$$

ja

$$\frac{CY}{YA} = \frac{PX}{XA}. \tag{3}$$

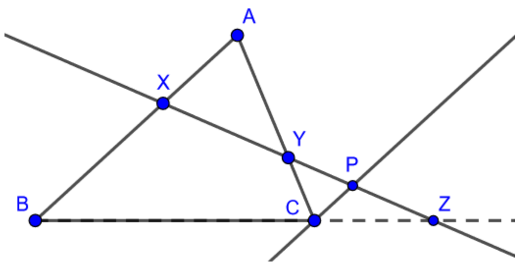


Kuva 18: Lauseen todistus

Kerrotaan yhtälöt (2) ja (3) puolittain ja kerrotaan tämän lisäksi molemmat puolet vakiolla $\frac{AX}{XB}$, jolloin saadaan

$$\frac{BZ}{ZC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AX}{XB}=\frac{BX}{XP}\cdot\frac{PX}{XA}\cdot\frac{AX}{XB}=-1.$$

Todistuksen suunta $\Rightarrow$ voidaan näyttää myös toisella tavalla. Oletetaan taas, että pisteet X, Y ja Z ovat kollineaariset, ja piirretään suora a, joka on yhdensuuntainen janan BA kanssa, eli $a \parallel \ell(B, A)$, ja $C \in a$. Olkoon tämän lisäksi $P = \ell(X, Y, Z) \cap a$, kuten kuvassa 19.



Kuva 19: Lauseen toinen todistus

Näin ollen kolmiot $\triangle CZP$ ja $\triangle BZX$ ovat yhdenmuotoisia (KK-kriteeri). Saadaan

$$\frac{CZ}{CP}=\frac{BZ}{BX}. \tag{4}$$

Myös kolmiot $\triangle CPY$ ja $\triangle AXY$ ovat yhdenmuotoisia (KK-kriteeri). Vastaavasti saadaan

$$\frac{CY}{CP}=\frac{AY}{AX}. \tag{5}$$

Eliminoimalla CP edellisistä verranoista, eli ratkaisemalla esimerkiksi CP verrannosta (4) ja sijoittamalla se verrantoon (5), saadaan

$$\frac{CY\cdot BZ}{BX\cdot CZ}=\frac{AY}{AX}\Rightarrow\frac{CY\cdot BZ\cdot AX}{BX\cdot CZ\cdot AY}=1.$$

Jos janat oletetaan suunnatuiksi, niin silloin nimittäjässä olevien janojen suunta voidaan vaihtaa ja määritelmän 2.10 mukaan vaihtuu silloin myös pituuksien merkit, eli

$$\frac{AX \cdot BZ \cdot CY}{XB \cdot ZC \cdot YA} = -1.$$

Siirrytään seuraavaksi suuntaan $\Leftarrow$.

Oletetaan, että Menelauksen kaava toteutuu pisteille X, Y ja Z. Asetetaan nyt suora b pisteiden X ja Y kautta, eli $b = \ell(X, Y)$. Suora b leikkaa suoran BC pisteessä Z', eli $Z' = b \cap \ell(B, C)$. Nyt pisteet X, Y ja Z' ovat kollineaariset, joten edellä todistetun perusteella

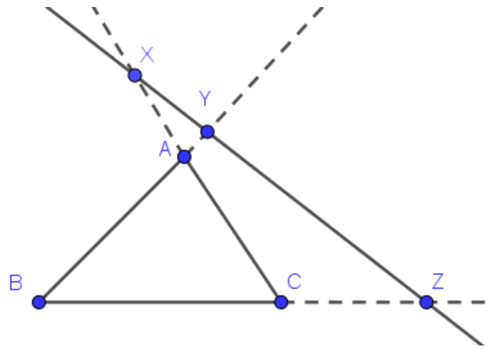
$$\frac{AX \cdot BZ' \cdot CY}{XB \cdot Z'C \cdot YA} = -1.$$

Tästä ja oletuksesta (yhtälö (1)) seuraa, että

$$\frac{BZ}{ZC} = \frac{BZ'}{Z'C}.$$

Näin ollen esimerkin 2.12 mukaan $Z = Z'$. Pisteet X, Y ja Z ovat suoralla b, joten väite on todistettu. $\square$

Menelauksen lauseesssa kaikki kolme kollineaarista pistettä X, Y ja Z voivat olla kolmion ulkopuolella, kuten kuvassa 20. Kuitenkin vähintään yksi kollineaarisista pisteistä on oltava kolmion ulkopuolella.



Kuva 20: Pisteet X, Y ja Z ovat kolmion ulkopuolella
https://www.geogebra.org/m/j6nk3xjr

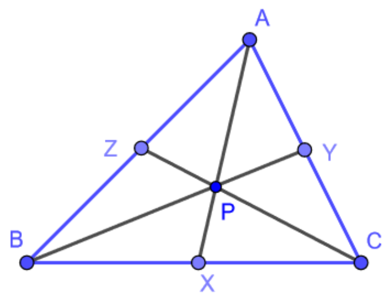
4 Ceva ja van Aubel

4.1 Ceva

Giovanni Ceva, joka syntyi vuonna 1647 ja kuoli 1734, oli italialainen matemaatikko, fyysikko ja hydrauliikkainsinööri. Ceva tunnetaan parhaiten Cevan lauseesta, joka kertoo kolmion kärkien kautta kulkevien suorien leikkaamisesta yhdessä pisteessä. Ceva onnistui Menelauksen lauseen avulla todistamaan seuraavan tuloksen. [8]

Lause 4.1. *Olkoot pisteet X, Y ja Z vastaavasti kolmion $\triangle ABC$ sivuilla BC, AC ja AB (tai niiden jatkeilla), kuten kuvassa 21. Tällöin suorat $\ell(A, X)$, $\ell(B, Y)$ ja $\ell(C, Z)$ leikkaavat yhteisessä pisteessä, jos ja vain jos*

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1. \tag{6}$$



Kuva 21: Cevan lause
https://www.geogebra.org/m/tebda3y6

Todistus. Todistetaan lauseen suunta $\Rightarrow$. Oletetaan lisäksi, että suorat tulkitaan suunnatuiksi.

Olkoon P suorien $\ell(A, X)$, $\ell(B, Y)$ ja $\ell(C, Z)$ yhteinen leikkauspiste. Soveltamalla Menelauksen lausetta kolmioon $\triangle BCZ$ ja suoraan $\ell(X, P, A)$ saadaan

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CP}{PZ} \cdot \frac{ZA}{AB} = -1.$$

Vastaavasti soveltamalla Menelauksen lausetta kolmioon $\triangle CAZ$ ja suoraan $\ell(Y, P, B)$ saadaan

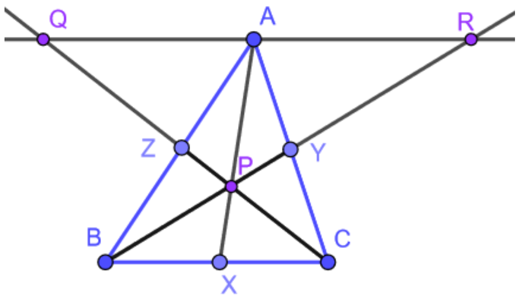
$$\frac{CY}{YA} \cdot \frac{AB}{BZ} \cdot \frac{ZP}{PC} = -1.$$

Nyt kun kerrotaan edelliset yhtälöt keskenään saadaan

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Lauseen suunta $\Rightarrow$ voidaan myös todistaa käyttämättä Menelauksen lausetta seuraavasti. Oletetaan seuraavaksi, että janojen pituuksilla ei ole merkkejä.

Piirretään pisteen A kautta janan BC suuntainen suora. Leikatkoon suora BY sen pisteessä R ja suora CZ sen pisteessä Q, kuten kuvassa 22.



Kuva 22: Cevan lauseen toinen todistus.

Nyt kolmiot $\triangle BCY$ ja $\triangle RAY$ ovat yhdenmuotoisia (KK-kriteeri), joten saadaan

$$\frac{CY}{YA} = \frac{BC}{AR}. \tag{7}$$

Myös kolmiot $\triangle BCZ$ ja $\triangle AQZ$ ovat yhdenmuotoisia (KK-kriteeri). Siis

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{AQ}{BC}. \tag{8}$$

Kolmiot $\triangle BXP$ ja $\triangle RAP$ ovat yhdenmuotoisia (KK-kriteeri), jolloin saadaan

$$\frac{BX}{AR} = \frac{PX}{PA}. \tag{9}$$

Edelleen kolmiot $\triangle XCP$ ja $\triangle AQP$ ovat yhdenmuotoisia (KK-kriteeri). Siis

$$\frac{XC}{AQ} = \frac{PX}{PA}. \tag{10}$$

Nyt yhtälöistä (9) ja (10) saadaan

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AR}{AQ}. \tag{11}$$

Nyt kun kerrotaan puolittain yhtälöt (7), (8) ja (11), saadaan

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{AR}{AQ} \cdot \frac{BC}{AR} \cdot \frac{AQ}{BC} = 1.$$

Todistetaan seuraavaksi suuntaa $\Leftarrow$. Oletetaan, että Cevan kaava (6) on voimassa, ja merkitään $P = \ell(A, X) \cap \ell(C, Z)$ ja $Y' = \ell(B, P) \cap \ell(C, A)$. Nyt Cevan lauseen mukaan

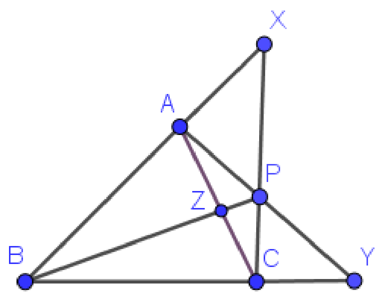
$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY'}{Y'A} = 1.$$

Oletuksen nojalla

$$\frac{CY'}{Y'A} = \frac{CY}{YA}.$$

Näin ollen esimerkistä 1 seuraa väite, eli $Y' = Y$. $\square$

Kuten Menelauksen lauseen tapauksessa, voivat pisteet X, Y, ja Z olla kolmion sivujen määräämillä suorilla, mutta kolmion ulkopuolella. Kuten kuvassa 23 nähdään. Voit havainnollistaa tilannetta myös interaktiivisella kuvalla, jonka linkki on annettu kuvan 21 yhteydessä.



Kuva 23: Pisteet X ja Y ovat kolmion ulkopuolella.

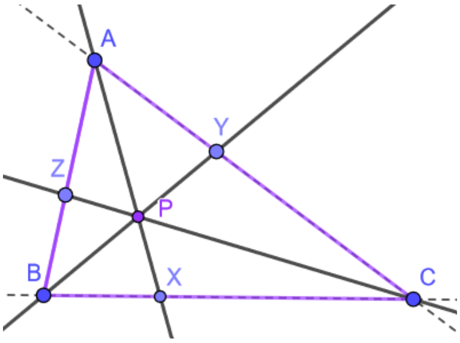
Siirrytään seuraavaksi Van Aubelin lauseeseen, joka täydentää Cevan lausetta.

4.2 Van Aubel

Matematiikko Henricus Hubertus Van Aubel, lyhyemmin Henri Van Aubel, syntyi Alankomaissa vuonna 1830 ja kuoli vuonna 1906. Van Aubel todisti ja täydensi Cevan lausetta vuonna 1878 seuraavasti. [10]

Lause 4.2. *Olkoon X, Y ja Z sellaiset kolmion $\triangle ABC$ sivuilla BC, CA ja AB (tai niiden jatkeilla), että $\ell(A, X), \ell(B, Y)$ ja $\ell(C, Z)$ leikkaavat pisteessä P, kuten kuvassa 24. Tällöin*

$$\frac{CP}{PZ} = \frac{CX}{XB} + \frac{CY}{YA}.$$



Kuva 24: Van Aubelin lause
https://www.geogebra.org/m/d57ax5ux

Todistus. Soveltamalla Menelauksen lausetta kahteen kertaan, kuten lauseen 4.1 todistuksessa, saadaan

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CP}{PZ} \cdot \frac{ZA}{AB} = -1$$

ja

$$\frac{CY}{YA} \cdot \frac{AB}{BZ} \cdot \frac{ZP}{PC} = -1.$$

Näistä yhtälöistä seuraa

$$\frac{CP}{PZ} \cdot \frac{ZA}{BA} = \frac{CX}{XB} \quad ja \quad \frac{CP}{PZ} \cdot \frac{BZ}{BA} = \frac{CY}{YA}$$

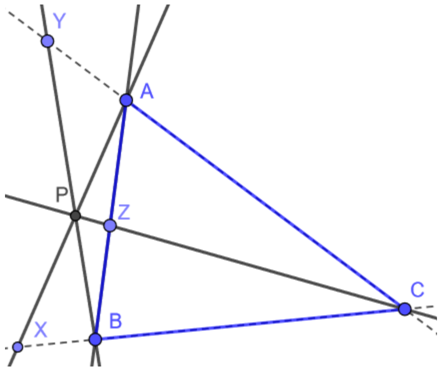
Laskemalla yhtälöt yhteen saadaan

$$\frac{CP}{PZ} \cdot \frac{(BZ + ZA)}{BA} = \frac{CX}{XB} + \frac{CY}{YA} \quad eli$$

$$\frac{CP}{PZ} = \frac{CX}{XB} + \frac{CY}{YA}.$$

□

Myös Van Aubelin lauseen tapauksessa, voivat pisteet X, Y ja Z olla kolmion ulkopuolella, kuten kuvassa 25 nähdään.



Kuva 25: Van Aubelin lause sekä pisteet X ja Y, jotka ovat kolmion ulkopuolella.

5 Kolmion merkilliset pisteet

Kolmioilla on monia yleisiä ominaisuuksia, joita hyödynnetään jatkuvasti geometriassa. Erityisen hyödyllisiä ovat niin sanotut *kolmion merkilliset pisteet*. Tässä osiossa käydään läpi neljä kolmion merkillistä pistettä.

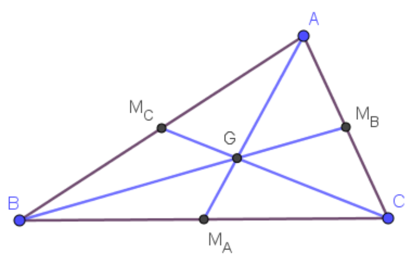
Kolmion merkillisellä pisteellä tarkoitetaan leikkauspistettä, jossa kolmioon liittyvät kolme samalla tavalla muodostettua suoraa tai janaa leikkaavat toisensa. Tällainen piste on esimerkiksi *painopiste*.

5.1 Merkillisten pisteiden esittely

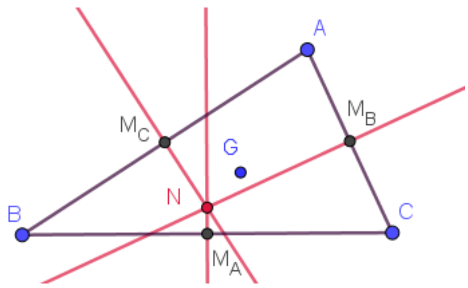
Esitellään ensin tässä luvussa kolmion merkilliset pisteet ja niihin liittyviä tuloksia. Lauseet ja niiden tarkat todistukset annetaan seuraavassa luvussa 5.2.

Piirretään aluksi kolmio $\triangle ABC$, ja niihin keskijanat eli mediaanit. Huomataan, että janat leikkaavat yhdessä pisteessä (kuva 26). Olkoon tämä piste G. Pistettä G kutsutaan kolmion *painopisteeksi*.

Piirretään samaan kolmioon nyt keskinormaalit. Keskinormaalit ovat normaalit sivujen keskipisteestä.



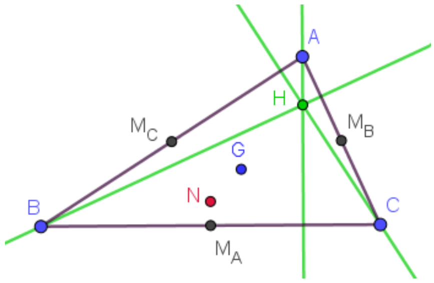
Kuva 26: Mediaanit
https://www.geogebra.org/m/cuxbq84u



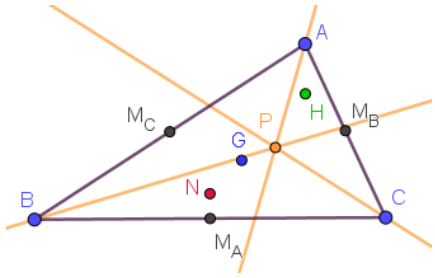
Kuva 27: Keskinormaalit
https://www.geogebra.org/m/gz75rxhr

Huomataan tässäkin (kuva 27), että keskinormaalit leikkaavat yhdessä pisteessä. Olkoon tämä piste N.

Piirretään nyt edelleen samaan kolmioon korkeusjanat (kuva 28). Merkitään korkeusjanojen leikkauspistettä kirjaimella H. Piirretään lopuksi kolmion kulmanpuolittajat (kuva 29). Merkitään niiden leikkauspistettä kirjaimella P.



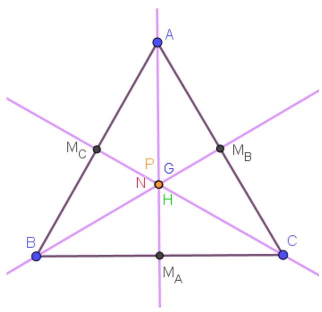
Kuva 28: Korkeusjanat
https://www.geogebra.org/m/epkcpzq4



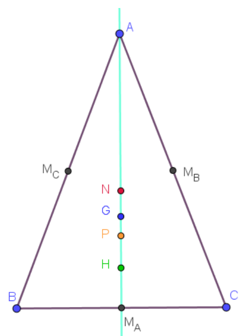
Kuva 29: Kulmanpuolittajat
https://www.geogebra.org/m/mn7jrhte

Edellä mainitut pisteet G, N, H ja P ovat *kolmion merkilliset pisteet*. Lisäksi suoraa, joka kulkee pisteiden H, G ja N kautta, eli $\ell(H, G, N)$, kutsutaan *Eulerin suoraksi*.

Muuttamalla kolmion muotoa huomataan, että kaikki neljä merkillistä pistettä yhtyvät silloin, kun kolmio on tasasivuinen (kuva 30a). Kun kolmio on tasakylkinen ovat pisteet samalla suoralla (kuva 30b). Tässä esityksessä näitä tuloksia ei todisteta kokonaisuudessaan, mutta kuvien perusteella näin todella näyttää käyvän. Lisäksi esimerkissä 5.4 on tarkasteltu tasasivuisen kolmion tapausta lähemmin.



(a) Tasasivuinen kolmio



(b) Tasakylkinen kolmio

Kuva 30: https://www.geogebra.org/m/nrjqxr7f

5.2 Lauseet ja todistukset

Tässä osiossa käydään yksitellen edellisen osion todistukset. Tämän lisäksi käydään muitakin lauseita ja todistuksia läpi liittyen samaan aiheeseen.

5.2.1 Keskijanat eli mediaanit

Lause 5.1. *Kolmion $\triangle ABC$ keskijanat, eli mediaanit, leikkaavat pisteessä G. Tämä painopiste toteuttaa seuraavan ehdon*

$$AG = 2 \cdot GM_A.$$

Huomataan, että painopiste toteuttaa myös seuraavat ehdot $BG = 2 \cdot GM_B$ ja $CG = 2 \cdot GM_C$. Toisin sanoen mediaanit jakavat toisensa suhteessa 2:1 kolmion kärjestä lukien.

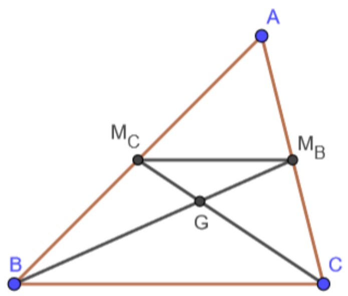
Todistus. Keskijanat leikkaavat Cevan lauseen mukaan yhdessä pisteessä, sillä

$$\frac{CM_B}{M_BA} \cdot \frac{AM_C}{M_CB} \cdot \frac{BM_A}{M_AC} = 1.$$

Edelleen Van Aubelin lauseen perusteella saadaan

$$\frac{BG}{GM_B} = \frac{BM_A}{M_AC} + \frac{BM_C}{M_CA} = 2$$

Toinen tapa todistaa suhde $BG/GM_B = 2$ ilman Van Aubelin lausetta on seuraava. Piirretään kolmiolle kaksi mediaania, BM_B ja CM_C. Olkoon näiden leikkauspiste G. kuten kuvassa 31.



Kuva 31: Mediaanit niiden laikkauspiste.

Piirretään pisteiden M_C ja M_B välinen jana, jolloin esimerkin 2.36 mukaan, janat M_CM_B ja BC ovat yhdensuuntaisia ja $M_BM_C = \frac{1}{2}BC$. Kulmat $\angle GM_CM_B$ ja $\angle GCB$ sekä $\angle GM_BM_C$ ja $\angle GBC$ ovat yhtäsuuret, koska kyseiset kulmat ovat toistensa ristikulmia (samankohtaisten kulmien myötä). Näin ollen ovat kolmiot $\triangle GCB$ ja $\triangle GM_CM_B$ yhdenmuotoisia (KK-kriteeri). Jolloin saadaan seuraava verranto

$$\frac{BC}{M_BM_C} = \frac{BG}{GM_B}.$$

Tiedetään, että $BC = 2 \cdot M_BM_C$, joten sijoitetaan se verrantoon, jolloin saadaan

$$\frac{2 \cdot M_BM_C}{M_BM_C} = \frac{BG}{GM_B}$$

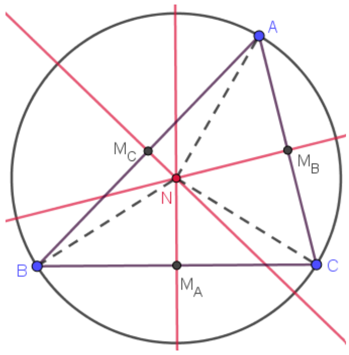
$$\Rightarrow \frac{BG}{GM_B} = \frac{2}{1},$$

ja väite todistui. Tämä pätee jokaiselle sivulle, joten myös yhtälöt $GM_B = \frac{1}{2}BG$ ja $GM_C = \frac{1}{2}GC$ ovat paikkansapitäviä. $\square$

5.2.2 Keskinormaalit

Lause 5.2. *Kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat yhdessä pisteessä* N*. Lisäksi piste* N *on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.*

Todistus. Olkoon sivujen BC ja CA keskinormaalien leikkauspiste N, kuten kuvassa 32.



Kuva 32: Kolmion ympäri piirretty ympyrä
https://www.geogebra.org/m/asgs5efv

Koska keskinormaali jakaa kolmion sivun BC kahtia, niin $BM_A = M_AC$ ja $\angle CM_AN = \angle NM_AB = 90°$, joten kolmiot $\triangle M_ANC$ ja $\triangle M_ANB$ ovat yhtenevät SKS-kriteerin mukaan. Tästä seuraa, että $NB = NC$.

Samalla periatteella ovat kolmiot $\triangle NCM_B$ ja $\triangle NAM_B$ yhtenevät, jolloin piste N on yhtä etäällä pisteistä C ja A, eli $NC = NA$. Yhdistämällä nämä saadaan $NA = NB$, joten N on myös sivun AB keskinormaalilla (SSS-kriteeri). Näin ollen väite seuraa, eli keskinormaalit leikkaavat yhdessä pisteessä.

Nyt koska piste N on yhtä etäällä jokaisesta kolmion kärjestä, eli pisteistä A, B ja C, on esimerkiksi jana NB ympyrän säde. Nyt kun piirretään ympyrä, jonka keskipiste on N ja säde on NB, saadaan ympyrä, jonka kehällä ovat pisteet A, B ja C. □

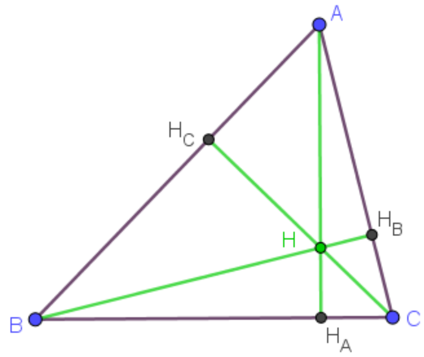
5.2.3 Korkeusjanat

Lause 5.3. *Korkeusjanat leikkaavat yhdessä pisteessä. Kyseistä pistettä* H *kutsutaan ortosentriksi.*

Todistus. Piirretään kolmio $\triangle ABC$ ja merkitään siihen sen korkeusjanat, jotka leikkaavat kolmion sivuja BC, AC ja AB (tai niiden jatkeilla) vastaavasti pisteissä H_A, H_B ja H_C sekä niiden leikkauspiste H, kuten kuvassa 33.

Kolmioiden yhdenmuotoisuuden (KK-kriteeri) mukaan saadaan

$$\triangle BCH_C \sim \triangle BAH_A, \quad \triangle CBH_B \sim \triangle CAH_A \quad ja \quad \triangle ACH_C \sim \triangle ABH_B.$$



Kuva 33: Kolmion $\triangle ABC$ korkeusjanat AH_A, BH_B ja CH_C

Näin ollen saadaan seuraavat verrannot.

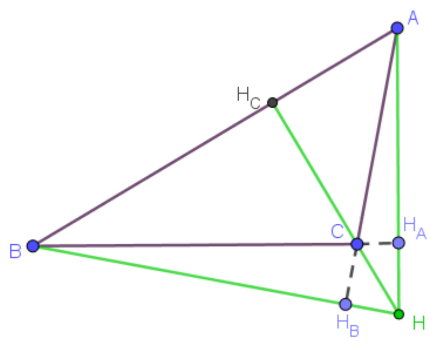
$$\frac{BH_A}{H_CB} = \frac{BA}{CB}, \quad \frac{CH_B}{H_AC} = \frac{CB}{AC}, \quad \frac{AH_C}{H_BA} = \frac{AC}{AB}.$$

Kertomalla verrannot keskenään saadaan,

$$\frac{BH_A}{H_CB} \cdot \frac{CH_B}{H_AC} \cdot \frac{AH_C}{H_BA} = \frac{BA}{CB} \cdot \frac{CB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1.$$

Cevan lauseen ehto on siis voimassa ja sen perusteella korkeusjanat AH_A, BH_B ja CH_C leikkaavat yhdessä pisteessä H. $\square$

Huomataan vielä että, jos kolmio onkin tylppäkulmainen, niin on sen ortosentri kolmion ulkopuolella, kuten kuvassa 34 nähdään.



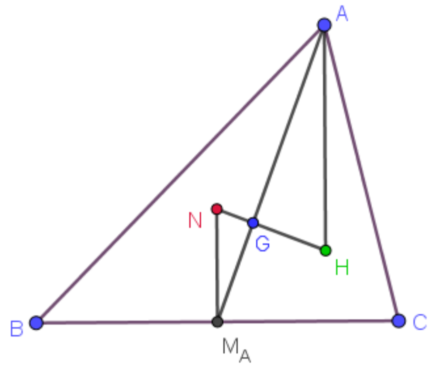
Kuva 34: Ortosentri ja ortokolmio
https://www.geogebra.org/m/f8cwmref

Tämän lisäksi muodostavat pisteet H_A, H_C ja H_C kolmion, jota nimetään *ortokolmioksi*.

Seuraavassa esimerkissä annetaan vaihtoehtoinen todistus korkeusjanojen leikkaamiselle samassa pisteessä.

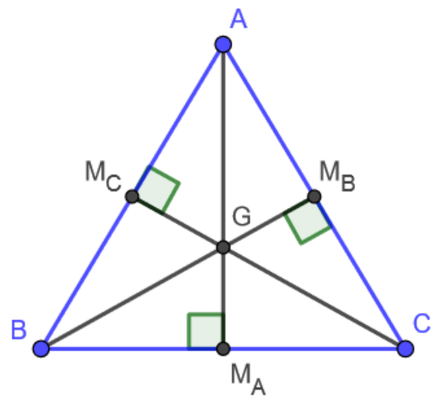
Esimerkki 5.4. Osoita että, kolmion $\triangle ABC$ korkeusjanat leikkaavat yhdessä pisteessä. Tämän lisäksi ortosentri H, painopiste G ja keskinormaalien laikkauspiste N ovat kollineaariset (ks. kuva 35) ja

$$HG = 2 \cdot GN.$$



Kuva 35: Kolmio $\triangle ABC$ ja pisteet H, G, N ja M_A.

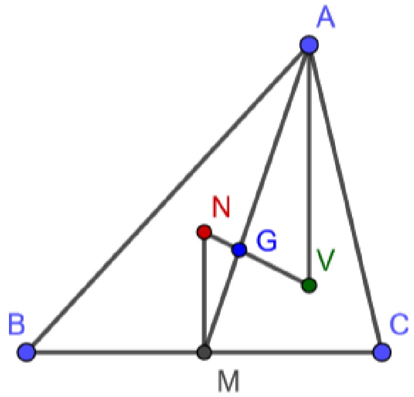
Oletetaan aluksi, että kolmio $\triangle ABC$ on *tasasivuinen*, jolloin kaikki sivut ovat yhtäpitkät ja kaikki kulmat yhtäsuuret. Olkoon lisäksi sivujen AB, BC ja CA keskipisteet M_C, M_A ja M_B. Nyt koska sivut ovat yhtäpitkät ja kaikki kulmat yhtäsuuret, ovat mediaanien AM_A, BM_B ja CM_C muodostamat kulmat $\angle AM_AB, \angle BM_BC$ ja $\angle CM_CA$ suoria. Tämän lisäksi leikkaavat ne samassa pisteessä G, kuten kuvassa 36.



Kuva 36: Tasasivuinen kolmio

Tästä johtuen ovat mediaanit AM_A, BM_B ja CM_C samalla myös kolmion korkeusjanat ja keskinormaalit. Näin ollen ovat kolmion merkilliset pisteet N, G ja H samassa paikassa, eli $N = G = H$.

Oletetaan seuraavaksi, että kolmio $\triangle ABC$ ei ole tasasivuinen, jolloin $AB \neq AC$ ja $G \neq N$. Merkitään tämän lisäksi lyhyesti $M_A = M$. Olkoon V piste suoralla $\ell(N, G)$ niin, että $VG = 2 \cdot GN$, kuten kuvassa 37 nähdään.

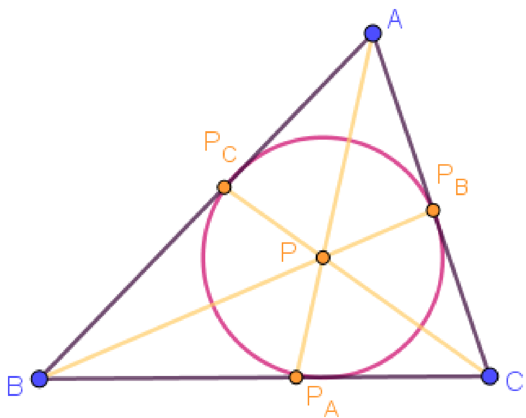


Kuva 37: Kolmio $\triangle ABC$ ja pisteet H, G, V ja M.

Osoittamalla, että $H = V$, saadaan väite todistettua. Lauseen 5.1 mukaan $G \in AM$ ja $AG = 2 \cdot GM$. Oletuksen mukaan $VG = 2 \cdot GN$. Näin ollen $\triangle AGV \sim \triangle MGN$ (SKS-kriteeri), jolloin $\angle AVG = \angle MNG$. Siten suorat $\ell(N, M)$ ja $\ell(A, V)$ ovat yhdensuuntaisia. Nyt koska $\ell(N, M) \perp \ell(BC)$, on myös $\ell(A, V) \perp \ell(B, C)$. Näin ollen suora $\ell(A, V)$ on kolmion $\triangle ABC$ korkeusjana. Samalla periaatteella kulkevat muut korkeusjanat pisteen V kautta, jolloin $V = H$ kuten vaadittu.

5.2.4 Kulmanpuolittajat

Lause 5.5. *Kolmion kulmien puolittajat leikkaavat pisteessä P, joka on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste (ks. kuva 38).*



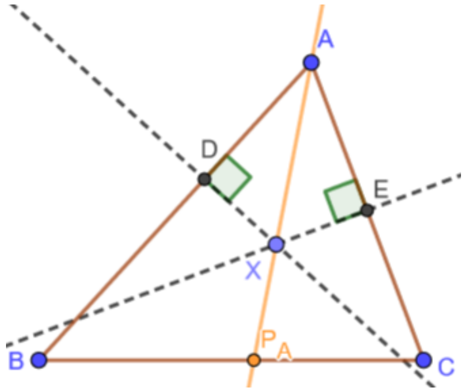
Kuva 38: Kolmion sisään piirretty ympyrä
https://www.geogebra.org/m/hknv2dar

Todistus. Lauseen 2.28 mukaan saadaan seuraava yhtälö

$$\frac{CP_B}{P_BA} \cdot \frac{AP_C}{P_CB} \cdot \frac{BP_A}{P_AC} = \frac{CB}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BA}{CA} = 1.$$

Näin ollen Cevan lauseen perusteella kulmanpuolittajat leikkaavat yhdessä pisteessä P.

Piirretään sivuista AB ja AC normaalit, jotka kulkevat pisteen $X \in \ell(A, P_A)$ kautta, kuten kuvassa 39.



Kuva 39: Etäisyys pisteestä X sivuille AB ja AC.

Nyt ovat kolmiot $\triangle ADX$ ja $\triangle AEX$ yhteneviä (SKK-kriteeri). Joten piste X on yhtä kaukana sivuista AB ja AC, sillä $XD = XE$. Soveltamalla samaa tarkastelua saadaan, että piste $Y \in \ell(B, P_B)$ on yhtä kaukana sivuista AB ja BC. Vastaavasti piste $Z \in \ell(C, P_C)$ on yhtä kaukana sivuista CB ja CA.

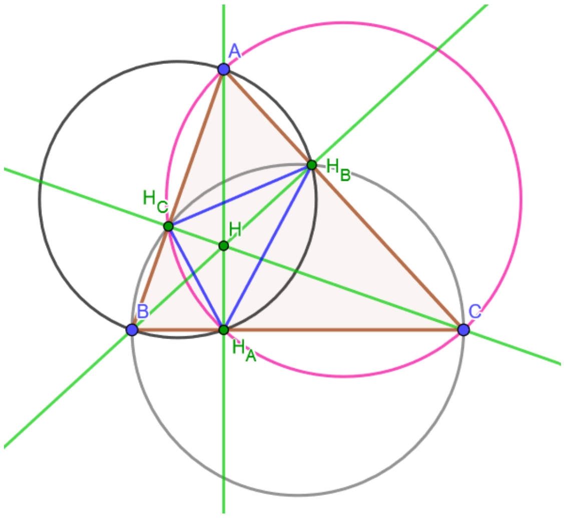
Koska kulmanpuolittajat leikkaavat yhdessä pisteessä P, niin valitsemalla $X = Y = Z = P$ voidaan todeta, että P on yhtä etäällä kaikista kolmion sivuista. Voidaan siis piirtää kolmion sivuja sivuava ympyrä, jonka keskipiste on P. Huomioidaan, että sisäympyröitä on vain yksi, sillä vain kolmion kulmanpuolittajan leikkauspiste on yhtä etäällä sivuista, joten vain se käy ympyrän keskipisteeksi. $\square$

Esimerkki 5.6. Todista, että teräväkulmaisen kolmion korkeusjanat ovat ortokolmion kulmien puolittaja. Tämän lisäksi ortosentri on sen ortokolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

Olkoon kolmion $\triangle ABC$ ortokolmio kolmio $\triangle H_A H_B H_C$. Väite saadaan todistetuksi, kun osoitetaan, että jana AH_A puolittaa kulman $\angle H_B H_A H_C$.

Piirretään seuraavaksi kolmioon ympyrät γ_1, γ_2 ja γ_3, joiden halkaisijat ovat sivut AB, BC ja AC. Tarkastellaan ympyrää γ_1. Nyt koska kulmat $\angle AH_A B$ ja $\angle AH_B B$ ovat suoria kulmia ja jana AB on molempien kolmioiden hypotenuusa, ovat lauseen 2.22 mukaan pisteet H_A ja H_B tämän ympyrän kehällä.

Samalla tavalla, ovat pisteet H_B ja H_C ympyrän γ_2 kehällä, ja pisteet H_A ja H_C ympyrän γ_3 kehällä, kuten kuvassa 40 nähdään.



Kuva 40: Ortokolmio ja sivujen ympyröitä
https://www.geogebra.org/m/fktgdern

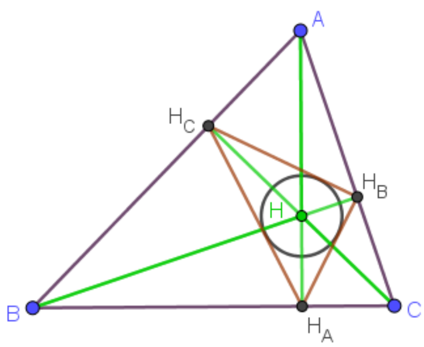
Tarkastellaan ympyrää γ_3. Lauseen 2.20 nojalla $\angle AH_AH_C = \angle ACH_C = \angle H_BCH_C$. Ympyrässä γ_2 taas $\angle H_BBH_C = \angle H_BBA = \angle H_BCH_C$. Vastaavasti ympyrässä γ_1 $\angle H_BH_AA = \angle H_BBA$. Saatiin siis

$$\angle AH_AH_C = \angle ACH_C = \angle H_BBA = \angle H_BH_AA \quad ja \quad \angle AH_AH_C = \angle H_BH_AA.$$

Näin ollen korkeusjana AH_A jakaa kulman $\angle H_BH_AH_C$.

Käyttämällä samaa menettelyä saadaan todistettua, että korkeusjana BH_B puolittaa kulman $\angle H_CH_BH_A$ ja korkeusjana CH_C puolittaa kulman $\angle H_AH_CH_B$.

Nyt siis piste H on ortokolmion kulmienpuolittajien leikkauspiste, jolloin piste H on jokaisesta ortokolmion sivuista yhtä kaukana. Tällöin lauseen 5.5 mukaan, voidaan ortokolmion sisään piirtää ympyrä, jonka keskipiste on piste H, kuten kuvassa 41 nähdään.



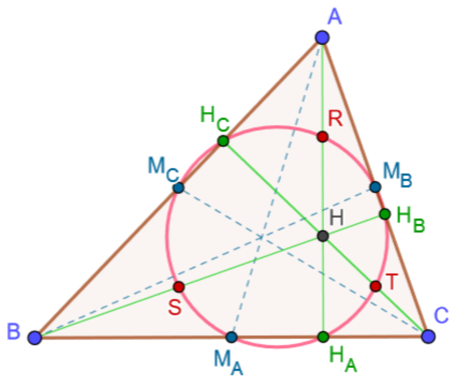
Kuva 41: Ortokolmio ja ympyrä
https://www.geogebra.org/m/pd9pd4wz

5.2.5 Yhdeksän pisteen ympyrä - Feuerbach

Saksalainen matematiikko Karl Wilhelm von Feuerbach syntyi vuonna 1800 ja kuoli 1834. Feuerbach tunnetaan siitä, kun hän löysi kolmion yhdeksän pisteen ympyrän. Tämän tuloksen hän julkaisi vuonna 1822. [5]

Lause 5.7. *Kolmion $\triangle ABC$ sivujen AB, BC ja CA keskipisteet, korkeusjanojen kantapisteet ja kolmion kärkien ja korkeusjanojen leikkauspisteen välisten janojen keskipisteet ovat samalla ympyrällä.*

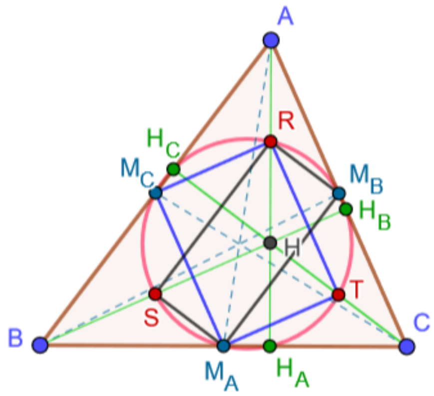
Todistus. Olkoon sivujen BC, AC ja AB keskipisteet pisteet M_A, M_B, M_C ja korkeusjanojen kantapisteet pisteet H_A, H_B, H_C. Olkoon tämän lisäksi korkeusjanojen leikkauspisteen H ja kolmion kärkipisteiden välisten janojen AH, BH ja CH keskipisteet R, S ja T (ks. kuva 42).



Kuva 42: Yhdeksän pisteen ympyrä
https://www.geogebra.org/m/wr8cb3gj

Kolmiot $\triangle AHB$ ja $\triangle ARM_C$ ovat yhdenmuotoisia (SKS$\sim$ -kriteeri), kuten myös kolmiot $\triangle CHB$ ja $\triangle CTM_A$. Näin ollen $RM_C \| HB \| TM_A$. Myös kolmiot $\triangle BCA$ ja $\triangle BM_AM_C$ sekä $\triangle HCA$ ja $\triangle HTR$ ovat yhdenmuotoisia (SKS$\sim$ -kriteeri). Siis $M_AM_C \| AC \| TR$. Yhdistämällä pisteet M_C, M_A, T ja R saadaan nelikulmio $\lozenge M_AM_CRT$, kuten kuvassa 43.

Myös kolmiot $\triangle ARM_B$ ja $\triangle AHC$ sekä kolmiot $\triangle BSM_A$ ja $\triangle BHC$ ovat yhdenmuotoisia (SKS$\sim$ -kriteeri). Tällöin $RM_B \| HC \| SM_A$. Vastaavasti ovat kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle M_BM_AC$ sekä $\triangle ABH$ ja $\triangle RSH$ yhdenmuotoisia (SKS$\sim$ -kriteeri). Näin ollen $AB \| RS \| M_AM_B$. Vastaavasti yhdistämällä pisteet R, M_B, M_A ja S saadaan nelikulmio $\lozenge RM_BM_AS$, kuten kuvassa 43 nähdään.



Kuva 43: Nelikulmiot $\Diamond M_AM_CRT$ ja $\Diamond RM_BM_AS$.

Äskeisen tarkastelun mukaan $BH \perp CA$, ja koska $M_CR \| BH$ ja $TR \| CA$, on myös $M_CR \perp TR$. Tästä johtuen on kulma $\angle M_CRT$ suora. Samalla päättelyllä ovat nelikulmion M_AM_CRT muut kulmat $\angle RTM_A$, $\angle TM_AM_C$ ja $\angle M_AM_CR$ suoria.

Vastaavasti koska $CH \perp AB$ ja $SR \| AB$ sekä $RM_B \| CH$, ovat nelikulmion $\Diamond RM_BM_AS$ kulmat $\angle SRM_B$, $\angle RM_BM_A$, $\angle M_BM_AS$ ja $\angle M_ASR$ suoria. Huomataan myös, että kulma $\angle AH_AM_A$ on suora.

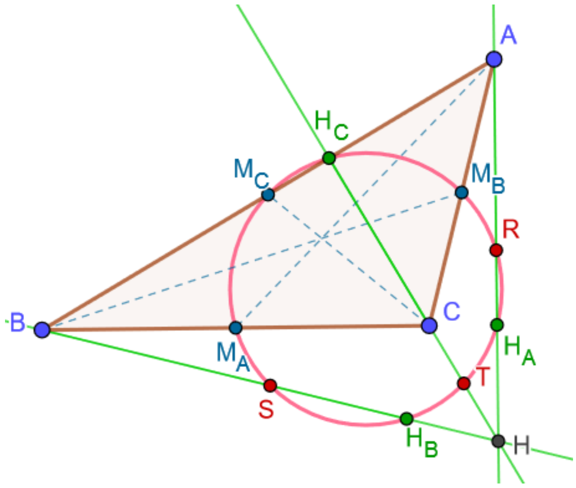
Nelikulmioilla $\Diamond M_CM_ATR$ ja $\Diamond RSM_AM_B$ on yhteinen lävistäjä RM_A. Näin ollen nuo kaksi pistettä kuuluvat ympyrän γ kehälle, jonka halkaisija on RM_A. Lauseen 2.22 mukaan ovat pisteet M_A, M_B, M_C, R, S ja T ympyrän γ kehällä.

Koska nelikulmion $\Diamond M_AM_CRT$ kaikki kulmat ovat suoria, ovat niiden vastinsivut yhtäpitkät, eli $M_CR = M_AT$ ja $M_CM_A = RT$. Näin ollen lävistäjät RM_A ja M_CT ovat yhtäpitkät, jotka leikkaavat keskeltä. Myös nelikulmion $\Diamond RM_BM_AS$ kulmat ovat suoria, jolloin $M_AS = RM_B$ ja $SR = M_BM_A$ sekä $RM_A = M_BS$. Kuten edellä, puolittavat lävistäjät RM_A ja M_BS toisensa.

Nyt $RM_A = M_CT$ ja $RM_A = M_BS$, joten $M_CT = M_BS$. Tämän lisäksi kaikki leikkaavat samassa pisteessä, sillä jokainen leikkaa toisensa puoliksi. Tästä johtuen koska RM_A on ympyrän γ halkaisija, ovat myös lävistäjät M_CT ja M_BS ympyrän γ halkaisijoita.

Nyt koska $\angle SH_BM_B$ on suora, on lauseen 2.22 mukaan myös piste H_B ympyrällä γ. Vastaavasti ovat kulmat $\angle M_CH_CT$ ja $\angle RH_AM_A$ suoria, jolloin pistet H_C ja H_A ovat ympyrällä γ. Saatiin siis todistettua, että kaikki yhdeksän pistettä ovat ympyrän γ kehällä.

Tulos pätee myös tylppäkulmaisille kolmioille, kuten kuvassa 44 nähdään.



Kuva 44: Yhdeksän pisteen ympyrä tylppäkulmaisessa kolmiossa

□

Viitteet

[1] Matematiikkaohjelmisto *GeoGebra*

[2] Harju T. *Geometria*. Turun yliopisto 2016.

[3] Harjulehto P. *Paralleelipostulaatti*. Matematiikkalehti Solmu 2008. https://matematiikkalehtisolmu.fi/2008/3/paralleelipostulaatti.pdf

[4] Lehtinen M. *Geometrian perusteita.* Helsingin ja Oulun yliopisto 2016.

[5] O'Connor J. J. ja Robertson E. F. *Karl Wilhelm Feuerbach*. 2010. http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Feuerbach.html [24.4.2020]

[6] O'Connor J. J. ja Robetrson E. F. *Menelaus of Alexandria*. 1999. http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Menelaus.html. [24.4.2020]

[7] Richardson B. *I was just looking for an example.* http://www.math.wichita.edur̃ichardson/Orthic-story/orthic-triangle-complete.html [24.4.2020]

[8] Roero C. S. *Giovanni Ceva*. https://www.britannica.com/biography/Giovanni-Ceva [24.4.2020]

[9] Tilvis V., Vesalainen E., Hirviniemi O., Koski A. ja Talvitie T. *Klassinen geometria.* Helsinki 2015.

[10] de Villiers M. *Van Aubel's theorem and some generalizations*. 2009. http://dynamicmathematicslearning.com/aubelparm.html. [24.4.2020]