

Mengerin lause ja Tutten nowhere-zero -ongelma

Lotta Lindholm

Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2020

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -järjestelmällä.

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

LINDHOLM, LOTTA: Mengerin lause ja Tutten nowhere-zero -ongelma
Pro gradu -tutkielma, 32 s.
Matematiikka
Toukokuu 2020

Tässä työssä tutkitaan siirtoverkkoja sekä suuntaamattomien graafien k -virtauksia. Tutustutaan erityisesti Mengerin lauseeseen siirtoverkkojen yhtenäisyydestä sekä Tutten avoimeen ongelmaan, jonka mukaan jokaisella sillattomalla graafilla on nowhere-zero 5 -virtaus. Työ alkaa graafien perusmääritelmien esittämisellä. Tämän jälkeen todistetaan siirtoverkoille maksimivirtaus-minimi-irrotus -lause sekä johdetaan samasta todistuksesta vielä Ford–Fulkerson-algoritmi. Lisäksi esitetään Mengerin tulos todistuksineen. Viimeinen luku aloitetaan osoittamalla, että jokaisella suuntaamattomalla graafilla on k -virtaus, jos ja vain jos sillä on \mathbb{Z}_k -virtaus. Sen jälkeen tutustutaan Nash-Williamsin lauseeseen, joka yhdistää graafin yhtenäisyyden sekä virittävien puiden lukumäärän. Esitetään vielä Tutten avoin ongelma, joitain samansuuntaisia tuloksia sekä lopuksi todistetaan Seymourin lause, jonka mukaan jokaisella sillattomalla graafilla on nowhere-zero 6 -virtaus. Päätulokseen johtavan lemmän 4.0.3 olen muokannut ja todistanut itsenäisesti.

Asiasanat: graafit, verkkoteoria.

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Perusteita	2
2.1	Graafit	2
2.2	Polut ja puut	4
2.3	Yhtenäisyys	6
2.4	Suunnatut graafit	7
2.5	Muita määritelmiä	8
3	Virtaukset	10
3.1	Siirtoverkot	10
3.2	Maksimivirtaus-minimi-irrotus -lause	12
3.3	Mengerin lause	16
4	k-virtaukset	19
4.1	Nash-Williamsin lause	21
4.2	Tutten nowhere-zero -ongelma	23
4.3	Seymourin 6-virtaukset	26
	Kirjallisuutta	32

Luku 1

Johdanto

Graafit ovat matemaattisia rakenteita, joita käytetään esineiden tai asioiden parittaisten relaatioiden mallintamiseen. Graafeja tutkivaa matematiikan alaa kutsutaan graafiteoriaksi tai verkkoteoriaksi ja sen ajatellaan saaneen alkunsa, kun Leonhard Euler vuonna 1736 esitti Königsbergin siltaongelman. Tässä työssä keskitytään graafien kahden tyyppisiin virtauksiin: siirtoverkkojen virtauksiin sekä suuntaamattomien graafien k -virtauksiin.

Siirtoverkot ovat suunnattuja graafeja, joille määritellään virtaus määrätystä lähteestä määrättyyn nieluun. Niitä voidaan käyttää mallintamaan esimerkiksi jonkin aineen tai vaikka tiedon kulkua kahden pisteen välillä. Työn kolmannessa luvussa esitettyä maksimivirtaus-minimi-irrotus -lausetta voidaan käyttää, kun halutaan tietää kuinka suuren virtauksen jokin siirtoverkko sallii. Saman lauseen todistuksesta johdetaan Ford–Fulkerson-algoritmi, jota voidaan soveltaa tällaisen maksimaalisen virtauksen löytämiseen. Tämän luvun lopussa esitetään ja todistetaan vielä Karl Mengerin lause vuodelta 1927, jonka mukaan graafilla G on k kappaletta kaariltaan erillistä s - r -polkua, jos ja vain jos solmut s ja r ovat yhdistetyt sen jälkeen, kun graafista on poistettu mitkä tahansa $k - 1$ kaarta.

Vuonna 1954 William Tutte esitti väitteen, jonka mukaan jokaisella sillattomalla graafilla on nowhere-zero 5 -virtaus. Tutten väite on vielä toistaiseksi todistamatta. Paul Seymour onnistui kuitenkin 70-luvulla osoittamaan, että jokaisella sillattomalla graafilla on nowhere-zero 6 -virtaus. Neljännessä luvussa esitetään todistus Seymourin lauseelle. Lisäksi osoitetaan, että jokaisella suuntaamattomalla graafilla on k -virtaus, jos ja vain jos sillä on \mathbb{Z}_k -virtaus, sekä esitetään Jaegerin kaksi lausetta nowhere-zero -virtauksille. Samassa luvussa todistetaan myös Nash-Williamsin tulos graafin kaariltaan erillisten virittävien puiden lukumäärälle, joka on tarpeellinen Jaegerin lauseiden todistuksissa. Neljännessä luvussa esitettävän päätulokseen johtavan lemmän 4.0.3 olen muokannut ja todistanut itsenäisesti.

Luku 2

Perusteita

Ennen kuin siirrytään käsittelemään virtauksia, esitetään joitain tarvittavia määritelmiä ja perustuloksia. Tämän luvun lähteenä on käytetty Harjun monistetta [5] ja Ruohosen monistetta [8]. Lisäksi kappaleen 2.4 lähteenä on käytetty Catlinin, Lain ja Shaon artikkelia [2] ja kappaleen 2.5 lähteenä Kop-pisen monistetta [6], Ylisen monistetta [10] sekä Björnin ja Björnin kirjaa [1].

2.1 Graafit

Määritelmä 2.1.1. Olkoot V jokin äärellinen joukko ja

$$E(V) = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}.$$

Paria $G = (V, E)$, missä $E \subseteq E(V)$, kutsutaan *graafiksi*. Joukon V alkioita kutsutaan graafin *solmuiksi* ja joukon E alkioita graafin *kaariksi*. Graafin G solmujen joukosta käytetään merkintää V_G ja kaarien joukosta E_G .

Parista $\{u, v\}$ käytetään tässä työssä yksinkertaistettua merkintää uv . Kaarelle $e = uv \in E_G$ solmut u ja v ovat kaaren e *päätepisteet*. Kun graafin kaaret määritellään kahden alkion joukkona kutsutaan graafia *suuntaamattomaksi*. Tällöin $uv = vu$. Solmut u ja v ovat *vierekkäiset*, jos $uv \in G$. Jos kaarilla $e_1 = uv \in E_G$ ja $e_2 = vw \in E_G$ on yhteinen päätepiste v , sanotaan, että kaaret ovat *vierekkäiset*.

Määritelmä 2.1.2. Olkoon G graafi. Merkitään

$$\nu_G = |V_G| \text{ ja } \varepsilon_G = |E_G|.$$

Solmujen lukumäärää ν_G kutsutaan graafin G *kertaluvuksi* ja kaarien määrää ε_G graafin G *kooksi*. Graafia jonka kertaluku on 1 kutsutaan *triviaaliksi*. Triviaalilla graafilla ei ole kaaria.

Määritelmä 2.1.3. Solmun v *aste* määritellään niiden kaarien määränä, joiden toinen päätepiste on v . Eli

$$\delta(v) = |\{e \in E_G | e = uv\}|.$$

Sellaisia solmuja joiden aste on 1 kutsutaan *lehdiksi*. Jos kaikkien graafin G solmujen asteet ovat yhtäsuuret kutsutaan graafia *säännölliseksi*. Eri-tyisesti sellaista graafia, jossa kaikkien solmujen aste on kolme kutsutaan *kuutiolliseksi*.

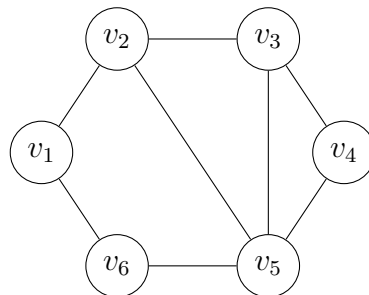
Lemma 2.1.4. Kaikille graafeille G pätee

$$\sum_{v \in V_G} \delta(v) = 2 \cdot \varepsilon_G$$

Todistus. Jokaisella kaarella on kaksi päätepistettä. □

Graafit esitetään tasokuvioina, missä solmut piirretään pisteinä ja kaaret niitä yhdistävinä janoina.

Esimerkki 2.1.5. Oheisen graafin G kertaluku on 6 ja koko 8.



Kuva 2.1: Esimerkki suuntaamattomasta graafista G .

Graafin määritelmää voidaan laajentaa sallimalla kaaret muotoa uu , eli sellaiset kaaret, jotka alkavat samasta solmusta kuin mihin ne päättyvät. Tällaisia kaaria kutsutaan *silmukoiksi*. Lisäksi voidaan sallia kahden solmun välille useampi kuin yksi kaari, eli *rinnakkaiset kaaret*.

Määritelmä 2.1.6. Olkoon $G = (V, E, \psi)$, missä $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ on joukko symboleja ja $\psi : E \rightarrow E(V) \cup \{uu | u \in V\}$ on funktio, joka liittää kahden solmun parin jokaiseen joukon E alkioon

$$e \in E : \psi(e) = uv.$$

Tällaista graafia kutsutaan *multigraafiksi*.

Määritelmä 2.1.7. Graafit G ja H ovat isomorfiset, jos on olemassa sellainen bijektio $\beta : V_G \rightarrow V_H$, että

$$uv \in E_G \iff \beta(u)\beta(v) \in E_H$$

kaikille $u, v \in V_G$. Merkitään $G \cong H$. Tämä tarkoittaa, että graafit ovat solmujen nimeämistä vaille samanlaiset. Isomorfisilla graafeilla on samat graafiteoreettiset ominaisuudet.

Määritelmä 2.1.8. Graafi H on graafin G *aligraafi*, jos $V_H \subseteq V_G$, missä $E_H \subseteq E(V_H)$. Tästä käytetään merkintää $H \subseteq G$.

Määritelmä 2.1.9. Aligraafi $H \subseteq G$ on *indusoitu aligraafi*, jos $E_H = E_G \cap EV_H$. Sanotaan, että tällöin joukko V_H *indusoi* aligraafin $H \subseteq G$.

Määritelmä 2.1.10. Aligraafi $H \subseteq G$ on *virittävä aligraafi*, jos $V_H = V_G$. Sanotaan, että graafi H *virittää* graafin G .

2.2 Polut ja puut

Määritelmä 2.2.1. Olkoot $e_i = u_i u_{i+1}$ graafin G kaaria, missä $i \in [1, k]$ ja kaaret e_i ja e_{i+1} ovat vierekkäiset kaikilla $i \in [1, k-1]$. Jonoa $W = e_1 e_2 \dots e_k$ kutsutaan pituutta k olevaksi *tieksi* solmusta u_1 solmuun u_{k+1} .

Graafin teistä saatetaan myös käyttää merkintöjä

$$W : u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots u_k \rightarrow u_{k+1} \text{ tai } W : u_1 \xrightarrow{k} u_{k+1}.$$

Merkintää $u \xrightarrow{*} v$ voidaan käyttää ilmaisemaan, että on olemassa jokin tie solmusta u solmuun v .

Määritelmä 2.2.2. Olkoon $W = e_1 e_2 \dots e_k$ tie, missä $e_i = u_i u_{i+1}$. Tietä jossa $u_1 = u_{k+1}$ sanotaan *suljetuksi*. Jos taas $u_i \neq u_j$ kaikilla $i \neq j$ sanotaan, että W on *polku*. Suljettu polku on *sykli*.

Määritelmä 2.2.3. Jos $W : u = u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_{k+1} = v$ on tie, niin myös $W^{-1} : v = u_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow u_1 = u$ on tie. Tietä W^{-1} kutsutaan tien W *käänteiseksi tieksi*.

Määritelmä 2.2.4. Jos kahdella polulla P ja Q ei ole yhteisiä kaaria kutsutaan polkuja *kaariltaan erillisiksi*.

Määritelmä 2.2.5. Jos kahdella polulla P ja Q ei ole muita yhteisiä solmuja kuin mahdollisesti päätesolmut kutsutaan polkuja *solmuiltaan erillisiksi*. Huomaa, että kaikki solmuiltaan erilliset polut ovat myös kaariltaan erillisiä.

Määritelmä 2.2.6. Olkoot G graafi ja u ja v jotkin sen kaksi solmua. Jos solmusta u solmuun v on olemassa polku sanotaan, että solmut ovat *yhdistetyt* ja määritellään niiden välinen *etäisyys*

$$d_G(u, v) = \min\{k \mid u \xrightarrow{k} v\}.$$

Jos tällaista polkua ei ole, niin $d_G(u, v) = \infty$. Sanotaan, että graafi G on yhtenäinen, jos $d_G(u, v) < \infty$ kaikille pareille $u, v \in V_G$. Muuten graafia kutsutaan *epäyhtenäiseksi*.

Määritelmä 2.2.7. Syklitöntä graafia kutsutaan *metsäksi*. Jos metsä on yhtenäinen sitä kutsutaan *puuksi*.

Määritelmä 2.2.8. Olkoon G yhtenäinen graafi. Tietä W kutsutaan *Eulerin poluksi*, jos se kulkee graafin jokaisen kaaren kautta tarkalleen kerran. Jos Eulerin polku on suljettu kutsutaan sitä *Eulerin kierrokseksi*. Graafia jossa on Eulerin kierros kutsutaan *Eulerin graafiksi*.

Määritelmä 2.2.9. Olkoon G yhtenäinen graafi. Polkua P kutsutaan *Hamiltonin poluksi*, jos se kulkee graafin jokaisen solmun kautta tarkalleen kerran. Jos Hamiltonin polku on sykli kutsutaan sitä *Hamiltonin kierrokseksi*. Graafia jossa on Hamiltonin kierros kutsutaan *Hamiltonin graafiksi*.

Määritelmä 2.2.10. Olkoot G graafi ja K jokin joukko. Funktiota $\gamma : V_G \rightarrow K$ kutsutaan *solmujen väritykseksi* ja funktiota $\gamma : E_G \rightarrow K$ kaarien väritykseksi. Jos $K \subseteq \mathbb{R}$ kutsutaan funktiota *painotukseksi*.

Määritelmä 2.2.11. Olkoon G graafi, $\gamma : E_G \rightarrow \mathbb{R}$ sen kaarien painotus ja H jokin graafin G aligraafi. Sanotaan, että

$$\gamma(H) = \sum_{e \in H} \gamma(e)$$

on graafin H *paino*. Erityisen kiinnostavia ovat sellaiset aligraafit, jotka ovat polkuja. Jos $P = e_1 e_2 \dots e_k$ on jokin polku, niin sen paino on $\gamma(P) = \sum_{i=1}^k \gamma(e_i)$.

Määritelmä 2.2.12. Olkoon G graafi, funktio γ sen kaarien painotus ja u ja v graafin jotkin kaksi solmua. Määritellään solmujen u ja v *pienin painotettu etäisyys* siten, että

$$d_G^\gamma(u, v) = \min\{\gamma(P) \mid P : u \xrightarrow{*} v\}.$$

Käytännössä on usein tarve löytää kahden pisteen välille lyhin, nopein tai halvin reitti. Nämä ongelmat voidaan ratkaista etsimällä graafista pienin painotettu etäisyys. Tällaisia voivat ovat esimerkiksi:

- Etsi nopein reitti henkilöautolla Turusta Ouluun.
- Etsi halvin reitti lentää Helsingistä Washingtoniin.
- Rubikin kuution optimaalinen ratkaiseminen (esitetään jokainen Rubikin kuution tila solmuna ja käänös kaarena, etsi lyhin reitti).

Ongelma 2.2.13 (Lyhimmän reitin ongelma). Olkoon G yhtenäinen graafi, $\gamma : E_G \rightarrow \mathbb{N}$ kaarien painotus ja u ja v jotkin graafin kaksi solmua. Etsi $d_G^\gamma(u, v)$.

2.3 Yhtenäisyys

Määritelmä 2.3.1. Graafin G yhtenäiset komponentit ovat sen suurimmat yhtenäiset aligraafit. Graafin G yhtenäisten komponenttien lukumäärästä käytetään merkintää $c(G)$. Yhtenäiselle graafille $c(G) = 1$.

Määritelmä 2.3.2. Olkoot G graafi, S jokin sen solmujoukko ja F sen kaarijoukko. Graafi $G - S$ on solmujoukon $V_G - S$ indusoima aligraafi ja $G - F = (V_G, E_G - F)$.

Määritelmä 2.3.3. Olkoot G graafi ja v jokin sen solmu. Solmua v kutsutaan *irrotussolmuksi*, jos $c(G - v) > c(G)$. Graafia, joka on epäyhtenäinen tai jolla on irrotussolmu kutsutaan *separoituvaksi*. Muuten graafi on *separoitumaton*.

Määritelmä 2.3.4. Olkoot G graafi ja e jokin sen kaari. Kaarta e kutsutaan *sillaksi*, jos $c(G - e) > c(G)$.

Määritelmä 2.3.5. Solmujen joukkoa $S \subseteq V_G$ kutsutaan *separoivaksi joukoksi*, jos $G - S$ on epäyhtenäinen. Jos solmut u ja v kuuluvat graafin $G - S$ eri yhtenäisiin komponentteihin sanotaan, että S *separoi* solmut u ja v .

Määritelmä 2.3.6. Kaarien joukkoa $F \subseteq E_G$ kutsutaan *irrotusjoukoksi*, jos $G - F$ on epäyhtenäinen.

Määritelmä 2.3.7. Olkoon G graafi. Jos G ei ole täydellinen, niin määritellään luku

$$\kappa(G) = \min\{|S| \mid G - S \text{ on epäyhtenäinen}, S \subseteq V_G\}$$

ja kutsutaan sitä graafin G *yhtenäisyysasteeksi*. Jos $\kappa(G) \geq k$ sanotaan, että G on *k -yhtenäinen*. Täydelliselle graafille määritellään yhtenäisyysaste $\kappa(G) = \nu_G - 1$.

Määritelmä 2.3.8. Olkoot G graafi ja

$$\kappa'(G) = \min\{|F| \mid G - F \text{ on epäyttenäinen}, F \subseteq E_G\}.$$

Jos $\kappa'(G) \geq k$ sanotaan, että G on k -kaariyttenäinen.

Määritelmä 2.3.9. Olkoon G graafi. Kahden solmun u ja v yhdistämällä tarkoitetaan operaatiota, jossa nämä solmut korvataan uudella solmulla w ja saadaan graafi G' , missä

$$V_{G'} = (V_G - \{u, v\}) \cup \{w\}$$

ja

$$E_{G'} = (E_G - \{ux, vx \mid x \in V_G\}) \cup \{wx \mid ux \in E_G \text{ tai } vx \in E_G\} \\ \cup \{ww \mid uu \in E_G \text{ tai } vv \in E_G\}.$$

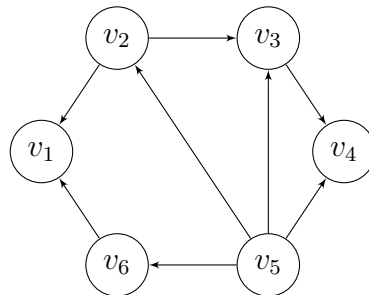
Määritelmä 2.3.10. Kaaren $e = uv$ kutistamisella tarkoitetaan operaatiota, jossa kaari e ensin poistetaan ja sitten solmut u ja v yhdistetään.

Määritelmä 2.3.11. Graafin G alijaotus H on sellainen graafi, joka saadaan korvaamalla kaari $e = uv \in G$ solmulla w ja kaarilla uw ja wv , eli polulla $u \rightarrow w \rightarrow v$.

2.4 Suunnatut graafit

Graafin kaarille voidaan myös määrätä suunta. Tällaista graafia kutsutaan *suunnatuksi* graafiksi tai *digraafiksi*. On tärkeää huomata, että suunnatussa graafissa $uv \neq vu$.

Esimerkki 2.4.1. Oheisen suunnatun graafin D kaariin kuuluu muun muassa v_2v_3 mutta ei v_4v_5 .



Kuva 2.2: Esimerkki suunnatusta graafista D .

Määritelmä 2.4.2. Suunnatun graafin D solmuille määritellään *tuloaste* ja *lähtöaste*

$$\delta^-(v) = |\{e \in E_D | e = uv\}| \text{ ja } \delta^+(v) = |\{e \in E_D | e = vu\}|.$$

Joukon $\delta^-(v)$ alkioita kutsutaan *tulokaariksi* ja joukon $\delta^+(v)$ alkioita *lähtökaariksi*.

Määritelmä 2.4.3. Suunnatun graafin D *allaoleva graafi* $U(D)$ muodostuu solmujoukosta E_D ja suuntaamattomista kaarista, joiden päätepisteet ovat samat kuin joukon E_D kaarien.

Samoin kuin suuntaamattomille graafeille voidaan myös suunnatuille graafeille määritellä tie.

Määritelmä 2.4.4. Olkoon D suunnattu graafi. Graafin $U(D)$ tietä $W = e_1e_2 \dots e_k$ kutsutaan graafin D *suunnatuksi tieksi*, jos $e_i \in E_D$ kaikilla $i \in [1, k]$.

Samalla tavalla voidaan suunnatulle graafille määritellä *suunnattu polku* ja *suunnattu sykli*.

Määritelmä 2.4.5. Suunnattu graafi D on graafin G *suuntaus*, jos sen alla oleva graafi on G , eli $G = U(D)$. Tässä $e \in E_D \Rightarrow e^{-1} \notin D$.

Määritelmä 2.4.6. Suunnattu graafi D on *puurakenne*, jos D muodostuu puusta T suuntaamalla kaaret niin, että kaikilla solmuilla paitsi yhdellä on tasan yksi tulokaari.

Määritelmä 2.4.7. Suunnattu graafi D on *vahvasti yhtenäinen*, jos jokaisesta solmusta on olemassa suunnattu polku kaikkiin muihin solmuihin.

Määritelmä 2.4.8. Suunnattu graafi D on *k-polku yhtenäinen*, jos se edelleen on vahvasti yhtenäinen sen jälkeen, kun on poistettu mitkä tahansa $k - 1$ kaarta.

2.5 Muita määritelmiä

Tässä kappaleessa esitetään muutamia tarvittavia joukko-opin ja algebran perusteita.

Määritelmä 2.5.1. Joukon X *partitio* on sellainen alijoukkojen $X_i \subseteq X$ joukko $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$, että

$$X = \bigcup_{i \in [1, k]} X_i \text{ ja } X_i \cap X_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Seuraavat kolme määritelmää koskevat ryhmäteoriaa.

Määritelmä 2.5.2. Olkoon Γ epätyhjä joukko ja $*$ siinä määritelty binäärioperaatio. Pari $(\Gamma, *)$ on *ryhmä*, jos

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in \Gamma : & & a * (b * c) &= (a * b) * c, \\ \exists e \in \Gamma : \forall a \in \Gamma : & & a * e &= e * a = a \quad , \\ \forall a \in \Gamma : \exists a^{-1} \in \Gamma : & & a * a^{-1} &= a^{-1} * a = e. \end{aligned}$$

Määritelmä 2.5.3. Olkoon $(\Gamma, *)$ ryhmä. Jos binäärioperaatio $*$ on *kommutatiivinen*, eli

$$\forall a, b \in \Gamma : a * b = b * a$$

kutsutaan ryhmää *Abelin ryhmäksi*.

Määritelmä 2.5.4. Olkoot Γ ja Γ' ryhmiä, $a, b \in \Gamma$ sekä $a', b' \in \Gamma'$. Kahden ryhmän *kartesinen tulo* $\Gamma \times \Gamma'$ määritellään seuraavasti

$$(a, a')(b, b') = (ab, a'b')$$

ja se on ryhmä binäärioperaation suhteen.

Määritelmä 2.5.5. Olkoot A ja B joukkoja, $f : A \rightarrow B$ jokin kuvaus ja $X \subseteq A$. Kuvauksen f *rajoittuma* joukkoon X on sellainen kuvaus $f|_X : X \rightarrow B$, että $(f|_X)(x) = f(x)$ kaikilla $x \in X$.

Lisäksi tässä työssä käytetään Björnin ja Björnin kirjasta [1] löytyvää funktion kantajan määritelmää:

Määritelmä 2.5.6. Reaaliarvoisen funktion f *kantaja* $\text{supp}f$ on komplementtijoukko suurimmalle avoimelle joukolle, jossa f saa arvon 0.

Graafien painotukselle tämä tarkoittaa, että

$$\text{supp}f = \{x \in X | f(x) \neq 0\}.$$

Luku 3

Virtaukset

Tämän luvun lähteenä on käytetty Kortin ja Vygenin kirjaa [7] ellei toisin mainita.

3.1 Siirtoverkot

Määritelmä 3.1.1. Olkoon $D = (V, E)$ jokin suunnattu graafi jolla on kaksi määrättyä solmua; *lähde* s ja *nielu* r . Olkoon funktio $\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ siten, että $\alpha(e) = 0$, jos $e \notin D_E$. Sanotaan, että (D, α, s, r) muodostaa *siirtoverkon* N ja merkitään $V_N = V$ ja $E_N = E$.

Määritelmä 3.1.2. Olkoot $A \subseteq V_N$ jokin solmujen joukko ja $f : V_N \times V_N \rightarrow \mathbb{R}$ mikä tahansa sellainen funktio, että $f(e) = 0$ jos $e \notin E_N$. Käytetään seuraavia merkintöjä:

$$I_A = [A, \bar{A}] = \{e \in D \mid e = uv, u \in A, v \notin A\}$$

$$f^+(A) = \sum_{e \in [A, \bar{A}]} f(e) \text{ ja } f^-(A) = \sum_{e \in [\bar{A}, A]} f(e).$$

Tässä partitiio I_A on *irrotus*, $f^+(A)$ on irrotuksen A *vuo* ja $f^-(A)$ on irrotuksen A *vastavuo*.

Määritelmä 3.1.3. *Virtaus* siirtoverkossa N on sellainen funktio $f : V_N \times V_N \rightarrow \mathbb{R}$, että $0 \leq f(e) \leq \alpha(e)$ kaikilla $e \in E_N$ ja $f^+(e) = f^-(e)$ kaikilla $v \notin \{s, r\}$ missä $e = uv$ tai $e = vu$.

Ehtoa $f^+(e) = f^-(e)$ kutsutaan myös nimillä *virtauksen säilymisehto* tai *Kirchoffin virtauslaki*. Se sanoo siis, että jokaiseen solmuun tulevan virtauksen on oltava yhtä suuri kuin siitä lähtevä virtaus. On helppoa nähdä, että jokaisella siirtoverkolla N on *nollavirtaus*, jolle $f(e) = 0$ kaikilla $e \in E_N$.

Määritelmä 3.1.4. Jokaiselle osajoukolle $A \subseteq V_N$ määritellään resultantti-
virtaus $|f_A| = f^+(A) - f^-(A)$.

Virtauksen f arvo on $|f| = |f_s| = f^+(s) - f^-(s) = f^+(s)$ missä s on siirto-
verkon lähde.

Määritelmä 3.1.5. Virtaus f' on *maksimivirtaus*, jos $|f'| \geq |f|$ kaikille
mahdollisille virtauksille f .

Ongelma 3.1.6 (Maksimivirtausongelma). Olkoon (D, s, r, α) siirtoverkko.
Etsi s - r -virtaus, jonka arvo on maksimaalinen.

Määritelmä 3.1.7. Olkoon N jokin siirtoverkko. Sanotaan, että irrotus
 $I_A = [A, \bar{A}]$ on s - r -irrotus, jos $s \in A$ ja $r \in \bar{A}$. Tällaisen irrotuksen *ka-*
pasiteetti on

$$\alpha(I_A) = \sum_{e \in [A, \bar{A}]} \alpha(e).$$

Lause 3.1.8. Olkoot f siirtoverkon N virtaus ja I_A sen s - r -irrotus. Silloin

$$|f| = f^+(I_A) - f^-(I_A).$$

Todistus. Selvästi virtauksen säilymishdosta seuraa, että

$$\sum_{e=vu} f(e) - \sum_{e=uv} f(e) = \begin{cases} |f|, & \text{jos } v = s \\ 0, & \text{jos } v \neq s. \end{cases}$$

Merkitään $I_A = [A, \bar{A}]$. Käymällä läpi kaikki joukon A solmut v saadaan

$$\sum_{v \in A} \sum_{e=vu} f(e) - \sum_{v \in A} \sum_{e=uv} f(e) = |f|.$$

Kaikille niille kaarille e , joiden molemmat päätepisteet ovat joukossa A , $f(e)$
ja $-f(e)$ esiintyvät yhtälön vasemmalla puolella kumpikin tarkalleen kerran.
Nämä supistuvat pois ja yhtälö saadaan muotoon

$$\sum_{\substack{e=uv \\ u \in \bar{A} \\ v \in \bar{A}}} f(e) - \sum_{\substack{e=uv \\ u \in A \\ v \in A}} f(e) = |f|$$

eli

$$|f| = f^+(I_A) - f^-(I_A).$$

□

Lause 3.1.9. Olkoot f siirtoverkon N virtaus ja I_A sen s - r -irrotus. Silloin

$$|f| \leq \alpha(I_A).$$

Todistus. $|f| = f^+(I_A) - f^-(I_A) \leq f^+(I_A) \leq \alpha(I_A)$. □

Määritelmä 3.1.10. Siirtoverkon N sellaista s - r -irrotusta I'_A kutsutaan *minimi-irrotukseksi*, jos $\alpha(I'_A) \leq \alpha(I_A)$ kaikille muille s - r -irrotuksille I_A .

Seuraus 3.1.11. Olkoot f siirtoverkon N virtaus ja I_A sen s - r -irrotus, joille $|f| = \alpha(I_A)$. Tällöin f on maksimivirtaus ja I_A minimi-irrotus.

Todistus. Tehdään vastaoletus, että f' on maksimivirtaus ja I'_A minimi-irrotus. Tällöin lauseen 3.1.9 nojalla $|f'| \leq \alpha(I'_A)$ ja siten

$$|f| \leq |f'| \leq \alpha(I'_A) \leq \alpha(I_A).$$

Väite seuraa nyt suoraan oletuksesta $|f| = \alpha(I_A)$. □

3.2 Maksimivirtaus-minimi-irrotus -lause

Määritelmä 3.2.1. Olkoot N siirtoverkko ja e jokin sen kaari. Jos $f(e) = \alpha(e)$ sanotaan, että e on *kyllästetty*, muuten sanotaan, että e on *ei-kyllästetty*.

Määritelmä 3.2.2. Olkoot f jokin siirtoverkon N virtaus ja $P = e_1 e_2 \dots e_n$ siirtoverkon suuntaamaton polku. Sanotaan, että kaari e_i on *etenevä*, jos $e_i = v_i v_{i+1} \in E_N$ ja *takenevä*, jos $e_i = v_{i+1} v_i \in E_N$.

Määritelmä 3.2.3. Määritellään luku $\iota(P)$ sekä polun kaarille painot $\iota(e)$, niin, että

$$\iota(P) = \min_{e_i} \iota(e) \text{ missä } \iota(e) = \begin{cases} \alpha(e) - f(e), & \text{jos } e \text{ on etenevä polulla } P \\ f(e), & \text{jos } e \text{ on takenevä polulla } P. \end{cases}$$

Polkua P sanotaan *ei-kyllästetyksi*, jos $\iota(P) \geq 0$.

Määritelmä 3.2.4. Olkoot f jokin siirtoverkon N virtaus ja s - r -polku $P : s \xrightarrow{*} r$ ei-kyllästetty. Tällaista polkua P kutsutaan virtauksen f *lisäyspoluksi*.

Lause 3.2.5. Olkoon N siirtoverkko. Virtaus f on maksimivirtaus jos ja vain jos virtauksella ei ole lisäyspolkuja.

Todistus. Määritellään uusi virtaus f' siten, että

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \iota(P), & \text{jos } e \text{ on etenevä polulla } P \\ f(e) - \iota(P), & \text{jos } e \text{ on takeneva polulla } P \\ f(e), & \text{jos } e \text{ ei ole polulla } P. \end{cases}$$

Selvästi f' on virtaus, sillä kapasitettiehdon ja säilymisehdon toteutumiset seuraavat suoraan virtauksen f' ja luvun $\iota(P)$ määritelmistä. Koska

$$|f'| = |f| + \iota(P)$$

niin f ei ole maksimivirtaus niin kauan kun $\iota(P) \geq 0$. Eli maksimivirtauksella ei voi olla lisäyspolkuja.

Oletetaan sitten, että virtauksella f ei ole lisäyspolkuja. Olkoon A niiden solmujen joukko, joihin pääsee solmusta s pitkin ei-kyllästettyjä polkuja. Koska oletettiin ettei virtauksella ole lisäyspolkuja niin $r \in \bar{A}$. Täten irrotus $I_A = [A, \bar{A}]$ on s - r -irrotus. Seurauksen 3.1.11 nojalla riittää enää osoittaa, että $|f| = \alpha(I_A)$.

Tarkastellaan seuraavaksi etenevää kaarta $e = uv$ missä $u \in A$ ja $v \in \bar{A}$. Tällöin on olemassa ei-kyllästetty s - u -polku P . Kaari e on kyllästetty, sillä muuten olisi olemassa ei-kyllästetty s - v -polku. Toisaalta, jos kaari e olisi takeneva, eli $e = uv$ missä $u \in \bar{A}$ ja $v \in A$ ja $f(e) \geq 0$ niin silloin olisi myös olemassa ei-kyllästetty s - v -polku. Tästä seuraa, että takenevalle kaarelle $e = uv$ $f(e) = 0$. Nyt vuo $f^+(I_A) = \alpha(I_A)$ ja vastavuo $f^-(I_A) = 0$. Siispä lauseen 3.1.8 nojalla $|f| = \alpha(I_A)$. \square

Samalla tuli todistettua seuraava siirtoverkoille tärkeä ja tunnettu tulos: maksimivirtaus-minimi-irrotus -lause.

Lause 3.2.6 (MaxMin-lause). Siirtoverkossa maksimivirtauksen arvo ja minimi-irrotuksen kapasitetti ovat yhtä suuret.

Fordin ja Fulkersonin vuonna 1957 kehittämä algoritmi maksimivirtauksen löytämiseen seuraa lauseen 3.2.5 todistuksen kehitelmää. Tarkastellaan seuraavaksi hieman sitä.

Ford–Fulkerson-algoritmi

Syöte: Siirtoverkko (D, s, r, α) missä $\alpha : E \rightarrow \mathbb{Z}_+$.

Tuloste: Maksimivirtaus f .

1. Aseta $f(e) := 0$ kaikille $e \in E$.
2. Etsi lisäyspolku P . **Jos** tällaista ei löydy **lopetta**.

3. Laske $\iota(P) := \min_{e_i} \iota(e)$ missä

$$\iota(e) := \begin{cases} \alpha(e) - f(e), & \text{jos } e \text{ on etenevä polulla } P \\ f(e), & \text{jos } e \text{ on takeneva polulla } P. \end{cases}$$

4. Aseta kaikille $e \in E$ uudet arvot

$$f(e) := \begin{cases} f(e) + \iota(P), & \text{jos } e \text{ on etenevä polulla } P \\ f(e) - \iota(P), & \text{jos } e \text{ on takeneva polulla } P \\ f(e), & \text{jos } e \text{ ei ole polulla } P. \end{cases}$$

5. Palaa kohtaan 2.

Koska algoritmi pysähtyy vasta sitten kun lisäyspolkuja ei enää ole, niin lauseen 3.2.5 nojalla Ford–Fulkerson-algoritmi todella palauttaa maksimivirtauksen. Analysoidaan sitten Ford–Fulkerson-algoritmia hieman tarkemmin. Jokaiselle siirtoverkon kaarelle e annettu kapasiteetti $\alpha(e)$ on kokonaislukuarvoinen ja näin on myös kohdassa 1. alkuvirtaukseksi $f(e)$ asetettu nollavirtaus. Huomataan, että jos $f(e)$ on mikä tahansa kokonaisluku, niin kohdassa 3. lasketut luvut $\iota(e)$ myös ovat kokonaislukuja riippumatta siitä onko kaari e etenevä vai takeneva polulla P . Tästä selvästi seuraa, että myös $\iota(P)$ on kokonaisluku. Kohdassa 4. laskettavat uudet virtaukset säilyttävät tämän ominaisuuden, sillä kaaren vanha virtaus on kokonaisluku ja kuten edellä mainittiin, niin on myös $\iota(P)$. Induktiolla algoritmin palauttama maksimivirtaus on siis kokonaislukuarvoinen. Tämä päättely todistaa seuraavan tärkeän seurauksen:

Seuraus 3.2.7 (Integral Flow Theorem, Dantzig ja Fulkerson (1956)). Siirtoverkolle on olemassa kokonaislukuarvoinen maksimivirtaus, jos sen kaarien kapasiteetit ovat kokonaislukuarvoisia.

Esitetään vielä yksi keskeinen lause virtauksen osittamiselle. Lauseen todistuksessa on yhdistetty materiaalissa [9] esitetty algoritmikehitelmä sekä Kortin ja Vygenin kirjan [7] todistus samalle lauseelle.

Lause 3.2.8 (Flow Decomposition Theorem, Gallai (1958), Ford ja Fulkerson (1962)). Olkoot $N = (D, s, r, \alpha)$ siirtoverkko ja f sen s - r -virtaus. On olemassa sellainen joukko s - r -polkuja \mathcal{P} ja sellainen joukko syklejä \mathcal{C} sekä niiden painotus $w : \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$, että kaikille $e \in E$

$$f(e) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \\ e \in E_P}} w(P), \quad \sum_{P \in \mathcal{P}} w(P) = |f| \text{ ja } |\mathcal{P}| + |\mathcal{C}| \leq \varepsilon_N.$$

Todistus. Esitetään ensin metodi s - r -polun tai syklin löytämiselle.

Olkoon $e = v_0w_0$ jokin siirtoverkon N kaari, jolle $f(e) \geq 0$. Joko $w_0 = r$ tai sitten on olemassa sellainen kaari $e' = w_0w_1$, että myös $f(e') \geq 0$. Asetetaan $i := 1$. Jos $w_i \in \{r, v_0, w_0, \dots, w_{i-1}\}$ niin pysäytetään. Muuten on taas olemassa sellainen kaari $e'' = w_iw_{i+1}$, että myös $f(e'') \geq 0$. Nyt $i := i + 1$ ja jatketaan samalla tavalla kunnes pysäytysehto täyttyy. Jos pysäytys tapahtuu solmussa r tehdään vielä sama toiseen suuntaan. Nyt on löydetty joko s - r -polku tai sykli ja käytetään siitä merkintää P_i .

Seurauksen todistamiseksi käytetään seuraavaa algoritmia:

1. Asetetaan $i := 1$ ja $r := |f|$.
2. **Jos** $r > 0$ etsitään s - r -polku tai sykli. Muuten **lopetta**.
3. Asetetaan $w(P_i) := \min_{e \in P_i} f(e)$ ja

$$f(e) := \begin{cases} f(e) - w(P_i), & \text{jos } e \in P_i \\ f(e), & \text{jos } e \notin P_i. \end{cases}$$

4.

$$r := \begin{cases} r - w(P_i), & \text{jos } P_i \text{ on polku} \\ r, & \text{jos } P_i \text{ on sykli.} \end{cases}$$

5. $i := i + 1$.

6. Palaa kohtaan 2.

Kuten edellä pääteltiin on jokaisen virtaukseltaan positiivisen kaaren oltava osa vähintään yhtä joko s - r -polkua tai sykliä. Niin kauan kun virtaus pysyy positiivisena algoritmin iteraation jälkeen, voidaan aina löytää s - r -polku tai sykli johon tämä kaari kuuluu. Eli

$$f(e) \leq \sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \\ e \in E_P}} w(P).$$

Toisaalta, painotus $w(P)$ ei voi ylittää minkään sen s - r -polkuun tai sykliin kuuluvan kaaren virtausta $f(e)$, sillä muuten tämä olisi ristiriidassa painotuksen $w(P)$ asetusehdon $w(P_i) := \min_{e \in P_i} f(e)$ kanssa. Siis

$$f(e) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \\ e \in E_P}} w(P).$$

Samasta todistuksen alussa olevasta päättelystä saadaan myös toinen yhtälö todistettua. Virtauksen arvon määritelmä $|f| = f^+(s)$ sanoo, että virtauksen arvo on yhtä kuin lähteen vuo. Koska jokainen siirtoverkon s - r -polun ensimmäinen kaari kuuluu tähän vuohon, saadaan

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} w(P) \geq |f|$$

ja siitä edellä olevan päättelyn avulla seuraa

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} w(P) = |f|.$$

Jokaisessa algoritmin iteraatiossa asetetaan $w(P_i) := \min_{e \in P_i} f(e)$ ja näiden kaikkien kaarien $e \in P_i$ virtauksesta $f(e)$ poistetaan $w(P_i)$. Eli uusi virtaus $f(e) := f(e) - w(P_i)$ ja se tarkoittaa, että vähintään yhden kaaren virtaus nollautuu. Siispä kun iterointeja on tehty i kappaletta on kaaria, joiden virtaus on positiivinen jäljellä enää maksimissaan $\varepsilon_N - i$. Ja koska algoritmia iteroidaan vain niin kauan kun näitä virtaukseltaan positiivisia kaaria on jäljellä tapahtuu iterointeja korkeintaan ε_N kappaletta. Toisaalta jokaisella iterointikerralla löytyy joko s - r -polku tai sykli, eli saadaan

$$|\mathcal{P}| + |\mathcal{C}| \leq \varepsilon_N.$$

□

3.3 Mengerin lause

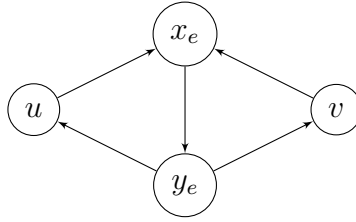
Edeltävien tulosten avulla todistetaan nyt Mengerin lause.

Lause 3.3.1 (Menger (1927)). Olkoot G graafi, s ja r sen jotkin kaksi solmua ja $k \in \mathbb{N}$. Silloin graafilla G on k kappaletta kaariltaan erillistä s - r -polkua, jos ja vain jos solmut s ja r ovat yhdistetyt sen jälkeen kun graafista on poistettu mitkä tahansa $k - 1$ kaarta.

Todistus. Jos graafilla G on k kappaletta kaariltaan erillistä s - r -polkua, niin selvästi solmut s ja r ovat yhdistetyt sen jälkeen kun graafista on poistettu mitkä tahansa $k - 1$ kaarta.

Olkoon graafi G sellainen, että solmut s ja r ovat yhdistetyt sen jälkeen kun graafista on poistettu mitkä tahansa $k - 1$ kaarta. Käsitellään tapaukset missä G on suunnattu ja suuntaamaton erikseen.

Jos G on suunnattu muodostetaan sellainen siirtoverkko $N = (G, s, r, \alpha)$, että $\alpha(e) = 1$ kaikille kaarille e . Koska solmut s ja r ovat yhdistetyt sen



Kuva 3.1: Suuntaamattoman kaaren uv korvaavat solmut ja suunnatut kaaret.

jälkeen kun graafista on poistettu mitkä tahansa $k - 1$ kaarta, niin minimiirrotuksen kapasiteetti on vähintään k . Yhdistämällä lauseet 3.2.6 ja 3.2.7 tiedetään siis, että on olemassa kokonaislukuarvoinen maksimivirtaus, jonka arvo on vähintään k . Lauseesta 3.2.8 seuraa, että tämä maksimivirtaus voidaan osoittaa s - r -polkujen virtauksiksi ja mahdollisesti joiksikin syklien virtauksiksi ja koska kaikki kapasiteetit $\alpha(e)$ ovat arvoa 1 seuraa, että kaariltaan erillisiä s - r -polkuja on oltava vähintään k kappaletta.

Jos taas G on suuntaamaton graafi, korvataan jokainen kaari $e = uv$ viidellä suunnatulla kaarella $ux_e, vx_e, x_e y_e, y_e u$ ja $y_e v$ (katso kuva 3.1). Käytetään tästä uudesta suunnatusta graafista merkintää G' . Edelleen solmu solmut s ja r ovat yhdistetyt sen kun graafista G' poistetaan mitkä tahansa $k - 1$ kaarta. Käyttämällä samaa päättelyä suunnatulle graafille kuin edellä saadaan, että kaariltaan erillisiä s - r -polkuja on oltava vähintään k kappaletta. Lopulta kaaret voidaan muuttaa takaisin suuntaamattomiksi ja saadaan väite todistetuksi myös suuntaamattomille graafeille. □

Lause 3.3.2 (Menger (1927)). Olkoot G graafi, s ja r sen jotkin kaksi eivierekkäistä solmua ja $k \in \mathbb{N}$. Silloin graafilla G on k kappaletta solmuiltaan erillistä s - r -polkua, jos ja vain jos solmut s ja r ovat yhdistetyt sen jälkeen kun graafista on poistettu mitkä tahansa $k - 1$ muuta solmua.

Todistus. Jos graafilla G on k kappaletta solmuiltaan erillistä s - r -polkua, niin selvästi solmut s ja r ovat yhdistetyt sen jälkeen kun graafista on poistettu mitkä tahansa $k - 1$ muuta solmua.

Olkoon graafi G sellainen, että solmut s ja r ovat yhdistetyt sen jälkeen kun graafista on poistettu mitkä tahansa $k - 1$ muuta solmua. Käsitellään tapaukset missä G on suunnattu ja suuntaamaton taas erikseen.

Jos G on suunnattu korvataan jokainen solmu v solmuilla v' ja v'' sekä niiden välisellä kaarella $v'v''$ ja korvataan jokainen kaari uv kaarella $u''v'$. Käytetään tästä uudesta graafista merkintää G' . Jos poistamalla jotkin $k - 1$ kaarta graafista G' solmut s'' ja r' eivät ole yhdistetyt tarkoittaa se sitä,

että graafissa G solmut s ja r eivät ole yhdistetyt poistamalla jotkin korkeintaan $k - 1$ solmua. Jokainen graafin G' kaariltaan erillinen $s''-t'$ -polku vastaa siis solmuiltaan erillistä $s-r$ -polkua graafissa G . Käyttämällä lausetta 3.3.1 saadaan väite todistetuksi suunnatulle graafille G . Jos G on suuntaamaton muutetaan se ensin suunnatuksi graafiksi samoin kuin lauseen 3.3.1 todistuksessa (katso kuva 3.1). Tämän jälkeen voidaan käyttää edellä esitettyä todistusta suunnatuille graafeille ja vielä muuntaa graafi takaisin suuntaamattomaksi. \square

Seuraus 3.3.3 (Whitney (1932)). Suuntaamaton graafi G , jossa on vähintään kaksi solmua, on k -kaariyhtenäinen, jos ja vain jos jokaiselle parille $s, r \in V (s \neq r)$ on k kappaletta kaariltaan erillistä $s-r$ -polkua.

Suuntaamaton graafi G , jossa on vähintään $k + 1$ solmua on k -yhtenäinen, jos ja vain jos jokaiselle parille $s, r \in V (s \neq r)$ on k kappaletta solmuiltaan erillistä $s-r$ -polkua.

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa suoraan lauseesta 3.3.1.

Jos graafista G tulee ei-yhtenäinen poistamalla vähemmän kuin k kappaletta solmua, niin selvästi graafilla ei silloin voi olla k kappaletta solmuiltaan erillistä $s-r$ -polkua jokaiselle parille $s, r \in V$.

Olkoon graafi G sellainen, että sillä ei ole k kappaletta solmuiltaan erillistä $s-r$ -polkua jokaiselle parille $s, r \in V$ ja s ja r eivät ole vierekkäiset. Silloin lauseen 3.3.2 mukaan graafilla G on sellaiset $k - 1$ solmua, että niiden poistamisen jälkeen solmut s ja r eivät ole yhdistetyt.

Olkoon graafi G sellainen, että sillä ei ole k kappaletta solmuiltaan erillistä $s-r$ -polkua jokaiselle parille $s, r \in V$ ja s ja r ovat vierekkäiset. Merkitään solmuja s ja r yhdistäviä rinnakkaisia kaaria joukolla F ($|F| \geq 1$). Selvästi graafilla $G - F$ ei ole $k - |F|$ kappaletta solmuiltaan erillistä $s-r$ -polkua. Tästä seuraa lauseen 3.3.2 mukaan, että on olemassa sellainen solmujen joukko X , jolle $|X| = k - |F| - 1$, että solmujen poistamisen jälkeen solmut s ja r eivät ole yhdistetyt graafissa $G - F$. Olkoon $v \in V \setminus (X \cup \{s, r\})$. Solmu v ei voi olla yhdistetty sekä solmuun s että solmuun r graafissa $(G - F) - X$. Eli solmut s ja v eivät ole yhdistetyt graafissa $G - (X \cup \{r\})$ tai solmut v ja r eivät ole yhdistetyt graafissa $G - (X \cup \{s\})$. \square

Luku 4

k -virtaukset

Tämä kappale perustuu Harjun monisteeseen [5] sekä Goemansin luentomateriaaliin [4]. Lemman 4.0.3 olen muokannut ja todistanut itsenäisesti.

Määritelmä 4.0.1. Olkoot G suuntaamaton graafi, H sen jokin suuntaus ja $\alpha : E_H \rightarrow [0, k - 1]$ sellainen kaarien väritys, että kaikille $v \in V_H$

$$\sum_{e=vu \in H} \alpha(e) = \sum_{f=uv \in H} \alpha(f).$$

Paria (H, α) kutsutaan graafin G k -virtaukseksi. Sanotaan, että k -virtaus on *nowhere-zero -virtaus*, jos $\alpha(e) \neq 0$ kaikilla $e \in H$.

Määritelmä 4.0.2. Olkoot G suuntaamaton graafi, H sen jokin suuntaus ja Γ jokin Abelin ryhmä. *Nowhere-zero Γ -virtaus* on sellainen kaarien väritys $\alpha : E_H \rightarrow \Gamma \setminus \{0\}$, että kaikille $v \in V_H$

$$\sum_{e=vu \in H} \alpha(e) = \sum_{f=uv \in H} \alpha(f).$$

Lemma 4.0.3. Jos α on graafin G Γ -virtaus, niin kaaren $e \in E_G$ suuntaus voidaan kääntää ja $\alpha(e)$ korvata sen additiivisellä vastaluvulla ryhmässä Γ ja näin saada uusi virtaus α' graafille G . Lisäksi, jos α on nowhere-zero -virtaus, niin on myös α' .

Todistus. Olkoot α graafin G Γ -virtaus ja $e^* = uv$ jokin graafin G kaari. Olkoon G' se graafi, joka saadaan poistamalla kaari e^* ja korvaamalla se vastakkaisella kaarella $e' = vu$. Määritellään graafille G' virtaus α' siten, että

$$\alpha'(e) = \begin{cases} \alpha(e), & \text{jos } e \neq e' \\ -\alpha(e^*), & \text{jos } e = e'. \end{cases}$$

Virtauksen säilyminen solmussa u voidaan tarkistaa laskemalla

$$\begin{aligned} & \sum_{e \in \delta^+(u)} \alpha'(e) - \sum_{e \in \delta^-(u)} \alpha'(e) = \sum_{e \in \delta^+(u)} \alpha'(e) - \left(\sum_{e \in \delta^-(u) \setminus e'} \alpha'(e) + \alpha'(e') \right) \\ & = \sum_{e \in \delta^+(u)} \alpha'(e) - \sum_{e \in \delta^-(u) \setminus e'} \alpha'(e) - \alpha'(e') \end{aligned}$$

ja virtauksen α' määritelmästä tämä saadaan muotoon

$$\sum_{e \in \delta^+(u)} \alpha(e) - \sum_{e \in \delta^-(u)} \alpha(e) + \alpha(e^*) = \sum_{e \in \delta^+(u) \cup \{e^*\}} \alpha(e) - \sum_{e \in \delta^-(u)} \alpha(e) = 0$$

Samalla tavalla voidaan tarkistaa virtauksen säilyminen solmussa v . Eli koska α on graafin G virtaus, niin on myös α' graafille G' .

Jälkimmäinen väite seuraa suoraan tiedosta, että $\alpha(e^*) \neq 0$ ja silloin myös $-\alpha(e^*) \neq 0$, mistä tietysti seuraa, että $\alpha'(e') \neq 0$. \square

Lause 4.0.4. Suuntaamattomalla graafilla G on nowhere-zero $-k$ -virtaus jos ja vain jos sillä on nowhere-zero $-\mathbb{Z}_k$ -virtaus.

Todistus. Selvästi nowhere-zero $-k$ -virtaus on myös nowhere-zero $-\mathbb{Z}_k$ -virtaus. Riittää siis osoittaa, että jos suuntaamattomalla graafilla G on nowhere-zero $-\mathbb{Z}_k$ -virtaus niin sillä on silloin myös nowhere-zero $-k$ -virtaus.

Olkoot G suuntaamaton graafi, H sen jokin suuntaus ja α nowhere-zero $-\mathbb{Z}_k$ -virtaus. Määritellään jokaiselle solmulle $v \in V_G$ ryhmän \mathbb{Z} operaation suhteen luku

$$c(v) = \sum_{e \in \delta^+(v)} \alpha(e) - \sum_{e \in \delta^-(v)} \alpha(e).$$

On tärkeää huomata, että kaikki luvut $c(v)$ ovat luvun k monikertoja. Lisäksi voidaan vielä olettaa, että α on se nowhere-zero $-\mathbb{Z}_k$ -virtaus, jolle $\sum_{v \in V_G} |c(v)|$ on pieni mahdollinen. Jos $\sum_{v \in V_G} |c(v)| = 0$ on löydetty nowhere-zero $-k$ -virtaus.

Oletetaan, että $\sum_{v \in V_G} |c(v)| \neq 0$. Olkoot S niiden solmujen joukko, joille $c(v) > 0$ ja T niiden solmujen joukko, joille $c(v) < 0$. Koska $\sum_{v \in V_G} |c(v)| > 0$ ja $\sum_{v \in V_G} c(v) = 0$ niin S ja T eivät voi olla tyhjiä joukkoja. Olkoon U niiden solmujen joukko, jotka ovat saavutettavissa joukosta S . Jos $U \cap T \neq \emptyset$ niin

$$0 < \sum_{v \in U} c(v) = \sum_{e \in \delta^+(U)} \alpha(e) - \sum_{e \in \delta^-(U)} \alpha(e).$$

Mutta koska $\delta^+(U) = \emptyset$ ja siitä seuraa, että $\sum_{e \in \delta^+(U)} \alpha(e) - \sum_{e \in \delta^-(U)} \alpha(e) \leq 0$ ja saadaan ristiriita. Tästä seuraa, että $U \cap T = \emptyset$ ja se tarkoittaa, että on

olemassa suunnattu polku P jostain solmusta $s \in S$ johonkin solmuun $t \in T$. Tämän jälkeen käännetään polun P virtaus vastakkaiseen suuntaan. Eli jokaiselle kaarelle $e \in P$ määritellään vastakkaiseen suuntaan virtaava kaari e' ja lisäksi määritellään virtaus α' siten, että

$$\begin{aligned}\forall e \in P : \alpha'(e') &= k - \alpha(e) \\ \forall e \notin P : \alpha'(e) &= \alpha(e).\end{aligned}$$

Lemman 4.0.3 nojalla tämä on sallittua ja myös α' on nowhere-zero $-\mathbb{Z}_k$ -virtaus. Olkoot kaikille $v \in V_G$

$$c'(v) = \sum_{e \in \delta^+(v)} \alpha'(e) - \sum_{e \in \delta^-(v)} \alpha'(e).$$

Nyt kaikille $v \in V_G \setminus \{s, t\}$ saadaan $c'(v) = c(v)$ ja lisäksi $c'(s) = c(s) - k$ sekä $c'(t) = c(t) + k$. Siitä seuraa, että $\sum_{v \in V_G} |c'(v)| < \sum_{v \in V_G} |c(v)|$, mutta tämä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että $\sum_{v \in V_G} |c(v)|$ on pienin mahdollinen. Siispä $\sum_{v \in V_G} |c(v)| = 0$ ja graafille G on olemassa nowhere-zero $-k$ -virtaus. \square

4.1 Nash-Williamsin lause

Tässä kappaleessa esitetään todistuksineen Nash-Williamsin lause, joka yhdistää graafin kaariyhtenäisyyden ja virittävien puiden lukumäärän. Kyseistä lausetta tarvitaan myöhemmin tässä luvussa esitettyjen lauseiden todistamiseen. Kappale perustuu Catlinin, Lain ja Shaon artikkeliin [2]. Esitetään ensin ilman todistusta Edmondsin lause:

Lause 4.1.1 (Edmonds (1972)). Epät triviaalilla suunnatulla graafilla D on k kaariltaan erillistä virittävää puurakennetta jos ja vain jos kaikille solmujen epätyhjille osajoukkojen $X_1, X_2, \dots, X_t \subseteq V_D$ joukolle pätee, että

$$\sum_{i=1}^t \delta^+(X_i) \geq k(t-1) \Leftrightarrow \min_{Y \subseteq E_D} \frac{|Y|}{c(D-Y)-1} \geq k,$$

missä $Y \subseteq E_D$ on sellainen, että $c(E_D - Y) \geq 2$.

Lause 4.1.2. Suunnattu graafi D on k -polkuyhtenäinen jos ja vain jos kaikille $Y \subseteq E_D$, missä $|Y| \leq k$, graafilla $D - Y$ on k kaariltaan erillistä virittävää puurakennetta.

Todistus. Olkoon G suunnatun graafin D allaoleva graafi eli $G = U(D)$. Määritellään $c(D) = c(G)$.

Oletetaan ensin, että $X \subseteq E_D$ on sellainen, että $c(D - X) \geq 2$. Olkoot $W_1, W_2, \dots, W_{c(D-X)}$ graafin $D - X$ komponentit. Olkoon k pienin minkä tahansa komponentin lähtökaarien määrä. Selvästi ainakin $\delta^+(W_i) \geq k$ kaarella joukossa X on päätepiste komponentissa W_i graafissa $D - X$. Saadaan

$$|X| = \sum_{i=1}^{c(D-X)} \delta^+(W_i) \geq k \cdot c(D - X).$$

Koska tämä pätee myös kaikille sellaisille kaarijoukoille, jotka saadaan kahden muun kaarijoukon unionina $X = Y \cup Y'$, missä $Y \subseteq E_D$, $|Y| \leq k$ ja $Y \cap Y' = \emptyset$, niin

$$|Y'| + k \geq |Y \cup Y'| = |X| \geq k \cdot c(D - X) = k \cdot c((D - Y) - Y')$$

ja silloin tietysti

$$|Y'| \geq k \left(c((D - Y) - Y') - 1 \right)$$

mistä saadaan

$$\frac{|Y'|}{c((D - Y) - Y') - 1} \geq k.$$

Koska $X \subseteq E_D$ on mielivaltainen ja $Y \subseteq X$, niin Y' käy läpi kaikki kaarien osajoukot graafissa $D - Y$ kaikille $Y \subseteq E_D$ ja $|Y| \leq k$, missä $c((D - Y) - Y') \geq 2$. Ja kun kaikki vaihtoehdot on käyty läpi voidaan todeta, että myös

$$\min_{Y' \subseteq E_{D-Y}} \frac{|Y'|}{c((D - Y) - Y') - 1} \geq k$$

kaikille $Y \subseteq E_D$ ja $|Y| \leq k$. Korvaamalla graafi $D - Y$ graafilla D ja osajoukko Y' osajoukolla Y saadaan

$$\min_{Y \subseteq E_D} \frac{|Y|}{c(D - Y) - 1} \geq k$$

ja Edmondsin lauseesta 4.1.1 seuraa, että graafilla D on k kaariltaan erillistä virittävää puurakennetta.

Oletetaan vielä, että kaikille kaarien osajoukoille $Y \subseteq E_D$, missä $|Y| \leq k$, graafilla $D - Y$ on k kaariltaan erillistä virittävää puurakennetta. Tehdään kuitenkin myös sellainen vastaoletus, että on olemassa sellainen epätyhjä

joukko $V_0 \subset V_D$, jolle $\delta^+(V_0) < k$. Olkoon $Y = [V_0, V_D - V_0]$. Nyt $c(D - Y) \geq 2$, $Y = \delta^+(V_0) \cup \delta^-(V_0)$ ja $\delta^+(V_0) \cap \delta^-(V_0) = \emptyset$. Koska $c(D - Y) \geq 2$ saadaan

$$\frac{|\delta^+(V_0)|}{c(D - \delta^-(V_0) - \delta^+(V_0)) - 1} \leq |\delta^+(V_0)| < k,$$

mikä on ristiriidassa Edmondsin lauseen 4.1.1 ehdon $\min_{Y \subset E_D} \frac{|Y|}{c(D - Y) - 1} \geq k$ kanssa.

Eli suunnattuu graafi D on k -polkuyhtenäinen jos ja vain jos kaikille $Y \subseteq E_D$, missä $|Y| \leq k$, graafilla $D - Y$ on k kaariltaan erillistä virittävää puurakennetta. \square

Lemma 4.1.3 (Nash-Williams (1961)). Graafilla G on k -polkuyhtenäinen suuntaus jos ja vain jos se on $2k$ -kaariryhtenäinen.

Lemma 4.1.4. Olkoot G graafi ja $k \in \mathbb{Z}_+$. Silloin G on $2k$ -kaariryhtenäinen jos ja vain jos graafilla $G - X$ on k kaariltaan erillistä virittävää puuta kaikille $X \in E_G$, missä $|X| \leq k$.

Todistus. Oletetaan, että G on $2k$ -kaariryhtenäinen. Silloin lemmasta 4.1.3 seuraa, että graafilla G on k -polkuyhtenäinen suuntaus D . Lauseesta 4.1.2 saadaan, että suunnattu graafi D on sellainen, että, graafilla $D - X$ on k kaariltaan erillistä virittävää puurakennetta kaikilla $X \subseteq E_D$, missä $|X| \leq k$.

Tehdään sitten vastaoletus, että graafilla G on irrotusjoukko W , jolle $|W| < 2k$. Olkoon $Y \subseteq W$ sellainen kaarien joukko, että $|Y| = \min\{k, |W|\} \leq k$. Selvästi $W - Y$ on graafin $G - Y$ irrotusjoukko. Mutta koska $|X| \leq k$ ja $|W| < 2k$, niin $|W - X| \leq k - 1$ eikä graafilla $G - X$ voi olla k kaariltaan erillistä virittävää puuta.

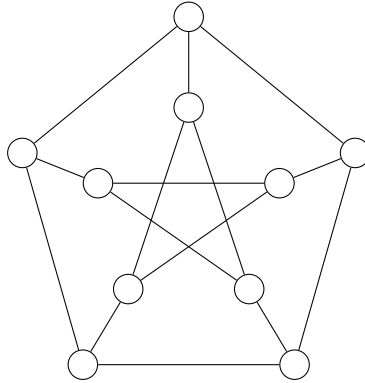
Eli, jos kaikille $X \in E_G$, missä $|X| \leq k$, graafilla $G - X$ on k kaariltaan erillistä virittävää puuta niin graafilla G on sellainen suuntaus D , että graafilla $D - X$ on k kaariltaan erillistä virittävää puurakennetta kaikilla $X \subseteq E_D$, missä $|X| \leq k$. Ja koska jokainen virittävä puurakenne suunnatussa graafissa D on virittävä puu graafissa G saadaan väite todistetuksi. \square

Tästä saadaan hieman yksinkertaistettu seuraus, jota tarvitaan myöhemmissä todistuksista.

Seuraus 4.1.5 (Nash-Williams). Jos suuntaamaton graafi on $2k$ -kaariryhtenäinen niin sillä on k kaariltaan erillistä virittävää puuta.

4.2 Tutten nowhere-zero -ongelma

Tämän kappaleen lähteenä on käytetty Goemansin luentomuistiinpanoja [4] ellei toisin mainita.



Kuva 4.1: Petersenin graafi.

Väite 4.2.1 (Tutte (1954)). Jokaisella sillattomalla graafilla on nowhere-zero -5 -virtaus.

Koska Petersenin graafilla (katso kuva 4.1) ei ole nowhere-zero -4 -virtausta, on nowhere-zero -5 -virtaus paras mahdollinen nowhere-zero -virtaus, joka mahdollisesti voitaisiin löytää kaikille sillattomille graafeille.

Seuraavaksi esitetään muutamia tuloksia, jotka yhdistävät kaariyhtenäisyyden ja nowhere-zero $-k$ -virtaukset.

Lause 4.2.2 (Jaeger (1979)). Jos suuntaamaton graafi on 4-kaariyhtenäinen, niin sillä on nowhere-zero -4 -virtaus.

Lause 4.2.3 (Jaeger). Suuntaamattomalla sillattomalla graafilla on nowhere-zero -8 -virtaus.

Ennen kun todistetaan Jaegerin lauseet, esitetään vielä yksi hyödyllinen lemma.

Lemma 4.2.4. Suuntaamattomalla graafilla G on nowhere-zero -2^p -virtaus jos ja vain jos on olemassa sellainen kaarien partitiio $F_1, F_2, \dots, F_p \subset E_G$, että $E_G = \cup_{i=1}^p F_i$ ja kaikille $i \in [1, p]$ kaikki graafin F_i solmut ovat parillista astetta.

Todistus. Oletetaan ensin, että F_1, \dots, F_p on jokin graafin G kaarien partitiio. Määritellään $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$ -virtaus α siten, että

$$[\alpha(e)]_i = \begin{cases} 1, & \text{jos } e \in F_i \\ 0, & \text{jos } e \notin F_i. \end{cases}$$

Koska jokainen graafin G kaari on osa jotain osajoukkoa F_i niin α on nowhere-zero $-\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$ -virtaus.

Oletetaan seuraavaksi, että α on graafin G nowhere-zero $-\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ -virtaus. Näin voidaan olettaa, sillä graafilla G on nowhere-zero -2^p -virtaus. Määritellään sitten kaikille $i \in [1, p]$

$$F_i = \{e \mid e \in E_G \text{ ja } [\alpha(e)]_i = 1\}.$$

Virtauksen säilymisehdosta seuraa, että kaikki graafin F_i solmut ovat parillista astetta ja koska α on nowhere-zero $-\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ -virtaus, niin jokaisen kaaren on oltava osa ainakin yhtä osajoukkoa F_i , eli $E = \cup_{i=1}^p F_i$. \square

Todistetaan seuraavaksi lause 4.2.2.

Todistus. Aloitetaan toteamalla, että Nashin ja Williamsin tuloksesta (seuraus 4.1.5) seuraa suoraan, että graafilla G on kaksi kaariltaan erillistä virittävää puuta. Käytetään näistä merkintöjä T_1 ja T_2 . Osoitetaan seuraavaksi, että on olemassa jokin sellainen virittävän puun T_1 aligraafi A_1 , että kaikki graafin $(E_G \setminus T_1) \cup A_1$ solmut ovat parillista astetta.

Todistetaan väite käyttämällä algoritmikehitelmää.

1. Asetetaan $U := (E_G \setminus T_1)$, $A_1 := \emptyset$ ja $T := T_1$.
2. Etsi sellainen solmu v , että se on lehti puussa T . **Jos** solmuja on jäljellä vain yksi **lopeta**.
3. **Jos** solmun v aste graafissa U on pariton asetetaan $U := U + e$ ja $A_1 := A_1 + e$, missä e on se kaari puussa T jonka päätepiste v on. Muuten ei tehdä mitään.
4. $T := T - v$.
5. Palaa kohtaan 2.

Nyt kaikkien graafin U solmujen aste on selvästi parillinen algoritmin viimeistä solmua luukuun ottamatta. Mutta koska lemmän 2.1.4 mukaan kaikkien graafin solmujen asteiden summan on oltava parillinen, niin myös viimeisen solmun asteen on oltava parillinen. Joten saadaan $U = (E_G \setminus T_1) \cup A_1$ missä graafin U kaikkien solmujen aste on parillinen.

Vastaavalla tavalla voidaan löytää sellainen virittävän puun T_2 aligraafi A_2 , että kaikki graafin $(E_G \setminus T_2) \cup A_2$ solmut ovat parillista astetta. Merkitään $F_1 = (E_G \setminus T_1) \cup A_1$ ja $F_2 = (E_G \setminus T_2) \cup A_2$. Koska $E_{T_1} \cap E_{T_2} = \emptyset$ saadaan $F_1 \cup F_2 = E_G$ ja lemmasta 4.2.4 seuraa, että graafilla G on nowhere-zero -4 -virtaus. \square

Todistetaan vielä lause 4.2.3.

Todistus. Oletetaan ensin, että G on 3-kaariyhtenäinen. Muodostetaan graafi G' kahdentamalla jokainen kaari graafissa G . G' on nyt selvästi 6-kaariyhtenäinen. Seurauksesta 4.1.5 saadaan, että on olemassa kolme kaariltaan erillistä viritävää puuta T'_1 , T'_2 ja T'_3 , joille $T'_1 \cup T'_2 \cup T'_3 = E_{G'}$. Määritellään uudet puut T_i siten, että

$$T_i = \{e \mid \text{kaarilla } e \text{ on puussa } T'_i \text{ tai kaaren } e \text{ kopio on puussa } T'_i\}.$$

Nyt T'_1 , T'_2 ja T'_3 ovat sellaiset joukon E_G alijoukot, että jokaista kaarta e kohti on olemassa puu T_i johon kaari e ei kuulu. Käyttämällä samaa päättelyä kuin edellisessä todistuksessa todetaan, että on olemassa sellaiset joukot A_1 , A_2 ja A_3 joille pätee, että graafissa $F_i = (E \setminus T_i) \cup A_i$ jokaisen solmun aste on parillinen. Koska jokaista kaarta e kohti on olemassa puu T_i johon kaari e ei kuulu, niin jokainen kaari e kuuluu ainakin yhteen graafiin F_i ja saadaan $F_1 \cup F_2 \cup F_3 = E$. Käyttämällä vielä lemmaa 4.2.4 saadaan väite todistettua 3-kaariyhtenäiselle graafille.

Oletetaan sitten, että graafi G on sillaton, mutta ei 3-kaariyhtenäinen. Tällöin on olemassa irrotusjoukko $\{e_1, e_2\}$. Lemman 4.0.3 mukaan voidaan olettaa, että kaarien e_1 ja e_2 suuntaukset ovat vastakkaiset. Oletetaan vielä, että graafin $G \setminus \{e_1, e_2\}$ kummallakin komponentilla on nowhere-zero -8-virtaus. Nyt myös graafilla $G' = G \setminus e_1$ on nowhere-zero -8-virtaus α' . Määritellään virtaus α siten, että

$$[\alpha(e)] = \begin{cases} \alpha'(e), & \text{jos } e \neq e_1 \\ \alpha'(e_2), & \text{jos } e = e_1. \end{cases}$$

Irrotusjoukon virran säilymisehdosta seuraa, että α on graafin G nowhere-zero -8-virtaus. Induktiolla saadaan väite todistettua. \square

4.3 Seymourin 6-virtaukset

Edellisessä kappaleessa nähtiin, että jokaisella sillattomalla graafilla on nowhere-zero -8-virtaus. Seymour osoitti kuitenkin 70-luvulla, että tätä tulosta voidaan parantaa ja jokaisella sillattomalla graafilla on nowhere-zero -6-virtaus. Tutun avoin ongelma 4.2.1 on vielä ratkaisematta. Lähimmäksi ratkaisua on toistaiseksi päässyt Seymour tuloksellaan.

Tässä kappaleessa esitetään Seymourin lauseelle DeVosin, Rollován ja Šámalin todistus, joka poikkeaa Seymourin alkuperäisestä todistuksesta. Todistus perustuu sille huomiolle, että $\mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ja, jos α_2 on \mathbb{Z}_2 -virtaus ja α_3

on \mathbb{Z}_3 -virtaus, niin näiden yhdiste muodostaa \mathbb{Z}_6 -virtauksen, kun $\text{supp}(\alpha_2) \cup \text{supp}(\alpha_3) = E_G$.

Tämän kappaleen lähteenä on käytetty DeVosin, Rollován ja Šámalin artikkelia [3].

Määritelmä 4.3.1. Olkoon G 2-kaariyhtenäinen graafi. Määritellään kaarille e ja f ekvivalenssirelaatio \sim siten, että $e \sim f$, jos $e = f$ tai $\{e, f\}$ on 2-irrotusjoukko. Kutsutaan relaation \sim ekvivalenssiluokkia *yleistetyiksi sarjaluokiksi*.

Lemma 4.3.2. Olkoon G suunnattu graafi ja u sen jokin määrätty *juurisolmu*. Olkoon joukko $S \subseteq \delta(u)$ sellainen, että $|S| = 2$. Määritellään funktiot $\psi_2 : S \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ja $\psi_3 : \delta(u) \rightarrow \mathbb{Z}_3$. Oletetaan, että

1. $\delta(v) = 3$ kaikille $v \in V_G \setminus \{u\}$,
2. G on 3-kaariyhtenäinen,
3. $G - u$ on 2-kaariyhtenäinen,
4. $\sum_{e \in \delta^+(u)} \psi_3(e) - \sum_{e \in \delta^-(u)} \psi_3(e) = 0$.

Silloin on olemassa sellaiset virtaukset $\alpha_2 : E_G \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ja $\alpha_3 : E_G \rightarrow \mathbb{Z}_3$, että $\alpha_2|_S = \psi_2$, $\alpha_3|_{\delta(u)} = \psi_3$ ja $(\alpha_2(e), \alpha_3(e)) \neq (0, 0)$ kaikille $e \in E_G \setminus \delta(u)$.

Todistus. Todistetaan lemma induktiolla graafin G kertaluvun ν_G suhteen. Aloitetaan tapauksesta, jossa $\nu_G = 2$, eli graafista, jossa on kaksi solmua ja kolme rinnakkaista solmut yhdistävää kaarta. Olkoon silloin $\alpha_3 = \psi_3$ ja valitaan $\alpha_2 : E_G \rightarrow \mathbb{Z}_2$ siten, että $\alpha_2|_S = \psi_2$ ja $|\text{supp}(\alpha_2)|$ on parillinen. Koska ehdosta (2) seuraa, että solmun u aste on vähintään 3, niin $\delta(u) \setminus S \neq \emptyset$ ja tällainen valinta on aina mahdollinen. Nyt α_2 ja α_3 täyttävät kaikki virtauksien ehdot, ja myös ehto $(\alpha_2(e), \alpha_3(e)) \neq (0, 0)$ täyttyy kaikille $e \in E_G \setminus \delta(u)$.

Seuraavaksi valitaan sellainen kaari e , että $e = uv \in \delta(u) \setminus S$. Ehdoista (1) ja (2) seuraa, että voidaan määritellä sellainen yleistetty sarjaluokka F , että se sisältää ne molemmat kaaret joiden päätepiste on solmu v graafissa $G - u$. Olkoot G_0, \dots, G_{l-1} graafin $(G - u) - F$ komponentit ja oletetaan, että ne ovat järjestetyt siten, että F sisältää kaaren f_k komponenttien G_k ja G_{k+1} välillä. Tässä $k \in [0, l-1] \pmod{l}$. Kaari f_k määrittyy aina yksikäsitteisesti kaikissa muissa tapauksiassa paitsi, jos $l = 2$. Tuolloin kaaria komponenttien välillä on 2, joten vaaditaan lisäksi, että $f_0 \neq f_1$. Solmusta u menee jokaiseen komponenttiin G_k vähintään yksi kaari koska graafi G on 3-kaariyhtenäinen, sillä muuten kaaret f_{k-1} ja f_k muodostaisivat 2-irrotusjoukon. Päätetään vielä,

että komponentti G_0 on se komponentti, joka koostuu ainoastaan solmusta v . Lisäksi joukon S kaaret menevät komponentteihin G_i ja G_j , missä $0 < i \leq j$ (katso kuva 4.2).

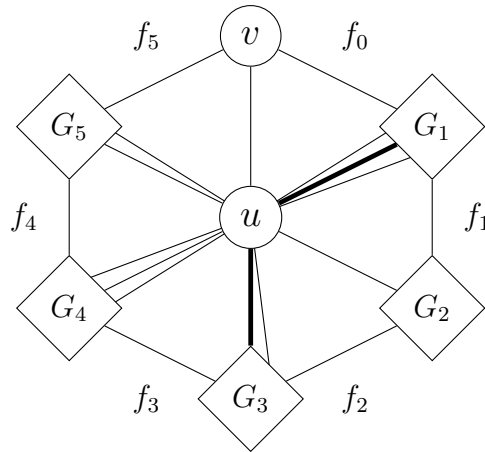
Muodostetaan seuraavaksi graafi G^* yhdistämällä jokaisen komponentin G_i solmut yhdeksi solmuksi kaikille $i \in [0, l-1]$ (katso kuva 4.3). Nyt funktion ψ_3 määrittelyjoukkoa voidaan laajentaa joukolla F niin, että ψ_3 on graafin G^* \mathbb{Z}_3 -virtaus. Graafilla G^* on lisäksi sellainen \mathbb{Z}_3 -virtaus, että sen kantaja on joukko F ja lisäämällä tämän virtauksen sopiva monikerta virtaukseen ψ_3 saadaan, että $\psi_3(f_{i-1}) \neq 0 \neq \psi_3(f_j)$. Laajennetaan vielä funktion ψ_2 määrittelyjoukkoa niin, että $\psi_2(f) = 1$ kaikilla $f \in F \setminus \{f_{i-1}, f_j\}$. Arvot $\psi_2(f_{i-1})$ ja $\psi_2(f_j)$ määritellään myöhemmin.

Muodostetaan sitten jokaiselle $k \in [0, l-1]$ graafi G_k^+ yhdistämällä solmut joukossa $V_G \setminus V_{G_k}$ yhdeksi juurisolmuksi u'_k (katso kuva 4.4). Yhdistämällä solmut graafin G_k^+ komponentissa G_k ja käyttämällä funktion ψ_3 rajoittumana niitä kaaria, joiden päätepiste on u'_k , saadaan sama tilanne kuin todistuksen alussa esitetyllä kahden solmun graafilla. Lisäksi tämä graafi voidaan myös solmuja yhdistämällä muodostaa graafista G^* , jossa ψ_3 on virtaus. Siksi voidaan todeta, että graafin G_k^+ uusi juurisolmu täyttää virtauksen säilymisen ehdon funktiolle ψ_3 .

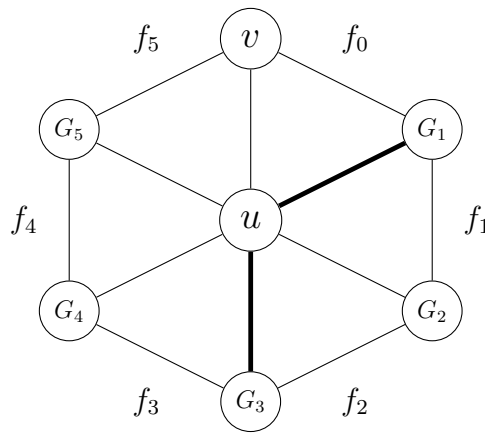
Jos $i = j$, niin molemmilla joukon S kaarilla on päätepiste komponentissa G_i . Graafi G_k^+ , joukko S sekä funktiot $\psi_2|_S$ ja $\psi_3|_{\delta(u'_i)}$ täyttävät nyt edellisen päättelyn nojalla lemmän oletukset. Määritellään graafille G_i^+ virtaukset $\alpha_2^i : E_{G_i^+} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ja $\alpha_3^i : E_{G_i^+} \rightarrow \mathbb{Z}_3$ siten, että $\psi_2(f_{i-1}) = \alpha_2^i(f_{i-1})$ ja $\psi_2(f_i) = \alpha_2^i(f_i)$. Nyt voidaan soveltaa induktiota yksitellen kaikille muille graafeille G_k^+ niin, että korvataan kaaret joukossa S kaarilla f_{k-1} ja f_k , eli muutetaan funktioiden ψ_2 ja ψ_3 rajoittumiksi $\{f_{k-1}, f_k\}$ funktiolle ψ_2 ja $\delta(u'_k)$ funktiolle ψ_3 . Määritellään vielä jokaiselle G_k^+ virtaukset $\alpha_2^k : E_{G_k^+} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ja $\alpha_3^k : E_{G_k^+} \rightarrow \mathbb{Z}_3$. Yhdistämällä kaikki virtaukset α_2^k ja α_3^k virtauksiin $\alpha_2^i : E_{G_i^+} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ja $\alpha_3^i : E_{G_i^+} \rightarrow \mathbb{Z}_3$ saadaan virtaukset α_2 ja α_3 . Nyt ehdot $\alpha_2|_S = \psi_2$, $\alpha_3|_{\delta(u)} = \psi_3$ ja $(\alpha_2(e), \alpha_3(e)) \neq (0, 0)$ täyttyvät kaikille $e \in E_G \setminus \delta(u)$. Koska ne myös täyttävät virtauksen säilymisen ehdon jokaisessa solmussa graafeissa G_k^+ niin silloin ne myös täyttävät sen kaikille solmuille $V_G \setminus \{u\}$. Koska virtaus säilyy kaikissa solmuissa paitsi mahdollisesti yhdessä, niin sen on säilyttävä myös tässä yhdessä solmussa. Virtaukset α_2 ja α_3 muodostavat nyt ratkaisun alkuperäiseen ongelmaan.

Jos taas $i < j$ muodostetaan samoin kuin edellisessä tapauksessa ensin virtaukset $\alpha_2^i : E_{G_i^+} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ja $\alpha_3^i : E_{G_i^+} \rightarrow \mathbb{Z}_3$ graafille G_i^+ , kaarelle f_i sekä joukon S kaarelle jonka päätepiste on komponentissa G_i . Tehdään vielä sama graafille G_j^+ , kaarelle f_{j-1} ja joukon S kaarelle jonka päätepiste on komponentissa G_j . Olkoon virtaukset $\alpha_2^j : E_{G_j^+} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ja $\alpha_3^j : E_{G_j^+} \rightarrow \mathbb{Z}_3$. Koska $i < j$

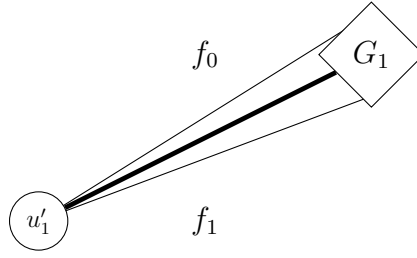
ovat f_{i-1} ja f_j erilliset kaaret ja voidaan määritellä $\psi_2(f_{i-1}) = \alpha_2^i(f_{i-1})$ sekä $\psi_2(f_j) = \alpha_2^j(f_j)$. Lopuksi käytetään vielä induktiota kaikille muille graafeille G_k^+ sekä kaarille f_{k-1}, f_k . Muodostuneet \mathbb{Z}_2 - ja \mathbb{Z}_3 -virtaukset ratkaisevat alkuperäisen ongelman. \square



Kuva 4.2: Lemman 4.3.2 todistuksessa esitetty graafi G , missä $l = 6$, $i = 1$ ja $j = 3$. Joukon S kaaret ovat piirretty lihavoituna.



Kuva 4.3: Lauseen 4.3.2 todistuksessa muodostettu graafi G^* kuvan 4.2 graafista.



Kuva 4.4: Lauseen 4.3.2 todistuksessa muodostettu graafi G_1^+ kuvan 4.2 graafista.

Lemma 4.3.3 (Seymour). Jokaisella 3-kaariyhtenäisellä kuutiollisella graafilla on nowhere-zero $-\mathbb{Z}_6$ -virtaus.

Todistus. Olkoon G 3-kaariyhtenäinen kuutiollinen graafi. Valitaan mielivaltainen juurisolmu u ja sellaiset funktiot ψ_2 ja ψ_3 , että $\text{supp}(\psi_2) \cup \text{supp}(\psi_3) = \delta(u)$. Koska $\delta(u) = 3$, on graafi $G - u$ 2-kaariyhtenäinen. Lemman 4.3.2 mukaan on olemassa sellaiset virtaukset $\alpha_2 : E_G \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ja $\alpha_3 : E_G \rightarrow \mathbb{Z}_3$, että $\alpha_2|_S = \psi_2$, $\alpha_3|_{\delta(u)} = \psi_3$ ja $(\alpha_2(e), \alpha_3(e)) \neq (0, 0)$ kaikille $e \in E_G \setminus \delta(u)$. Isomorfismista $\mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ seuraa, että ollaan löydetty nowhere-zero $-\mathbb{Z}_6$ -virtaus. \square

Lause 4.3.4 (Seymour). Jokaisella sillattomalla graafilla on nowhere-zero $-\mathbb{Z}_6$ -virtaus.

Todistus. Lauseen 4.0.4 nojalla riittää todistaa, että jokaisella sillattomalla graafilla on nowhere-zero $-\mathbb{Z}_6$ -virtaus. Merkitään $V_{3+}(G) = \{v \in V_G \mid \delta(v) \geq 3\}$.

Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen sillaton graafi G , jolla ei ole nowhere-zero $-\mathbb{Z}_6$ -virtausta. Valitaan graafi G siten, että ensin minimooidaan 2-irrotusjoukkoihin kuuluvien kaarien määrä ja sitten $\sum_{v \in V_{3+}(G)} (\delta(v) - 3)$. Voidaan olettaa, että $\nu_G \geq 3$, sillä muuten todistus on triviaali.

Jos graafilla G on irrotussolmu v niin on olemaassa kaksi kaariltaan erillisistä aligraafia G_1 ja G_2 , joille $G_1 \cup G_2 = G$ ja $V_{G_1} \cap V_{G_2} = \{v\}$. Koska sekä G_1 että G_2 ovat sillattomia seuraa minimaalisuusvaatimuksesta, että näillä molemmilla on nowhere-zero $-\mathbb{Z}_6$ -virtaus, sillä muuten valittu graafi olisi jompikumpi näistä. Mutta tästä seuraa, että myös graafilla G on nowhere-zero $-\mathbb{Z}_6$ -virtaus, eli saadaan ristiriita.

Jos taas graafilla G on 2-irrotusjoukko $\{e_1, e_2\}$ saadaan minimaalisuusvaatimuksesta, että graafilla $G \setminus e_1$ on nowhere-zero $-\mathbb{Z}_6$ -virtaus α . Virtauksen säilymishdosta irrotukselle, seuraa kuitenkin, että $\alpha(e_1) = \pm \alpha(e_2)$ ja koska α on nowhere-zero $-\mathbb{Z}_6$ -virtaus graafilla $G \setminus e_1$ niin $\alpha(e_2) \neq 0$. Tästä saadaan,

että myös $\alpha(e_1) \neq 0$ ja α on nowhere-zero $-\mathbb{Z}_6$ -virtaus. Eli saadaan taas ristiriita.

Oletetaan vielä, että graafilla G on solmu v , jolle $\delta(v) > 3$. Olkoot e_1, e_2, \dots, e_k ne kaaret, joiden päätepiste on v . Olkoon C_k erillinen sykli, jolla on solmut v_1, v_2, \dots, v_k . Muodostetaan uusi graafi G' vaihtamalla jokaisen kaaren e_i päätepiste v solmuksi v_i kaikilla $i \in [1, k]$. Tämän jälkeen poistetaan solmu v . Jos tällä uudella graafilla G' nyt on silta, 2-irrotusjoukko tai irrotussolmu, niin sellainen on myös helposti löydettävissä alkuperäisestä graafista G . Eli graafin G' on oltava 3-kaariyhtenäinen, mutta minimalisuusvaatimuksesta seuraa, että sillä on oltava nowhere-zero $-\mathbb{Z}_6$ -virtaus. Yhdistämällä syklin C_k solmut yhdeksi, saadaan alkuperäinen graafi G , mutta nyt sille on löydetty nowhere-zero $-\mathbb{Z}_6$ -virtaus ja saadaan taas ristiriita.

Tästä seuraa, että graafi G on 3-kaariyhtenäinen ja kuutiollinen, joten lemmän 4.3.3 mukaan sillä on nowhere-zero $-\mathbb{Z}_6$ -virtaus. \square

Kirjallisuutta

- [1] Anders Björn and Jana Björn. *Nonlinear Potential Theory on Metric Spaces*. European Mathematical Society, 2011.
- [2] Paul A. Catlin, Hong-Jian Lai, and Yehong Shao. Edge-connectivity and edge-disjoint spanning trees. *Discrete Mathematics*, 309:1033–1040, March 2009.
- [3] Matt DeVos, Edita Rollová, and Robert Šámal. A new proof of Seymour’s 6-flow theorem. <https://arxiv.org/abs/1512.06214>, 2015. Luettu: 20.04.2020.
- [4] Michel X. Goemans. *Advanced Combinatorial Optimization*. MIT, 2009. Lecture 5.
- [5] Tero Harju. *Lecture Notes on Graph Theory*. University of Turku, 1994-2012.
- [6] Markku Koppinen. *Algebran peruskurssi I*. Turun yliopisto, 2005.
- [7] Bernhard Korte and Jens Vygen. *Combinatorial Optimization Theory and Algorithms*. Springer Verlag, 4th edition, 2008.
- [8] Keijo Ruohonen. *Graafiteoria*. Tampere University of Technology, 2013.
- [9] Luca Trevisan. *Optimization*. Stanford University, 2011. Lecture 11.
- [10] Kari Ylinen. *Topologian perusteet*. Turun yliopisto, 2011.