



<input type="checkbox"/>	Kandidaatintutkielma
<input checked="" type="checkbox"/>	Pro gradu -tutkielma
<input type="checkbox"/>	Lisensiaatintutkielma
<input type="checkbox"/>	Väitöskirja

Oppiaine	Taloustiede	Päivämäärä	4.9.2020
Tekijä	Iiro Marttila	Sivumäärä	78 s. + liitteet
Otsikko	Systemiriskin mittaaminen soveltaen CoVaR-mittaa: Esimerkkinä eurooppalaiset pankit 2010-luvulla		
Ohjaaja	Prof. Jouko Vilmunen		

Tiivistelmä

Tämän tutkielman tavoitteena on tarkastella ehdollisen *VaR*-mitan eli *CoVaR*-mitan kykyä mitata eurooppalaisten pankkien systeemiriskiä 2010-luvulla. Systemiriski määritellään sellaisena finanssimarkkinoiden makrotason riskinä, joka kehittyy ajan myötä finanssimarkkinoilla ja joka toteutuessaan uhkaa finanssimarkkinoiden vakautta ja aiheuttaa ongelmia useille eri finanssitoimijoille. Merkittäväksi kasvanut systeemiriski voi toteutuessaan laukaista systeemikriisin, jolloin systeemiriskistä aiheutuu merkittäviä ongelmia myös reaali-markkinoiden puolelle. Tunnettu esimerkki merkittävästä systeemikriisistä on vuosien 2007–2009 välinen globaali finanssikriisi, jonka aikana systeemiriski pääsi leviämään laajasti eri markkinatoimijoiden välillä.

Perinteisesti finanssimarkkinoiden riskiä on kuvattu mikrotason riskimalleilla, joiden antamia tuloksia on voitu tiivistää *Value-at-Risk* eli *VaR*-mitalla. *VaR*-mittaan pohjaavissa riskimalleissa on kuitenkin erilaisia ongelmia, jotka osaltaan vaikuttivat siihen, että globaalin finanssikriisin aikana merkittäviä tappioita pääsi syntymään finanssimarkkinoilla. Monien *VaR*-mallien ongelmana on erityisesti se, etteivät mallit huomioi makrotason endogeenista systeemiriskiä. Tämän tutkielman puitteissa tarkasteltava *CoVaR*-menetelmä onkin kehitetty *VaR*-mitan pohjalta siten, että *CoVaR*-mitta kuvaa koko finanssijärjestelmän kohtaamaa riskiä silloin, kun yksittäinen yritys on kriisissä.

Tässä tutkielmassa systeemiriskin *CoVaR*-mitta lasketaan normaalijakautuneella parametrisella *DCC-GARCH*-mallilla, jolla saatuja tuloksia verrataan mikrotason markkinariskiä mittaavaan normaalijakautuneeseen *AR-GARCH-VaR*-malliin. Tulosten perusteella havaitaan, että pankkikohtaisella tasolla *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen väliset tulokset eroavat toisistaan, eli pankkikohtaisella tasolla *CoVaR*-mitalla saavutetaan sellaista tietoa pankkien riskisyydestä, jota pelkällä *VaR*-mitalla ei saavuteta. Toisaalta koko markkinoiden tasolla *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen välisen eron havaitaan olevan vähäisempää, vaikka markkinatasolla *CoVaR*-mitta seuraakin tunnettua systeemiriskin kehitystä verrattain hyvin. Lisäksi *DCC-GARCH-CoVaR*-mallissa havaitaan olevan epätarkkuutta, jonka ajavaksi syyksi tunnustetaan mallin normaalijakaumaoletus.

Avainsanat	CoVaR-mitta, riskienhallinta, systeemiriski, Value-at-Risk
Muita tietoja	-





**TURUN
YLIOPISTO**
Kauppakorkeakoulu

SYSTEMIRISKIN MITTAAMINEN SOVELTAEN COVAR-MITTA

Esimerkkinä eurooppalaiset pankit 2010-luvulla

Taloustieteen
pro gradu -tutkielma

Laatija:
Iiro Marttila

Ohjaaja:
Prof. Jouko Vilmunen

4.9.2020
Turku

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -järjestelmällä

Sisällysluettelo

1	JOHDANTO	7
2	RISKIN MITTAAMISEN PERUSTEET	9
2.1	FINANSSIRISKIT JA MAKROTASON RISKIENHALLINTA	9
2.1.1	Riskienhallinta ja systeimiriski.....	9
2.1.2	Mikrotason riskimalleista makrotason riskimalleihin.....	10
2.2	STOKASTIIKKA FINANSSIMARKKINOILLA	13
2.2.1	Aikasarjat ja tuottojen stokastiikka	13
2.2.2	Kvantiilifunktio ja Value-at-Risk.....	17
2.2.3	CoVaR-mitan määritelmä	18
3	TUOTTOAIKASARJOJEN MALLINTAMINEN	21
3.1	TUOTTOAIKASARJOJEN TILASTOLLISIA OMINAISUUKSIA	21
3.2	YKSIULOTTEINEN AIKASARJAMALLINTAMINEN.....	26
3.3	MONIULOTTEISET AIKASARJAT JA EHDOLLINEN KORRELAATIO.....	30
4	RISKIMITTOJEN SOVELTAMINEN	34
4.1	KOHERENTIT RISKIMITAT JA SRISK.....	34
4.1.1	Koherenttien riskimittojen teoria	34
4.1.2	Odotettu alijäämä ja SRISK	37
4.2	RISKIMITTOJEN TILASTOLLINEN MALLINTAMINEN	39
4.2.1	VaR-mitan parametriset ja epäparametriset mallit.....	39
4.2.2	Semiparametriset VaR-mallit ja ääriarvoteoria.....	42
4.2.3	CoVaR-mitan tilastolliset mallit	47
5	EMPIIRINEN ANALYYSI	52
5.1	DATA JA MALLIN VALINTA	52
5.1.1	Data ja aikasarjojen ominaisuudet	52
5.1.2	Mallien valinta ja estimoiminen.....	55
5.2	RISKIMITTOJEN TULOKSET	58
5.2.1	Pankkikohtaisten mallien tulokset.....	58
5.2.2	Markkinatason tulokset	63
5.3	RISKIMITTOJEN TOTEUMATESTAAMINEN.....	66
6	YHTEENVETO	70
	LÄHTEET	73
	LIITE A: PANKKIEN COVAR-MITTOJEN TULOKSET	79

Kuvat

Kuva 1 MSCI:n eurooppalaisten finanssilaitosten indeksi ja indeksin tuotot.	22
Kuva 2 MSCI:n finanssi-indeksin logaritmisten tuottojen tiheys- ja kvantiilikuvaajat.23	
Kuva 3 Finanssi-indeksin tuottojen autokorrelaatiot, neliöityjen tuottojen autokorrelaatiot ja osittaisautokorrelaatiot.	25
Kuva 4 Simuloituja geometrisen Brownin liikkeen polkuja.	43
Kuva 5 Nordean, Credit Suissen, DNB:n ja KBC:n markkina-arvojen indeksit (musta) ja tuotot (harmaa).	53
Kuva 6 VaR- ja CoVaR-estimaattien tulokset Nordealle, Credit Suisselle, DNB:lle ja KBC:lle.	59
Kuva 7 Sberbankin ja ING:n VaR- ja CoVaR-mittojen vertaaminen.	60
Kuva 8 Markkinatason systeemiriski, markkinariski ja finanssi-indeksi.	63
Kuva 9 Sirontakuviot systeemiriskin ja markkinariskin sekä systeemiriskin ja finanssi-indeksin välillä.	64
Kuva 10 SRISK-mitta Euroopassa vuosina 2010–2019 (V-Lab 2020).	65
Kuva 11 Tasoitetun CoVaR-mitan mukainen systeemiriski.	66

Taulukot

Taulukko 1 Analysoitavat pankit markkina-arvon mukaisessa järjestyksessä.	52
Taulukko 2 Pankkikohtaisten tuottojen tilastollisia tunnuslukuja ja tuottojen autokorrelaatiotestien p-arvot yhden askeleen viipeelle.	54
Taulukko 3 AR(1)-, GARCH(1,1)- ja DCC(1,1)-mallien pankkikohtaiset parametrit sekä parametrikohdistaisten t-testien p-arvot.	56
Taulukko 4 Pankkien järjestäminen systeemiriskin, markkinariskin ja markkina-arvon mukaisesti.	62
Taulukko 5 Pankkien toteumatestien tulokset VaR- ja CoVaR-mitoille.	68

1 JOHDANTO

Vuonna 2006 Yhdysvaltojen asuntomarkkinoiden suhteellisen pienistä *norprime*-asuntolainoihin liittyneistä ongelmista käynnistynyt globaali finanssikriisi osoitti, että silloiset pankkien ja muiden finanssitoimijoiden käyttämät riskienhallintamenetelmät olivat riittämättömiä takaamaan finanssijärjestelmän vakauden. Yhdysvaltojen asuntolainamarkkinoita käsittäneet ongelmat levisivät finanssimarkkinoilla aiheuttaen useiden merkittävien finanssitoimijoiden ongelmia ja konkursseja. Finanssimarkkinoiden ongelmat levisivät puolestaan reaalityökalouden puolelle aiheuttaen merkittävän talouden laskusuhdanteen. Lisäksi maantieteellisesti ongelmat levisivät Yhdysvalloista ympäri maailmaa aiheuttaen merkittäviä ongelmia esimerkiksi Eurooppalaisten pankkien ja valtioiden toiminnalle. Globaalia finanssikriisiä voidaankin pitää malliesimerkkinä kasvaneen systeemiriskin aiheuttamasta merkittävästä systeemikriisistä.

Systeemiriski on käsitteenä suhteellisen uusi ja sen tutkiminen on merkittävästi lisääntynyt vasta globaalien finanssikriisien jälkeen. Esimerkiksi Euroopan keskuspankki määrittelee systeemiriskin sellaisena riskinä, joka toteutuessaan uhkaa finanssimarkkinoiden vakautta ja aiheuttaa ongelmia finanssimarkkinoiden lisäksi myös reaalityökaloinen toiminnalle (ECB 2009). Finanssimarkkinoiden systeemiriski uhkaa tällöin samanaikaisesti usean finanssitoimijan vakautta. Systeemiriskin käsitteeseen liittyy kiinteästi niin sanottu dominoefekti. Dominoefektin mukaan systeemiriski leviää finanssitoimijasta toiseen kaataen finanssitoimijoita dominopalikoiden lailla. Finanssimarkkinoita valvoville tahoille systeemiriski aiheuttaa uudenlaisia haasteita, sillä pankkikohtaisen mikrotason vakauden lisäksi valvojan on kyettävä huolehtimaan koko systeemin eli makrotason vakaudesta. Kokonaisvakauden takaamisessa merkittävässä osassa on myös suurimpien systeemiriskin aiheuttajien tunnistaminen markkinoilta.

Jotta systeemiriskin tason kehitystä voidaan seurata ja suurimpia systeemiriskin aiheuttajia tunnistaa markkinoilta, on finanssitoimijoilla oltava käytössä luotettavia systeemiriskin määrittäviä ja mallintavia menetelmiä. Ennen globaalia finanssikriisiä finanssitoimijat hyödynsivät laajasti mikrotason *Value-at-Risk*-menetelmiä (*VaR*) riskinmittaamisessa. Määritelmällisesti *VaR* kuvaa sellaista summaa, jonka toimija korkeintaan häviää tietyllä todennäköisyydellä ennalta määritellyllä aikavälillä. Vaikka *VaR*-mitta on määritelmällisesti suhteellisen yksinkertainen, on sen käytännön tilastollinen mallintaminen teknisesti haastavampaa. *VaR*-mitan mallintamista varten onkin kehitetty useita erilaisia menetelmiä. Globaali finanssikriisi kuitenkin osoitti, etteivät pelkät *VaR*-menetelmät riittäneet takaamaan koko järjestelmän vakautta. Tämän myötä uudenlaisia makrotason riskimalleja on kehitetty yhä kiihtyvällä tahdilla. Näistä menetelmistä eräs tunnetuimmista on Adrianin ja Brunnermeierin (2016) kehittämä ehdollinen *VaR*-mitta eli *CoVaR*-mitta, joka kuvaa koko finanssimarkkinoiden kohtaamaa tappiota sellaisessa ehdollisessa tilanteessa, jossa yksittäinen finanssitoimija on vaikeuksissa. Girardi ja Ergün (2013) ovat

puolestaan kehittäneet *CoVaR*-mitan määritelmän joustavampaan muotoon ja määritelleet menetelmän suoriutumista ja tarkkuutta mittaavia toteumatestejä.

Tämän tutkielman tavoitteena on tarkastella *CoVaR*-mitan kykyä mitata finanssimarkkinoiden systeemiriskin kehitystä sekä tutkia menetelmän kykyä erotella markkinatoimijoiden joukosta merkittävimmät systeemiriskin aiheuttajat eli *SIFI*-yritykset. Lisäksi tämän tutkielman puitteissa tarkastellaan systeemiriskin *CoVaR*-menetelmän tuomaa lisäarvoa tavalliseen markkinariskin *VaR*-mittaan nähden. Tarkastelu toteutetaan mittaamalla ja vertailemalla eurooppalaisten pankkien systeemiriskin ja markkinariskin kehitystä 2010-luvun ajalta. Sekä *VaR*- että *CoVaR*-mitta estimoidaan normaalijakaumaa noudattavan parametrisen *DCC-GARCH-CoVaR*-mallikehikon pohjalta. *DCC-GARCH-CoVaR*-malli on Girardin ja Ergünün (2013) kehittämä malli, jonka on nähty toimivan verrattain hyvin systeemiriskin mittaamisessa.

DCC-GARCH-CoVaR-mallikehikolla toteutettua tilastollista analyysia tuetaan sekä *VaR*- että *CoVaR*-mitan matemaattisten ominaisuuksien tarkastelulla ja erilaisten tilastollisten mallien vertailulla. Tilastollisten mallien tarkastelun tavoitteena on esitellä erilaisia mallinnusmenetelmiä ja tunnistaa malleista potentiaalisia malliriskin lähteitä. Malliriskillä tarkoitetaan tämän tutkielman puitteissa matemaattisten mallien epätarkkuudesta aiheutuvaa riskiä, joka syntyy esimerkiksi mallinnuksessa tapahtuvista virheistä. Merkittävimpinä lähteinä mallien välisessä vertailussa toimivat Tsay (2005), McNeil ym. (2005) ja Abad ym. (2013).

Tämän tutkielman luvussa 2 määritellään systeemiriskiin ja riskinmittaamiseen liittyvät yleisimmät käsitteet. Lisäksi luvussa 2 kuvataan finanssituottojen mallintamiseen liittyvät perusteet ja annetaan tarkat matemaattiset määritelmät sekä *VaR*- että *CoVaR*-mitoille. Luvussa 3 kuvaillaan finanssituottojen empiiristen aikasarjojen tilastollisia ominaisuuksia. Lisäksi luvun 3 puitteissa määritellään tässä tutkielmassa käytettävät aikasarjamallit. Aikasarjamallien tarkastelua voidaan perustella sillä, että kyseiset mallit ovat *VaR*-menetelmäkehikossa laajasti käytössä ja monesti myös osaltaan malliriskin lähteitä. Luvussa 4 kuvaillaan *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen teoreettisia ominaisuuksia ja tarkastellaan erilaisia tilastollisia menetelmiä, joilla kyseisiä mittoja voidaan mallintaa. Luvussa 5 vertaillaan estimoitujen *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen riskinmittauskykyä 2010-luvun ajalta hyödyntäen Euroopan suurimpien pankkien markkina-arvojen tuotoista muodostettuja aikasarjoja. Lisäksi luvussa 5 toteumatestatetaan *VaR*- ja *CoVaR*-menetelmillä saadut tulokset. Luku 6 sisältää puolestaan yhteenvedon saaduista tuloksista.

2 RISKIN MITTAAMISEN PERUSTEET

2.1 Finanssiriskit ja makrotason riskienhallinta

2.1.1 Riskienhallinta ja systeemiriski

Finanssimarkkinoilla toimivat instituutiot kohtaavat jatkuvasti riskiä, joka syntyy tulevaisuuteen liittyvästä epävarmuudesta. Toimijat eivät voi esimerkiksi etukäteen tietää, miten hyvin erilaiset toiminnot tuottavat tai miten markkinat tulevat kehittymään. Finanssimarkkinoiden riski voidaankin määritellä odottamattomana markkinoiden volatiliteettina eli keskihajontana. (Jorion 2001, 3.) Finanssimarkkinoiden riskiä voidaan luokitella erilaisten riskilähteiden perusteella. Perinteinen finanssitoimijoiden kohtaama riski on esimerkiksi markkinariski, joka syntyy varallisuuskohteiden arvon kehityksen volatiliteettista. Markkinarisktiin liittyy vahvasti myös makroekonominen riski, joka liittyy makromuuttujien, kuten hinta- ja palkkainflaation volatiliteettiin. Muita finanssiriskejä ovat esimerkiksi luottoriski, joka liittyy lainanottajan mahdolliseen kykenemättömyyteen maksaa velkojaan takaisin, likviditeettiriski, joka liittyy varallisuuskohteiden realisoimiseen liittyvään epävarmuuteen ja operatiivinen riski, joka liittyy esimerkiksi ihmisen tai teknisen järjestelmän tekemiin virheisiin. Riskienhallinnalla markkinatoimija pyrkii esimerkiksi tunnistamaan, mittaamaan ja hallitsemaan kohtaamiaan riskejä, jolloin markkinatoimija voi pienentää tuleviin tuottoihin liittyvää epävarmuutta. Erityisesti riskien kvantifioimisessa toimijat voivat hyödyntää erilaisia matemaattisia ja tilastollisia malleja, joiden joukkoon lukeutuvat esimerkiksi erilaiset aikasarjamallit. (Sweeting 2011.)

Monet perinteisistä finanssiriskityypeistä keskittyvät yksittäisen toimijan kohtaamaan riskiin, jolloin usean toimijan kohtaama kokonaisriski jää vähemmälle huomiolle. Perinteisistä finanssiriskityypeistä poiketen systeemiriski on käsite, joka tarkastelee usean toimijan kokonaisriskiä. Käsitteenä systeemiriski on kuitenkin suhteellisen uusi ja monitasoinen. Esimerkiksi Summer (2003) toteaa, ettei systeemiriskille ole ollut olemassa yksittäistä tarkkaa määritelmää vielä 2000-luvun alussa. Tämän lisäksi esimerkiksi Silva ym. (2017) näyttävät, että systeemiriskin käsitteen tarkka määritelmä vaihtelee eri akateemisten tutkimusten välillä. Finanssimarkkinoiden vakautta seuraavista ja valvovista toimijoista BIS, FSB ja IMF (2009) sekä ECB (2009) määritelevät systeemiriskin riskinä, joka uhkaa finanssimarkkinoiden vakautta ja joka toteutuessaan aiheuttaa markkinoiden toimimattomuutta siten, että efektit näkyvät myös reaali-markkinoiden puolella. Freixas ym. (2015, 13–15) määrittelevät merkittävän osan systeemiriskiä liittyvän markkinasokkien leviämiseen, jolloin esimerkiksi eksogeeninen sokki voi ajaa ensin yksittäisen finanssi-instituution vaikeuksiin. Yksittäisen instituution vaikeudet puolestaan leviävät

endogeenisesti muihin finanssimarkkinoiden instituutioihin, minkä seurauksena ongelmat voivat levitä myös reaali-markkinoiden puolelle. Tällöin systeemiriskitekijöiden realisoitumisesta seuraa niin sanottu systeemikriisi, joka on systeemiriskitekijöiden laukailema finanssikriisi.

Systeemiriski voidaan jakaa kahteen tasoon. Niin sanottu aikataso kuvaa ajassa tapahtuvaa systeemiriskin kehitystä, johon voivat liittyä esimerkiksi luotonannon määrän kasvaminen ja varallisuuskohteiden arvojen voimakas kasvaminen. Tällöin esimerkiksi sääntelyn purkaminen, markkinoiden globalisaation lisääntyminen tai uusien markkinainnovaatioiden syntyminen voivat olla merkittäviä riskiä ajavia tekijöitä. Merkittäviksi kasvaneet systeemiriskitekijät johtavat lopulta siihen, että yksittäinen eksogeeninen tekijä voi laukaista kokonaisen systeemikriisin. Toinen systeemiriskin taso kuvaa puolestaan markkinatoimijoiden välillä tapahtuvaa riskin leviämistä. Tällöin puhutaan usein dominoefektistä, jonka mukaan systeemiriskin aiheuttamat ongelmat leviävät markkinatoimijasta toiseen. (Freixas ym. 2015, 15–16.) Koska systeemiriski voi olla merkittävä selittävä tekijä finanssikriisin syntymisessä, on markkinavalvojalla perustellusti tarve mitata ja seurata systeemiriskin tason kehitystä yli ajan.

Systeemiriskiin liittyvä läheisesti konsepti niin sanotuista *SIFI*-yrityksistä (engl. *systemically important financial institution*), jotka ovat koon, laajalle levinneiden verkostojen ja markkinamerkittävyyden kannalta sellaisia toimijoita, joiden konkurssi ajaisi koko finanssijärjestelmän merkittäviin vaikeuksiin. Toisin sanoen tällaiset yritykset tuottavat merkittävän määrän systeemiriskiä finanssimarkkinoille. Finanssimarkkinoiden kokonaisvakauden kannalta on perusteltua, että erityisesti *SIFI*-yritysten vakaudesta huolehditaan esimerkiksi tiukennetun valvonnan tai ylimääräisten pääomavaateiden avulla. Lisäksi konkurssin sattuessa erityisesti *SIFI*-yrityksiä varten tulisi markkinavalvojilla olla selkeät toimintasuunnitelmat, jotta finanssimarkkinoiden ja koko talouden kärsimät kokonaisvahingot saataisiin rajattua. (FSB 2010.) Jotta *SIFI*-yritysten valvominen voidaan toteuttaa mahdollisimman tehokkaasti, on valvojan kyettävä tunnistamaan *SIFI*-yritykset markkinoilta. *SIFI*-yritysten tunnistaminen edellyttää puolestaan toimivien systeemiriskimittareiden olemassaoloa.

2.1.2 Mikrotason riskimalleista makrotason riskimalleihin

Systeemiriskin tutkiminen lisääntyi erityisesti vuosien 2007–2009 globaalien finanssikriisien jälkeen (Silva ym. 2017, 91). Globaalia finanssikriisiä voidaankin pitää malliesimerkinä systeemikriisistä, joka alkoi suhteellisen pienestä eksogeenisestä sokista, joka levisi finanssitoimijasta toiseen, eri maantieteellisten alueiden välillä ja rahoitusmarkkinoilta reaali-markkinoille. Ennen finanssikriisin puhkeamista systeemiriski pääsi kasvamaan finanssimarkkinoilla alalla toimivien yritysten erityispiirteiden kautta, sillä alan toimijat

olivat hyvin velkaantuneita ja rahoittivat pitkäaikaisia ja epälikvidejä sijoituksiaan lyhytaikaisella velalla. Lisäksi erilaisten finanssi-instrumenttien kautta finanssialan toimijat olivat toisiinsa vahvasti sidoksissa. Kun Yhdysvaltojen asuntomarkkinoilla asuntojen arvot lähtivät laskemaan 2000-luvun puolella välissä, erityisesti *nonprime*-lainojen takaisinmaksamisessa alkoi ilmenemään lisääntyvissä määrin ongelmia.¹ Tämä näkyi lisääntyneinä luottotappioina asuntolainoissa, joita luotonantajat olivat puolestaan paketoineet ja myyneet eteenpäin muille finanssimarkkinatoimijoille. Epävarmuus luottojen takaisinmaksussa johti lopulta finanssitoimijoiden väliseen epävarmuuteen, joka puolestaan mahdollisti merkittävän systeemikriisin syntymisen ja useiden potentiaalisten *SIFI*-yritysten ajautumisen konkurssiin tai lähelle konkurssia. Käytännössä globaali finanssikriisi osoitti, että pelkkä yksittäisen toimijan tasolla toteutettava mikrotason regulaatio (engl. *microprudential regulation*) ei riitä itsessään takaamaan finanssitoimialan vakautta, vaan yksilötason valvonnan tueksi tarvitaan myös koko järjestelmää kokonaisuutena valvovaa makrotason regulaatiota (engl. *macroprudential regulation*). (Bullard ym. 2009.)

Mikrotason riskienhallintamallien toiminnan voidaan tiivistäen ajatella koostuvan kolmesta tasosta. Näistä ensimmäisen tason muodostavat markkinadatasta koostettavat riskifaktorit, joita riskimalleissa käytetään selittävinä muuttujina. Toinen taso muodostuu riskimallinnettavasta portfoliosta ja portfolion sekä ensimmäisen tason riskifaktoreiden vuorovaikutuksen mallintamisesta. Kolmannessa tasossa portfolion tuottojen ja tappioiden jakauma ennustetaan varsinaisella riskimallilla, jolloin ennustamisessa hyödynnetään aiemmillä tasoilla kerättyä informaatiota. Ennustetun jakauman antamia tuloksia voidaan tiivistää erilaisina riskilukuina, joista yleisin on jakauman äärihavaintoja kuvaava *Value-at-Risk*-mitta. (Jorion 2009, 923–933.) Mikrotason riskimalleissa on kuitenkin omat ongelmansa, joihin esimerkiksi Danielsson ym. (2001) kiinnittivät huomiota jo ennen globaalia finanssikriisiä. He kritisoivat erityisesti riskienhallintamallien puutteellista kykyä mitata riskiä endogeenisena ilmiönä, sillä käytännössä riski nähdään malleissa eksogeenisena ilmiönä. Eksogeenisessä mallinnuksessa finanssitoimijan oman toiminnan ei nähdä vaikuttavan markkinoiden kokonaisriskiin, mikä ei varsinkaan suurien toimijoiden kohdalla pidä paikkaansa, sillä käytännössä suurien toimijoiden markkinatoimilla voi olla hyvinkin merkittävää vaikutusta koko finanssimarkkinoiden vaihteluihin. Riskimallien eksogeeninen rakenne voi lopulta johtaa siihen, että finanssitoimijat pyrkivät minimoimaan riskiään samanlaisilla strategioilla, mikä puolestaan pahimmillaan kasvattaa koko järjestelmän kohtaamia riskejä ja tappioita. Lisäksi Danielsson ym. (2001) kritisoivat riskimallien tapaa ennustaa riskejä normaalijakaumaa hyödyntäen, ulkopuolisten

¹ *Nonprime*-laina on asuntolaina, joka myönnetään henkilölle, jolla on esimerkiksi heikko luottohistoria, vain vähän valmiita säästöjä, pienet tulot suhteessa haettavaan lainaan tai muita puutteita, joiden takia henkilö ei ole turvallisin mahdollinen lainanhakija. Lisäksi *nonprime*-lainat sisälsivät usein erityisiä maksujärjestelyjä, jotka pitivät lainan maksut alussa alhaisina. (Bullard ym. 2009, 405.)

luottoluokittelijoiden antamien luottoluokkien suurta merkitystä luottoriskimalleissa ja puutteita operatiivisten riskien mittaamisessa.

Kuten globaali finanssikriisi myöhemmin näytti, monet edellä mainituista ongelmista riskimalleissa osoittautuivat oikeiksi. Esimerkiksi Jorion (2009) toteaa, että pankkien riskijärjestelmien epäonnistuminen johtui laajalti riskimallien kyvyttömyydestä mitata finanssimarkkinoilla tapahtuneita kokonaistason muutoksia sekä systeemiriskin leviämistä toimijasta toiseen. Mikrotason riskienhallintamallien tueksi onkin kehitetty riskimalleja, jotka mittaavat finanssimarkkinoiden kokonaisriskiä sekä systeemiriskisyyttä. Benoit ym. (2017) jakavat systeemiriskiä mittaavat mallit kahteen luokkaan, joita ovat systeemiriskin yksittäisiin lähteisiin ja ajaviin syihin keskittyvät mallit sekä kokonaissysteemiriskiä mittaavat mallit. Näistä systeemiriskin lähteitä tarkastelevat mallit keskittyvät esimerkiksi riskiä laukausevien, levittävien ja voimistavien mekanismien tarkasteluun, jolloin mallit ovat usein luonteeltaan kvalitatiivisen analyysin pohjaavia. Sen sijaan kokonaissysteemiriskiä mittaavat mallit kuvaavat systeemiriskin kehitystä enemmänkin tilastollisena ilmiönä, jolloin yksittäisten riskiä ajavien syiden tulkinta jää vähäisemmälle. Kokonaisriskiä mittaavilla malleilla voidaan kuitenkin saavuttaa suhteellisen yksinkertaisesti kattava kokonaiskuva markkinoiden systeemiriskin tasosta. Kokonaissysteemiriskiä mittaavat mallit ovat tarpeellisia myös silloin, kun tavoitteena on mitata systeemiriskin kehitystä yli ajan sekä tunnistaa merkittävimmät *SIFI*-yritykset.

Kokonaissysteemiriskiä mittaavien malleille teoriakehikkoa rakensivat Acharya ym. (2017), joiden teorian mukaan jokaiselle pankille voidaan osoittaa pankkikotainen optimaalinen lisämaksu, joka puolestaan perustuu jokaisen toimijan aiheuttaman systeemiriskin määrään. Tällöin niiden toimijoiden, jotka tuottavat eniten systeemiriskiä markkinoille, vaaditaan lisäävän oman pääoman määrää. Varsinaista systeemiriskiä teoriakehikossa mitataan *SES*-mitalla (engl. *systemic expected shortfall*), joka mittaa sitä odotettua pankin tappiota, jonka pankki kärsii ajautuessaan konkurssiin systeemikriisin aikana. Menetelmä on toisin sanoen finanssijärjestelmän ääri- tai häntätapahtumia mittaava malli. Muita tunnettuja häntätapahtumiin nojaavia menetelmiä (engl. *tail measurer*) ovat esimerkiksi Adrianin ja Brunnermeierin (2016) kehittelemä *CoVaR*-menetelmä, johon tämä tutkielma keskittyy, sekä Acharyan ym. (2012) ja Brownleesin ja Englen (2017) kehittelemä *SRISK*-menetelmä. Benoit ym. (2017, 133–134) toteavat, että edellä lueteltujen menetelmien yhteisenä hyvänä ominaisuutena voidaan pitää sitä, että niiden laskeminen perustuu vapaasti saatavilla olevaan markkinadataan, jolloin mitoilla lasketun systeemiriskin kehitystä voidaan seurata verrattain helposti reaaliajassa. Menetelmät ovat myös äärihavaintoihin perustuvan teorian pohjalta läheisessä suhteessa mikrotason *Value-at-Risk*-mittaan. Lisäksi nämä menetelmät ovat olleet akateemisessa systeemiriskin tutkimuksessa käytetyimpiä, joten niillä on ollut hyvin keskeinen asema systeemiriskin mittaamisessa.

Lupaavista ominaisuuksistaan huolimatta myös systeimiriskin häntätapahtumamenetelmiin liittyy epävarmuutta.² Mallinnuksessa menetelmien ongelmakohdaksi muodostuu puutteellinen datan määrä, sillä mallinnukseen sopivien historiallisten finanssikriisien määrä on vähäinen. Käytännössä mittojen tulokset joudutaankin ekstrapoloimaan rajallisen äärihavaintojoukon pohjalta. Lisäksi menetelmät eivät huomioi äärihavaintojen taustalla vaikuttavia syitä, joilla itsessään on myös merkitystä finanssimarkkinoiden systeimiriskisyydessä. Toisin sanoen kaikki finanssimarkkinoiden heikot ajanjaksot eivät aiheuta reaalitalouteen ongelmia ja systeemikriisiä, sillä myös finanssimarkkinoiden ongelmiin vaikuttavat syyt vaikuttavat itse kriisin syntymiseen. Lisäksi menetelmien nojaaminen erityisesti yrityksen markkina-arvoon perustuvaan dataan rajaa menetelmien ulkopuolelle sellaiset toimijat, jotka eivät ole julkisesti noteerattuja osakeyhtiöitä. (Hansen 2014, 23–24.) Esimerkiksi Suomessa tämä näkyy siten, ettei Osuuspankki- tai Säästöpankki-ryhmälle mittojen laskeminen ole täysin yksiselitteistä.

Häntätapahtumamenetelmiä kehittäneissä ja testanneissa alkuperäisissä tutkimuksissa menetelmillä saadut tulokset olivat verrattain lupaavia (ks. Acharya ym. 2012; Acharya ym. 2017; Adrian & Brunnermeier 2016; Brownlees & Engle 2017). Menetelmien riskimittauskyvystä on kuitenkin olemassa myös vastakkaista tutkimustulosta. Esimerkiksi Zhang ym. (2015) tutkivat takautuvasti *SRISK*- ja *CoVaR*-mittojen kykyä tunnistaa *SIFI*-yrityksiä ja mitata systeimiriskiä eri finanssikriisien aikana. Heidän tulosten mukaan mitoista vain *CoVaR* onnistui hyvin globaalien finanssikriisien aikana, mutta muiden testattujen systeemikriisien aikana myös *CoVaR*-mitan tulokset olivat heikkoja. Sen sijaan *SRISK*-mitta suoriutui parhaiten silloin, kun tavoitteena oli mitata pelkästään pankkien oman pääoman riittävyttä kriisien aikana. Käytännössä tulokset osoittavat sen, ettei häntätapahtumamenetelmillä kyetä aina mittaamaan systeimiriskiä täydellisesti, vaikka mitat voivatkin parhaimmillaan tarjota hyödyllistä lisätietoa finanssitoimijoiden systeimiriskisyydestä.

2.2 Stokastiikka finanssimarkkinoilla

2.2.1 Aikasarjat ja tuottojen stokastiikka

Stokastinen prosessi y_t on prosessi, jonka tuleviin arvoihin sisältyy epävarmuutta, eli prosessin tulevia arvoja ei tunneta. Prosessin y_t menneistä realisaatioista voidaan

² Hansen (2014, 19–22) kuvailee matemaattisiin malleihin liittyvän epävarmuuden syntyvän esimerkiksi siksi, koska mallit itsessään yksinkertaistavat alla olevaa todellista ilmiötä. Malliepävarmuus liittyykin jo itse mallin valintaan, sillä samaa ilmiötä kuvaavat erilaiset mallit voivat yksinkertaistaa alla olevaa ilmiötä eri tavoin.

muodostaa aikasarja, joka koostuu stokastisen prosessin realisaatioista eri ajanhetkinä. (McNeil ym. 2005, 125.) Aikasarjan realisaatioita voidaan yleisesti kuvata joukolla $\{\hat{y}_t | t = 1, \dots, T\}$, jossa \hat{y}_t on sarjassa realisoitunut skalaarinen havainto, t on ajanhetkeä kuvaava indeksi ja T kuvaa ajanhetkien kokonaismäärää. Stokastinen prosessi voi olla moniulotteinen, jolloin se koostuu useasta yksiulotteisesta prosessista y_t^i . Moniulotteista stokastista prosessia kuvataan vektorilla $\mathbf{y}_t = (y_t^1, \dots, y_t^N)'$, jossa i on yksiulotteista aikasarjaa kuvaava indeksi ja N kuvaa yksittäisten prosessien määrää. Tällöin moniulotteista aikasarjaa voidaan kuvata joukolla $\{\hat{y}_t^i | i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T\}$ tai havaintojoukkoa hetkellä t merkinnällä $\hat{\mathbf{y}}_t$. (Lüthkepohl 2005, 1–2.)

Monet finanssimarkkinoilla esiintyvät muuttujat ovat stokastisia, jolloin niiden tulevia arvoja ei tiedetä etukäteen. Erilaisia matemaattisia ja tilastollisia malleja, kuten myöhemmin esiteltäviä aikasarjamalleja hyödynnetään laajasti talous- ja rahoitustieteessä esimerkiksi makro- ja rahoitusmuuttujien stokastisen käyttäytymisen mallintamisessa. Rahoitustieteessä matemaattisia malleja hyödynnetään esimerkiksi omaisuuserien (engl. *asset*), kuten osakkeiden ja johdannaisten arvon kehityksen analysoimisessa ja ennustamisessa. Lisäksi voidaan mallintaa laajempien kokonaisuuksien, kuten yrityksen markkina-arvon tai indeksin kehitystä. Usein talous- ja rahoitustieteissä mielenkiinto keskittyy erityisesti hinta- ja tuottoaikasarjoihin. Varallisuuskohteesta yhdeltä periodilta saatava suhteellinen tuotto R_t hetkellä t lasketaan kaavalla

$$1 + R_t = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}, \quad (2.1)$$

jossa $P_t \geq 0$ on kohteen arvo hetkellä t , $P_{t-1} > 0$ on arvo hetkellä $t - 1$ ja D_t on kohteesta mahdollisesti maksettava osinko, kuponki tai muu lisäarvoa (tai lisäkuluja) tuova tekijä. Periodi voi puolestaan olla esimerkiksi yhden päivän tai vuoden mittainen, jolloin tuotot ovat päivä- tai vuosikohtaisia. Mikäli analyysi keskittyy kohteen hinnan kehitykseen, merkitään muuttujan D_t arvoksi nolla. Tällöin suhteellisen hinnanmuutos R_t on määritelty välillä $[-1, \infty)$. (Tsay 2005, 1–5.) Koska vapaasti markkinoilla määrittyvää tulevaa hintaa P_{t+1} ei voida etukäteen tietää, ovat myös varallisuuskohteiden tuottoprosessit stokastisia.

Tuoton voidaan ajatella olevan jatkuva-aikainen ja ajassa vakio, jolloin sitä kuvataan merkinnällä $r \in \mathbb{R}$. Esimerkiksi vakiokorkoa maksavalla tilillä olevan pääoman voidaan ajatella kasvavan jatkuva-aikaisen sovitun koron mukaisesti. Jatkuva-aikaisen tuoton alla kohteen hinnan muutosta voidaan kuvata differentiaaliyhtälöllä

$$P_{t+dt} - P_t = P_t r dt. \quad (2.2)$$

Yhtälön 2.2 ratkaisu on puolestaan muotoa

$$P_t = P_s e^{r(t-s)}, \quad (2.3)$$

jossa kohteen arvo hetkellä $s < t$ on P_s . (Gerber 1997, 4–7.) Tällöin linkki hetken t jatkuva-aikaisen tuoton r_t ja suhteellisen tuoton R_t välillä yhden periodin osalta saadaan yhtälöstä

$$1 + R_t = e^{r_t}, \quad (2.4)$$

jolloin jatkuva-aikainen tuotto yhdeltä periodilta on

$$r_t = \ln(1 + R_t). \quad (2.5)$$

Näiden ominaisuuksien perusteella jatkuva-aikaista tuottoa r_t voidaan kutsua myös logaritmiseksi tuotoksi. (Tsay 2005, 5–7.) Koska tuottoprosessin kehitystä ei etukäteen tunneta, käsitellään prosessia r_t stokastisena prosessina.

Matemaattisissa malleissa tuottojen voidaan olettaa noudattavan jotain tunnettua jakaumaa. Perinteinen tuottojen jakaumasta tehtävä oletus on, että logaritmiset tuotot ovat itsenäisesti ja identtisesti (engl. *identically and independently distributed, iid*) normaali-jakautuneita keskiarvolla μ ja varianssilla σ^2 , jolloin $r_t \sim N(\mu, \sigma^2)$. Tällöin eri periodien logaritmiset tuotot ovat keskenään riippumattomia eivätkä niiden odotusarvo tai varianssi muutu ajanhetken t muuttuessa. Lisäksi logaritmisista tuotoista laskettavat suhteelliset tuotot R_t ovat tällöin lognormaalisti jakautuneita. Moniulotteisessa tapauksessa yksittäisen tuoton sijasta tarkastellaan useamman stokastisen tuottosarjan r_t^i käyttäytymistä. Tällöin vektori $\mathbf{r}_t = (r_t^1, \dots, r_t^N)'$ kuvaa kohteiden $i = \{1, \dots, N\}$ logaritmisista tuotoista r_t^i koostettua satunnaisvektoria hetkellä t . Useampiulotteista analyysia tarvitaan esimerkiksi silloin, kun tarkastellaan usean kohteen muodostaman kokonaisuuden arvonkehityksestä. Moniulotteisessa tapauksessa tuottojen voidaan olettaa olevan multinormaalijakautuneita, jolloin koko satunnaisvektori \mathbf{r}_t on multinormaalijakautunut siten, että $\mathbf{r}_t \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Tällöin $\boldsymbol{\mu} = (\mu^1, \dots, \mu^N)'$ on odotusarvovektori, jossa μ^i on tuoton r_t^i odotusarvo ja $\boldsymbol{\Sigma}$ on tuottojen välinen varianssimatriisi, joka on muotoa

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} (\sigma^1)^2 & \dots & \rho^{1N} \sigma^1 \sigma^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{N1} \sigma^N \sigma^1 & \dots & (\sigma^N)^2 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

jossa ρ^{ij} on tuottojen r_t^i ja r_t^j ($i \neq j$) välinen korrelaatio ja σ^i on prosessin r_t^i keskihajonta. (Tsay 2005, 14–17.) Käytännössä logaritmisten tuottojen voidaan olettaa

noudattavan muitakin jakaumia kuin normaalijakaumaa, joskin tämän tutkielman puitteissa hyödynnetään ensisijaisesti normaalijakaumaoletuksella mallinnettuja tuottoja.

Eräs perinteinen tapa mallintaa hintasarjojen stokastiikkaa on hyödyntää geometrista Brownin liikettä, jota sovelletaan esimerkiksi optioiden Black-Scholes-hinnoittelumallissa. Geometrisessä Brownin liikkeessä hintojen stokastiikkaa kuvataan Wiener-prosessilla w_t . Wiener-prosessi määritellään reaaliarvoisena ja ajan suhteen jatkuvana stokastisena prosessina. Prosessille pätee riippumattomien lisäysten ominaisuus, jolloin lisäys $w_{t+\Delta t} - w_t$ on riippumaton tilasta w_s , kun $t \geq s$. Lisäykset ovat myös normaalisti jakautuneita siten, että $(w_{t+\Delta t} - w_t) \sim N(0, \Delta t)$. Lisäksi prosessin alkuarvo w_0 on nolla. Geometrisen Brownin liike hinnan muutokselle dP_t määritellään stokastisella differentiaaliyhtälöllä

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dw_t, \quad (2.7)$$

jossa μ on odotusarvo (engl. *drift*) ja σ on volatilititeetti. Yhtälölle 2.7 voidaan ratkaista analyttinen ratkaisu Itôn yhtälön³ avulla, jolloin kohteen arvo hetkellä t saadaan muotoon

$$P_t = P_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma w_t}, \quad (2.8)$$

jossa P_0 on kohteen arvo alkuhetkellä. Geometrisen Brownin liikkeen oletuksilla logaritmisuuden tuoton $r_t = \ln(P_t/P_0)$ jakaumalle pätee

$$r_t \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right), \quad (2.9)$$

jolloin logaritmiset tuotot ovat normaalisti jakautuneita ja hintaprosessin realisaatiot ovat lognormaalisti jakautuneita. Toisin sanoen tuottojen normaalijakautuneisuus seuraa geometrisen Brownin liikkeen hyödyntämisestä, jolloin normaalijakauma on implisiittisesti myös optioiden Black-Scholes-hinnoittelumallin pohjalla. (Hull 2015, 302–315.)

³ Oletetaan stokastinen prosessi X_t , jolle pätee Itôn diffuusio prosessi $dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dw_t$. Jos $f(t, x)$ on kahdesti differentioitava skalaarifunktio reaaliuuttujille t ja x , saadaan Itô:n yhtälö muotoon $df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dw_t$. Geometrisen Brownin liikkeen tapauksessa $f(P_t) = \ln(P_t)$. (Hull 2015, 313.)

2.2.2 Kvantiilifunktio ja Value-at-Risk

Value-at-Risk eli *VaR* on menetelmä, joka mittaa yksittäisen varallisuuskohteen tai useista varallisuuskohteista koostetun portfolion riskiä. Yksittäinen varallisuuskohte voi olla esimerkiksi joukkovelkakirja tai osake ja useista varallisuuskohteista koostettu portfolio voi tarkoittaa esimerkiksi tietyn toimialan kaikkien yritysten markkina-arvoista koostettua indeksiä. Yleisesti *VaR* mittaa sitä, kuinka paljon varallisuuskohteen arvo laskee korkeintaan tietystä hetkestä alkaen, tietyn aikavälin aikana ja tietyllä todennäköisyydellä. Tällöin *VaR* kuvaa usein erityisesti kohteen markkinariskiä. Esimerkiksi sijoitussalkulle voidaan laskea tämän päivän *VaR*-arvoksi kymmenen prosentin luottamustasolla ja vuoden pitoajalla sadan euron tappio. Tämä tarkoittaa sitä, että sijoitussalkun arvo laskee yhdeksänkymmenen prosentin todennäköisyydellä korkeintaan sata euroa tästä hetkestä alkaen seuraavan vuoden aikana. Kääntäen salkun arvo laskee kymmenen prosentin todennäköisyydellä vähintään sata euroa seuraavan vuoden aikana. Tiivistäen *VaR* kuvaa siis alla olevan varallisuuskohteen arvon muutosta harvinaisessa ääri- eli häntätapahtumassa (Jorion 2001, 22–25.)

VaR-mitta määritellään satunnaismuuttujan kvantiilina, jolloin *VaR* voidaan määritellä satunnaismuuttujan kvantiilifunktion avulla. Oletetaan satunnaismuuttujan r_t kuvaavan varallisuuskohteen tuottoa hetkellä t yli ennalta määritellyn aikahorisontin. Tällöin todennäköisyydellä $P(r_t < x) = \alpha \in (0,1)$ tuotto r_t ei ylitä rajalukua $x \in \mathbb{R}$. Tuoton r_t jakauman α -kvantiili $x_\alpha^{r_t}$ määritellään reaalityöjoukon suurimpana alarajana (infimum, inf) tai kääntäen reaalityöjoukon pienimpänä ylärajana (supremum, sup). Matemaattisesti ilmaistuna edellä esitetty α -kvantiilin määritelmä saadaan muotoon

$$x_\alpha^{r_t} = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(r_t < x) \geq \alpha\} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid P(r_t < x) < \alpha\}, \quad (2.10)$$

jossa todennäköisyys α on *VaR*-mitan luottamustaso ja $x_\alpha^{r_t}$ on satunnaismuuttujan r_t α -kvantiili. Tällöin $VaR_\alpha^{r_t} = x_\alpha^{r_t}$, eli mitä pienempi *VaR*-mitan suuruus kohteella on, sitä suurempi riski siihen kohdistuu. Lyhyesti *VaR* voidaan esittää suoraan notaatiolla $P(r_t < VaR_\alpha^{r_t}) = \alpha$. (Acerbi & Tasche 2002, 1489; McNeil ym. 2005, 37–40.)

Olettamalla, että tuotto r_t voidaan määritellä jatkuvan tiheysfunktion f_{r_t} ja jatkuvan kertymäfunktion F_{r_t} avulla, saadaan tuoton r_t kvantiilifunktio $F_{r_t}^{-1}$ määriteltyä ehdosta

$$F_{r_t}^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_{r_t}(x) \geq \alpha\} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F_{r_t}(x) < \alpha\}, \quad (2.11)$$

jolloin $VaR_\alpha^{r_t} = x_\alpha^{r_t} = F_{r_t}^{-1}(\alpha)$. Tällöin *VaR*-luvulla voidaan käytännössä tiivistää portfolion riskimallilla lasketun tuottojakauman ennustamaa riskiä. Usein *VaR*-mitan arvo esitetään positiivisena lukuna, jolloin *VaR* määritellään tuottojakauman kvantiilin käänteislukuna, eli ehdolla $VaR_{\alpha,t}^{r_t} = -x_\alpha^{r_t}$. Tällöin suurempi *VaR*-mitan arvo tarkoittaa

suurempaa riskiä. Toinen yleinen esitystapa on johtaa VaR -mitan tulos tappiojakaumasta. Tappio l_t hetkellä t saadaan tuoton r_t vastalukuna, jolloin $l_t = -r_t$. Tällöin VaR -mitta määritellään tappiojakaumasta ehdolla $P(l_t > VaR_{1-\alpha}^{r_t}) = 1 - \alpha$. (McNeil ym. 2005, 37–40.)

Tuoton r_t tiheysfunktion f_{r_t} yli lasketun integraalin avulla positiivinen VaR voidaan määritellä sellaisena integraalin ylärajana, jolle pätee ehto

$$F_{r_t}(-VaR_{\alpha,t}^{r_t}) = \int_{-\infty}^{-VaR_{\alpha,t}^{r_t}} f_{r_t}(x) dx = \alpha. \quad (2.12)$$

Lisäksi VaR -mitta voidaan ratkoa analyttisesti esimerkiksi Gaussisessa tapauksessa, jossa tuoton r_t oletetaan noudattavan normaalijakaumaa, eli $r_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$. Tällöin positiivinen VaR on muotoa

$$VaR_{\alpha,t}^{r_t} = -(\mu_t + \sigma_t \Phi^{-1}(\alpha)), \quad (2.13)$$

jossa Φ^{-1} on standardinormaalijakauman kertymäfunktion käänteisfunktio. VaR voidaan ratkoa normaalijakauman sijasta muistakin todennäköisyysjakaumista, joskin tällöin VaR -mitan analyttinen ratkaiseminen on usein haasteellisempaa. (McNeil ym. 2005, 37–40.)

2.2.3 *CoVaR*-mitan määritelmä

CoVaR-menetelmän (engl. *Conditional-Value-at-Risk*) määritelmä perustuu ehdolliseen todennäköisyysjakauman kvantiiliin. Oletetaan, että satunnaismuuttujat r_t^i ja r_t^j kuvaavat varallisuuskohteiden i ja j tuottoja hetkellä t . Tällöin muuttujien välille voidaan määritellä ehdollinen todennäköisyys, joka on muotoa

$$P(r_t^i = x | r_t^j = y) = \frac{P(r_t^i = x \cap r_t^j = y)}{P(r_t^j = y)} = q, \quad (2.14)$$

jossa $x, y \in \mathbb{R}$ ja ehdollinen todennäköisyys $q \in (0,1)$. Toisin sanoen kaavan 2.14 mukainen ehdollinen todennäköisyys kuvaa sitä todennäköisyyttä, että muuttuja r_t^i saa arvon x silloin, kun muuttuja r_t^j saa arvon y . (Tsay 2005, 8.) Adrianin ja Brunnermeierin (2016) kehittämä *CoVaR*-menetelmä määritellään sellaisena varallisuuskohteen j tuoton r_t^j tasona, joka alittuu ehdollisella todennäköisyydellä q silloin, kun kohteen i tuotto r_t^i on

tietyllä tasolla. Erityisesti ollaan kiinnostuneita kohteen j tuotoista silloin, kun kohteen i tuotot ovat heikolla tasolla, jolloin kohteen i voidaan ajatella olevan kriisissä. Tällainen kriisi määritellään tilanteena, jossa kohde i tekee merkittävää tappiota, eli käytännössä muuttujalle r_t^i realisoituva arvo tulee tuottojakauman vasemmasta hännästä. *CoVaR*-menetelmä mittaa siis kohteen j markkina-arvon muutosta markkinoiden ehdollisessa ääri- eli häntätapahtumassa.

Koska *VaR* voidaan määritellä lyhyesti tuottojakauman α -kvantiilina notaatiolla $P(r_t < VaR_{\alpha,t}) = \alpha$, saadaan kohteen j *CoVaR* vastaavasti määriteltyä ehdollisella todennäköisyydellä

$$P(r_t^j \leq CoVaR_{q,t}^{j|i} | r_t^i = VaR_{\alpha,t}^i) = q. \quad (2.15)$$

Toisin sanoen, todennäköisyydellä q varallisuuskohteen j tuotto on korkeintaan *CoVaR*-arvon suuruinen silloin, kun varallisuuskohteen i tuotto on *VaR*-arvon suuruinen. Mitä pienempi *CoVaR* kohteella j on, sitä suurempi systeimiriski sillä on suhteessa kohteeseen i . (Adrian & Brunnermeier 2016.) Eksaktisti *CoVaR* voidaan määritellä satunnaismuuttujan ehdollisena kvantiilina $x_q^{j|i}$, joka on muotoa

$$\begin{aligned} x_q^{j|i} &= \inf\{x \in \mathbb{R} | P(r_t^j \leq x | r_t^i = VaR_{\alpha,t}^i) \geq q\} \\ &= \sup\{x \in \mathbb{R} | P(r_t^j \leq x | r_t^i = VaR_{\alpha,t}^i) < q\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

(Li & Racine 2008, 427). Tällöin *CoVaR* määritellään ehdolla $CoVaR_{q,t}^{j|i} = x_q^{j|i}$. Kuten *VaR*, myös *CoVaR* voidaan määritellä ehdollisen tuottojakauman kvantiilin vastalukuna tai ehdollisesta tappiojakaumasta, jolloin suurempi *CoVaR*-mitan arvo viittaa suurempaan systeimiriskisyyteen.

Systeimiriskiä mitattaessa ollaan usein kiinnostuneita siitä, miten yrityksen i ajautuminen kriisiin vaikuttaisi koko finanssisysteemin s riskisyyteen. Yrityksen i tuottaman systeimiriskin määrään muutosta voidaan tarkastella $\Delta CoVaR$ -mitalla, joka määritellään yrityksen i mediaanitilasta ($\alpha = 50\%$) mitatun *CoVaR*-mitan ja mediaanitilaa heikommasta tilasta ($\alpha < 50\%$) mitatun *CoVaR*-mitan välisenä erotuksena, jolloin

$$\Delta CoVaR_{q,t}^{s|i} = CoVaR_{q,t}^{s|r_t^i = VaR_{\alpha,t}^i} - CoVaR_{q,t}^{s|r_t^i = VaR_{50\%,t}^i}. \quad (2.17)$$

Toisin sanoen $\Delta CoVaR$ mittaa sitä muutosta, joka tapahtuu systeemin ehdollisen q -kvantiilin tuottotasossa silloin, kun yrityksen i tuotot laskevat mediaanitasoa heikommalle tasolle. Mitä enemmän systeemin tuotot laskevat, sitä enemmän yritys i tuottaa koko

järjestelmään systeemiriskiä. Valuuttamääräinen $\Delta CoVaR$ -arvo saadaan puolestaan kertomalla yrityksen i markkina-arvo $\Delta CoVaR$ -mitan arvolla. (Adrian & Brunnermeier 2016.)

Girardi ja Ergün (2013) kehittivät $CoVaR$ -määritelmää siten, että kohteen j tuloksen oletetaan olevan ehdollinen tilanteelle, jossa yrityksen i tulos on yhtä suuri tai pienempi kuin määritelty VaR -arvo todennäköisyydellä q . Tällöin $CoVaR$ määritellään ehdollisena tapahtumalle $r_t^i \leq VaR_{\alpha,t}^i$, eli $CoVaR$ määritellään yhtälöstä

$$P(r_t^j \leq CoVaR_{q,t}^{j|i} | r_t^i \leq VaR_{\alpha,t}^i) = q. \quad (2.18)$$

Koska VaR -mitalle pätee $P(R_t^i \leq VaR_{\alpha,t}^i) = \alpha \in (0,1)$, saadaan yhteistodennäköisyyden $P(r_t^j \leq CoVaR_{q,t}^{j|i} \cap r_t^i \leq VaR_{\alpha,t}^i)$ ratkaisu johdettua muotoon

$$P(r_t^j \leq CoVaR_{q,t}^{j|i} \cap r_t^i \leq VaR_{\alpha,t}^i) = \alpha q. \quad (2.19)$$

Tällöin yritysten i ja j tulokset r_t^i ja r_t^j ovat yhtä suuria tai pienempiä kuin VaR - ja $CoVaR$ -arvot todennäköisyydellä αq .

Kaavan 2.15 mukaiselle $CoVaR$ -mitalle voidaan Gaussisessa tapauksessa ratkaista yksinkertainen analyttinen kaava. Tuottojen r_t^i ja r_t^j oletetaan olevan multinormaalisti jakautuneita, jolloin $(r_t^i, r_t^j) \sim N(\boldsymbol{\mu}_t, \boldsymbol{\Sigma}_t)$. Tällöin ehdollinen satunnaismuuttuja $(r_t^j | r_t^i)$ on normaalisti jakautunut siten, että

$$(r_t^j | r_t^i) \sim N\left(\mu_t^j + \frac{(r_t^i - \mu_t^i)\sigma_t^j \rho_t^{ij}}{\sigma_t^i}, (1 - (\rho_t^{ij})^2)(\sigma_t^j)^2\right), \quad (2.20)$$

jossa μ_t^i ja μ_t^j sekä σ_t^i ja σ_t^j ovat tuottojen r_t^i ja r_t^j ajassa muuttuvat odotusarvot ja keskihajonnat sekä ρ_t^{ij} on tuottojen välinen ajassa muuttuva korrelaatio. Koska tuoton r_t^i VaR -mitta luottamustasolle q saadaan yhtälöstä $VaR_{\alpha,t}^i = \mu_t^i + \sigma_t^i \Phi^{-1}(\alpha)$, voidaan $CoVaR$ -mitalle esittää analyttinen ratkaisu, joka on muotoa

$$CoVaR_{q,t}^{j|i} = \mu_t^j + \Phi^{-1}(\alpha)\sigma_t^j \sqrt{1 - (\rho_t^{ij})^2} + \Phi^{-1}(q)\rho_t^{ij}\sigma_t^j. \quad (2.21)$$

Lisäksi $\Delta CoVaR$ -mitta voidaan esittää muodossa $\Delta CoVaR_{q,t}^{j|i} = \rho_t^{ij}\sigma_t^j \Phi^{-1}(q)$. Gaussisessa tapauksessa $\Delta CoVaR$ -mitan nähdään määrittävän kolmesta muuttujasta, jotka ovat tuottojen r_t^i ja r_t^j välinen korrelaatio, tuoton j varianssi ja normaalijakauman q -kvantiili. (Adrian & Brunnermeier 2016, 1733–1734.) Kuten VaR , myös $CoVaR$ voidaan ratkaista muistakin todennäköisyysjakaumista, joskin analyttisen ratkaisukaavan löytäminen on tällöin usein haasteellisempaa.

3 TUOTTOAIKASARJOJEN MALLINTAMINEN

3.1 Tuottoaikasarjojen tilastollisia ominaisuuksia

Aikasarja-analyysin peruskäsitteenä voidaan pitää stationaarisuutta. Vahva stationaarisuus (engl. *strong stationarity*) tarkoittaa, että stokastisen prosessin havaintojen $(y_{t_1}, \dots, y_{t_T})$ yhteisjakauma on aikainvariantti siirtymän $k \in \mathbb{Z}$ suhteen. Tällöin joukon $(y_{t_1+k}, \dots, y_{t_T+k})$ koko todennäköisyysrakente on identtinen joukon $(y_{t_1}, \dots, y_{t_T})$ kanssa. Vahva stationaarisuus on hyvin voimakas oletus, joten sitä on usein tarpeellista helpottaa. Heikko stationaarisuus (engl. *weak stationarity*) olettaa, että vain joukkojen $(y_{t_1}, \dots, y_{t_T})$ ja $(y_{t_1+k}, \dots, y_{t_T+k})$ kaksi ensimmäistä momenttia, eli odotusarvo ja autokovarianssi, ovat aikainvariantit.⁴ Tällöin heikon stationaarisuuden määritelmäksi saadaan, että stokastisen prosessin odotusarvo $E[y_t] = E[y_{t+h}] = \mu \in \mathbb{R}$ on hetkestä t riippumaton vakio ja autokovarianssi (engl. *autocovariance*) $Cov[y_t, y_{t-k}] = Cov[y_t, y_{t+k}] = \gamma_k \in \mathbb{R}$ riippuu ainoastaan aikavälistä k , jolloin indeksiä k kutsutaan viipeeksi (engl. *lag*). Heikon stationaarisuuden vallitessa satunnaismuuttujan y_t varianssille pätee $Var[y_t] = \gamma_0 \geq 0$, eli varianssi ei ole hetkestä t riippuva. Satunnaismuuttujalle voidaan tällöin määritellä autokorrelaatio (engl. *autocorrelation*) kaavalla $Cor[y_t, y_{t+k}] = \gamma_k / \gamma_0 = \rho_k \in [-1, 1]$, jolloin stationaarisen sarjan autokorrelaatio riippuu vain viipeen k arvosta. Stokastisen prosessin aikasarjasta piirrettyssä kuvaajassa heikko stationaarisuus näyttää siltä, että aikasarjan havainnot vaihtelevat vakiona pysyvän keskiarvon ympärillä vakiona pysyvällä varianssilla. Heikosti stationaarisen aikasarjan tapauksessa sarjan ensimmäisen ja toinen momentti ovat äärellisiä. Lisäksi vahvasti stationaarinen aikasarja on aina myös heikosti stationaarinen, mikäli sarjan kaksi ensimmäistä momenttia ovat äärellisiä. (Tsay 2005, 25.)

Yleinen esimerkki heikosta stationaarisesta prosessista on valkoisen kohinan prosessi (engl. *white noise*), jota hyödynnetään laajasti aikasarja-analyysissä. Prosessia ε_t kutsutaan valkoiseksi kohinaksi, mikäli se on sarja itsenäisesti ja identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia äärellisellä keskiarvolla ja varianssilla. Valkoisen kohinan tapauksessa identtisyys tarkoittaa, että prosessin odotusarvo on nolla, eli $E[\varepsilon_t] = 0$. Lisäksi prosessin varianssi $Var[\varepsilon_t] = E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$ on vakio kaikilla eri ajanhetkillä t . Itsenäisyyden ehdon perusteella prosessin autokovarianssi on nolla, eli $Cov[\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}] = 0$, kun $k \neq 0$. (Tsay 2005, 31.) Itsenäisesti ja identtisesti jakautunutta prosessia voidaan kuvata lyhyesti merkinnällä

$$\varepsilon_t \sim iid(\mu, \sigma^2), \quad (3.1)$$

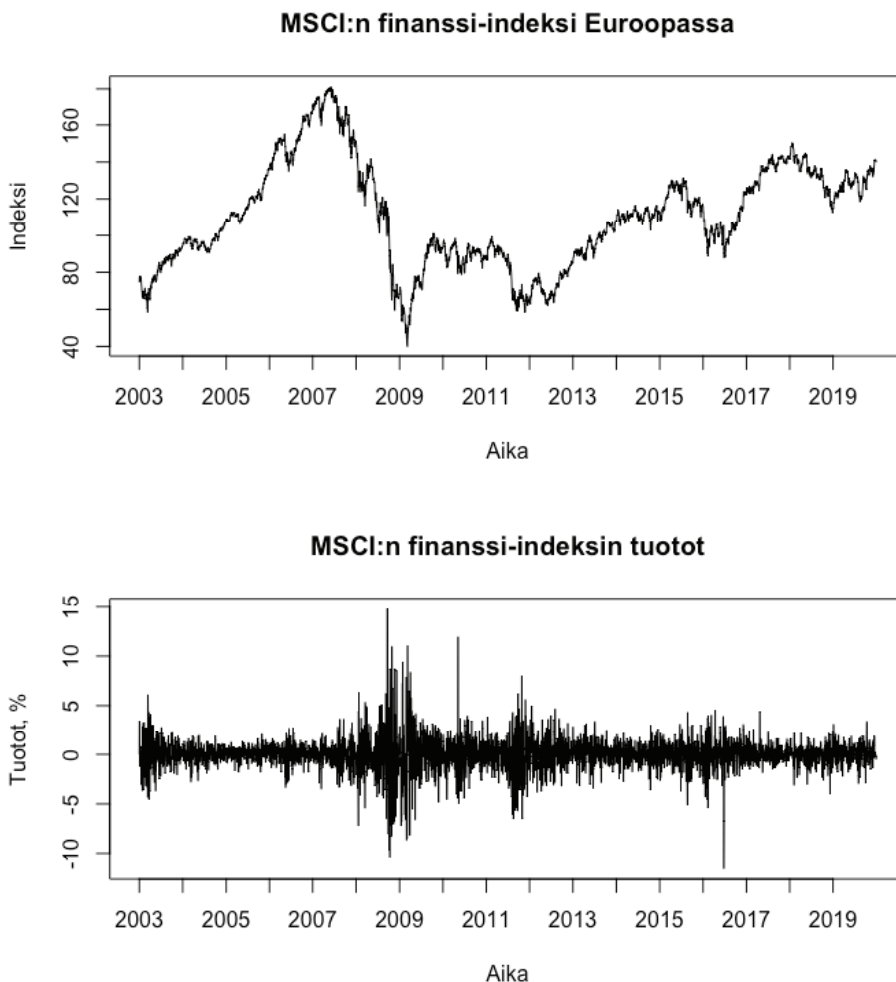
⁴ Satunnaismuuttujan X r -origomomentti on muotoa $E[X^r]$ ja r -keskusmomentti on muotoa $E[(X - \mu)^r]$, jossa μ on ensimmäisen origomomentti $\mu = E[X]$ (Tsay 2005, 8–9).

jossa *iid* viittaa identtisesti ja itsenäisesti jakautuneisiin satunnaismuuttujiin. Erityisesti tapauksessa, jossa muuttujien oletetaan olevan normaalijakautuneita, käytetään merkintää

$$\varepsilon_t \sim \text{nid}(\mu, \sigma^2), \quad (3.2)$$

jossa *nid* viittaa itsenäisesti ja identtisesti normaalijakautuneisiin satunnaismuuttujiin.

Tuottosarjojen empiirisiä ominaisuuksia tarkastellaan MSCI:n (*Morgan Stanley Capital International*) Euroopan suurien ja keskisuurien finanssilaitosten markkina-arvoista (engl. *market capitalization*) koostetun indeksin (*The MSCI Europe Finance Index*) logaritmisien tuottojen aikasarjan avulla. Aikasarja koostuu vuosilta 2003–2019 kerätyistä markkinapäivittäisistä indeksin arvoista ja sarja on haettu Macrobond-järjestelmästä. Kuvaa 1 on piirretty MSCI-indeksin arvon kehitys (hintaindeksi) sekä tuottosarjan kuvaaja.



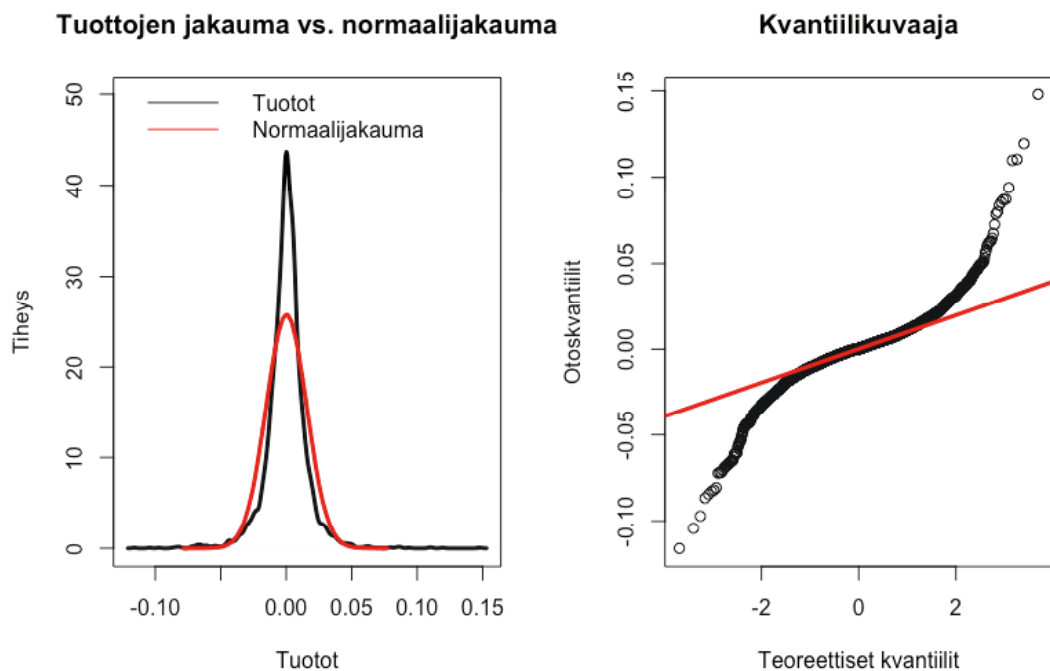
Kuva 1 MSCI:n eurooppalaisten finanssilaitosten indeksi ja indeksin tuotot.

Kuvasta 1 nähdään, että hintaindeksi ei noudata valkoista kohinaa, sillä arvon kehityksessä on havaittavissa selviä nousu- ja laskutrendejä. Sen sijaan logaritmistien tuottojen

kehityksessä ei ole havaittavissa trendejä, sillä sarjan keskiarvo pysyy käytännössä vakiona nollan ympärillä. Tuottojen varianssi ei kuvaajan perusteella ole kuitenkaan ajanhetkestä riippumaton, sillä kuvaajasta erottuu ajanjaksoja, jolloin varianssi on keskimääräistä suurempaa tai pienempää. Esimerkiksi vuosina 2008 ja 2009 tuottojen varianssi on merkittävästi suurempaa kuin vuosina 2018 ja 2019.

Vinous⁵ ja huipukkuus⁶ kuvaavat satunnaismuuttujan jakauman muotoa. Vinous kuvaa jakauman symmetrisyyttä eli sitä, kuinka identtisesti havainnot ovat jakautuneet keskiarvon molemmille puolille. Huipukkuus kuvaa puolestaan jakauman huipun terävyyttä ja korkeutta. Normaalijakauman tapauksessa vinouden arvo on nolla ja huipukkuuden arvo on kolme. Esimerkiksi Tsay (2005, 7–20) esittää, että empiiriset tuottoaikasarjat eivät noudata normaalijakaumaa, sillä tuotot ovat normaalijakaumaa huipukkaampia ja paksuhäntäisempiä, jolloin empiirisissä jakaumissa esiintyy teoreettista normaalijakaumaa useammin erittäin suuria ja pieniä tuottoja eli äärihavaintoja.

MSCI:n indeksin tuottojen osalta normaalijakautuneisuutta tarkastellaan kuvassa 2, johon on piirretty MSCI:n indeksin tuottojen empiirinen jakauma ja sovitettu normaalijakauma sekä kvantiilikuvaaja.



Kuva 2 MSCI:n finanssi-indeksin logaritmisten tuottojen tiheys- ja kvantiilikuvaajat.

Kuvasta 2 nähdään, että empiirinen jakauma on normaalijakaumaa huipukkaampi. Tarkemmin huipukkuuden arvoksi saadaan 12,36, joka on selvästi suurempaa kuin kolme.

⁵ Satunnaismuuttujan X vinous on $E \left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \right)^3 \right]$, jossa μ on keskiarvo ja σ on keskihajonta (Tsay 2005, 9).

⁶ Satunnaismuuttujan X huipukkuus on $E \left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \right)^4 \right]$, jossa μ on keskiarvo ja σ on keskihajonta (Tsay 2005, 9).

Sen sijaan vinouden arvoksi saadaan 0,07, joka on hyvin lähellä normaalijakauman vinouden arvoa, joten empiirinen jakauma ei tämän perusteella ole kovinkaan vino. Sarjan odotusarvoksi saadaan nolla, mikä nähtiin jo kuvaajan 1 perusteella. Kvantiilikuvaajan perusteella suuria ja pieniä havaintoja on merkittävästi normaalijakauman olettaa enemmän, jolloin tuottojen jakauman voidaan sanoa olevan normaalijakaumaa paksuhän-täisempi. Kaiken kaikkiaan tuottojen ei siis havaita noudattavan normaalijakaumaa täydellisesti.

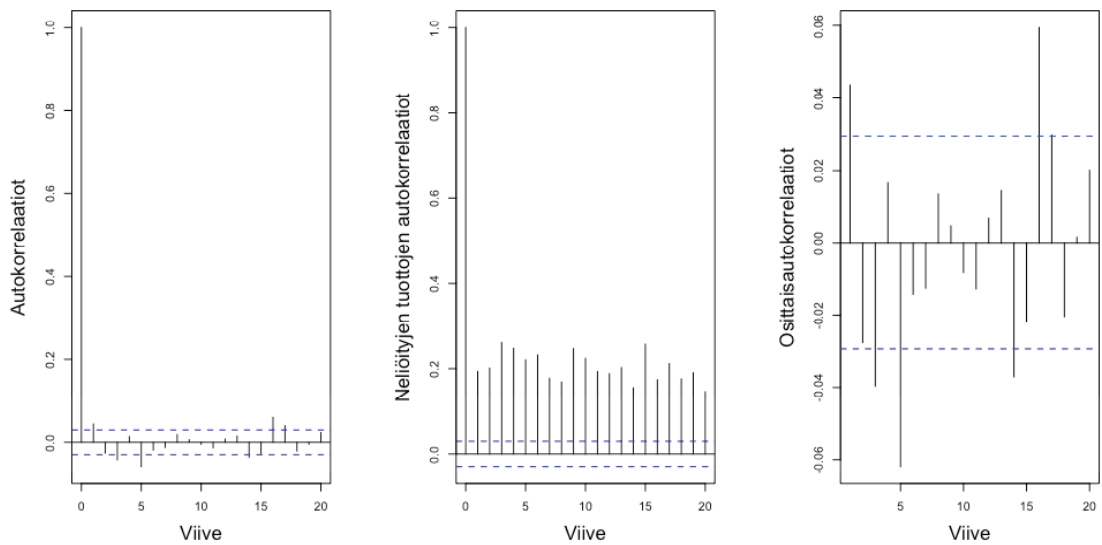
Rahoitusaikasarjan $\{\hat{r}_t | t = 1, \dots, T\}$ otoskovarianssit $\hat{\gamma}_k$ viipeelle $0 \leq k < T$ voidaan laskea kaavalla

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} (\hat{r}_t - \bar{r})(\hat{r}_{t+k} - \bar{r}), \quad (3.3)$$

jossa T on koko aikasarjan pituus ja \bar{r} aikasarjan otoskeskiarvo $\bar{r} = (1/T) \sum_{t=1}^T \hat{r}_t$. Tällöin otosautokorrelaatiot saadaan kaavalla $\hat{\rho}_k = \hat{\gamma}_k / \hat{\gamma}_0$. (Tsay 2005, 25–26.) Mikäli tuottojen satunnaisprosessille r_t pätee $r_t \sim iid(\mu, \sigma^2)$, seuraavat tuottojen autokorrelaatiot (ρ_1, \dots, ρ_k) asympotoottisesti normaalijakaumaa siten, että $\rho_i \sim nid(0, 1/T)$, kun $1 \leq i \leq k$. Ehdon $r_t \sim iid(\mu, \sigma^2)$ vallitessa saadaan otosautokorrelaatioille johdettua luottamusväli $-1.96/\sqrt{T} \leq \hat{\rho}_k \leq 1.96/\sqrt{T}$. Jotta havaitun aikasarjan voidaan olettaa olevan tilastollisesti autokorrelaationaton eli itsenäisesti jakautunut, tulee sarjasta laskettujen autokorrelaatioiden olla esitetyn luottamusvälin sisäpuolella. (Fuller 1996, 333–342.)

MSCI-Indeksistä laskettujen logaritmistien tuottojen otosautokorrelaatioiden, neliöityjen havaintojen otosautokorrelaatioiden sekä otoksesta laskettujen osittaisautokorrelaatioiden⁷ (engl. *partial autocorrelation*) kuvaajat suurimpaan laskettuun viipeeseen ($K = 20$) asti ovat kuvassa 3.

⁷ Osittaisautokorrelaation käsite kuvataan tarkemmin luvussa 3.2.



Kuva 3 Finanssi-indeksin tuottojen autokorrelaatiot, neliöityjen tuottojen autokorrelaatiot ja osittaisautokorrelaatiot.

Kuvan 3 perusteella havaitaan, että sinisellä viivalla piirretyn luottamusvälin ylittäviä autokorrelaatioita esiintyy kaikkien autokorrelaatiotyypin tapauksessa. Erityisesti neliöityjen tuottojen autokorrelaatiot ovat kaikilla viipeillä selvästi yli luottamustason. Sen sijaan logaritmistien tuottojen lineaariset autokorrelaatiot ja osittaisautokorrelaatiot ylittävät luottamusrajan satunnaisemmin.

Tilastollisesti tuottosarjan autokorrelaatiota voidaan testata Ljung-Boxin testillä. Testin nollahypoteesi on, että autokorrelaatiot testattavaan suurimpaan viipeeseen K asti ovat arvoltaan nolla, jolloin aikasarjassa ei ole tilastollisesti merkitsevää autokorrelaatiota. Vastahypoteesi on, että autokorrelaatiot eivät ole arvoltaan nolla, jolloin sarjassa on tilastollisesti merkitsevää autokorrelaatiota. Testisuure on muotoa

$$Q = T(T + 2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{\gamma}_k^2}{T - k} \quad (3.4)$$

ja se on asympotoottisesti χ^2 -jakautunut vapausasteella K . (Ljung & Box 1978.) Neliöityjen havaintojen tapauksessa testisuure lasketaan vastaavasti, joskin tällöin testiä nimitetään yleisesti McLeod-Lin testiksi (McLeod & Li 1983). MSCI:n finanssi-indeksin aikasarjalla sekä Ljung-Boxin että McLeod-Lin testien p-arvot ovat selvästi alle 0,05 testattaessa suurimman viipeen K arvoilla yhdestä kahteenkymmeneen. Toisin sanoen tuottosarjassa havaitaan olevan tilastollisesti merkittävää autokorrelaatiota, jolloin tuottojen mallintaminen pelkän *iid*-oletuksen mukaisesti ei välttämättä ole täysin kuvaavaa.

3.2 Yksiulotteinen aikasarjamallintaminen

Aikasarjamallien tavoitteena on mitata, mallintaa ja ennustaa stokastisen prosessin y_t käyttäytymistä tilastotieteen keinoilla. Tavoitteena voi olla esimerkiksi prosessissa tapahtuvien säännöllisten muutosten (syklien) mallintaminen tai eri prosessien välisten korrelaatioiden mallintaminen. (Lüthkepohl 2005, 1–2.) Käytännössä stokastista prosessia voidaan analysoida sellaisen informaation I_{t-1} avulla, joka on saatavilla hetkellä t . Tämä informaatio sisältää esimerkiksi prosessin menneiden havaintojen aikasarjan $\{\hat{y}_i | i = 1, \dots, t-1\}$. Informaatiota I_{t-1} hyödyntäen prosessille y_t voidaan laskea ehdollisia momenteja, joita merkitä lyhyesti merkinnällä $E[y_t^r | I_{t-1}] = E_{t-1}[y_t^r]$, jossa $r \in \mathbb{Z}_+$. (McNeil ym. 2005, 127.) Stokastisen prosessin y_t mallinnus voidaan jakaa kahteen osaan, jolloin prosessia kuvataan yhtälöllä

$$y_t = E_{t-1}[y_t] + u_t. \quad (3.5)$$

Tällöin prosessille y_t mallinnetaan ehdollinen odotusarvo $E_{t-1}[y_t]$ ja virhetermi u_t . Olettaen, että prosessi y_t on heikosti stationaarinen, pätee prosessin odotusarvolle $E[y_t] = \mu$, varianssille $Var[y_t] = \gamma_0$ ja autokovarianssille $Cov[y_t, y_{t-k}] = \gamma_k$.

Yksinkertainen lineaarinen malli, joka hyödyntää sarjan peräkkäisten havaintojen autokorreloituneisuutta prosessin y_t mallintamisessa, on autoregressiivinen (engl. *autoregressive*) $AR(p)$ -malli. Autoregressiivisessä mallissa prosessin y_t ehdollisen odotusarvon ajatellaan olevan riippuvainen p -määrästä menneitä havaintoja sekä vakiotermistä ϕ_0 . Lisäksi virhetermiä u_t kuvataan satunnaisprosessilla $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$. Tällöin prosessia y_t kuvaava $AR(p)$ -malli on muotoa

$$y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (3.6)$$

$AR(p)$ -mallin ominaisuuksia voidaan kuvata mallin yksinkertaisimmalla $AR(1)$ -muodolla, jolloin $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$, jossa $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$. Odotusarvo yli $AR(1)$ -mallin on muotoa $E[y_t] = \phi_0 + \phi_1 E[y_{t-1}]$, jolloin prosessin y_t stationaarisuuden perusteella odotusarvo μ on muotoa $\mu = \phi_0 / (1 - \phi_1)$. Tällöin odotusarvo on olemassa $AR(1)$ -mallille vain silloin, kun $\phi_1 \neq 1$. Lisäksi voidaan osoittaa, että prosessin y_t heikon stationaarisuuden alla mallin varianssille γ_0 pätee $\gamma_0 = \sigma^2 / (1 - \phi_1^2)$, kun $\phi_1^2 < 1$. Täten $AR(1)$ -mallin heikon stationaarisuuden välttävä ja riittävä ehto on $|\phi_1| < 1$. $AR(1)$ -mallia vastaavat tulokset voidaan esittää myös yleisemmin $AR(p)$ -mallille. (Tsay 2005, 32–39.)

Koska empiirisissä sovelluksissa ei käytännössä tiedetä autoregressiivisen mallin spesifikaatiota etukäteen, tulee tämä tekijä selvittää tilastollisilla menetelmillä. Yksi yleinen tapa selvittää $AR(p)$ -mallin spesifikaatio on määrittää aikasarjan osittaisautokorrelaatiot.

Osittaisautokorrelaatiot saadaan määriteltyä usean lineaarisen regression yhtälöistä (engl. *multiple linear regression*), jotka ovat muotoa

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1} + e_{1t} \\ y_t &= \phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1} + \phi_{2,2}y_{t-2} + e_{2t}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.7)$$

jossa $\phi_{0,j}$ ja $\phi_{i,j}$ ovat regression j vakiotermit ja selittävien muuttujien i kertoimet sekä e_{jt} on $AR(j)$ -mallin virhetermi. Tällöin yhtälöillä 3.7 estimoitu kerroin $\hat{\phi}_{j,j}$ on viipeen j osittaisautokorrelaatio prosessille y_t . Osittaisautokorrelaatio $\hat{\phi}_{j,j}$ kuvaa siis selittävän termin y_{t-j} lisäämisen vaikutusta malliin $AR(j-1)$. Täten $AR(p)$ -mallin osittaisautokorrelaation $\hat{\phi}_{p,p}$ ei tulisi olla nolla, mutta osittaisautokorrelaatioiden $\hat{\phi}_{j,j}$ tulisi olla vähintäänkin lähellä nollaa, kun $j > p$. (Tsay 2005, 40–41.)

Vaihtoehtoinen lähestymistapa mallintaa prosessia y_t on hyödyntää liikkuvan keskiarvon $MA(q)$ -malleja (engl. *moving average*), joissa prosessin y_t oletetaan riippuvan q -määrästä menneiden hetkien satunnaisprosessin ε_t havaintoja. $MA(q)$ -malli voidaan esittää muodossa

$$y_t = \theta_0 + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}, \quad (3.8)$$

jossa $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$. Ottamalla odotusarvo ja varianssi yli $MA(q)$ -mallin nähdään, että odotusarvo ja varianssi ovat aikainvariantteja ja muotoa $\mu = \theta_0$ sekä $\gamma_0 = \sigma^2 + \sum_{i=1}^q \theta_i^2 \sigma^2$, jolloin malli on aina stationaarinen. $MA(q)$ -mallin asteen q arvioimisessa voidaan hyödyntää prosessista y_t havaitun empiirisen aikasarjan autokorrelaatiofunktioita. Jos havaittu autokorrelaatio $\hat{\gamma}_q > 0$, mutta $\hat{\gamma}_{q+1} = 0$, viittaa tämä siihen, että prosessi y_t noudattaa $MA(q)$ -mallia. (Tsay 2005, 50–53.)

Autoregressiivinen malli voidaan yhdistää liikkuvan keskiarvon malliin, jolloin prosessi y_t saadaan esitettyä autoregressiivisenä liikkuvan keskiarvon $ARMA(p,q)$ -mallina (engl. *autoregressive moving average*). Mallissa autoregressiiviseen $AR(p)$ -osaan lisätään $MA(q)$ -osa, jolloin $ARMA(p,q)$ -mallin yhtälö on muotoa

$$y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (3.9)$$

jossa virhetermiä u_t mallinnetaan prosessilla $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$. Koska $ARMA(p,q)$ -malli yhdistää $AR(p)$ ja $MA(q)$ -mallien ominaisuuksia, saadaan tällä pienennettyä estimoitavan mallin kokoa. Ottamalla käyttöön viiveoperaattori B , joka määritellään yleisesti yhtälöllä $B^j y_t = y_{t-j}$, voidaan $ARMA(p,q)$ -malli esittää muodossa $\phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t$, jossa

$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_1 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ ja $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$. Mikäli yhtälöillä $\phi(z)$ ja $\theta(z)$ on yhteisiä tekijöitä, voidaan $ARMA(p,q)$ -mallin kokoa pienentää. Lisäksi kaikkien yhtälön $\phi(z)$ ratkaisujen ollessa itseisarvoltaan pienempää kuin 1, on $ARMA(p,q)$ -malli heikosti stationaarinen, jolloin mallin odotusarvo on muotoa $\mu = \phi_0 / (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$. (Tsay 2005, 56–59.)

Mikäli tuottosarjassa on havaittavissa ajassa muuttuvaa volatilitteettia, ei virhetermin u_t mallintaminen pelkällä *iid*-prosessilla ole välttämättä riittävää. Ajassa muuttuvaa volatilitteettia voidaan mallintaa ehdollisen heteroskedastisuuden malleilla (engl. *conditional heteroscedastic model*). Tällöin virhetermin u_t oletetaan noudattavan yhtälöä

$$u_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad (3.10)$$

jossa $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$. Tällöin prosessin u_t ehdolliselle odotusarvolle pätee $E_{t-1}[h_t^{1/2} \varepsilon_t] = h_t^{1/2} E_{t-1}[\varepsilon_t] = 0$ ja ehdolliselle varianssille pätee $Var_{t-1}[h_t^{1/2} \varepsilon_t] = h_t E_{t-1}[\varepsilon_t^2] = h_t$, eli muuttuja (tai funktio) h_t määrittelee prosessin u_t ajassa muuttuvan ehdollisen varianssin. (McNeil ym. 2005, 139.) Esimerkiksi luvun 3.1 kuvasta 1 nähtiin, että empiirisen tuottoaikasarjan varianssi vaihtelee eri ajan hetkinä. Lisäksi luvun 3.1 kuvasta 2 nähtiin, että empiirisen tuottojakauman hännät voivat olla normaalijakauman olettamaa paksummat.

Engle (1982) esitteli ehdolliselle varianssille h_t autoregressiivisen $ARCH(s)$ -mallin (engl. *autoregressive conditional heteroskedasticity*), jossa ehdollinen varianssi riippuu menneen prosessin u_t menneistä neliöidyistä arvoista. Yleisesti $ARCH(s)$ -malli on muotoa

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^s \alpha_i u_{t-i}^2, \quad (3.11)$$

jossa kertoimille pätee ehdot $\omega > 0$ ja $\{\alpha_i \geq 0 | i = 1, \dots, s\}$. Olettamalla prosessin u_t olevan stationaarinen, saadaan $ARCH(s)$ -mallia noudattavan prosessin u_t varianssi muotoon $Var[u_t] = \omega / (1 - \sum_{i=1}^s \alpha_i)$, jolloin varianssin ominaisuuksien perusteella kertoimien summalle saadaan ehto $\sum_{i=1}^s \alpha_i < 1$. Koska $ARCH(s)$ -malli on lineaarisesti riippuva prosessin u_t menneistä neliöidyistä havainnoista, voidaan $ARCH(s)$ -mallilla mallintaa ajassa vaihtelevaa volatilitteettia. Lisäksi voidaan näyttää, että $ARCH(s)$ -mallia seuraavan prosessin u_t jakauman hännät ovat paksummat kuin itsenäisesti normaalijakautuneen prosessin. Toisin sanoen $ARCH(s)$ -mallia noudattavalla virhetermillä saadaan tuotettua enemmän äärihavainnoja kuin itsenäisesti normaalijakautuneella virhetermillä.

Empiirisissä tapauksissa on havaittu, että $ARCH(s)$ -malleille tarvitaan usein varsin suuri s -parametrin arvo, jotta mallilla voidaan kuvata aikasarjojen käyttäytymistä. Suuri

s -parametri johtaa kuitenkin kooltaan isoihin malleihin, joiden käsittely on jokseenkin raskasta ja epäintuitiivista. (Tsay 2005 113–114.) Ongelman ratkaisemiseksi Bollerslev (1986) esitti yleisen ehdollisen varianssin autoregressiivisen $GARCH(r,s)$ -mallin (engl. *generela autoregressive conditional heteroskedasticity*). Tällöin ehdollinen varianssi h_t mallinnetaan prosessin u_t neliöityjen menneiden havaintojen sekä ehdollisen varianssin h_t menneiden arvojen avulla. Tarkemmin $GARCH(r,s)$ -malli on muotoa

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^r \beta_i h_{t-i} + \sum_{i=1}^s \alpha_i u_{t-i}^2, \quad (3.12)$$

jossa parametreille pätee $\omega > 0$ ja $\{\alpha_i, \beta_j \geq 0 | i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, r\}$. Heikon stationaarisuuden alla prosessin h_t varianssille pätee yhtälö $Var[u_t] = \omega / (1 - \sum_{i=1}^s \alpha_i - \sum_{i=1}^r \beta_i)$, jolloin varianssin ominaisuuksien perusteella parametreille α_i ja β_i saadaan ehto $\sum_{i=1}^s \alpha_i + \sum_{i=1}^r \beta_i < 1$. Tsay (2005, 114–116) toteaa, että $GARCH(r,s)$ -mallia noudattavan prosessin u_t ominaisuudet ovat samankaltaisia kuin $ARCH(s)$ -mallia noudattavan prosessin ominaisuudet. Toisin sanoen $GARCH(r,s)$ -mallilla voidaan mallintaa ajassa vaihtelevaa volatilitteettia. Lisäksi mallia noudattava prosessi tuottaa useammin äärimmäisen suuria tai pieniä arvoja kuin tavallinen *iid*-normaalijakautunut prosessi.

Sekä $ARCH$ - että $GARCH$ -mallien heikkoutena nähdään mallien symmetrinen tapa reagoida sekä positiivisiin että negatiivisiin prosessin u_t menneisiin havaintoihin, sillä mallien yhtälöissä reaktio menneisiin tapahtumiin riippuu prosessin u_t neliöidyistä reaalisuudesta. Symmetrisyyden ongelman korjaamiseksi on esitetty erilaisia epälineaarista $GARCH$ -malleja, joilla pyritään mallintamaan empiiristen finanssiaikasarjojen ominaisuutta reagoida epäsymmetrisesti negatiivisiin ja positiivisiin tapahtumiin. (McNeil ym. 2005, 149; Tsay 2005, 116.) Lisäksi on havaittu, etteivät $GARCH$ -mallilla simuloitujen jakaumien häntien ominaisuudet ole aina välttämättä riittäviä kuvaamaan empiiristen tuottojakaumien häntien ominaisuuksia. Toisin sanoen $GARCH$ -mallit eivät välttämättä tuota riittävän suuria ja pieniä havaintoja riittävän useasti. (Tsay 2005, 116.)

$AR(p)$ -malli voidaan yhdistää ehdollisen varianssin heteroskedastiseen $GARCH(r,s)$ -malliin, jolloin muodostuu $AR(p)$ - $GARCH(r,s)$ -malli. Tällöin prosessille y_t saadaan mallinnettua sekä ajassa muuttuva ehdollinen odotusarvo että ajassa muuttuva ehdollinen varianssi. Yleisesti $AR(p)$ - $GARCH(r,s)$ -mallit ovat muotoa

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t = \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + u_t \\ u_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t \\ h_t = \omega + \sum_{i=1}^r \beta_i h_{t-i} + \sum_{i=1}^s \alpha_i u_{t-i}^2 \end{array} \right. , \quad (3.13)$$

jossa $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$. Tällöin $AR(p)$ - $GARCH(r,s)$ -mallissa $GARCH(r,s)$ -osalla mallinnetaan $AR(p)$ -mallin virhetermin u_t ehdollista varianssia h_t . Mallin yhtälöiden ollessa ensimmäistä astetta eli muotoa $AR(1)$ - $GARCH(1,1)$, saadaan mallin ehdollinen odotusarvo tulevalle periodille $t + 1$ muotoon $E_t[y_{t+1}] = \phi_0 + \phi_1 \hat{y}_t$, jossa \hat{y}_t on prosessin y_t reaalisatio hetkeltä t . Lisäksi mallin tulevan periodin ehdollinen varianssi on muotoa $Var_t[y_{t+1}] = E_t[h_{t+1}] = \omega + \beta \hat{h}_t + \alpha \hat{u}_t^2$, jossa \hat{h}_t ja \hat{u}_t ovat hetken t realisoituneet ehdollinen varianssi ja $AR(1)$ -mallin virhetermi. Toisin sanoen $AR(1)$ - $GARCH(1,1)$ -mallin tulevan periodin ehdollinen odotusarvo ja varianssi ovat molemmat ajassa muuttuvia ja ehdolliseen odotusarvoon ei vaikuta virhetermin u_{t+1} arvo. (McNeil ym. 2005, 148–149, 159.)

3.3 Moniulotteiset aikasarjat ja ehdollinen korrelaatio

Vektori \mathbf{y}_t on N -ulotteinen vektori, joka koostuu useista stokastisista prosesseista ajanhetkellä t . Tällöin se on muotoa $\mathbf{y}_t = (y_t^1, \dots, y_t^N)'$, jossa y_t^i on yksittäinen stokastinen prosessi. Analogisesti yksiulotteisen stokastisten prosessin kanssa useampiulotteista stokastista vektoria \mathbf{y}_t voidaan mallintaa hyödyntäen yhtälöä

$$\mathbf{y}_t = E_{t-1}[\mathbf{y}_t] + \mathbf{u}_t, \quad (3.14)$$

jossa $E_{t-1}[\mathbf{y}_t]$ on N -ulotteinen vektori, joka kuvaa prosessien ehdollisia odotusarvoja hetken $t - 1$ saatavilla olevan informaation I_{t-1} perusteella ja \mathbf{u}_t satunnaisprosessia kuvaava N -ulotteinen virhevektori $\mathbf{u}_t = (u_t^1, \dots, u_t^N)'$, jossa u_t^i on yksittäinen stokastisen prosessin virhetermi. (Bauwens ym. 2006, 80–81.) Ehdollista odotusarvovektoria $E_{t-1}[\mathbf{y}_t]$ voidaan mallintaa esimerkiksi yksiulotteisilla $ARMA(p,q)$ -malleilla. Tällöin jokaiselle stokastiselle prosessille estimoidaan omat $ARMA(p,q)$ -mallin mukaiset kertoimet. Esimerkiksi kaksiulotteisessa tapauksessa $AR(1)$ -mallia noudattava ehdollinen odotusarvovektori on muotoa

$$E_{t-1}[\mathbf{y}_t] = \begin{pmatrix} \phi_0^1 + \phi_1^1 \hat{y}_{t-1}^1 \\ \phi_0^2 + \phi_1^2 \hat{y}_{t-1}^2 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

jossa vakiotermit ϕ_0^i ja kerrointermit ϕ_1^i ovat prosessien $i = \{1,2\}$ yksiulotteisten $AR(1)$ -mallien termit. (Girardi & Ergün 2013, 3171.)

Moniulotteisessa tapauksessa virhevektori \mathbf{u}_t voidaan määrittellä vastaavalla tavalla kuin yksiulotteisessa heteroskedastisessa ehdollisen varianssin mallissa. Tällöin N -ulotteinen virhevektori \mathbf{u}_t on muotoa

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.16)$$

jossa \mathbf{H}_t on N -ulotteinen ehdollisen virhevektorin \mathbf{u}_t varianssimatriisi ja $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ on N -ulotteinen satunnaisvektori, jolla on ominaisuudet $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$ ja $Var(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{I}_N$. Toisin sanoen yksittäisen satunnaismuuttujan ε_t^i odotusarvo on nolla, varianssi on yksi ja korrelaatio muiden satunnaistermien välillä on nolla. Tällöin satunnaisprosessivektorin \mathbf{y}_t ehdolliselle varianssille pätee $Var_{t-1}[\mathbf{y}_t] = \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{I}_N (\mathbf{H}_t^{1/2})' = \mathbf{H}_t$. Tarkemmin matriisi \mathbf{H}_t voidaan määrittellä muodossa

$$\mathbf{H}_t = \begin{pmatrix} h_t^1 & \cdots & \rho_t^{1N} \sqrt{h_t^1 h_t^N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_t^{N1} \sqrt{h_t^1 h_t^N} & \cdots & h_t^N \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

jossa ρ_t^{ij} on prosessien y_t^i ja y_t^j ($i \neq j$) välinen ehdollinen korrelaatio ja h_t^i prosessin y_t^i ehdollinen varianssi. Varianssimatriisin tunnetun ominaisuuden mukaisesti matriisi \mathbf{H}_t on positiividefiniitti.⁸ (Bauwens ym. 2006, 81, 88–89.)

Niin sanotuissa ehdollisen korrelaation malleissa (engl. *conditional correlation models*) varianssimatriisin \mathbf{H}_t ehdolliset varianssit h_t^i mallinnetaan *GARCH*-tyyppisillä malleilla siten, että jokaisen stokastisen prosessin ehdolliselle varianssille sovitetaan oma mallinsa. Tällöin ehdolliset korrelaatiot ja kovarianssit saadaan laskettua näiden ehdollisten varianssien avulla. (McNeil ym. 2005, 172.) Bollerslev (1990) esitti ehdollisille korrelaatioille mallia, jossa korrelaatioiden oletetaan olevan ajassa vakioita. Mallia kutsutaan nimellä *CCC-GARCH* (engl. *constant conditional correlation*). Tällöin matriisi \mathbf{H}_t laskeaan hajotelman $\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t$ avulla, jossa \mathbf{D}_t on ehdolliset keskihajonnat kokoava matriisi ja \mathbf{R} ehdolliset korrelaatiot kokoava matriisi. Tarkemmin \mathbf{R} ja \mathbf{D}_t määritellään siten, että

⁸ Postiviidefiniittisyyden määritelmän mukaan kaikille N -ulotteisille neliömatriiseille \mathbf{A} pätee $\mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x}' > 0$, jos ja vain jos \mathbf{A} on positiividefiniitti ja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbf{0}$ (Tsay 2005, 396–397).

$$\mathbf{D}_t = \begin{pmatrix} (h_t^1)^{1/2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (h_t^N)^{1/2} \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \rho_t^{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_t^{N1} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

jolloin voidaan näyttää, että molemmat matriisit ovat positiividefiniittejä.

CCC-GARCH-mallin oletus ajassa vakiona pysyvistä korrelaatioista on käytännössä jokseenkin epärealistinen, sillä varsinkin pidemmällä aikavälillä korrelaatioiden voidaan olettaa muuttuvan (McNeil ym. 2005, 173). Engle (2002) esittikin mallin, jossa vakiona pysyvien ehdollisten korrelaatioiden sijaan korrelaatioiden oletetaan olevan ajassa muuttuvia. Kyseistä mallia kutsutaan nimellä *DCC-GARCH* (engl. *dynamic conditional correlation*). Mallissa ehdollinen varianssimatriisi \mathbf{H}_t hajotetaan yhtälöllä $\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t$, jossa \mathbf{D}_t määritellään kuten kaavassa 3.18. Koska varianssimatriisi \mathbf{H}_t on määritelmällisesti aina positiividefiniitti ja matriisi \mathbf{D}_t on ominaisuuksiensa puolesta aina positiividefiniitti, tulee myös matriisin \mathbf{R}_t olla aina positiividefiniitti. Lisäksi matriisin \mathbf{R}_t elementtien tulee olla itseisarvoltaan korkeintaan yksi, sillä matriisi \mathbf{R}_t sisältää satunnaisprosessien väliset korrelaatiot. Ehtojen takaamiseksi matriisi \mathbf{R}_t hajotetaan edelleen yhtälöllä $\mathbf{R}_t = \widehat{\mathbf{Q}}_t^{-1} \mathbf{Q}_t \widehat{\mathbf{Q}}_t^{-1}$, jossa

$$\widehat{\mathbf{Q}}_t = \begin{pmatrix} \sqrt{q_t^1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{q_t^N} \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{Q}_t = \begin{pmatrix} q_t^1 & \dots & q_t^{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_t^{N1} & \dots & q_t^N \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Lisäksi \mathbf{Q}_t ratkotaan yhtälöstä

$$\mathbf{Q}_t = (1 - a - b) \bar{\mathbf{Q}} + a \mathbf{v}_{t-1} \mathbf{v}'_{t-1} + b \mathbf{Q}_{t-1}, \quad (3.20)$$

jossa \mathbf{v}_t on virhetermivektorin \mathbf{u}_t standardoitu vektori, jolloin se on muotoa $\mathbf{v}_t = (u_t^1 / \sqrt{h_t^1}, \dots, u_t^N / \sqrt{h_t^N})'$. Matriisi $\bar{\mathbf{Q}}$ on puolestaan N -ulotteinen standardoitujen virheiden \mathbf{u}_t varianssimatriisi, joka saadaan estimoitua kaavalla

$$\bar{\mathbf{Q}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{v}_t \mathbf{v}'_t. \quad (3.21)$$

Hajotelman perusteella matriisi \mathbf{R}_t saadaan muotoon

$$\mathbf{R}_t = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & q_t^{1N} / \sqrt{q_t^1 q_t^N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_t^{N1} / \sqrt{q_t^N q_t^1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

jossa ehto $\left| q_t^{ij} / \sqrt{q_t^i q_t^j} \right| \leq 1$ varmistaa sen, että korrelaatiomatriisin \mathbf{R}_t alkioit ovat korrelaation määritelmän mukaiset. Lisäksi kaavan 3.20 kertoimille a ja b asetettavat ehdot $a, b \geq 0$ ja $a + b < 1$ takaavat sen, että matriisi \mathbf{Q}_t on aina positiividefiniitti, kunhan myös matriisi \mathbf{Q}_0 on positiividefiniitti.

Kaavan 3.20 mukainen määritelmä matriisille \mathbf{Q}_t on $DCC(1,1)$ -mallin mukainen. Yleinen dynaamisten ehdollisten korrelaatioiden malli $DCC(n,m)$ määritellään kaavalla

$$\mathbf{Q}_t = \left(1 - \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=1}^n b_i \right) \bar{\mathbf{Q}} + \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \mathbf{v}_{t-1} \mathbf{v}'_{t-1} + \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \mathbf{Q}_{t-1}, \quad (3.23)$$

jonka kertoimille pätee $\{a_i, b_j \geq 0 | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$ ja $\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=1}^n b_i < 1$. Koska käytännössä $DCC-GARCH$ -mallien parametrien estimoiminen on teknisesti haastavaa, toteutetaan parametrien estimoiminen kahdessa osassa. Ensin estimoidaan prosessin $GARCH$ -mallien parametrit, jonka jälkeen tämän estimoinnin tuloksia hyödynnetään DCC -parametrien estimoinnissa. (McNeil ym. 2005, 174–175.) Vastaavasti yhden askeleen ennustaminen voidaan toteuttaa mallilla kahdessa osassa. Ensimmäisessä vaiheessa estimoidaan $GARCH$ -mallin mukaiset ehdollisen varianssin ennusteet luvussa 3.2 näytetyllä tavalla. Tämän jälkeen ehdollinen korrelaatiokerroin ja koko ehdollinen varianssimatriisi voidaan laskea estimoidulla DCC -mallilla. (Girardi & Ergün 2013, 3171–3172.)

Edellä esitettyjen CCC - ja DCC -mallien lisäksi on olemassa muitakin menetelmiä, joilla moniulotteisen stokastisen prosessin varianssimatriisia voidaan estimoida. Esimerkiksi Bauwens ym. (2006) tekevät katsauksen erilaisiin usean muuttujan $GARCH$ -pohjaisiin menetelmiin. Heidän mukaan CCC -malli on yksinkertainen ja laskennallisesti helppo keino mallintaa varianssimatriisia, kun taas DCC -malli tarjoaa mahdollisuuden dynaamisen korrelaation mallintamiselle sekä korrelaation ja varianssin mallinnoiksi osittaiselle erottelulle. DCC -mallien osalta ongelmaksi jää kuitenkin mallin heikkoudet eri muuttujien välisten korrelaatioiden mallinnoituksen erottelussa sekä tekniset haasteet mallin estimoinnissa käytännössä. Myös Caporin ja McAleer (2013) tarkastelevat kriittisesti DCC -malleja ja niihin liittyviä haasteita, joista he nostavat esille esimerkiksi DCC -mallin teoreettiset puutteet parametrien asymptotiikkaan liittyen.

4 RISKIMITTOJEN SOVELTAMINEN

4.1 Koherentit riskimitat ja SRISK

4.1.1 Koherenttien riskimittojen teoria

Artzner ym. (1999) määrittelevät matemaattiset ominaisuudet markkinariskiä mittaavalle riskimitalle ρ . He olettavat, että Ω on äärellinen joukko potentiaalisia maailmantiloja, jolloin $|\Omega| \in \mathbb{Z}_+$ on maailmantilojen määrä ja tappiovektori $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_{|\Omega|})' = -(r_1, \dots, r_{|\Omega|})'$ kuvaa portfolion tappioita kaikissa mahdollisissa maailmantiloissa. Lisäksi he määrittelevät riskimitan funktiona $\rho: \mathbb{R}^{|\Omega|} \rightarrow \mathbb{R}$, joka kuvaa portfolion riskin yli maailmantilojen yhdeksi reaalityluvaksi. Tällöin riskimitalta ρ vaaditut neljä matemaattista ominaisuutta ovat translatiivinen invarianssi, subadditiivisuus, homogeenisuus ja monotonisuus. Sellaista riskimittaa, joka täyttää nämä neljä edellä lueteltua ehtoa, voidaan kutsua matemaattisesti koherentiksi riskimitaksi (engl. *coherent measurer of risk*).

Ensimmäinen koherentin riskimitan ominaisuuksista on translatiivinen invarianssiominaisuus (engl. *translation invariance*), jonka mukaan portfolion markkinariski vähenee sillä deterministisellä eli varmalla määrällä, joka portfoliosta vähennetään tai portfolioon lisätään. Toisin sanoen tuomalla määrä $\mathbf{a} = (a, \dots, a) \in \mathbb{R}^{|\Omega|}$ portfolioon, riski muuttuu saman summan verran, jolloin $\rho(\mathbf{l} + \mathbf{a}) = \rho(\mathbf{l}) - a$. Toinen riskimitalta ρ vaadittu ominaisuus on subadditiivisuus (engl. *subadditivity*), jonka mukaan kahden portfolion riskin tulisi yhdessä olla korkeintaan yhtä suuri kuin kahden portfolion riski erillään. Toisin sanoen $\rho(\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2) \leq \rho(\mathbf{l}_1) + \rho(\mathbf{l}_2)$. Ominaisuuden voidaan tulkita kuvaavan hajautushyötyä, jolloin yhden portfolion pilkkominen useaan erilliseen pienempään portfolioon ei alenna markkinatoimijan kokonaisriskiä. Kolmas riskimitalta vaadittu ominaisuus on positiivinen homogeenisuus (engl. *positive homogeneity*). Ominaisuus kuvaa portfolion riskin lineaarista muutosta ei-negatiivisella kertoimella, eli $\rho(\lambda \mathbf{l}) = \lambda \rho(\mathbf{l})$, kun $\lambda \geq 0$. Neljäs riskimitalta vaadittu ominaisuus on monotonisuus (engl. *monotonicity*), jonka mukaan portfolio, joka tuottaa jokaisessa mahdollisessa maailmantilassa paremmin kuin toinen portfolio, on myös riskimitaltaan alhaisempi. Toisin sanoen, jos $\mathbf{l}_2 \leq \mathbf{l}_1$, niin $\rho(\mathbf{l}_2) \leq \rho(\mathbf{l}_1)$. Lisäksi yleisesti pätee, että ilman riskillisiä finanssituotteita ei ole myöskään riskiä, eli $\rho(\mathbf{0}) = 0$. (Artzner ym. 1999.)

Koska *VaR* määritelleen tuottojakauman kvantiilina, täyttää *VaR* koherentin riskimitan ehdoista translatiivisen invarianssin, positiivisen homogeenisuuden ja monotonisuuden ehdot. Sen sijaan *VaR*-menetelmän merkittävä teoreettinen ongelma on se, ettei *VaR* kaikissa tapauksissa täytä subadditiivisuuden ehtoa, jolloin *VaR* ei ole myöskään koherentti riskimita. Tällöin *VaR* ei aina huomioi portfolion hajautushyötyjä oikein. *VaR*-mitan

voidaan kuitenkin näyttää toteuttavan subadditiivisuuden ehdon silloin, kun tuotot ovat normaalisti jakautuneita, jolloin VaR toteuttaa myös koherentin riskimitan määritelmän. (Artzner ym. 1999.) Luvussa 4.2.1 nähdäänkin, että tuottojen normaalijakaumaoletus on suhteellisen yleinen oletus VaR -mitan mallinnuksessa.

Koherentin riskimitan mukaista teoriaa on kritisoitu myös homogeenisuusehdon osalta, sillä erityisesti kertoimen λ suurilla arvoilla voi olla perusteltua olettaa, että portfolion riskin tulisi kasvaa epälineaarisesti. Suurilla kertoimen λ arvoilla portfolion koko on alkuperäiseen nähden moninkertaistunut, jolloin esimerkiksi portfolion nopeassa likvidoisimisessa markkinoilla voi olla haasteita. Portfolion rajattomaan moninkertaistamiseen liittyvä riskin kasvaminen tulisi huomioitua ehdolla, jonka mukaan $\rho(\lambda \mathbf{L}) > \lambda \rho(\mathbf{L})$ silloin, kun λ on selvästi suurempaa kuin 1. Riskimitan ollessa edellä esitetyllä tavalla epälineaarisesti kasvava, subadditiivisuuden ehto ei päde. Subadditiivisuuden ja positiivisen homogeenisuuden ehtojen lieventäminen on johtanut niin sanotun konveksin riskimitan käsitteeseen (engl. *convex measurer of risk*). Konvekssi riskimita ei ole subadditiivinen tai monotoninen, sillä se täyttää näiden ehtojen sijasta heikon konveksisuuden ehdon, jonka mukaan

$$\rho(\lambda \mathbf{L}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{L}_2) \leq \lambda \rho(\mathbf{L}_1) + (1 - \lambda) \rho(\mathbf{L}_2), \quad (4.1)$$

jossa $\lambda \in [0,1]$. Konveksin riskimitan ehtojen alla on mahdollista muodostaa riskimita, joka kasvattaa portfolion riskiä epälineaarisesti silloin, kun portfoliota moninkertaistetaan. (Föllmer & Schied 2002.)

Chen ym. (2013) laajentavat koherentin markkinariskimitan aksiomaattisen lähestymistavan kattamaan systeemiriskiä mittaavaa funktion $\rho^s: \mathbb{R}^{|\mathcal{F}| \times |\Omega|} \rightarrow \mathbb{R}$. Tällöin kaikkien kansantaloudessa toimivien yritysten oletetaan kuuluvan joukkoon \mathcal{F} ja mahdollisten tulevaisuuden maailmantilojen ω kuuluvan joukkoon Ω . Tällöin kansantaloutta kuvataan matriisilla $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{F}| \times |\Omega|}$, jonka pystyriveillä ovat kaikkien yritysten tappiot yksittäisessä maailmantilassa ja vaakariveillä yhden yrityksen tappiot kaikissa maailmantiloissa. Systeemiriskiä mittaava funktio ρ^s kuvaa kansantalouden \mathbf{L} systeemiriskin yhdeksi reaaliarvoksi. Kuten markkinariskiä mittaavan menetelmän ρ tapauksessa, myös systeemiriskiä mittaavan menetelmän ρ^s tulee täyttää tietyt matemaattiset ominaisuudet, jotta menetelmää voidaan kutsua koherentiksi systeemiriskimitaksi. Monilta osin koherentin systeemiriskimitan ehdot ovat vastaavia kuin koherentin markkinariskimitan ehdot.

Systeemiriskimitan ensimmäinen ominaisuus on monotonisuus. Monotonisuuden mukaan sillä kansantaloudella, jonka tappiot ovat kaikissa maailmantiloissa ja kaikilla yrityksillä pienempiä kuin toisella kansantaloudella, tulee olla myös pienempi systeemiriski. Toisin sanoen, jos $\mathbf{L}_1 \leq \mathbf{L}_2$, niin $\rho^s(\mathbf{L}_1) \leq \rho^s(\mathbf{L}_2)$. Toinen ominaisuus on positiivinen homogeenisuus, jolloin pätee $\rho^s(\lambda \mathbf{L}) = \lambda \rho^s(\mathbf{L})$ positiiviselle kertoimelle $\lambda \geq 0$. Kolmas ominaisuus on preferenssien johdonmukaisuus (engl. *preference consistency*), jonka

mukaan systeemiriskimitan tulee mitata systeemiriskiä johdonmukaisesti yli eri skenaarioiden. Toisin sanoen, jos kansantaloudet 1 ja 2 ovat keskenään muuten samanlaisia, mutta yhdessä skenaariossa tappiot ovat pienempiä kansantaloudelle 1 kuin kansantaloudelle 2, tulee systeemiriskin olla kokonaisuudessaan pienempi kansantaloudelle 1 kuin kansantaloudelle 2.⁹ Neljäs systeemiriskimitalle määriteltävä ominaisuus on riskin normalisoituminen, joka on skaalaustekijänä käytettävä ehto. Ehdon mukaan kaikkien yritysten tuottaessa yhden yksikön tappion kaikissa mahdollisissa skenaarioissa, on systeemiriskimitan arvo yhtä suuri kuin markkinoilla toimivien yritysten lukumäärä, eli $\rho^s(\mathbf{1}) = |\mathcal{F}|$. Viides systeemiriskimitalle asetettava ehto on konveksisuus, joka jaetaan lopputulosten konveksisuuden (engl. *outcome convexity*) ehtoon ja riskikonveksisuuden (engl. *risk convexity*) ehtoon. Näistä lopputulosten konveksisuus määritellään tavallisena funktion konveksisuutena.¹⁰ Riskikonveksisuus kuvaa puolestaan riskiaversiota, eli epävarmuuden vähentymisen alentavaa vaikutusta systeemiriskin kokonaismäärään.¹¹ (Chen ym. 2013.)

Systeemiriskiä mittaava funktio ρ^s voidaan hajauttaa sisä- ja ulkofunktioksi siten, että sisäfunktio on aggregaattifunktio $\Lambda: \mathbb{R}^{|\mathcal{F}|} \rightarrow \mathbb{R}$ eri yritysten välillä ja ulkofunktio on yksittäisen yrityksen riskiä eri maailmantilojen välillä kuvaava riskimita $\rho: \mathbb{R}^{|\Omega|} \rightarrow \mathbb{R}$. Tällöin systeemiriskimitalle ρ^s pätee yleisesti määritelmä $\rho^s(\mathbf{L}) = \rho(\Lambda(\mathbf{L}))$. Lisäksi *CoVaR*-funktio ρ_{CoVaR}^s voidaan määrittellä *VaR*-funktiona ρ_{VaR} , joka on laskettu eri maailmantilojen kokonaistappioiden pohjalta, jolloin

$$\rho_{CoVaR}^s(\mathbf{L}) = \rho_{VaR}(\Lambda(\mathbf{L})) = \rho_{VaR}(\mathbf{1}'\mathbf{l}_{\omega=1}, \mathbf{1}'\mathbf{l}_{\omega=2}, \dots, \mathbf{1}'\mathbf{l}_{\omega=|\Omega|}), \quad (4.2)$$

jossa $\mathbf{l}_{\omega} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{F}|}$ on tappiovektori skenaariossa ω ja $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{F}|}$. *CoVaR*-menetelmä täyttää homogeenisen systeemiriskimitan määritelmän. Tämä tarkoittaa, että menetelmä on monotoinen, positiivisesti homogeeninen ja normalisoituva, mutta ei konveksi. Konveksin ominaisuuden puute haittaa menetelmän kykyä mitata kansantalouden systeemiriskiä johdonmukaisesti silloin, kun kansantalous hajautetaan pienempiin osiin. Teoreettisesti *CoVaR*-menetelmällä on siis samanlaisia ongelmia kuin *VaR*-menetelmällä, eli se ei aina huomioi hajautushyötyjä oikein. Matemaattisesti *CoVaR*-menetelmä ei täten ole subadditiivinen. (Chen ym. 2013.)

⁹Tilassa $\omega \in \Omega$ kansantalouden 1 tappiovektoria $\mathbf{l}_1 \in \mathbb{R}^{|\mathcal{F}|}$ preferoidaan yli kansantalouden 2 tilassa ω valitsevan tappiovektorin $\mathbf{l}_2 \in \mathbb{R}^{|\mathcal{F}|}$. Tällöin kansantalouksille pätee ehto $\rho^s(\mathbf{l}_1, \mathbf{L}_{-\omega}) \leq \rho^s(\mathbf{l}_2, \mathbf{L}_{-\omega})$ (Chen ym. 2013, 1376.)

¹⁰ $\rho^s(\lambda\mathbf{L}_1 + (1-\lambda)\mathbf{L}_2) \leq \lambda\rho^s(\mathbf{L}_1) + (1-\lambda)\rho^s(\mathbf{L}_2)$, kun $\lambda \in [0,1]$ (Chen ym. 2013, 1376.)

¹¹Oletetaan kolme kansantaloutta, \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_2 ja \mathbf{L}_3 , joista kolmannelle pätee $\rho^s(\mathbf{L}_3, \mathbf{1}') = \lambda\rho^s(\mathbf{L}_1, \mathbf{1}') + (1-\lambda)\rho^s(\mathbf{L}_2, \mathbf{1}')$. Tällöin $\rho^s(\mathbf{L}_3) \leq \lambda\rho^s(\mathbf{L}_1) + (1-\lambda)\rho^s(\mathbf{L}_2)$, kun $\lambda \in [0,1]$. (Chen ym. 2013, 1376.)

4.1.2 Odotettu alijäämä ja SRISK

Puutteellisen subadditiivisuuden lisäksi VaR -menetelmän teoreettisena ongelmana on jakauman häntään piiloutuvien suurien tappioiden mahdollisuus. Menetelmänä VaR tarkastelee tappioita vain haluttuun α -kvantiiliin asti, mutta jättää tämän raja-arvon ylittävät tappiot käytännössä mittaamatta. Tämän takia alhainen VaR -luku ei vielä tarkoita sitä, että VaR -luvun alittavissa skenaariossa realisoituvat tappiot olisivat alhaisia. Ongelman korjaamiseksi on kehitetty odotetun alijäämän menetelmä eli ES -mitta (engl. *expected shortfall*). Odotettu alijäämä mittaa tuottojakauman hännän odotusarvoa silloin, kun tuotot alittavat VaR -rajaluvun. Matemaattisesti ES hetkellä t , luottamustasolla α ja ennalta määritellyllä aikahorisontilla saadaan kaavasta

$$ES_{\alpha,t} = E[r_t | r_t \leq VaR_{\alpha,t}] = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} VaR_{u,t} du. \quad (4.3)$$

Tällöin ES on odotusarvo yli kaikkien niiden jakauman hännässä olevien VaR -arvojen, joille pätee $0 < u \leq \alpha$. Käytännössä ES -mitta tarkastelee sitä odotettua tappiota, joka realisoituu silloin, kun päädytään VaR -rajaluvun alittavaan skenaarioon. (Acerbi & Tasche 2002; McNeil ym. 2005, 43–45.) Acerbi ja Tasche (2002) osoittavat, että ES -mitta toteuttaa kaikki koherentin riskimitan ehdot. Toisin sanoen ES -mitta on aina myös subadditiivinen, jolloin se huomio mahdolliset hajautushyödyt oikein.

Kuten markkinariskiä mittaavalle VaR -mitalle, myös $CoVaR$ -mitalle voidaan esittää ehdollisen jakauman hännän keskiarvoa estimoiva mittari. Kyseessä on tällöin ehdollinen odotetun alijäämän $CoES$ -mitta (engl. *conditional expected shortfall*). Kyseinen mitta voidaan määritellä yhtälöstä

$$CoES_{q,t}^{j|i} = E[r_t^{j|i} | r_t^{j|i} \leq CoVaR_{q,t}^{j|i}] = \frac{1}{q} \int_0^q CoVaR_{u,t}^{j|i} du, \quad (4.4)$$

jossa $r_t^{j|i}$ on instituution j instituution i tuotolle ehdollistettu tuotto. $CoES$ -mitta parantaa $CoVaR$ -mittaa siinä, että se ottaa huomioon myös ehdollisen $CoVaR$ -arvon mukaisen kvantiiliin alle jäävät tuotot. Toisin kuin $CoVaR$ -mitta, $CoES$ huomioi hajautushyödyn siten, että $CoES$ täyttää aina subadditiivisuuden ehdon. Tällöin hajottamalla useasta instituutiosta koostetun kokonaisuuden kahteen tai useampaan osaan, on näiden osien yhteenlaskettujen $CoES$ -arvojen summa vähintään yhtä suuri kuin hajottamattoman kokonaisuuden $CoES$ -arvo. (Mainik & Schaanning 2012, 4–6.)

Acharya ym. (2017) määrittelevät finanssimarkkinoiden kokonaistuoton r_t^S koostuvan yritysten $i \in (1, \dots, S)$ tuottojen summasta, jolloin $r_t^S = \sum_{i=1}^S w_t^i r_t^i$. Tässä w_t^i on yrityksen

i paino markkinoilla hetkellä t ja painojen summalle pätee ehto $\sum_{i=1}^S w_t^i = 1$. Tällöin koko markkinoiden ES -mitaksi saadaan

$$ES_{q,t} = E[r_t^s | r_t^s \leq VaR_{q,t}] = \sum_{i=1}^S w_t^i E[r_t^i | r_t^s \leq VaR_{q,t}]. \quad (4.5)$$

Derivoimalla koko markkinoiden ES -mitta painolla w_t^i , saadaan määriteltyä yrityskohtainen marginaalinen odotettu alijäämä MES (engl. *marginal expected shortfall*), joka on muotoa

$$MES_{q,t}^i = \frac{\partial ES_{q,t}}{\partial w_t^i} = E[r_t^i | r_t^s \leq VaR_{q,t}]. \quad (4.6)$$

Marginaalinen odotettu alijäämä on systeemiriskimitta, joka mittaa systeemiriskin muutosta yrityksen painon muuttuessa markkinoilla. Tarkalleen mitta kuvaa yrityksen i arvon odotettua muutosta silloin, kun markkinoiden kokonaistuotto on korkeintaan VaR -tasolla.

Acharya ym. (2012) sekä Brownlees ja Engle (2017) kehittävät MES -mitalle pitkän aikavälin version, $LRMES$ -mitan (engl. *long run marginal expected shortfall*), joka mittaa yrityksen i arvon muutosta usean kuukauden ajalta silloin, kun rahoitusmarkkinat ovat pitkäkestoisesti heikolla tasolla. Yhdistämällä $LRMES$ -mitta yrityksen i oman pääoman markkina-arvoa kuvaavaan muuttujaan P_t^i ja yrityksen vastuiden kirjanpitoarvoa kuvaavaan muuttujaan D_t^i , saadaan yrityksen i systeemiriskille määriteltyä $SRISK$ -mitta, joka on muotoa

$$SRISK_{q,t}^i = \max\{0, k(D_t^i + (1 - LRMES_{q,t}^i)P_t^i) - (1 - LRMES_{q,t}^i)P_t^i\}. \quad (4.7)$$

Tässä k kuvaa finanssialan yritykseltä vaadittua oman pääoman astetta. Koska yrityksen velkaantuneisuus L_t^i määritellään ehdosta $L_t^i = (D_t^i + P_t^i)/P_t^i$, voidaan osoittaa, että yrityksen $SRISK$ -mitan arvo kasvaa, kun yrityksen velkaantuneisuus kasvaa. Tällöin myös $SRISK$ -mitan mukainen yrityksen systeemiriskisyys kasvaa velkaantuneisuuden kasvaessa. $SRISK$ -mitta on käytännössä $CoVaR$ -menetelmään nähden vaihtoehtoinen tapa laskea systeemiriskiä. Vaikka menetelmä perustuu osin saman tyyppisille ehdollisen jakauman oletuksille kuin $CoVaR$ -mittakin, vaatii $SRISK$ -mitan laskeminen lisädataa esimerkiksi yrityksen velkaantuneisuuteen ja vaaditun oman pääoman asteeseen liittyen.

4.2 Riskimittojen tilastollinen mallintaminen

4.2.1 VaR-mitan parametriset ja epäparametriset mallit

Vaikka VaR on teoreettiselta määritelmältään melko yksinkertainen, ei sen soveltaminen käytännön tasolla ole täysin suoraviivaista, sillä mitattavan kohteen tuottojen teoreettista jakaumaa ei koskaan tunneta täydellisesti. Koska tuottojen jakaumaan sisältyy epävarmuutta, voidaan VaR-malleilla arvioida riskiä vain sen tiedon varassa, joka kullakin hetkellä on saatavilla. Tämä on johtanut erilaisten matemaattisten ja tilastollisten VaR-mallien kehittymiseen, jotka kaikki hyödyntävät saatavilla olevaa tietoa hieman eri tavoilla ja oletuksilla. Menetelmiin sisältyvän epävarmuuden johdosta VaR-mallin valintaan ja käyttämiseen sisältyy malliriskiä. Malliriski kuvaa sitä riskiä, joka syntyy mahdollisista virheistä kvantitatiivisen mallin valinnassa tai valitussa mallissa olevista rakenteellisista virheistä. Perinteisesti VaR-mallit on voitu jakaa kolmeen malliperheeseen, jotka ovat parametriset mallit, historialliset menetelmät eli epäparametriset mallit ja semiparametriset mallit, joista perinteisimpiä ovat Monte Carlo -simulaatiomenetelmät. Jokaisen edellä mainitun malliperheen alle on ajan kuluessa kehittynyt useita erilaisia menetelmiä. (McNeil ym. 2005, 3, 41, 48–52.)

Parametrisen VaR-mallin tapauksessa tuoton r_t oletetaan noudattavan jotain tunnettua teoreettista jakaumaa. Tällöin tuoton jakaumaa voidaan arvioida historian perusteella, jolloin $f_t|I_{t-1}$ kuvaa historiaan I_{t-1} nähden ehdollista tuoton r_t teoreettista tiheysfunktioita. Yksinkertaisimmassa tapauksessa tuottojen r_t voidaan ajatella olevan normaalijakautuneita informaatioon I_{t-1} nähden ehdollisella odotusarvolla $\hat{\mu}_t|I_{t-1}$ ja keskihajonnalla $\hat{\sigma}_t|I_{t-1}$, eli $r_t \sim N(\hat{\mu}_t|I_{t-1}, \hat{\sigma}_t|I_{t-1}^2)$. Tällöin normaalijakauman ominaisuuksien nojalla VaR-mitta voidaan laskea yhtälöstä

$$VaR_{\alpha,t} = \hat{\sigma}_t|I_{t-1} \Phi^{-1}(\alpha) + \hat{\mu}_t|I_{t-1}. \quad (4.8)$$

(Alexander 2008, 18.) Esimerkiksi J.P.Morganin ja Reutersin kehittämä *RiskMetrics*-menetelmä, joka on yksi perinteisemmistä parametrisista VaR-malleista, olettaa tuottojen olevan normaalisti jakautuneita. Mallissa $\hat{\sigma}_t|I_{t-1}$ estimoidaan niin sanotulla *EMWA*-menetelmällä (engl. *exponential weight moving average*), jonka avulla voidaan painottaa uusimpia markkinahavaintoja yli vanhempien havaintojen. (*RiskMetrics*TM – Technical Document 1996.)

Käytännössä parametrisen lineaariseen VaR-mallinnukseen liittyy erilaisia malliriskiä aiheuttavia tekijöitä. Esimerkiksi ehdollisen odotusarvon $\hat{\mu}_t|I_{t-1}$ ja ehdollisen keskihajonnan $\hat{\sigma}_t|I_{t-1}$ estimointi ei ole täysin yksiselitteinen ongelma. Yksinkertaisimmillaan havaituista tuotoista voidaan laskea esimerkiksi otoskeskiarvo ja otoskeskihajonta,

jolloin ehdollisten parametrien sijaan estimoidaan tuottojakauman ehdollistamattomia parametreja olettaen, että tuotto prosessi on stationaarinen.¹² Tilastollisesti kehittyneempi tapa ehdollisten parametrien estimointiin on erilaisten aikasarjamallien hyödyntäminen, jolloin ehdollinen odotusarvo $\hat{\mu}_{t|I_{t-1}}$ arvioidaan esimerkiksi *ARMA*-malleilla ja ehdollinen keskihajonta $\hat{\sigma}_{t|I_{t-1}}$ esimerkiksi *GARCH*-malleilla. (McNeil ym. 2005, 48–49.) *VaR*-malleja käsittelevässä kirjallisuuskatsauksessaan Abad ym. (2013, 17–20) havaitsevat parametrinen *GARCH-VaR*-mallien olevan suhteellisen yleisiä, joskin monesti perinteisen *GARCH*-mallin sijasta näissä *VaR*-malleissa hyödynnetään erilaisia epälineaarisia tai epäsymmetrisiä *GARCH*-malleja. Esimerkiksi Mittnik ja Paoletta (2000) havaitsevat, että epäsymmetrinen *A-PARCH*-mallin käyttäminen tavallisen *GARCH*-mallin tilalla parantaa *VaR*-estimoinnin tuloksia.

Parametrien estimointiin liittyvien mallien lisäksi malliriskiä parametriin *VaR*-malleihin aiheutuu myös sopivan ehdollisen jakauman valitsemisesta. Vaikka normaalijakauma on yksinkertainen ja helposti mallinnettavissa, voi sen soveltaminen käytännössä olla rajoittavaa. Normaalijakauma voidaankin parametrissa *VaR*-mallinnuksessa korvata muilla jakaumilla, kuten normaalijakaumaa paksuhäntäisemmällä *t*-jakaumalla. (McNeil ym. 2005, 49–50.) Kuten esimerkiksi luvussa 3.1 näytettiin MSCI:n indeksin osalta, normaalijakaumaoletuksen alla portfolion todellinen riski voi aliarvioitua, sillä normaalijakauma aliarvioi empiirisen jakauman suurien ja pienien tuottojen määrää ja suuruutta. Laskennallisesti *VaR*-mitan mallintaminen voi kuitenkin olla haastavampaa, jos tuottojen ei oleteta olevan normaalijakautuneita. Käytännössä esimerkiksi Cheng ja Hung (2011) sekä Mittnik ja Paoletta (2000) havaitsevat, että parametrinen *GARCH-VaR*-mallin toimivuus paranee, kun normaalijakauma vaihdetaan joko tavalliseen tai vinoutuneeseen *t*-jakaumaan.

Useasta varallisuuskohteesta koostuvan sijoitussalkun tapauksessa salkussa olevien kohteiden tuottoja hetkellä t kuvaa vektori $\mathbf{r}_t = (r_t^1, \dots, r_t^N)'$ ja painoja hetkellä t kuvaa vektori $\mathbf{w}_t = (w_t^1, \dots, w_t^N)'$, jolle pätee ehto $\sum_{j=1}^N w_t^j = 1$. Portfolion kokonaistuotto r_t^{kok} voidaan tällöin arvioida summasta $r_t^{kok} = \sum_{i=1}^N w_t^i r_t^i$. Olettamalla, että salkun kohteet ovat multinormaalisti jakautuneita, voidaan jakaumaa arvioida menneelle informaatiolle I_{t-1} ehdollisen varianssimatriisin $\hat{\Sigma}_{t|I_{t-1}}$ ja ehdollisen odotusarvovektoria $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{t|I_{t-1}}$ avulla, jolloin $\mathbf{r}_t \sim N(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{t|I_{t-1}}, \hat{\Sigma}_{t|I_{t-1}})$. Tällöin koko portfolion *VaR*-arvo saadaan yhtälöstä

$$VaR_{\alpha,t}^{kok} = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{w}_t' \hat{\Sigma}_{t|I_{t-1}} \mathbf{w}_t + \mathbf{w}_t' \hat{\boldsymbol{\mu}}_{t|I_{t-1}}}. \quad (4.9)$$

¹² Otoskeskiarvo on $\bar{r} = (1/n) \sum_{i=1}^n r_i$ ja otoskeskihajonta on $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}$ (Tsay 2005, 9).

Multinormaalisti jakautunutta parametrista *VaR*-mallia kutsutaan yleisesti varianssi-kovarianssi-menetelmäksi. Menetelmää koskevat vastaavat malliriskin lähteet kuin yksilutteista parametrista *VaR*-menetelmää. (Alexander 2008, 29–30.)

Portfolion dimension eli kohteiden määrän N kasvaessa suureksi tulee portfolion *VaR*-arvon laskemisesta teknisesti raskasta. Ongelma voidaan ratkaista kuvaamalla portfolion käyttäytymistä riskifaktoreiden $\mathbf{x}_t = (x_t^1, \dots, x_t^M)'$ ja funktion $l: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ avulla. Tällöin x_t^i on yksittäinen riskifaktori i , M kuvaa riskifaktoreiden määrää ja portfolion kokonaistuotto saadaan funktiolla l , eli $r_t^{kok} = l(\mathbf{x}_t)$. Funktion l ollessa esimerkiksi lineaarinen, saadaan portfolion kokonaistuotto r_t^{kok} kuvattua muotoon

$$r_t^{kok} = \tilde{\alpha} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{x}_t, \quad (4.10)$$

jossa $\boldsymbol{\beta} = (\beta^1, \dots, \beta^M)'$ on M -ulotteinen riskifaktoreiden herkkyysvektori β^i kuvaava vektori ja $\tilde{\alpha}$ on portfoliokohtainen vakio-termi. Varianssi-kovarianssi menetelmän riskifaktoreiden multinormaalioletuksella saadaan riskifaktoreiden jakauma muotoon $\mathbf{x}_t \sim N(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{x},t|I_{t-1}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{x},t|I_{t-1}})$, jossa $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{x},t|I_{t-1}}$ on informaatiolle I_{t-1} ehdollinen riskifaktoreiden odotusarvovektori ja $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{x},t|I_{t-1}}$ informaatiolle I_{t-1} ehdollinen riskifaktoreiden varianssimatriisi. Tällöin lineaarisella yhtälöllä lasketulle portfolion kokonaistuotolle pätee $r_t^{kok} \sim N(\tilde{\alpha} + \boldsymbol{\beta}' \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{x},t|I_{t-1}}, \boldsymbol{\beta}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{x},t|I_{t-1}} \boldsymbol{\beta})$. (McNeil ym. 2005, 48–50; Alexander 2008, 63–64.)

Riskifaktoreiden käyttäminen mahdollistaa portfolion riskisyyden mallintamisen suoraan tunnettujen riskitekijöiden, kuten valuuttojen välisten kurssien muutosten, eri korkokäyrien muutosten ja merkittävien osakeindeksien muutosten avulla. Lisäksi riskifaktoreiden käyttäminen pienentää estimoitavan mallin dimensiota, sillä riskifaktoreita oletetaan olevan vähemmän kuin varsinaisia portfolion kohteita, jolloin $M < N$. Käytännössä riskifaktoreiden käyttämiseen liittyy useita malliriskitekijöitä. Merkittävä malliriskin lähde liittyy faktoreiden valintaan, sillä ei ole täysin yksiselitteistä, millä faktoreilla mitään portfolioita tulisi kuvata. Myöskään herkkyysvektorin $\boldsymbol{\beta}$ estimoiminen tai kuvauksen funktiomuodon l valinta eivät ole yksiselitteisiä ongelmia. Lisäksi puhtaasti riskifaktoreilla mitattu *VaR* kuvaa vain portfolion systemaattisen riskisyyden jättäen mahdollisen portfoliokohtaisen riskin kuvaamatta, jolloin portfolion todellinen riski aliarvioidaan.¹³ (Alexander 2008, 25–27, 30–31.)

Historiallinen *VaR* tai epäparametrinen *VaR* lasketaan suoraan portfolion menneistä tuotoista kootun empiirisen jakauman pohjalta. Tällöin riskifaktoreiden muutoksista koostetusta aikasarjasta $\{\hat{\mathbf{x}}_j | j = t - H, \dots, t - 1\}$ muodostetaan empiirinen jakauma,

¹³ Portfolion realisoituneen tuoton \hat{r}_t^{kok} ja mallin $l(\mathbf{x}_t)$ erotus määritellään siten, että $e_t = \hat{r}_t^{kok} - l(\mathbf{x}_t)$. Portfoliokohtaiseen virhetermiin e_t kohdistuvaa vaihtelua ei oteta huomioon pelkästään riskifaktoreilla kuvattavassa *VaR*-mallissa, jolloin riskifaktoreilla kuvattu *VaR*-malli aliarvioi todellista riskiä. (Alexander 2008 25–27, 30–31.)

jossa parametrilla $H \in \mathbb{Z}_+$ ja viitataan historiatekijän pituuteen. Oletetaan, että $\mathbf{1}_{\{l(\hat{\mathbf{x}}_j) \leq y\}}$ on indikaattorifunktio, joka saa arvon yksi, kun $l(\hat{\mathbf{x}}_j) \leq y$ ja arvon nolla, kun $l(\hat{\mathbf{x}}_j) > y$. Tällöin menneelle informaatiolle ehdolliselle portfolion kokonaistuottojen kertymäfunktioille $F_{t|I_{t-1}}$ pätee

$$F_{t|I_{t-1}}(VaR_{\alpha,t}^{kok}) = \frac{1}{H} \sum_{j=t-H}^{t-1} \mathbf{1}_{\{l(\hat{\mathbf{x}}_j) \leq VaR_{\alpha,t}^{kok}\}} \xrightarrow{H \rightarrow \infty} F_t(VaR_{\alpha,t}^{kok}). \quad (4.11)$$

Historiadataan määrän ollessa hyvin suuri, lähestyy portfolion kokonaistuoton ehdollinen kertymäfunktio $F_{t|I_{t-1}}$ tuottojen teoreettista kertymäfunktioita F_t . Tällöin jakaumaan tehtävä ainoa oletus on, että tulevien tuottojen jakauma on sama kuin historiallisten tuottojen jakauma, eli tuotto prosessi on stationaarinen. (McNeil ym. 2005, 50–52.)

Yksinkertaisimmillaan yksittäisen sijoituskohteen historiallinen VaR -saadaan poimimalla sijoituskohteen tuottojen aikasarjasta haluttu kvantiili. Esimerkiksi historiallisen aikasarjan, joka sisältää tuhat historiallista tuottoa, pohjalta lasketun kymmenen prosentin luottamustason historiallinen VaR on pyöristetysti tuottoaikasarjan sadanneksi pienin tuotto. Historiallisen menetelmän hyviä puolia ovat sen yksinkertainen toteutus sekä vähäinen parametrien estimointiin liittyvä malliriski. Historiallisen VaR -mallin merkittävä malliriskin lähde sisältyy historiallisen datan laatuun sekä saatavilla olevan historian pituuteen. Mikäli historiallisen datan määrä on vähäinen, jää havaintojen määrä erityisesti hännissä vähäiseksi, jolloin menetelmä ei mittaa VaR -arvoja riittävällä tarkkuudella. (McNeil ym. 2005, 50–52.) Koska malli nojaa puhtaasti havaittuun historialliseen dataan, voi menetelmä olla hidas reagoimaan markkinoilla tapahtuviin nopeisiin riskitason muutoksiin. Perinteisen historiallisen mallin lisäksi epäparametristen mallien perheeseen kuuluvat esimerkiksi ydinestimointimenetelmät (engl. *kernel density estimation*). (Abad ym. 2013, 17.) Ydinestimointimenetelmiä on esitelty tarkemmin esimerkiksi Shealterin ja Marronin (1990) toimesta.

4.2.2 Semiparametriset VaR -mallit ja ääriarvoteoria

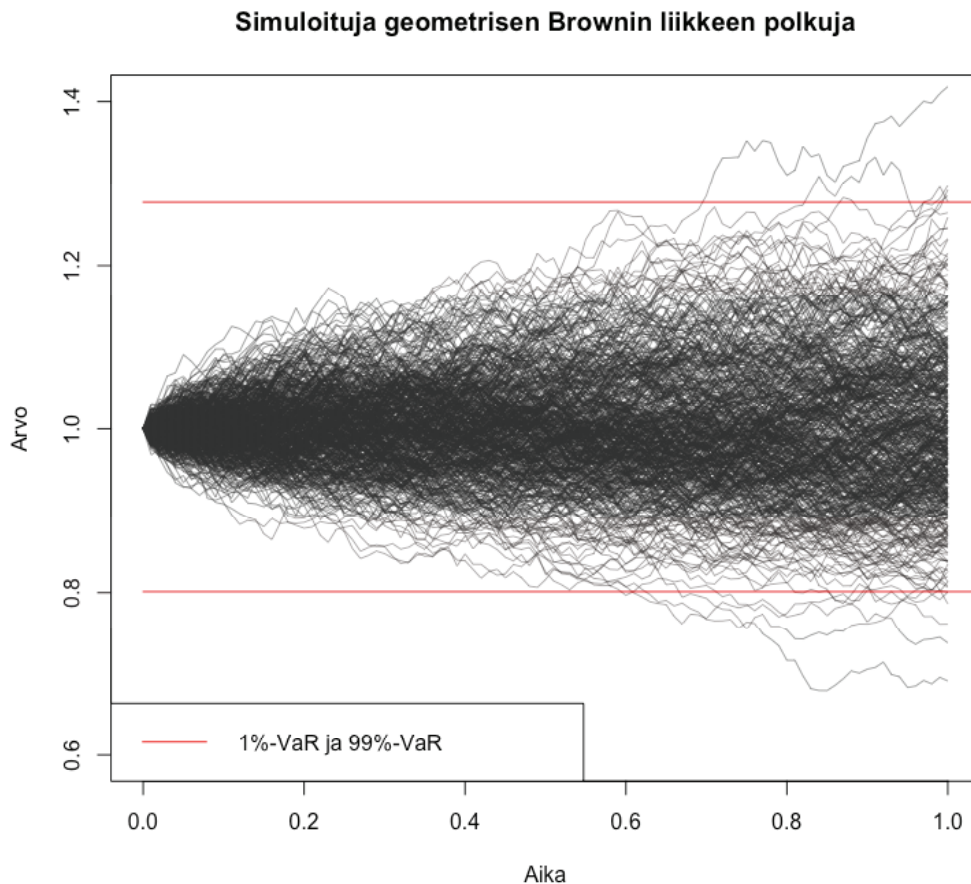
Semiparametrisissa malleissa yhdistetään sekä parametristen että epäparametristen mallien ominaisuuksia. Semiparametristen mallien joukossa perinteisimpiä malleja ovat Monte Carlo -menetelmät. Monte Carlo -menetelmissä riskifaktoreita \mathbf{x}_t simuloidaan siten, että simulointimallit kalibroidaan informaatioon I_{t-1} nojaten käyttäen esimerkiksi riskifaktoreiden menneitä havaintoja $\{\hat{\mathbf{x}}_j | j = 1, \dots, t-1\}$. Tämän jälkeen simulointimallilla generoidaan haluttu määrä S simuloituja havaintoja hetken t riskifaktoreiden realisaatioiksi, jolloin simulaatiotulokseksi saadaan $\{\mathbf{x}_t^{i,sim} | i = 1, \dots, S\}$. Nämä simuloitujen riskifaktoreiden realisaatiot kuvataan funktiolla l portfolion hetken t tuotoiksi, jolloin

saadaan vektori $(r_t^{1,sim,kok}, \dots, r_t^{S,sim,kok})$. Simuloiduista portfolion tuotoista muodostetaan menneelle informaatiolle ehdollinen portfolion tuoton empiirinen kertymäfunktio $F_{t|I_{t-1}}$, joka on muotoa

$$F_{t|I_{t-1}}(VaR_{\alpha,t}^{kok}) = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^S \mathbf{1}_{\{I(x_t^{j,sim}) \leq VaR_{\alpha,t}^{kok}\}}. \quad (4.12)$$

Tällöin esimerkiksi tuhannen simulaation joukossa yhden prosentin luottamustason VaR saadaan pyöristetysti valitsemalla simuloitujen portfoliotuottojen joukosta kymmenenneksi pienin havainto. (McNeil ym. 2005, 52–53.)

Yksinkertainen esimerkki simuloidusta VaR -mallista ilman riskifaktoreita on varallisuuskohteen tulevan hinnan ennustaminen geometrisella Brownin liikkeellä. Tällöin kaavan 2.7 mukaiset geometrisen Brownin liikkeen parametrit μ ja σ sovitetaan kohteen historialliseen hintadataan, jonka jälkeen kohteen arvon kehityksestä simuloidaan polkureaalisiaatioita. Kuvassa 4 on simuloitu satunnaisen varallisuuskohteen arvon polkureaalisiaatioita 500 kertaa.



Kuva 4 Simuloituja geometrisen Brownin liikkeen polkuja.

Kuvan 4 varallisuuskohteen alkuarvo P_0 on 1, μ on 0 ja σ on 0,1. Aikaa simuloidaan eteenpäin yhden periodin verran. Varallisuuskohteen VaR -arvot saadaan tarkastelemalla polkurealisaatioiden loppuarvoja haluttujen kvantiilien osalta. Tässä tapauksessa yhden prosentin mukainen hinnan kvantiili on 0,80, jolloin logaritmisille tuotoille laskettu 1%- VaR saa pyöristetysti arvon 0.22.

Simulaatiomallin hyviä puolia on se, että käytettävissä olevasta laskentatehosta ja simulaatioalgoritmin tehokkuudesta riippuen simuloitujen realisaatioiden määrä S voidaan kasvattaa merkittävän suureksi: esimerkiksi suuremmaksi kuin historiallisen mallin pohjana käytettävän empiirisen havaintojoukon koko. Lisäksi simulaatiomalleja voidaan säätää vastaamaan erilaisia talouden skenaarioita ja ennusteita. Menetelmän merkittävin malliriskin lähde liittyy simulaatioalgoritmien valintaan sekä riskifaktoreiden polkurealisaatioiden laskentaan, sillä simulaatiomalleissa joudutaan tekemään oletuksia esimerkiksi riskifaktoreiden jakauman muotoon ja jakauman parametreihin liittyen. (McNeil ym. 2005, 52.)

Abadin ym. (2013, 22–23) mukaan uudempien semiparametrusten VaR -mallien perheeseen kuuluvat esimerkiksi volatiliteetilla painotettu historiallisen simulaation menetelmä, suodatettujen historiallisten simulaatioiden menetelmä ja $CaViar$ -malli. Näistä Hullin ja Whiten (1999) esittämä volatiliteetilla painotettu historiallisen simulaation menetelmä painottaa historialliset havaitut tuotot menneiden volatiliteetin ennusteiden ja vallitsevan volatiliteetin avulla, jonka jälkeen VaR voidaan laskea painotettujen tuottojen pohjalta historiasarjasta poiminnalla. Barone-Adesin ym. (2002) esittämä suodatettujen historiallisten simulaatioiden malli yhdistää puolestaan $GARCH$ -mallin ja historiallisen VaR -mallin siten, että havaitut historialliset tuotot standardoidaan $GARCH$ -mallilla lasketulla volatiliteetilla, jonka jälkeen VaR -arvo voidaan simuloida standardoituja historiallisia havaintoja hyödyntäen. Abadin ym. (2013) mukaan edellä esitetyt mallit täydentävät epäparametrissa historiallista menetelmää lisäämällä historiallisen volatiliteetin vaikutuksen malliin. Tämä ei kuitenkaan poista epäparametrusten menetelmien riippuvuutta havaitun datan laadusta.

Englen ja Manganellin (2004) esittämässä $CaViar$ -menetelmässä VaR puolestaan lasketaan hyödyntäen kvantiiliregressiota. Toisin kuin perinteisessä regressiossa, jolla estimoidaan vastemuuttujan ehdollista odotusarvoa, kvantiiliregressiolla estimoidaan vastemuuttujan ehdollista kvantiilia selittävien muuttujien avulla. Selittävinä muuttujina voivat olla esimerkiksi menneet VaR -arvot, kohteen menneet tuotot tai riskifaktoreiden arvot. $CaViar$ -menetelmän mukainen VaR voidaan määritellä esimerkiksi yhtälöllä

$$VaR_{\alpha,t} = \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^q \hat{\beta}_i VaR_{\alpha,t-i}^i + \sum_{j=1}^r \hat{\gamma}_j l(\mathbf{x}_{t-j}), \quad (4.13)$$

jossa l on riskifaktorivektorin \mathbf{x}_t reaaliluvuksi muuntava funktio, $\hat{\beta}_0$ regression vakio-termi ja $\hat{\beta}_i$ sekä $\hat{\gamma}_j$ regressiokertoimet muuttujien viipeille i ja j . Abadin ym. (2013, 23) mukaan kaavan 4.13. mukainen yksinkertainen *CaViar*-malli ei välttämättä tuota tarkkoja *VaR*-estimaatteja varsinkaan taloudellisesti epävakaina aikoina. Sen sijaan kehittyneempien epäsymmetristen *CaViar*-mallien hyvistä riskinmittausominaisuuksista löytyy näyttöä. Kehittyneempiä *CaViar*-malleja ovat esimerkiksi kvantiiliregressiota ja *GARCH*-menetelmiä yhdistävät mallit.

Toisin kuin perinteisissä parametrisissa ja epäparametrisissa malleissa, joilla käytännössä estimoidaan koko tuottojakaumaa, ääriarvoteorian (engl. *extreme value theory*) malleille estimoidaan vain tuottojakaumien häntiä. Käytännössä ääriarvoteorian mallit voidaan jakaa kahteen luokkaan, jotka ovat lohkomaksimiarmomallit (engl. *block maxima*) ja raja-arvon ylittämistä tarkastelevat mallit (engl. *threshold exceedances*) (McNeil ym. 2005, 264; Reiss & Thomas 2007, 3.) Semiparametriseksi malliksi luokiteltavassa lohkomaksimiarmomallissa saatavilla oleva data jaetaan lohkoihin tai periodeihin ja jokaisesta lohkoista tarkastellaan havaitut ääriarvot. Tällöin yhden lohkon ääriarvon määritelmä on muotoa $M_N = \max\{X_1, \dots, X_N\}$, jossa N on lohkoissa olevien satunnaismuuttujien määrä. Yksi lohko voi sisältää esimerkiksi yhden vuoden kaikki havainnot, jolloin N kuvaa yhden vuoden aikana saatujen havaintojen määrää. Maksimiarvon kertymäfunktion $F^N(x) = P(M_N < x)$ voidaan näyttää lähestyvän yleistettyä ääriarvojakaumaa H_ξ asymptoottisesti silloin, kun ääriarvo M_N standardoidaan parametreilla $d_N \in \mathbb{R}$ ja $c_N > 0$. Tällöin H_ξ on muotoa

$$H_\xi(x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi(x-d_N)/c_N)^{-1/\xi}}, & \xi \neq 0 \\ e^{-e^x} & , \xi = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Parametrin ξ arvon mukaan jakaumafunktio H_ξ on muodoltaan joko on Fréchetin jakauma, jolloin $\xi > 0$, Gumbellin jakauma, jolloin $\xi = 0$ tai Weibullin jakauma, jolloin $\xi < 0$. *VaR* voidaan ratkaista esimerkiksi Fréchetin ja Gumbellin jakaumien tapauksessa yhtälöillä

$$VaR_\alpha = \begin{cases} d_N - \frac{c_N}{\xi} (1 - (-N(\ln(\alpha)))^{-\xi}), & \xi > 0 \\ d_N - c_N \ln(-N(\ln(\alpha))) & , \xi = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Jakauman parametrit voidaan puolestaan estimoida esimerkiksi suurimman uskottavuuden menetelmällä. (Abad ym. 2013, 23–24.)

Maksimiarvoihin perustuvan menetelmän käyttöä rajoittaa käytännössä sen vaatima suuri datan määrä, sillä menetelmällä voidaan hyödyntää vain paljon havaintoja sisältävien lohkojen ääriarvot. Lisäksi menetelmä ei huomio finanssisarjoissa yleisesti

havaittavaa volatilitteettijaksojen vaihtelua. Finanssisovelluksissa lohkomaksimi-arvoja yleisempiä ääriarvoteorian malleja ovatkin raja-arvon ylitystä tarkastelevat mallit, joissa myös käytössä olevaa dataa pystytään hyödyntämään lohkomaksimi-arvomalleja tehokkaammin. Malleissa tarkastellaan satunnaismuuttujan X ehdollista kertymäfunktion $F_u = P(X - u \leq x | X > u) = [F(y + u) - F(u)] / [1 - F(U)]$, jossa $u \in \mathbb{R}$ ja F on satunnaismuuttujan X kertymäfunktio. Funktion F_u voidaan näyttää noudattavan yleistettyä Pareto-funktiota (engl. *generalized Pareto function*), joka on muotoa

$$G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x / \beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-x/\beta} & , \xi = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

jossa $\beta > 0$. Mikäli kertymäfunktio F on tunnettu ja mallin parametrit estimoitu, voidaan VaR luottamustasolla α ratkaista yhtälöstä

$$VaR_{\alpha} = u + \frac{\beta}{\xi} \left(\left(\frac{1 - \alpha}{F(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right). \quad (4.17)$$

(McNeil ym. 2005, 275–286.) Abad ym. (2013, 25) toteavat, että raja-arvon ylittävien mallien mittauskykyä voidaan parantaa hyödyntämällä parametrien estimoinnissa ehdollisen volatilitteetin malleja, kuten *GARCH*-mallia. Lisäksi esimerkiksi Abad ym. (2013, 24) sekä McNeil ym. (2005, 275–286) esittelevät Hill-menetelmän, joka on yleistetyille Pareto-funktiolle vaihtoehtoinen menetelmä raja-arvon ylityksiä hyödyntäväksi ääriarvomenetelmäksi.

Esitetyt lohkomaksimi-arvoihin ja raja-arvon ylittäviin lähestymistapoihin perustuvat mallit voidaan myös yleistää käsittelemään usean muuttujan tapauksia, jolloin portfolion VaR -arvoja voidaan laskea hyödyntäen riskifaktoreita (McNeil ym. 2005, 311, 319). Käytännössä ääriarvomallit voidaan yhdistää parametrisiin, historiallisiin tai simuloituihin VaR -malleihin tarkentamaan VaR -arvojen estimaattien tarkkuutta jakauman hännissä. Ääriarvomallit eivät kuitenkaan itsessään ratkaise ongelmaa liittyen äärihavaintojen mallintamiseen vähäisellä datalla, sillä perinteisille VaR -malleille havaitut malliriskin lähteet, kuten ongelmat mallin valinnassa ja parametrien estimoinnissa, ovat myös ääriarvomalleissa läsnä. Sen sijaan ääriarvoteorian vahvuus on perustellun taustateorian omaavien häntätodennäköisyysjakaumien tuominen puhtaan empiirisen analyysin ja perinteisiin VaR -malleihin pohjaavan mallinnuksen tueksi. (Diebold ym. 2000.)

Abad ym. (2013) havaitsevat VaR -mallien suoriutumista vertaavassa kirjallisuuskatsauksessaan, että parametrisille VaR -malleille asymmetristen ja paksuhäntäisen jakaumien hyödyntäminen parantaa VaR -mallien suoriutumista merkittävästi. Tällöin esimerkiksi parametrien estimointiin käytettyä aikasarjamallia merkittävämpi malliriskin lähde liittyy tuottojen jakaumaan tehtyyn oletukseen. Kaikista VaR -malleista parhaiten

suoriutuvat suodatettujen historiallisten simulaatioiden mallit sekä ääriarvoteoriaa hyödyntävät mallit. Toisin sanoen tutkimus antaa viitteitä siitä, että modernit *VaR*-mallit esimoivat riskiä paremmin kuin perinteisemmät *VaR*-mallit. Käytännössä saadut tulokset pohjaavat kuitenkin suhteellisen rajalliselle määrällä eri vertailuja ja tutkimuksia, joten lopullista johtopäätöksiä eri mallien välisestä paremmuudesta ei tämän perusteella voida vielä sanoa.

4.2.3 *CoVaR-mitan tilastolliset mallit*

Adrianin ja Brunneirmeierin (2016) *CoVaR*-menetelmän teoriakehikossa finanssimarkkinoilla toimivat instituutiot i ja j linkittyvät toisiinsa korrelaatiotermin σ^{ij} kautta. Lisäksi mallissa oletetaan, että instituutioon i vaikuttaa satunnainen sokkitekijä Δz_t^i keskihajonnan σ^i kautta ja instituutioon j vaikuttaa satunnainen sokkitekijä Δz_t^j keskihajonnan σ^j kautta. Tällöin systeemien tuottoja r_t^i ja r_t^j voidaan kuvata stokastisilla yhtälöllä

$$\begin{cases} r_t^i = \mu^i(\cdot) + \sigma^{ij}(\cdot)r_{t-1}^j - \sigma^i(\cdot)\Delta z_t^i \\ r_t^j = \mu^j(\cdot) + \sigma^{ij}(\cdot)r_{t-1}^i - \sigma^j(\cdot)\Delta z_t^j \end{cases} \quad (4.18)$$

jossa μ^i on instituution i ajautumatermi ja merkintä (\cdot) viittaa ajautuma-, korrelaatio- sekä keskihajontatermien riippuvan erilaisista tilamuuttujista. Tilamuuttujat voivat olla esimerkiksi makrotalouden tilaa, instituutioiden velkaantuneisuutta ja instituutioiden nettoarvoa kuvaavia muuttujia. Esimerkiksi sokki $\Delta z_t^i > 0$ laskee instituution i tulosta hetkellä t määrän $\sigma^i(\cdot)\Delta z_t^i$ verran, jolloin instituution j tulos hetkellä $t + 1$ heikkenee määrän $\sigma^{ij}(\cdot)\sigma^i(\cdot)\Delta z_t^i$ verran. Vastaavasti instituution j tuloksen r_{t+1}^j heikkeneminen heikentää instituution i tulosta hetkellä $t + 2$, eli yksittäisen sokin vaikutus jää kiertämään järjestelmään. Mikäli sokkitermien Δz_t^i ja Δz_t^j oletetaan olevan multinormaalisti jakautuneita, teoreettinen $\Delta CoVaR$ -mitta voidaan määritellä yhtälöllä

$$\Delta CoVaR_{q,t}^{j|i} = \beta_t^{ij} \Delta VaR_{q,t}^i, \quad (4.19)$$

jossa β_t^{ij} on regressiokerroin, joka on muotoa

$$\beta_t^{ij} = \frac{Cov[r_{t+1}^i, r_{t+1}^j]}{Var[r_{t+1}^i]}. \quad (4.20)$$

Tällöin instituution i markkinariskiä mittaava *VaR*-mitta linkittyy systeimiriskiä mittaavaan *CoVaR*-mittaan kerrointermin β_t^{ij} kautta.

Käytännössä Adrian ja Brunnermeier (2016) estimoivat yrityksen i $CoVaR$ -mitan finanssijärjestelmän s ehdollisen tuoton $r_t^{s|i}$ ja yrityksen i tuoton r_t^i välisellä kvantiiliregressiolla. Olettamalla, että instituution i VaR -mitan arvo tiedetään, saadaan $CoVaR$ -mitta q -kvantiilille estimoitua yhtälöstä

$$CoVaR_{q,t}^{s|i} = \hat{\alpha}_q^{s|i} + \hat{\beta}_q^{s|i} VaR_{q,t}^i + \hat{\gamma}_q^{s|i'} \mathbf{m}_{t-1}, \quad (4.21)$$

jossa $\hat{\alpha}_q^{s|i}$ on kvantiiliregressiolla estimoitu vakio-termi ja $\hat{\beta}_q^{s|i}$ kvantiiliregressiolla estimoitu kerroin-termi, joka kuvaa yrityksen i VaR -arvon vaikutuksen $CoVaR$ -mittaan. Lisäksi muuttujavektori \mathbf{m}_{t-1} kuvaa makrotalouden tilamuuttujia edeltävällä periodilla ja kerroinvektori $\hat{\gamma}_q^{s|i'}$ näiden tilamuuttujien regressiokertoimien vektoria. Yhtälön 4.21 pohjalta $\Delta CoVaR$ voidaan määritellä yhtälöllä

$$\Delta CoVaR_{q,t}^{s|i} = \hat{\beta}_q^{s|i} (VaR_{q,t}^i - VaR_{50\%}^i), \quad (4.22)$$

jossa $VaR_{50\%}^i$ on yrityksen i tulos mediaanitulassa. Mallissa myös VaR -mitta estimoidaan kvantiiliregressiolla, jolloin

$$VaR_{q,t}^i = \hat{\alpha}_q^i + \hat{\gamma}_q^i \mathbf{m}_{t-1}, \quad (4.23)$$

jossa $\hat{\alpha}_q^i$ on kvantiiliregression vakio-termi ja $\hat{\gamma}_q^i$ kvantiiliregression makrotalouden tilamuuttujien \mathbf{m}_{t-1} kerroin-termi.¹⁴ Käytännössä kvantiiliregressiomenetelmä muodostaa linkin $CoVaR$ -menetelmien ja semiparametristen VaR -menetelmien välille, sillä myös luvussa 4.2.2 esitellyssä semiparametrisessä $CaViar$ -mallissa hyödynnetään kvantiiliregressiota VaR -mitan estimoimisessa.

Benoit ym. (2017, 136–138) lähestyvät $CoVaR$ -mittaa kaksikulotteisen $GARCH$ -teorian näkökulmasta olettamalla, että kaksikulotteinen tuottovektori $\mathbf{r}_t = (r_t^s, r_t^i)'$ noudattaa yhtälöä $\mathbf{r}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_t$, jossa ehdollinen varianssimatriisi \mathbf{H}_t on kaksikulotteinen markkinatuoton r_t^s ja yrityskohtaisen tuoton r_t^i välillä. He näyttävät, että teoriankehikon alla $\Delta CoVaR$ -mitta on mahdollista estimoida yrityksen i VaR -arvojen avulla yhtälöllä

$$\Delta CoVaR_{q,t}^{s|i} = \gamma_t^i (VaR_{q,t}^i - VaR_{50\%;t}^i), \quad (4.24)$$

jossa $\gamma_t^i = \rho_t^{is} \sigma_t^s / \sigma_t^i$. Toisin sanoen yrityksen i markkinariskin efekti systeemiriskiin syntyy markkinoiden ja yrityksen i keskihajontojen σ_t^s ja σ_t^i sekä tuottojen välisen

¹⁴ Adrian ja Brunnermeier (2016) estimoivat kvantiiliregression tuotolle r_t^i , jolloin kvantiiliregressioyhtälö on muotoa $r_t^i = \alpha_q^i + \gamma_q^i \mathbf{m}_{t-1} + \varepsilon_{q,t}^i$, jossa $\varepsilon_{q,t}^i$ on kvantiiliregression virhetermi. Tämän jälkeen he estimoivat kvantiiliregression koko finanssijärjestelmän ehdolliselle tuotolle $r_t^{s|i}$, jolloin kvantiiliregressioyhtälö on muotoa $r_{q,t}^{s|i} = \alpha_q^{s|i} + \beta_q^{s|i} r_{q,t}^i + \gamma_q^{s|i} \mathbf{m}_{t-1} + \varepsilon_{q,t}^{s|i}$, jossa $\varepsilon_{q,t}^{s|i}$ on kvantiiliregression virhetermi. Estimoinnin tuloksena saatavia kertoimia käytetään VaR ja $CoVaR$ -mittojen laskemisessa.

korrelaation ρ_t^{is} välityksellä hieman vastaavasti, kuin yhtälöiden 4.18 mukaisessa teoriakehikossa. *GARCH*-mallin oletukset takaavat kuitenkin sen, että *CoVaR*-mitan arvo riippuu sekä ajassa muuttuvasta *VaR*-arvosta ja ajassa muuttuvasta korrelaatiokomponentista, jolloin *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen välille ei muodostu täydellistä lineaarista korrelaatiota. Sen sijaan kvantiiliregressiolla estimoitujen *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen havaitaan olevan lähtökohtaisesti täydellisessä lineaarisessa korrelaatiossa keskenään, sillä kaavan 4.22 regressiokertoimessa ei ole aikakomponenttia. Ajassa muuttuvan korrelaatiokertoimen lisääminen malliin tukeekin *GARCH*-pohjaisten mallien käyttöä *CoVaR*-mitan estimoisessa.

Luvussa 2.2.3 näytettiin, että *CoVaR*-mitta voidaan määrittellä joko kaavan 2.15 mukaisesti ehdolle $r_t^i = VaR_{q,t}^i$ määriteltynä tai kaavan 2.18 mukaisesti ehdolle $r_t^i \leq VaR_{\alpha,t}^i$ määriteltynä. Mainik ja Schaanning (2012) vertailevat näiden kahden *CoVaR*-määrittelyn välistä eroa hyödyntäen copula-funktion avulla laskettua *CoVaR*-mallia.¹⁵ Copula-mallin käytössä testataan normaalijakautuneen mallin lisäksi kahta erilaista versiota t -jakautuneesta mallista. Kaikkien jakaumaoletusten alla havaitaan, että ehdolla $r_t^i \leq VaR_{\alpha,t}^i$ määritelty *CoVaR*-mitta toimii selvästi paremmin kuin ehdolla $r_t^i = VaR_{\alpha,t}^i$ määritelty *CoVaR*-mitta. Tutkimuksen lopputulos antaa siis tukea sellaiselle *CoVaR*-menetelmälle, joka on määritelty kaavan 2.18 mukaisesti.

Edellä esiteltyjen hyvien ominaisuuksien, kuten ajassa muuttuvan korrelaatorakenteen ja kaavan 2.18 mukaisesti ehdolla $r_t^i \leq VaR_{q,t}^i$ määritellyn *CoVaR*-mitan perusteella tässä tutkielmassa sovellettavaksi *CoVaR*-menetelmäksi valitaan Girardin ja Ergünün (2013) esittelemää *DCC-GARCH-CoVaR*-malli. Mallissa oletetaan, että yrityksen i tuoton r_t^i ja koko finanssijärjestelmän s tuoton r_t^s välillä vallitsee tunnettu kaksiulotteinen jakauma, jolloin muuttujien välinen yhteistiheysfunktio on muotoa $f_{is,t}$. Tällöin *CoVaR*-mitta voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\int_{-\infty}^{CoVaR_{q,t}^{s|i}} \int_{-\infty}^{VaR_{q,t}^i} f_{is,t}(x, y) dx dy = q^2 \quad (4.25)$$

silloin, kun luottamustaso $q \in (0,1)$ on kiinnitetty etukäteen ja yrityksen i *VaR*-mitan arvo on tunnettu. Olettamalla, että satunnaismuuttujien r_t^i ja r_t^s välinen varianssimatriisi noudattaa dynaamisen korrelaation *GARCH*-mallia, saadaan tiheysfunktion $f_{is,t}$ volatiliiteetti- ja korrelaatioparametrit estimoitua *DCC-GARCH*-mallilla. Vastaavasti yhtälöön

¹⁵ Oletetaan, että yrityksen i ja j tappioita kuvaavilla satunnaismuuttujilla r_t^i ja r_t^j on marginaaliset kertymäfunktiot F_i ja F_j sekä yhteiskertymäfunktio F_{ij} . Tällöin copula-funktio C määritellään yhtälöstä $F_{ij}(x, y) = C(F_i(x), F_j(y))$, jossa funktiolla C on tasajakautuneet marginaalifunktiot. Toisin sanoen satunnaismuuttujille $U, V \sim Tas(0,1)$ ja copula-funktiolle C pätee ehto $C(u, v) = P(U \leq u, V \leq v)$. (Mainik ja Schaanning 2012.)

4.25 syötteenä menevä markkinariskiä mittaava VaR -mitta estimoidaan parametrisella AR - $GARCH$ -mallilla, jossa yrityksen i tuottojen r_t^i oletetaan noudattavan yhteistihyysfunktioista $f_{is,t}$ määriteltyä marginaalista tiheysfunktioita. Tällöin VaR -mitan arvo ratkaistaan yhtälön 4.8 pohjalta siten, että jakauman odotusarvo estimoidaan AR -mallilla ja volatilititeetti $GARCH$ -mallilla. Tämän jälkeen yrityksen i ja systeemin s välinen korrelaatio estimoidaan DCC - $GARCH$ -mallilla ja lopullinen $CoVaR$ -arvo ratkaistaan yhtälöstä 4.25.

Girardi ja Ergün (2013) olettavat parametristen AR - $GARCH$ - VaR - ja DCC - $GARCH$ - $CoVaR$ -mallien aikasarjamallien olevan ensimmäistä astetta, jolloin mallit ovat muotoa $AR(1)$ - $GARCH(1,1)$ ja $DCC(1,1)$ - $GARCH(1,1)$. Mallin toimintaa testataan vuosilta 2000–2008 kerätyllä Yhdysvaltojen finanssialan yritysten markkina-arvoista koostetulla aikasarjadataalla ja malli estimoidaan sekä normaalijakaumaa että vinoutunutta t -jakaumaa hyödyntäen. Tulosten perusteella pankkien havaitaan olevan finanssialan yrityksistä merkittävimpiä systeemiriskin aiheuttajia. Lisäksi VaR - ja $CoVaR$ -mittojen aikasarjojen välillä havaitaan vain suhteellisen heikkoa korrelaatiota, eli systeemiriskiä mittaavan $CoVaR$ -mitan havaitaan kehittyvän eri tavalla kuin markkinariskiä mittaavan VaR -mitan. $CoVaR$ - ja VaR -mitan tulosten havaitaan eroavan huomattavasti myös yksittäisinä tarkasteluhetkinä, jolloin VaR - ja $CoVaR$ -mitta antavat erilaista tietoa yritysten riskisyydestä. Kaikkiaan tulokset antavat positiivisia viitteitä siitä, että $CoVaR$ -mitalla todella pystytään havaitsemaan finanssimarkkinoiden riskistä sellaisia piirteitä, joita pelkällä VaR -menetelmällä ei kyetä havaitsemaan.

$CoVaR$ -mitan alun perin kehittäneet Adrian ja Brunnermeier (2016) havaitsivat kvantiiliregressiolla estimoitujen VaR - ja $CoVaR$ -aikasarjojen olevan vahvasti keskenään korreloituneita, jolloin $CoVaR$ -mitalla ei saavuteta merkittävää lisähyötyä VaR -mittaan nähden. Sen sijaan yksittäisinä ajanhetkinä VaR - ja $CoVaR$ -mitta antavat huomattavan erilaista tietoa yritysten riskisyydestä, jolloin kvantiiliregressiolla estimoitua $CoVaR$ -mittaa voidaan hyödyntää $SIFI$ -yritysten tunnistamisessa. Esimerkiksi pankkivalvojan näkökulmasta tulos tarkoittaa sitä, että VaR - ja $CoVaR$ -mittojen avulla määritellyt pankkikohtaiset oman pääoman vaateet eroavat huomattavasti toisistaan, mutta kehittyvät ajassa suhteellisen samalla tavalla. Kvantiiliregressiolla saadut $CoVaR$ -mitan tulokset ovat linjassa Benoitin ym. (2017) esittämän teoreettisen tuloksen kanssa, jonka mukaan kvantiiliregressiolla estimoitu $CoVaR$ on vahvassa lineaarisessa korrelaatioissa VaR -mitan kanssa.

Kuten luvussa 3.1 havaittiin, tuottoaikasarjat voivat olla normaalijakaumaa paksuhäntäisempiä, jolloin normaalijakaumaoletus voi aliarvioida todellista riskiä. Normaalijakaumaa paksuhäntäisemmän jakauman hyödyntämistä $CoVaR$ -mallissa testaavat esimerkiksi Bernardi ym. (2017), jotka myös laajentavat $CoVaR$ -mitan määritelmää siten, että $CoVaR$ -mitta määritellään ehdollisena useammalle kuin yhdelle instituutiolle. Tällöin $CoVaR$ -mitalla voidaan mallintaa systeemiriskin leviämistä useiden eri yrityksen välillä. Tarkemmin $CoVaR$ -mitan määritelmä saadaan muotoon

$$P\left(r_t^j \leq \text{CoVaR}_{q,t}^{j|(1,\dots,i,\dots,N)} \mid r_t^1 = \text{VaR}_{\alpha_1,t}^1, \dots, r_t^N = \text{VaR}_{\alpha_N,t}^N\right) = q, \quad (4.26)$$

jossa ehdollisten yritysten $i \in (1, \dots, N)$ ($i \neq j$) joukkoon kuuluvien yritysten tuotot r_t^i ovat kvantiilin α_i mukaisella luottamustasolla. Mallin estimoiminen toteutetaan hyödyntäen Markovin tilasiirtymien -mallia (engl. *Markov switching*).¹⁶ Malli estimoidaan vuosilta 1974–2015 koostetulla Yhdysvaltojen suurimpien pankkien viikoittaisista markkinatuotoista koostuvalla datalla ja mallia testataan sekä normaalijakaumalla että normaalijakaumaa paksuhäntäisemmällä t-jakaumalla. Tulosten perusteella molemmilla jakaumilla havaitaan yksittäisen pankin systeemiriskikontribuution vaihtelevan erityisesti silloin, kun talousjärjestelmä on kriisissä. Kaikkiaan kuitenkin t-jakauman nähdään sopivan *CoVaR*-malliin sekä tilastollisten ominaisuuksien että teoreettisten häntäriippuvuusominaisuuksien pohjalta paremmin kuin normaalijakauman.

¹⁶ Markovin tilasiirtymien mallissa tuottojen satunnaisvektoria $\mathbf{r}_t = (r_t^1, \dots, r_t^m)$ mallinetaan ehdollisena stokastiselle tilamuuttujalle s_t , jolla on olemassa tilat $\{1, \dots, L\}$. Markov-ominaisuuden mukaan satunnaismuuttujan s_t tila hetkellä t riippuu vain prosessin tilasta edeltävällä hetkellä $t - 1$, jolloin $P(s_t = \hat{s}_t | s_{t-1} = \hat{s}_{t-1}, \dots, s_0 = \hat{s}_0) = P(s_t = \hat{s}_t | s_{t-1} = \hat{s}_{t-1})$. Tällöin tuottovektorin \mathbf{r}_t ehdolliselle tiheysfunktiolle f pätee $f(\mathbf{r}_t = \hat{\mathbf{r}}_t | \mathbf{r}_{t-1} = \hat{\mathbf{r}}_{t-1}, \dots, \mathbf{r}_0 = \hat{\mathbf{r}}_0, s_t = \hat{s}_t, \dots, s_0 = \hat{s}_0) = f(\mathbf{r}_t = \hat{\mathbf{r}}_t | s_t = \hat{s}_t)$, jolloin tuotot \mathbf{r}_t riippuvat vain stokastisen tilamuuttujan s_t arvosta \hat{s}_t . Esimerkiksi normaalijakaumaoletuksella ehdolliselle tuottovektorille pätee tällöin $(\mathbf{r}_t | s_t) \sim N(\boldsymbol{\mu}_{s_t}, \boldsymbol{\Sigma}_{s_t})$. (Bernardi ym. 2017, 4.)

5 EMPIIRINEN ANALYYSI

5.1 Data ja mallin valinta

5.1.1 Data ja aikasarjojen ominaisuudet

Empiirisessä analyysissä käytetään suurimpien Eurooppalaisten julkisesti noteerattujen pankkien markkina-arvojen aikasarjoja. Aikasarjojen havainnot kattavat aikavälin 1.1.2003–31.12.2019. Tarkasteluun valitut pankit sekä pankkien kotimaat ja markkina-arvot viimeiseltä havaintopäivältä ovat listattuna taulukkoon 1 markkina-arvojen mukaisessa laskevassa järjestyksessä.

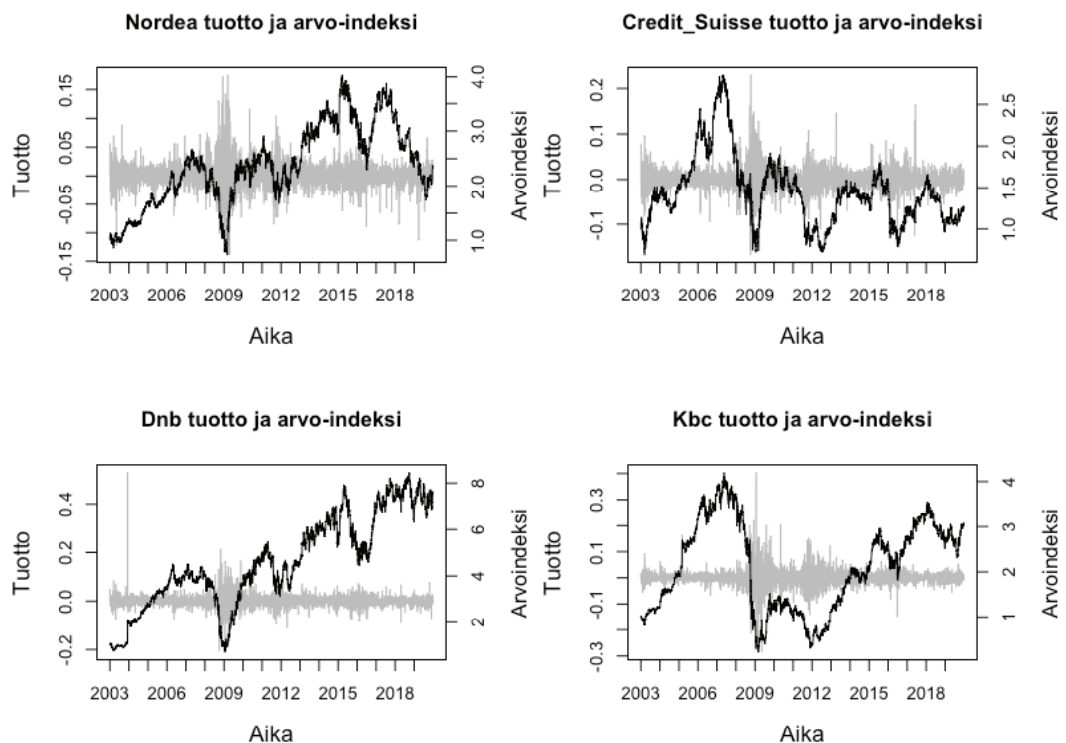
Taulukko 1 Analysoitavat pankit markkina-arvon mukaisessa järjestyksessä.

Pankki	Lyhenne	Kotimaa	Markkina-arvo (mrd. €)
HSBC Holdings PLC	HSBC	Iso-Britannia	141,9
PAO Sberbank of Russia	Sberb	Venäjä	78,9
BNP Paribas SA	BNP	Ranska	66,0
Banco Santander SA	Sant	Espanja	62,0
Lloyds Banking Group PLC	Lloyds	Iso-Britannia	52,7
UBS Group AG	UBS	Sveitsi	43,4
ING Groep NV	ING	Alankomaat	41,6
Intesa Sanpaolo SpA	Intesa	Italia	41,1
Crédit Agricole SA	CrAgr	Ranska	37,3
Barclays PLC	Barc	Iso-Britannia	36,7
Royal Bank of Scotland Group PLC	RBSG	Iso-Britannia	34,3
Banco Bilbao Vizcaya Argentaria SA	BBVA	Espanja	33,2
Credit Suisse Group AG	CrSuis	Sveitsi	30,8
Nordea Bank Abp	Nordea	Ruotsi/Suomi ¹⁷	29,2
UniCredit SpA	UniCred	Italia	29,1
KBC Group NV	KBC	Belgia	27,9
Standard Chartered PLC	StandC	Iso-Britannia	26,9
DNB ASA	DNB	Norja	26,3
Deutsche Bank AG	DB	Saksa	14,3
Commerzbank AG	CB	Saksa	6,9

¹⁷ Pankin kotimaa oli elokuuhun 2018 asti Ruotsi.

Taulukossa 1 esitetyt pankit on valikoitu siten, että ne edustavat Euroopan rahoitusmarkkinoiden merkittävämpiä maita ja maantieteellisiä alueita. Pankeista viisi tulee Isosta-Britanniasta, kaksi Ranskasta, Espanjasta, Italiasta, Sveitsistä ja Saksasta sekä yksi Venäjältä, Alankomaista, Ruotsista (Suomesta), Belgiasta ja Norjasta. Tarkasteluissa käytetty data on kerätty Macrobond-sovelluksesta. Pankkien päivittäiset markkina-arvot on otettu niiden kotimarkkinoilta ja pankkien markkina-arvot on muutettu euroiksi käyttämällä Macrobond-sovelluksesta haettuja päivittäisiä valuuttakursseja. Euroiksi on muutettu Isosta-Britanniasta, Venäjältä, Sveitsistä, Ruotsista ja Norjasta tulevien yritysten markkina-arvot. Euroopan finanssijärjestelmää kuvaavana systeeminä käytetään luvussa 3.1 analysoitua Euroopan kehittyneillä finanssimarkkinoilla toimivista keskikokoisista ja suurista finanssialan yrityksistä koostettua MSCI:n indeksistä.

Jokaisen pankin markkina-arvoista sekä markkinaindeksistä lasketaan kaavojen 2.1 ja 2.5 mukaisesti pankkikohtainen logaritminen tuottojen aikasarja. Kuvassa 5 tarkastellaan esimerkkinä Nordean, Credit Suisen, DNB:n ja KBC:n markkina-arvojen indeksistä ja tuotoista piirrettyjä kuvaajia.



Kuva 5 Nordean, Credit Suisen, DNB:n ja KBC:n markkina-arvojen indeksit (musta) ja tuotot (harmaa).

Kuvasta 5 havaitaan, että pankkikohtaiset tuottosarjat vaihtelevat vakiona pysyvän keskiarvon ympärillä ja tuottojen volatiliiteetit vaihtelee selvästi ajan mukana. Sen sijaan

markkina-arvoindeksit sisältävät selvästi kausittaisia trendejä. Pankkien väliset markkina-arvojen indeksit ja tuotot eivät kehity ajassa identtisesti, joskin sarjoissa on havaittavissa myös yhteneviä ominaisuuksia. Esimerkiksi vuoden 2009 finanssikriisin aikana kaikkien pankkien markkina-arvot käyivät alhaisimmillaan, kun taas pankkien markkina-arvon huippuajankohdissa on selviä eroja.

Pankkien tuottojen ominaisuuksia voidaan tarkastella laskemalla tilastollisia tunnuslukuja aikasarjoille. Taulukkoon 2 on listattu tuottosarjojen keskiarvot, keskihajonnat, vinoudet, huipukkuudet sekä korrelaatiot pankkien ja finanssi-indeksin tuottojen välillä. Lisäksi taulukkoon 2 on laskettu tuottoaikasarjojen Ljung-Boxin ja McLeod-Lin testien p-arvot ensimmäiselle viipeelle. Testien merkittävyyden rajana pidetään arvoa 0,05.

Taulukko 2 Pankkikohtaisten tuottojen tilastollisia tunnuslukuja ja tuottojen autokorrelaatiotestien p-arvot yhden askeleen viipeelle.

Pankki	Keskiarvo %	Keskihajonta %	Korrelaatio %	Vinous	Huipukkuus	Ljung-box, p-arvo	McLeod-Li, p-arvo
HSBC	0,01	1,65	75,40	-0,02	21,69	0,36	0
Sberb	0,07	2,87	47,71	0,01	18,64	0,24	0
BNP	0,01	2,3	85,38	0,32	14,01	0,53	0
Sant	0,02	2,11	82,43	0,60	19,26	0,24	0
Lloyds	0,01	3,58	52,67	-0,20	166,84	0,06	0,05
UBS	-0,01	2,2	76,44	0,47	19,11	0	0
ING	0,01	2,81	83,20	0,26	21,66	0,03	0
Intesa	0,03	2,63	71,63	3,57	109,36	0,96	0,4
CrAgr	0,02	2,52	79,11	0,83	16,96	0,04	0
Barc	0	2,98	74,30	1,20	42,84	0	0
RBSG	-0,01	3,94	55,95	-0,28	274,03	0	0,12
BBVA	0	2,01	84,08	0,19	10,31	0	0
CrSuis	0,01	2,24	74,71	0,38	13,62	0	0
Nordea	0,02	2,05	73,58	0,41	11,51	0,28	0
UniCred	0	3,03	67,20	3,08	59,85	0,39	0
KBC	0,03	2,97	69,40	-0,03	25,3	0	0
StandC	0,02	2,43	67,43	0,53	22,26	0,63	0
DNB	0,05	2,46	61,31	2,16	59,63	0,19	0
DB	-0,01	2,58	79,78	1,22	22,26	0,05	0
CB	0,01	3,26	63,97	3,70	70,55	0	0

Taulukon 2 tulosten perusteella aikasarjojen tuotot ovat keskimäärin hyvin lähellä nollaa ja keskihajonnat vaihtelevat yhden ja neljän prosentin välillä. Pankin ja indeksin välisessä korrelaatiossa havaitaan selvää pankkikohtaista vaihtelua. Pienin korrelaatio on Sberbankin 48 %, joka osaltaan selittyy sillä, että pankin pääasiallinen markkina-alue on hieman Euroopan keskittyneimmästä finanssimarkkinasta ulkopuolinen Venäjä. Korkein korrelaatio on puolestaan Ranskalaisen BNP Paribaksen 85 %. Pankkien tuottosarjojen ei havaita olevan pääsääntöisesti kovinkaan vinoja, mutta havaitut huipukkuudet ovat kaikille sarjoille selvästi suurempaa kuin normaalijakauman oletama kolme. Suuri huipukkuus viittaa siihen, etteivät tuotot noudata normaalijakaumaa. Ljung-Boxin testien p-arvot vaihtelevat pankkikohtaisesti selvästi tilastollisesti merkitsevän ja merkitsemättömän välillä siten, että noin puolella pankeista autokorrelaatio ensimmäiselle viipeelle on tilastollisesti merkitsevä. Neliöityjen tuottojen McLeod-Li -testien p-arvot ovat puolestaan lähes kaikille pankeille tilastollisesti merkitseviä, sillä vain Intesa Sanpaololle ja Royal Bank of Scotlandille testi ei ole tilastollisesti merkitsevä. Autokorrelaatiotestien tulosten perusteella tuotot ja neliöidyt tuotot eivät vaikuta täysin itsenäisesti jakautuneilta, mikä tukee ajatusta aikasarjamallien hyödyntämisestä tuottojen mallintamisessa.

5.1.2 Mallien valinta ja estimointi

Tässä tutkielmassa estimoitavaksi systeemiriskin *CoVaR*-malliksi valitaan parametrinen *DCC-GARCH*-malli. Mallin valintaa perustellaan luvussa 4.2.3 esimerkiksi sillä, että kyseisellä menetelmällä on havaittu olevan teoreettisia hyviä ominaisuuksia. Lisäksi mallilla on jo aiemmin saatu verrattain hyviä tuloksi systeemiriskin mittaamisesta. Vaikka luvuissa 4.2.1 ja 4.2.2 havaittiin, että *VaR*-mitalle löytyy huomattavasti modernimpiakin mallinnusmenetelmiä, valitaan tästä huolimatta tämän tutkielman puitteissa estimoitavaksi markkinariskin *VaR*-malliksi parametrinen *AR-GARCH*-malli. Mallin hyvinä puolina voidaan pitää sitä, että perinteisenä *VaR*-mallina parametrinen *AR-GARCH*-malli on ominaisuuksiensa puolesta hyvin tunnettuja ja käytännön tasolla suhteellisen yksinkertainen estimoida. Lisäksi malli on teoreettisesti linjassa *DCC-GARCH-CoVaR*-mallin kanssa.

Sekä *VaR*- että *CoVaR*-mallien oletetaan yhtenevästi noudattavan normaalijakaumaa. Vaikka normaalijakaumaoletus ei luvun 3.1 havaintojen ja taulukon 5 tulosten perusteella istu täydellisesti mallien alla olevaan dataa, arvioidaan normaalijakauman tuovan mukanaan muita hyviä ominaisuuksia, kuten luvussa 4.1.1 esitetyn riskimitan koherenttiuden. Perinteisimpiä parametrisia riskimalleja tarkasteltaessa huomattiin, että normaalijakauma on ollut suhteellisen yleinen oletus malleissa. Koska *CoVaR*-mitta on vielä suhteellisen uusi menetelmä, voi alkuvaiheessa olla kannattavaa estimoida *CoVaR*-mittaa suhteellisen

yksinkertaisilla ja verrattain hyvin tunnetuilla menetelmillä, jolloin mitan toiminnasta voidaan muodostaa perustason käsitystä.

Markkina- ja systeimiriskin mittaamista varten pankkikohtaisten *VaR*- ja *CoVaR*-mallien aikasarjamallit sovitetaan pankeista ja MSCI:n finanssi-indeksistä laskettuun tuotto-dataan. Mallit sovitetaan vuosien 2003–2009 ajalta kerättyyn tuottodataan, jonka jälkeen estimoiduilla parametreilla arvioidaan pankkien markkina- ja systeimiriskin kehitystä vuosien 2010–2019 ajalta. Vuodet 2003–2009 valitaan aikasarjamallien parametrien estimointiin sillä perusteella, että kyseisenä aikana markkinat ovat kokeneet sekä selvän nousukauden että merkittävän finanssikriisin, joten ajanjaksolta havaitaan sekä selvästi normaalia suurempia että pienempiä tuottoja. Tällöin aikasarjamallien parametrien oletetaan estimoituvan normaalia herkemiksi, jolloin myös riskimittojen malleista tulee normaalia herkempiä. Käytännössä mallien sovittaminen toteutetaan R-ohjelmointikielen *rugarch*- ja *rmgarch*-ohjelmistopaketeilla. Vuosien 2010–2019 aikana parametreja ei estimoida uudelleen, sillä mallien suoriutumista seurataan vakioina pysyvillä parametreilla. Kaikki aikasarjamallit asetetaan ennalta ensimmäisen asteen mukaiseen kokoon, eli muotoihin *AR(1)*, *GARCH(1,1)* ja *DCC(1,1)*. Aikasarjamallien parametrit sekä parametrikohittaiset t-testien p-arvot on listattu taulukkoon 3. Parametrien t-testien p-arvojen tilastollisen merkittävyyden rajana pidetään arvoa 0,05.

Taulukko 3 *AR(1)*-, *GARCH(1,1)*- ja *DCC(1,1)*-mallien pankkikohtaiset parametrit sekä parametrikohittaisen t-testien p-arvot.

Pankki	AR(1)		GARCH(1,1)			DCC(1,1)	
	ϕ_0 <i>p-arvo</i>	ϕ_1 <i>p-arvo</i>	ω <i>p-arvo</i>	α_1 <i>p-arvo</i>	β_1 <i>p-arvo</i>	a_1 <i>p-arvo</i>	b_1 <i>p-arvo</i>
HSBC	0,000398 <i>0,168</i>	-0,054460 <i>0,116</i>	0,000002 <i>0,723</i>	0,101525 <i>0,181</i>	0,897474 <i><0,001</i>	0,047082 <i>0,002</i>	0,842733 <i><0,001</i>
Sberb	0,002462 <i><0,001</i>	-0,011804 <i>0,647</i>	0,000019 <i>0,007</i>	0,092664 <i><0,001</i>	0,885864 <i><0,001</i>	0,041625 <i>0,0245</i>	0,929322 <i><0,001</i>
BNP	0,000544 <i>0,105</i>	-0,047768 <i>0,083</i>	0,000002 <i>0,881</i>	0,065968 <i>0,535</i>	0,931228 <i><0,001</i>	0,067793 <i>0,003</i>	0,840298 <i><0,001</i>
Sant	0,000321 <i>0,497</i>	-0,121399 <i>0,160</i>	0,000017 <i><0,001</i>	0,318188 <i>0,013</i>	0,680812 <i><0,001</i>	0,081170 <i><0,001</i>	0,905099 <i>0,001</i>
Lloyds	0,000275 <i>0,385</i>	-0,004918 <i>0,907</i>	0,000003 <i>0,606</i>	0,100799 <i>0,002</i>	0,898201 <i><0,001</i>	0,034748 <i>0,055</i>	0,957025 <i><0,001</i>
UBS	0,000500 <i>0,104</i>	0,008726 <i>0,771</i>	0,000002 <i>0,755</i>	0,095149 <i>0,234</i>	0,903851 <i><0,001</i>	0,063151 <i>0,001</i>	0,855107 <i><0,001</i>
ING	0,000881 <i>0,015</i>	0,051299 <i>0,068</i>	0,000006 <i>0,247</i>	0,159836 <i><0,001</i>	0,839164 <i><0,001</i>	0,021909 <i>0,024</i>	0,958234 <i><0,001</i>
Intesa	0,000563 <i>0,798</i>	-0,010159 <i>0,798</i>	0,000011 <i>0,998</i>	0,122106 <i><0,001</i>	0,848640 <i>0,001</i>	0,121218 <i>0,757</i>	0,853922 <i>0,151</i>
CrAgr	0,000830 <i>0,033</i>	-0,035819 <i>0,225</i>	0,000005 <i>0,556</i>	0,088869 <i><0,001</i>	0,910131 <i><0,001</i>	0,105059 <i>0,003</i>	0,874049 <i><0,001</i>

Barc	0,000427 0,245	-0,016641 0,590	0,000005 0,400	0,127489 0,020	0,871511 <0,001	0,015142 0,096	0,949105 <0,001
RBSG	0,000399 0,235	-0,027906 0,510	0,000001 0,555	0,040977 <0,001	0,958023 <0,001	0,021622 0,204	0,940193 <0,001
BBVA	0,000909 0,008	0,030007 0,301	0,000004 0,203	0,121260 <0,001	0,868135 <0,001	0,034078 0,002	0,937652 <0,001
CrSuis	0,000559 0,15	0,056413 0,050	0,000006 0,414	0,090026 0,003	0,900628 <0,001	0,034783 0,704	0,921664 0,002
Nordea	0,000753 0,024	-0,066583 0,009	0,000003 0,570	0,060201 0,106	0,932693 <0,001	0,061895 0,045	0,874690 <0,001
UniCred	0,000330 0,774	0,019874 0,774	0,000002 >0,999	0,101140 0,009	0,865785 0,074	0,419105 0,774	0,316367 0,861
KBC	0,000749 0,100	-0,039608 0,457	0,000010 0,752	0,191840 0,029	0,807160 <0,001	0,081511 <0,001	0,886762 <0,001
StandC	0,001031 0,006	-0,073557 0,005	0,000004 0,410	0,074230 0,003	0,918382 <0,001	0,053424 <0,001	0,914614 <0,001
DNB	0,001142 <0,001	-0,046081 <0,001	0,000001 0,924	0,079938 <0,001	0,904411 0,001	0,026654 0,040	0,959581 <0,001
DB	0,000590 0,092	0,000755 0,977	0,000005 0,338	0,094944 0,003	0,896881 <0,001	0,049764 <0,001	0,889259 <0,001
CB	0,000912 0,045	0,040523 0,191	0,000002 0,750	0,049815 0,103	0,949185 <0,001	0,122587 0,006	0,707463 <0,001
Indeksi	0,000732 <0,001	-0,000559 0,982	0,000001 0,590	0,099687 0,024	0,895673 <0,001	-	-

Taulukon 3 tulosten perusteella havaitaan, että pankkien parametrien arvot sekä tilastollinen merkitsevyys vaihtelevat pankkikohtaisesti. $AR(1)$ -mallin vakiotermeille ϕ_0 estimoituvat arvot ovat kaikille pankeille positiivisia. Sen sijaan $AR(1)$ -mallien ϕ_1 -kertoimen arvoista yli puolet ovat negatiivisia. $AR(1)$ -mallin parametreista ϕ_0 on tilastollisesti merkitsevä noin puolelle pankeista ja ϕ_1 vain kolmelle pankille. $GARCH(1,1)$ -mallin osalta nähdään, että edeltävän havainnon volatilitietin β_1 -kerroin on lähes kaikille sarjoille tilastollisesti merkitsevä, kuten on myös edeltävän havainnon neliöidyn virhetermin kerroin α_1 . Lisäksi jokaiselle pankille kerroin β_1 on huomattavasti suurempi kuin kerroin α_1 . Sen sijaan $GARCH(1,1)$ -mallin vakio-termi ω on arvoltaan hyvin pieni ja suurimmassa osassa malleista tilastollisesti merkitsemätön. Varianssimatriisin estimoinnissa vaikuttavista $DCC(1,1)$ -mallin kertoimista b_1 -kerroin dominoi, sillä se on malleissa arvoltaan usein yli kymmenkertainen a_1 -kertoimeen. Molemmat kertoimet ovat yleisesti tilastollisesti merkitseviä, joskin esimerkiksi UniCreditille molemmat kertoimet ovat selvästi tilastollisesti merkitsemättömiä.

Taulukon 3 perusteella mallien pankkikohtaisissa tuloksissa on havaittavissa selviä eroja siinä, mitkä kertoimet ovat millekin pankille tilastollisissa merkitseviä. Esimerkiksi UniCreditille ainoastaan $GARCH(1,1)$ -mallin α_1 -kerroin on tilastollisesti merkitsevä, kun taas Sberbankille vain kerroin ϕ_1 ei ole tilastollisesti merkitsevä. Tämä viittaa siihen, että pankkien historiallisten aikasarjojen käyttäytymisessä on eroja, jolloin nyt käytössä

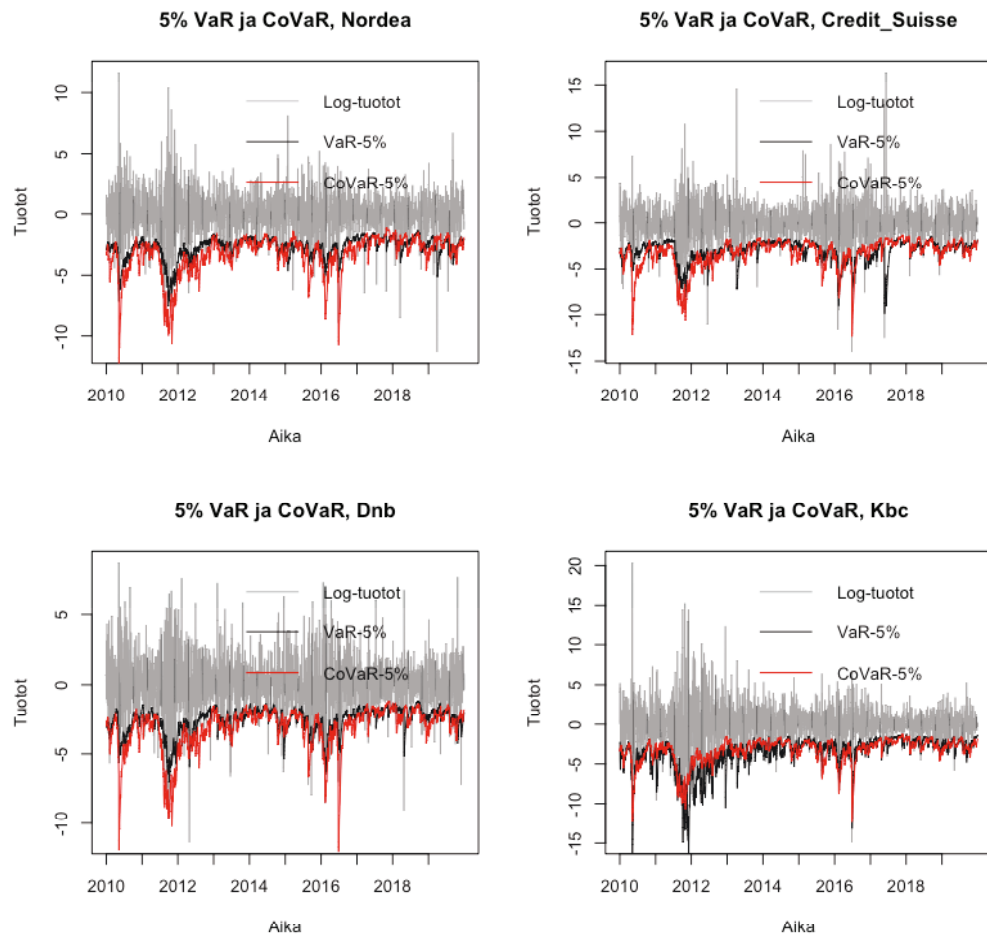
olevaa $AR(1)$ - $DCC(1,1)$ - $GARCH(1,1)$ -rakennetta ei voida pitää optimaalisena jokaiselle pankille. Käytännön hyötyjen takia kaikkien pankkien mallit pakotetaan kuitenkin noudattamaan samaa perusmallia, sillä tällöin tulosten keskinäinen vertailu helpottuu ja laskennallinen tehokkuus paranee. Lisäksi nyt tarkastelussa olevaa aikasarjamallia voidaan pitää yksinkertaisuutensa takia hyvänä vertailukohtana mahdollisesti myöhemmin hyödynnettäville rakenteeltaan monimutkaisemmille aikasarjamalleille.

5.2 Riskimittojen tulokset

5.2.1 Pankkikohtaisten mallien tulokset

Vuosien 2010–2019 ajalta pankkikohtaiset riskimittojen arvot lasketaan liukuvasti yhden aika-askeleen ennusteina. Toisin sanoen malli ennustaa sekä VaR - että $CoVaR$ -mitan arvon kerrallaan vain yhden markkinapäivän verran eteenpäin, jonka jälkeen malli liukuu seuraavaan päivään. Yhden aika-askeleen ennusteiden tavoitteena on minimoida VaR -mitan mukaisen markkinariskin ja $CoVaR$ -mitan mukaisen systeemiriskimitan laskemiseen liittyvä ennustevirhe, sillä tämän tutkielman tavoitteena on riskin ennustamisen sijasta tarkastella $CoVaR$ -menetelmän kykyä mitata vallitsevan hetken systeemiriskiä. Lisäksi tarkastellaan VaR - ja $CoVaR$ -mitan välisiä eroja, eli $CoVaR$ -mitan tuomaa lisähyötyä VaR -mittaan nähden. Mikäli VaR - ja $CoVaR$ -mitat kehittyisivät ajassa samalla tavalla ja tunnistaisivat samat yritykset riskisyydeltään merkittävimmiksi, ei $CoVaR$ -mitalla saavutettaisi juurikaan hyötyä VaR -mittaan nähden, jolloin $CoVaR$ -mitta olisi käytännössä lähes hyödytön.

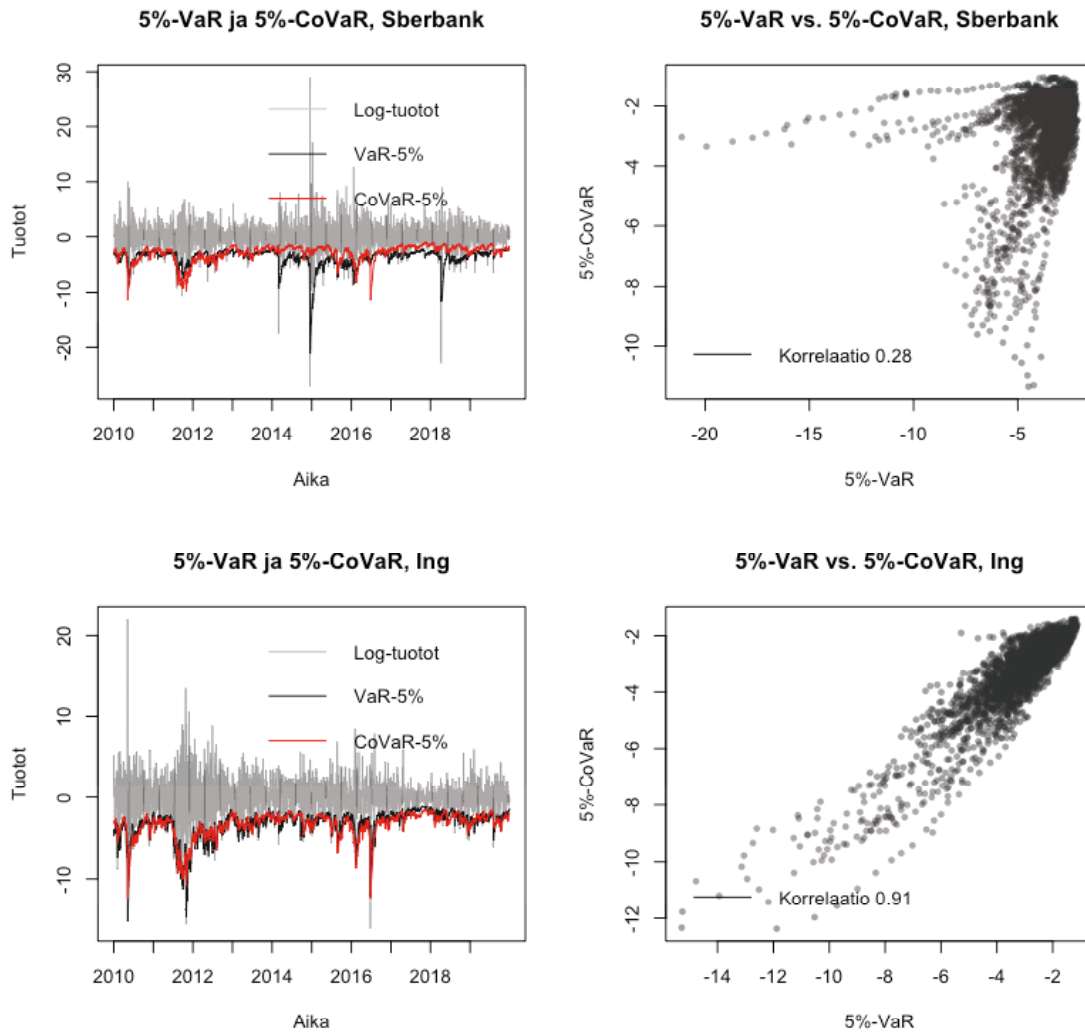
Systeemiriskimitan tuomaa lisäarvoa markkinariskimitaan nähden voidaan arvioida vertaamalla $CoVaR$ -mitan aikasarjaa VaR -mitan aikasarjaan. Kuvassa 6 tarkastellaan es-timoituja AR - $GARCH$ - VaR - ja DCC - $GARCH$ - $CoVaR$ -aikasarjoja Nordealle, Credit Suisse, DNB:lle ja KBC:lle.



Kuva 6 VaR- ja CoVaR-estimaattien tulokset Nordealle, Credit Suisselle, DNB:lle ja KBC:lle.

Kuvasta 6 havaitaan, että punaisella piirretyt systeemiriskiä mittaavat *CoVaR*-estimaatit seuraavat markkinariskiä mittaavia *VaR*-estimaatteja merkittävien trendien osalta. Kuten aikasarjamallien parametriestimoinnin tuloksista jo havaittiin, markkinariskiestimaatit seuraavat erityisesti alla olevien tuottosarjojen volatiliteettia, eli erityisesti suuria tuottoja ja tappioita seuraa markkinariskimitan kasvaminen. Myös systeemiriskimitan nähdään seuraavan tuottosarjojen volatiliteettia, joskin myös poikkeuksia havaitaan. Esimerkiksi Credit Suisselle havaitaan vuonna 2017 suuri tuotto, jota seuraa markkinariskimitan hetkellinen kasvaminen. Sen sijaan systeemiriskimita pysyy tänä aikana suhteellisen vakiona.

Pankeista ING:n *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen välille laskettu lineaarinen korrelaatio on suurin, kun taas Sberbankin mittojen välinen korrelaatio on pienin. Kuvassa 7 verrataan Sberbankin ja ING:n *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen aikasarjoja, korrelaatioita ja sirontakuviota keskenään.



Kuva 7 Sberbankin ja ING:n *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen vertaaminen.

Kuvasta 7 nähdään, että Sberbankin osalta korrelaatio mittojen välillä on vain 28 %, kun taas ING:n korrelaatio on 91 %. Sberbankin systeemiriskimitan nähdään jättävän reagoimatta muutamiin selviin tuottosarjan huippukohtiin, kun taas ING:n systeemiriskimitan nähdään selvästi kasvavan vastaavina hetkinä. Sirontakuviossa tämä havaitaan Sberbankin osalta siten, että havaintojen välinen korrelaatio on erityisen huonoa silloin, kun *VaR*-mitta saa hyvin negatiivisia arvoja. Sen sijaan ING:n sirontakuviosta havaitaan, että mitat ovat hyvin vahvasti lineaarisessa suhteessa keskenään, joskin heikointa korrelaatio on myös ING:n mittojen osalta negatiivisimmilla *VaR*-arvoilla. Eroja mittojen tuloksissa selittää todennäköisesti pankkien erilainen integroituminen Eurooppalaisilla markkinoilla. Sberbankin korrelaatio Euroopan finanssi-indeksiin on selvästi tarkastelluista pankeista alhaisin, ollen vain 48 %, kun taas ING:n korrelaatio on 83 %, eli sillä on pankeista kolmanneksi suurin korrelaatio finanssi-indeksiin nähden.

Kaikkien pankkien systeemiriski- ja korrelaatiokuvaajat löytyvät tämän tutkielman liitteestä A. Kaikkiaan pankkikohtaisten systeemiriskimittojen havaitaan olevan selvästi

korreloituneita markkinariskimitan kanssa, mutta korreloituneisuudessa on pankkikohtaisesti vaihtelua. Tämä antaa positiivisia viitteitä siitä, että normaalijakaumaan pohjaavalla *CoVaR*-systeemiriskimitalla voidaan saavuttaa pankkikohtaisesta riskisyydestä jotain sellaista informaatiota, jota pelkällä *VaR*-mitalla ei saavuteta. Tulokset ovat linjassa Girardin ja Ergunin (2013) sekä Adrianin ja Brunnermeierin (2017) tuloksien kanssa: *CoVaR*- ja *VaR*-mittojen aikasarjat ovat korreloituneita, mutta korrelaatioissa on eroja instituutiokohtaisesti.

DCC-GARCH-CoVaR-mallin kykyä tunnistaa eniten systeemiriskiä aiheuttavat *SIFI*-pankit markkinoilta tarkastellaan järjestämällä pankit niiden euromääräisten *CoVaR*-arvojen mukaiseen järjestykseen. Euromääräisen *CoVaR*-mitan tuloksia verrataan myös *AR-GARCH-VaR* mitan euromääräisiin tuloksiin, jolloin nähdään, eroavatko systeemiriskiä mittaavan *CoVaR*-mitan ja markkinariskiä mittaavan *VaR*-mitan antamat tulokset toisistaan. Pankkikohtaisen riskimitan suuruus euroissa hetkellä t voidaan laskea kaavalla

$$(e^{M_t^i} - 1)P_t^i, \quad (5.1)$$

jossa M_t^i riskimitan arvo (*VaR* tai *CoVaR*) pankille i hetkellä t ja P_t^i on pankin i markkina-arvo hetkellä t euroissa. Euromääräisiä arvoja käyttäen pankit voidaan järjestää suurimmasta riskin aiheuttajasta pienimpään riskin aiheuttajaan, jolloin pankkien joukosta voidaan erotella merkittävimmät *SIFI*-yritykset. Taulukossa 4 jokaiselle pankille on laskettu systeemiriskimitan, markkinariskimitan ja markkina-arvon mukainen keskimääräinen sijaluku sekä keskimääräisen sijaluvun mukainen kokonaissijoitus, joka ilmoitetaan sulkeissa. Pankit on järjestetty taulukkoon 4 systeemiriskimitan kokonaissijaluvun mukaisessa järjestyksessä suurimmasta riskinaiheuttajasta pienimpään.

Taulukko 4 Pankkien järjestäminen systeemiriskin, markkinariskin ja markkina-arvon mukaisesti.

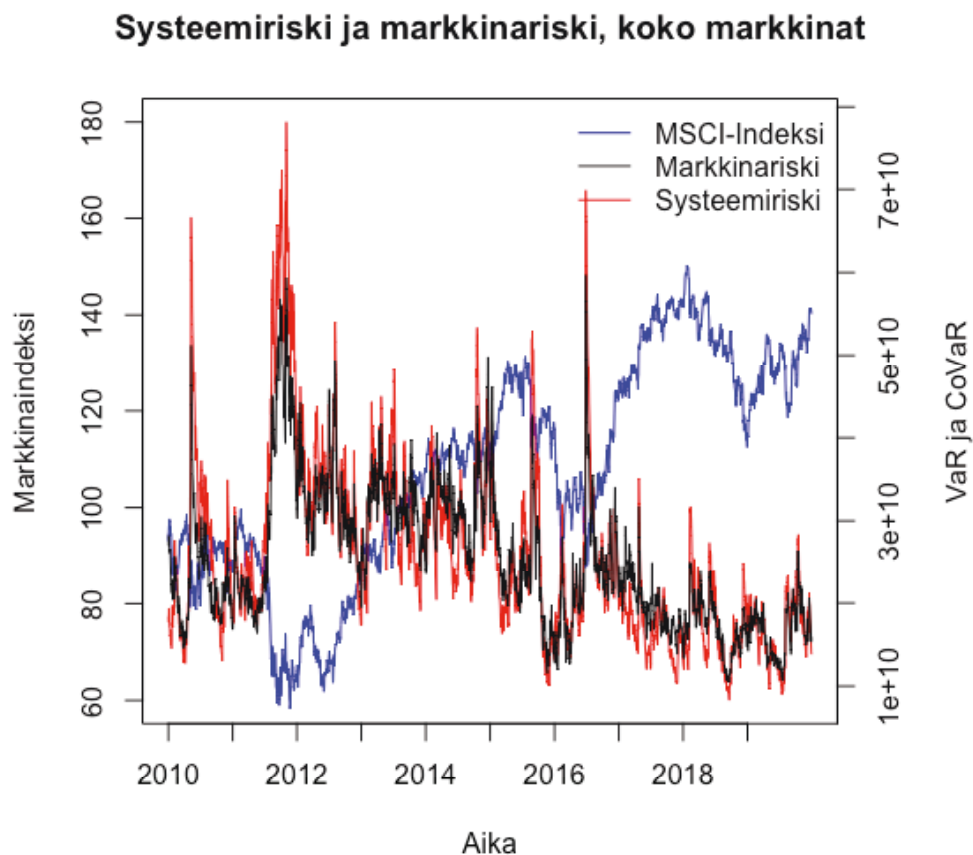
Pankki	Systeemiriski, sijaluku	Markkina-riski, sijaluku	Markkina-arvo, sijaluku
HSBC Holdings PLC	1,0 (1)	1,8 (1)	1,0 (1)
Banco Santander SA	3,3 (2)	4,8 (2)	2,3 (2)
BNP Paribas SA	4,3 (3)	5,7 (3)	3,6 (3)
UBS Group AG	4,4 (4)	7,4 (5)	5,4 (4)
Barclays PLC	7,6 (5)	7,5 (6)	8,7 (8)
Banco Bilbao Vizcaya Argentaria SA	7,8 (6)	9,7 (9)	8,4 (7)
Royal Bank of Scotland Group PLC	8,3 (7)	6,7 (4)	13,8 (15)
ING Groep NV	9,5 (8)	10,0 (10)	9,5 (9)
Credit Suisse Group AG	9,9 (9)	10,8 (12)	12,5 (13)
Deutsche Bank AG	10,3 (10)	9,5 (8)	13,6 (14)
UniCredit SpA	10,5 (11)	8,5 (7)	14,2 (16)
Lloyds Banking Group PLC	11,1 (12)	11,0 (13)	5,5 (5)
Intesa Sanpaolo SpA	12,4 (13)	11,9 (14)	11,8 (11)
Standard Chartered PLC	12,5 (14)	12,4 (16)	11,9 (12)
PAO Sberbank of Russia	13,5 (15)	10,8 (11)	6,8 (6)
Crédit Agricole SA	13,5 (16)	12,3 (15)	14,7 (17)
Nordea Bank Abp	14,8 (17)	15,4 (17)	10,9 (10)
KBC Group NV	17,2 (18)	16,7 (18)	18,0 (19)
DNB ASA	19,0 (19)	19,2 (20)	17,6 (18)
Commerzbank AG	19,0 (20)	17,7 (19)	19,8 (20)

Taulukon 4 perusteella havaitaan, että pankkien sijaluvuissa eri mittojen välillä on vaihtelua. Lisäksi pankin suurempi markkina-arvo ei aina tarkoita suurempaa systeemiriskisyyttä, joskin kooltaan suurimmat pankit, eli HSBC, Santander, BNP Paribas ja UBS ovat keskimäärin neljänä markkina-arvoltaan suurimpana pankkina myös selvästi suurimpia systeemiriskin aiheuttajia. Sen sijaan viidenneksi suurin systeemiriskin aiheuttaja on Barclays, vaikka se on markkina-arvoltaan keskimäärin vasta kahdeksanneksi suurin pankki. Myös esimerkiksi Royal Bank of Scotland on seitsemänneksi suurimpana systeemiriskin aiheuttajan huomattavasti korkeammalla listalla kuin markkina-arvon mukainen viidestoista sija antaisi olettaa. Sen sijaan Lloyds ja Sberbank ovat systeemiriskin aiheuttajina vasta sijoilla kaksitoista ja viisitoista, vaikka markkina-arvoissa pankit ovat sijoilla viisi ja kuusi. Markkinariskin ja systeemiriskin vertailussa vaihtelua sijoituksissa on vähemmän, joskin esimerkiksi UniCredit on systeemiriskissä sijalla yksitoista, mutta markkinariskissä sijalla seitsemän. Kaiken kaikkiaan taulukosta 4 selviää, että *CoVaR*-

systemiriskimitan mukainen pankkien järjestys ei seuraa puhtaasti markkina-arvojen tai *VaR*-markkinariskimitan mukaista järjestystä, joten *CoVaR*-mitan voidaan nähdä tuovan lisäinformaatiota *SIFI*-yritysten tunnistamiseen. Tulokset ovat linjassa Adrianin ja Brunnermeierin (2016) sekä Girardin ja Ergünün (2013) havaitseman *CoVaR*-mitan *SIFI*-yritysten tunnistamiskyvyn kanssa.

5.2.2 Markkinatason tulokset

Pankkikohtaiset *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen aikasarjat muunnetaan koko finanssijärjestelmän markkinariskiä ja systemiriskiä mittaaviksi aikasarjoiksi summaamalla kaavan 5.1 mukaiset euromääräiset riskiluvut yhteen. Markkinatason *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen mukaiset markkina- ja systemiriskin aikasarjat sekä MSCI:n finanssi-indeksi ovat piirrettyinä kuvaan 8.

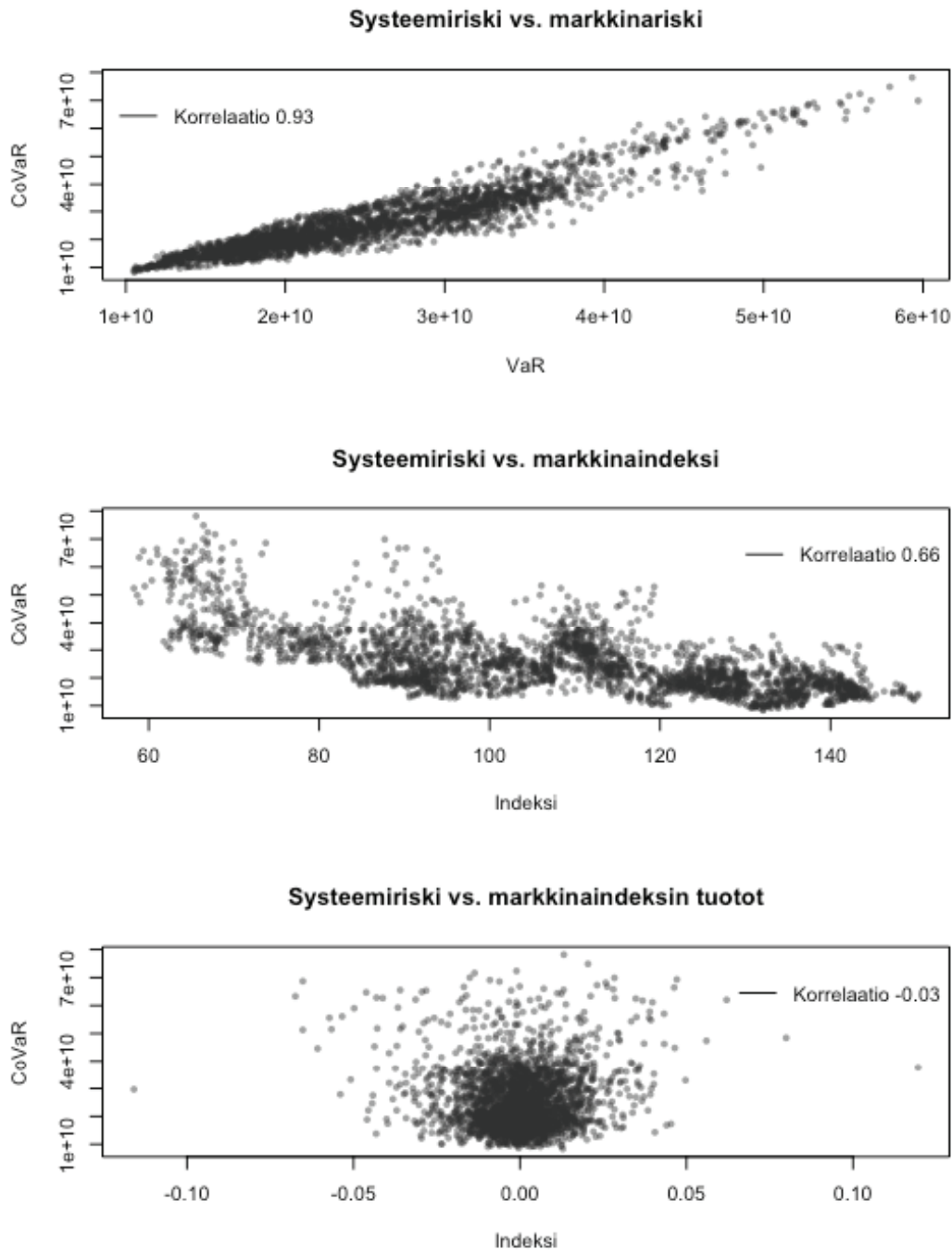


Kuva 8 Markkinatason systemiriski, markkinariski ja finanssi-indeksi.

Kuvasta 8 havaitaan, että *CoVaR*-mitan mukainen systemiriski on suurimmillaan vuoden 2011 loppupuolella. Lisäksi systemiriskin havaitaan saavan korkeita arvoja vuosien 2010 ja 2016 aikana. Monessa kohdassa systemiriskin arvon nousua edeltää finanssi-

indeksin arvon laskeminen, joskin poikkeuksiakin löytyy. Sen sijaan markkinariskin *VaR*-mitan ja systeemiriskin *CoVaR*-mitan havaitaan seuraavan toisiaan hyvin läheisesti.

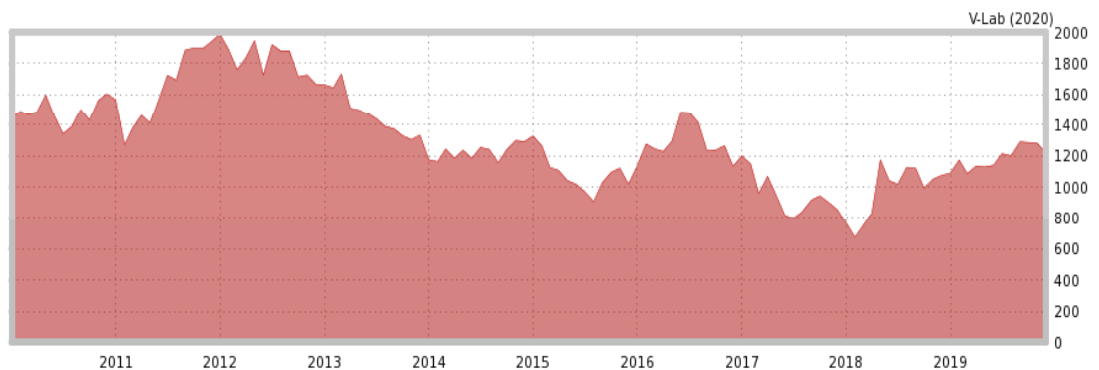
Kuvaan 9 on piirretty systeemiriskin sirontakuvio markkinarisktiin, finanssi-indeksin arvoihin sekä finanssi-indeksin tuottoihin verrattuna.



Kuva 9 Sirontakuviot systeemiriskin ja markkinariskin sekä systeemiriskin ja finanssi-indeksin välillä.

Kuvan 9 perusteella havaitaan, että markkinariskin *VaR*-mitan ja systeimiriskin *CoVaR*-mitan välillä on markkinatasolla voimakas lineaarinen korrelaatio. Sen sijaan finanssi-indeksin ja systeimiriskimitan välillä korrelaatio ei kuvan 9 perusteella ole yhtä voimakasta. Voimakas korrelaatio markkinatason *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen välillä viittaa siihen, että systeimiriskin *CoVaR*-mitta ei välttämättä lisää merkittävästi informaatiota markkinoiden riskistä, eli jo pelkkä *VaR*-mitta itsessään voi riittää kuvaamaan markkinoiden systeimiriskitason kehitystä. Sen sijaan pelkkä finanssi-indeksi ei kuvien 8 ja 9 perusteella itsessään riitä kuvaamaan markkinoiden riskisyyttä, sillä systeimiriski- ja markkinariskimitat eivät johdonmukaisesti kasva markkinoiden laskeessa tai laske markkinoiden noustessa.

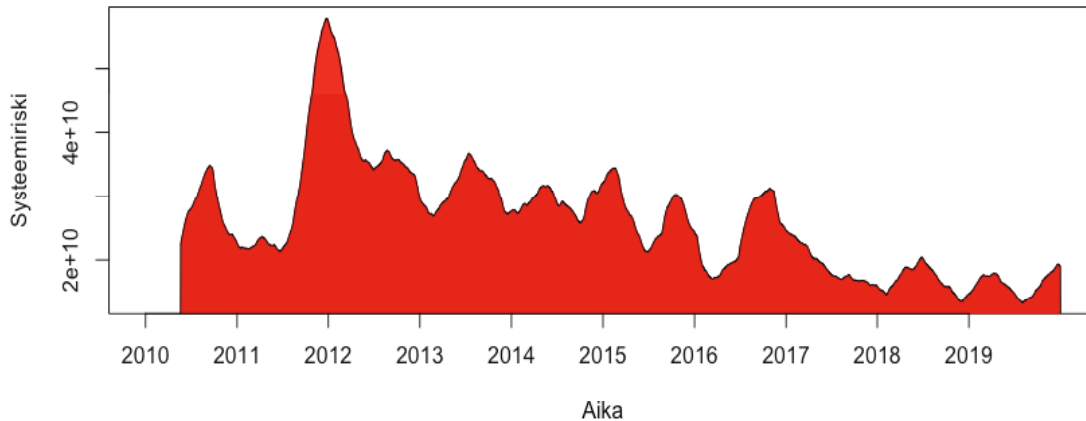
New Yorkin yliopiston Sternin kauppakorkeakoulun (*New York University Stern School of Business*) V-Lab -sivustolla ylläpidetään tuloksia eri rahoituskohteiden volatilitteettien, korrelaatioiden ja riskin ennustamiseen sekä mittaamiseen liittyen. Sivustolla on nähtävissä sekä perinteisemmillä menetelmillä että uudemmilla akateemisilla innovaatioilla laskettuja riski- ja volatilitteettikuvaajia. Sivustolla ylläpidetään esimerkiksi kaavassa 4.7 esitetyn *SRISK*-mitan mukaista systeimiriskiarviota. Kuvaan 10 on haettu V-lab -sivuston *SRISK*-mitan tulokset Euroopassa vuosien 2010–2019 ajalta.



Kuva 10 *SRISK*-mitta Euroopassa vuosina 2010–2019 (V-Lab 2020).

Kuvan 10 *SRISK*-systeimiriskimitan huomataan kasvavan ajanjakson huipputasolle vuosien 2011 ja 2012 aikana. Lisäksi *SRISK*-mitan mukaisen systeimiriskin havaitaan laskevan trendin jälkeen kasvavan uudelleen vuoden 2015 puolesta välistä alkaen vuoden 2016 puoleen väliin asti.

Kuvan 10 *SRISK*-mitan mukaista systeimiriskiä voidaan verrata kuvaan 11 piirrettyyn tasoitettuun *CoVaR*-systeimiriskimitaan. Kuvan 11 *CoVaR*-systeimiriskimitan tasoitus on toteutettu laskemalla sadan päivän liukuva keskiarvo *CoVaR*-mitan päivittäisistä systeimiriskin arvoista.



Kuva 11 Tasoitetun *CoVaR*-mitan mukainen systeemiriski.

Kuvaan 11 piirretystä tasoitetusta *CoVaR*-mitasta on havaittavissa vastaavat systeemiriskin huiput vuosilta 2012 ja 2016, mitkä havaitaan myös kuvaajaan 10 piirretystä *SRISK*-systeemiriskimitasta. Vuoden 2016 jälkeen sekä tasoitettu *CoVaR*-mitta ja *SRISK*-mitta seuraavat laskevaa trendiä vuoden 2018 alkupuolelle asti, jonka jälkeen tasoitettu *CoVaR*-mitta jää tarkasteltavan aikavälin alhaisimmalle tasolle. Sen sijaan *SRISK*-mitta lähtee lievään nousuun vuoden 2018 lopusta eteenpäin. Kaiken kaikkiaan *SRISK*-mitan ja tasoitetun *CoVaR*-mitan nähdään kuitenkin kehittyvän suhteellisen samalla tavalla, mikä tukee ajatusta siitä, että tämän tutkielman puitteissa laskettu *DCC-GARCH-CoVaR*-mitta pysyy kuvaamaan verrattain hyvin Euroopan kokonaissysteemiriskin tasoa ja sen kehitystä.

5.3 Riskimittojen toteumatestaaminen

Riskimittojen tarkkuutta ja malliriskisyyttä voidaan arvioida mittojen toteumatesteillä. Toteumatesteissä riskimitan arvoja verrataan alla olevan satunnaismuuttujan toteutuneisiin arvoihin, eli *VaR*-mitan arvoja verrataan pankkien markkina-arvojen tuottosarjaan ja *CoVaR*-mitan arvoja finanssi-indeksin ehdolliseen tuottosarjaan. Tilastollisesti *VaR*-mitta voidaan toteumatestata esimerkiksi Kupiecin testillä. Kupiecin (1995) määrittämässä testissä tuottosarjan ja riskimitan välille lasketaan ylityksistä I_t^i muodostuva aikasarja, jossa ylitys I_t^i määritellään indikaattorifunktiolla

$$I_t^i = \begin{cases} 1, & \text{jos } \hat{r}_t^i \leq VaR_{\alpha,t}^i \\ 0, & \text{jos } \hat{r}_t^i > VaR_{\alpha,t}^i \end{cases} \quad (5.2)$$

Mikäli havaittu tuotto \hat{r}_t^i on pienempi tai yhtä suuri kuin VaR -mitan arvo vastaavalla hetkellä, saa indikaattori I_t^i arvon yksi, jolloin kyseisenä hetkenä tapahtuu VaR -mitan ylitys. Kupiecien testin nollahypoteesi pankille i on muotoa $E[I_t^i] \equiv p^i = \alpha$, eli ylityksen todennäköisyys p^i on yhtä suuri kuin VaR -mitan luottamustaso. Testin nollahypoteesi perustuu VaR -mitan määritelmälle: Jos VaR -mitta on laskettu viiden prosentin luottamustasolla kahdenkymmenen havaintohetken ajalta, on odotettavaa, että ainakin yhtenä havaintohetkenä tuotto alittaa kyseisen päivän VaR -mitan arvon. Kupiecien testin testisuureen LR_K määritelmä on

$$LR_K = -2\ln\left(\frac{(1 - \alpha)^{T - \hat{x}} \alpha^{\hat{x}}}{\left(1 - \frac{\hat{x}}{T}\right)^{T - \hat{x}} \left(\frac{\hat{x}}{T}\right)^{\hat{x}}}\right), \quad (5.3)$$

jossa T on aikasarjan kaikkien havaintojen määrä, \hat{x} on havaittujen ylitysten määrä, α on VaR -mitan luottamustaso ja $\ln(\cdot)$ on luonnollinen logaritmi. Kupiecien testisuure on asympotoottisesti χ^2 -jakautunut vapausasteella yksi.

Christoffersenin (1998) testi täydentää Kupiecien testiä siten, että testi huomioi myös edeltävän hetken indikaattorin arvon. Toisin sanoen testin avulla voidaan tarkastella sitä, vaikuttaako edeltävän hetken tilanne seuraavana hetkenä mahdollisesti havaittavan ylityksen todennäköisyyteen. Testin nollahypoteesina on, että edeltävä havainto ei vaikuta seuraavaan havaintoon. Christoffersenin testin testisuure LR_C määritellään yhtälöllä

$$LR_C = -2\ln\left(\frac{(1 - \hat{p})^{\hat{x}_{00} + \hat{x}_{10}} \hat{p}^{\hat{x}_{01} + \hat{x}_{11}}}{(1 - \hat{p}_0)^{\hat{x}_{00}} (1 - \hat{p}_1)^{\hat{x}_{10}} \hat{p}_1^{\hat{x}_{11}}}\right), \quad (5.4)$$

jossa \hat{x}_{00} on niiden havaittujen hetkien määrä, jolloin ei-ylitystä seuraa ei-ylitys, \hat{x}_{01} on niiden hetkien määrä, jolloin ei-ylitystä seuraa ylitys, \hat{x}_{10} on niiden hetkien määrä, jolloin ylitystä seuraa ei-ylitys ja \hat{x}_{11} on niiden hetkien määrä, jolloin ylitystä seuraa ylitys. Lisäksi \hat{p}_0 on havaittu todennäköisyys havaita ylitys ei-ylityksen jälkeen, \hat{p}_1 on todennäköisyys havaita ylitys ylityksen jälkeen ja \hat{p} on kokonaistodennäköisyys havaita ylitys. Christoffersenin testisuure on asympotoottisesti χ^2 -jakautunut vapausasteella yksi. Formaalisti Christoffersenin testin nollahypoteesi pankille i on muotoa $E[I_t^i] \equiv p^i = p_1^i = p_0^i$.

Girardin ja Ergünün (2013, 3173) mukaan sekä Christoffersenin että Kupiecien testiä voidaan soveltaa $CoVaR$ -mitalle silloin, kun $CoVaR$ -mitta on määritelty ehdolla $r_t^i \leq VaR_{q,t}^i$. Tällöin sellaisten päivien, joina pankkikohtaiselle VaR -mitalle tapahtuu ylitys, kokonaissysteemin tuotoista muodostetaan ehdollisten tuottojen $\hat{r}_t^{s|i}$ muodostama

aikasarja. Tätä ehdollista aikasarjaa verrataan vastaavien päivän pankkikohtaisiin *CoVaR*-mitan havaintoihin, jolloin ylityksen määritelmä saadaan muotoon

$$I_t^{s|i} = \begin{cases} 1, & \text{jos } \hat{r}_t^{s|i} \leq \text{CoVaR}_{q,t}^{s|i} \\ 0, & \text{jos } \hat{r}_t^{s|i} > \text{CoVaR}_{q,t}^{s|i} \end{cases} \quad (5.5)$$

Toisin sanoen ehdollisen ylityksen $I_t^{s|i}$ lasketaan tapahtuvan silloin, kun sekä pankkikohtainen *VaR*- että *CoVaR*-arvo alittuvat samana päivänä. Tällöin Kupiecien testin nollahypoteesi pankille i on muotoa $E[I_t^{s|i}] \equiv p^{s|i} = q$, eli todennäköisyys $p^{s|i}$ havaita ylitys on yhtä suuri kuin *CoVaR*-mitan luottamustaso q . Kupiecien testin testisuure *CoVaR*-mitalle määritellään kaavan 5.3 mukaisesti siten, että $\alpha = q$ ja T on sellaisten päivien kokonaismäärä, jolloin $\hat{r}_t^i \leq \text{VaR}_{\alpha,t}^i$. Christoffersenin testin testisuure määritellään puolestaan edellä määritellylle ehdolliselle tuottoaikasarjalle kaavan 5.4 mukaisesti. Christoffersenin testin nollahypoteesi *CoVaR*-mitalle on, että edeltävän ehdollisen hetken mahdollisella ylityksellä ei ole vaikutusta seuraavan ehdollisen hetken ylitystodennäköisyyteen, eli pankille i ilmaistuna $E[I_t^{s|i}] \equiv p^{s|i} = p_1^{s|i} = p_0^{s|i}$.

Estimoituja *VaR*- ja *CoVaR*-mittoja toteumatestataan pankkikohtaisesti laskemalla sekä Kupiecien että Christoffersenin testien p-arvot. Testien merkitsevyyden luottamustasona pidetään arvoa 0,05. Riskimittojen luottamustasot ovat mallinnuksen mukaisesti asetettu viiden prosentin tasolle. Taulukossa 5 on ilmoitettu pankkikohtaisten riskimittojen suhteelliset ylitysprosentit sekä toteumatestien p-arvot.

Taulukko 5 Pankkien toteumatestien tulokset *VaR*- ja *CoVaR*-mitoille.

Pankki	<i>VaR</i>			<i>CoVaR</i>		
	Ylitykset %	LR_K , p-arvo	LR_C , p-arvo	Ylitykset %	LR_K , p-arvo	LR_C , p-arvo
HSBC	5,10	0,816	0,075	19,55	<0,001	<0,001
Sberb	4,6	0,343	0,372	16,67	<0,001	<0,001
BNP	5,44	0,304	0,295	18,31	<0,001	<0,001
Sant	6,67	<0,001	<0,001	14,94	<0,001	<0,001
Lloyds	4,72	0,502	0,529	17,07	<0,001	<0,001
UBS	5,06	0,886	0,660	16,67	<0,001	<0,001
ING	5,71	0,102	0,258	18,12	<0,001	<0,001
Intesa	6,21	0,006	0,022	16,67	<0,001	<0,001
CrAgr	4,41	0,158	0,093	18,26	<0,001	<0,001
Barc	5,37	0,393	0,457	16,43	<0,001	<0,001
RBSG	4,22	0,060	0,013	19,09	<0,001	<0,001

BBVA	6,13	0,010	0,034	16,25	<0,001	<0,001
CrSuis	4,72	0,502	0,567	17,89	<0,001	<0,001
Nordea	5,48	0,265	0,183	16,78	<0,001	<0,001
UniCred	7,94	<0,001	<0,001	14,49	<0,001	<0,001
KBC	4,91	0,829	0,547	19,53	<0,001	<0,001
StandC	4,95	0,900	0,582	15,50	<0,001	<0,001
DNB	7,86	<0,001	<0,001	13,66	<0,001	<0,001
DB	5,98	0,025	0,082	14,10	<0,001	<0,001
CB	4,64	0,393	0,146	19,83	<0,001	<0,001

Taulukosta 5 havaitaan, että suhteellisten ylitysten määrä vaihtelee *VaR*-mitan osalta neljän ja kahdeksan prosentin välillä, jolloin osalle pankeista tapahtuu selvästi odotettua enemmän tai vähemmän ylityksiä. Pankkikohtaisten sarjojen toteumatestitarkasteluista huomataan, että seitsemän pankin kohdalla joko toinen tai molemmat toteumatestit epäonnistuvat. Testien epäonnistumiset johtuvat pääsääntöisesti liiallisesta määrästä havaittuja ylityksiä. Tällöin *VaR*-malli aliarvioi riskiä eivätkä peräkkäiset havainnot ole toisistaan riippumattomia. Poikkeuksena on Royal Bank of Scotland, joka läpäisee Kupiecien testin, mutta ei läpäise Christoffersenin testiä.

Taulukon 5 perusteella nähdään, että *CoVaR*-mitalle havaittujen suhteellisten ylitysten määrä vaihtelee kolmentoista ja kahdenkymmenen prosentin välillä, eli ylityksiä tapahtuu selvästi odotettua enemmän. *CoVaR*-mitan osalta Kupiecien ja Christoffersenin testit selvästi epäonnistuvat, eli *CoVaR*-mitta aliarvioi riskiä, eivätkä peräkkäiset ylityshavainnot ole toisistaan riippumattomia. *CoVaR*-mitalle saadut toteumatestien tulokset ovat suhteellisen hyvin linjassa Girardin ja Ergünün (2013, 3175–3178) saamien toteumatestien tulosten kanssa, sillä myöskin heidän estimoima normaalijakautunut *CoVaR*-mitta aliarvioi todellista riskiä, mikä johtaa mitan epäonnistumiseen Kupiecien toteumatesteissä. Girardin ja Ergünün estimoima normaalijakautunut *CoVaR*-mitta läpäisee kuitenkin Christoffersenin testin.

Normaalijakautuneen *DCC-GARCH-CoVaR*-mallin epäonnistuminen toteumatesteissä viittaa siihen, ettei malli onnistu kuvaamaan tuottojakauman häntää riittävällä tarkkuudella, jolloin mallissa on selvää malliriskiä. Koska toteumatestien epäonnistuminen johtuu nimenomaan riskin aliarvioitumisesta, voidaan erityisesti normaalijakaumaoletuksen järkevyyttä kyseenalaistaa. *DCC-GARCH-CoVaR*-mallin osalta Girardi ja Ergün (2013) ovatkin näyttäneet, että normaalijakauman vaihtaminen paksuhäntäisempään jakaumaan todella parantaa mallin tarkkuutta, sillä heidän estimoima vinoutunut t-jakaumaa noudattava *DCC-GARCH-CoVaR*-malli onnistui läpäisemään sekä Kupiecien että Christoffersenin toteumatestit. Toisin sanoen t-jakaumaa noudattava *CoVaR*-malli suoriutui normaalijakautunutta mallia tarkemmin systeimiriskin mittaamisesta.

6 YHTEENVETO

Vuosien 2007–2009 globaalien finanssikriisin jälkeen kävi selväksi, että silloisten *VaR*-mallien ongelmat ja suoranaiset virheet osaltaan myötävaikuttivat siihen, että riskiä kertyi markkinoille ja odotettua pahempia tappioita pääsi finanssikriisissä realisoitumaan. Toisaalta silloiset riskimallit eivät myöskään kattaneet kaikkia finanssimarkkinoilla kehittyneitä riskin muotoja, sillä erityisesti makrotason systeimiriski oli silloisten mikrotason *VaR*-mallien ulkopuolella. Systeimiriskin mallintamiseksi onkin kehitetty useita erilaisia menetelmiä, joista tämä tutkielma keskittyy ehdolliseen *VaR*-mittaan eli *CoVaR*-mittaan. Tämän tutkielman puitteissa tarkasteltiin *CoVaR*-mitan kykyä mitata systeimiriskin kehitystä sekä pankkikohtaisesti että koko finanssimarkkinoiden tasolla, minkä lisäksi tarkasteltiin *CoVaR*-mitan kykyä tunnistaa merkittävimmät systeimiriskiä aiheuttavat yritykset finanssimarkkinoilta. Lisäksi *CoVaR*-mitalla laskettuja riskilukuja verrattiin *VaR*-mitalla laskettuihin tuloksiin. Mittojen riskilukujen vertailun tavoitteena oli tarkastella *CoVaR*-mitan eroa ja lisähyötyä tavalliseen *VaR*-mittaan nähden.

Estimoitavaksi *CoVaR*-malliksi valittiin normaalijakautunut *DCC-GARCH-CoVaR*-malli. Vastaavasti tarkasteltavaksi *VaR*-malliksi valittiin normaalijakautunut parametri-*AR-GARCH-VaR*-malli. Riskimittoja testattiin kahdellekymmenelle suurimmalle eurooppalaiselle pankille, joiden markkina-arvoista laskettujen tuottosarjojen kehitystä mallinnettiin 2010-luvun ajalta. Mallinnusmenetelmien tueksi tämän tutkielman puitteissa tehtiin tarkastelu *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen matemaattisiin ominaisuuksiin sekä mittoihin liittyviin tilastollisiin malleihin ja malliriskin lähteisiin. Teoreettinen tarkastelu sisälsi katsauksen myös riskimalleissa käytettyihin yksi- ja moniulotteisiin aikasarjamalleihin.

Girardin ja Ergüenin (2013) alkuperäisessä *DCC-GARCH-CoVaR*-mallia käsittelevässä tutkimuksessa menetelmän havaitaan kykenevän mittaamaan suhteellisen hyvin systeimiriskiä Yhdysvaltojen finanssimarkkinoilla. Teoreettisessa mielessä *DCC-GARCH-CoVaR*-malli saa lisäksi tukea esimerkiksi Benoitin ym. (2017) tutkimuksesta, jonka mukaan mallin dynaamisten korrelaatioiden *DCC*-rakenne estää sen, ettei *CoVaR*- ja *VaR*-mittojen välille muodostu täydellistä lineaarista suhdetta. Tämä puolestaan lisää variaatiota mittojen välillä. Lisäksi esimerkiksi Mainikin ja Schaanningin (2014) tulosten perusteella *DCC-GARCH-CoVaR*-mallin mahdollistama laajennettu *CoVaR*-mitan määritelmä toimii alkuperäistä *CoVaR*-mitan määritelmää paremmin systeimiriskin mittaamisessa.

CoVaR-mitan laskennassa syötteenä hyödynnettävä *VaR*-mitta mallinnettiin tutkielman puitteissa normaalijakautuneella parametrisella *AR-GARCH-VaR*-mallilla. Parametrisen *AR-GARCH-VaR*-mallin valintaa voidaan perustella sillä, että menetelmä edustaa verrattain yleistä tapaa mallintaa *VaR*-mittaa. Lisäksi mallin parametrisen rakenne on teoreettisesti yhtenäinen *DCC-GARCH-CoVaR*-mallin kanssa. Toisaalta *AR-GARCH-VaR*-mallin tiedetään sisältävän myös malliriskiä aiheuttavia ongelmakohtia. Laajemmin *VaR*-

mitan tilastollisia malleja tarkasteltaessa havaittiin, että *VaR*-mitan mallintamiseksi on olemassa monia erilaisia malleja, joista monet hyödyntävät parametrissa *AR-GARCH*-mallia modernimpia tilastollisia menetelmiä. Kuitenkin myös nämä uudemmat *VaR*-mallit sisältävät erilaisia ongelmakohtia. *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen yhtenevä teoriapohja mahdollistaa sen, että jo olemassa olevia *VaR*-malleja voidaan todennäköisesti pienin muokkauksin soveltaa myös *CoVaR*-mitan mallinnuksessa. Käytännössä näin onkin jo tapahtunut esimerkiksi parametrusten mallien ja kvantiiliregressioon pohjaavien mallien kohdalla, sillä kyseisiä menetelmiä on hyödynnetty molempien mittojen estimoimisessa.

VaR- ja *CoVaR*-mittojen matemaattisten ominaisuuksien tarkastelun perusteella mitat täyttävät matemaattisesti hyvin määritellyn riskimitan ehdot vain normaalijakaumaoletuksen alla. Tuottoaikasarjojen tilastollinen tarkastelu kuitenkin osoittaa sen, ettei normaalijakaumaoletus kuvaa välttämättä empiirisiä aikasarjoja täydellisesti, sillä tuottoaikasarjat ovat todellisuudessa normaalijakaumaa huipukkaampia ja omaavat normaalijakaumaa paksummat hännät. Tilastollisista ongelmakohdista huolimatta mittojen mallinnuksessa päädyttiin tässä tutkielmassa hyödyntämään normaalijakaumaa. Teoreettisten hyvien ominaisuuksien lisäksi päätöstä voidaan perustella erityisesti sillä, että monissa perinteisimmissä *VaR*-malleissa normaalijakauma on yleisesti käytössä. Lisäksi normaalijakaumalla pystytään takaamaan mallien laskennallinen yksinkertaisuus.

AR-GARCH-VaR ja *DCC-GARCH-CoVaR*-mallien pankkikohtaisten tulosten perusteella *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen välisen korrelaation havaitaan vaihtelevan kolmenkymmenen ja yhdeksänkymmenen prosentin välillä. Toisin sanoen joillekin pankeille *CoVaR*-mitta tuottaa selkeästi *VaR*-mitasta eroavia riskilukuja, kun taas toisille pankeille erot ovat huomattavasti pienempiä. Suurimpia systeemiriskin aiheuttajia tarkasteltaessa havaitaan, että kooltaan suurimmat pankit ovat yleisesti myös merkittävimpiä systeemiriskin aiheuttajia. Toisaalta pankkien päiväkohtaisissa systeemiriskin määrän mukaisissa sijaluvuissa havaitaan olevan vaihtelua, jolloin pankkien tuottaman systeemiriskin osuus vaihtelee päivittäin. Tulosten perusteella selviää myös, että *CoVaR*-mitta järjestää pankit riskisyydeltään hieman erilaiseen järjestykseen, kuin mitä markkinariskiä mittaava *VaR*-mitta järjestää. Kaiken kaikkiaan *CoVaR*- ja *VaR*-mittojen tulosten nähdään pankkitasolla eroavan toisistaan, mikä viittaa *CoVaR*-mitan kykyyn tuoda lisähyötyä *VaR*-mittaan nähden.

Markkinatasolla *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen välisen lineaarisen korrelaation nähdään olevan hyvin voimakasta, mikä viittaa siihen, että koko markkinoiden tasolla *CoVaR*-mitan tuoma lisähyöty *VaR*-mittaan nähden voi jäädä alhaiseksi. Sen sijaan korrelaation markkinaindeksin ja *CoVaR*-mitan välillä havaitaan olevan heikompa, minkä perusteella systeemiriskin arvioiminen suoraan markkinaindeksin tason perusteella ei vaikuta mahdolliselta. Tutkielman puitteissa *CoVaR*-mitan markkinatason tuloksia verrataan myös New Yorkin yliopiston Sternin kauppakorkeakoulun V-Lab-sivustolla tilastoituun *SRISK*-systeemiriskimittaan. Vertailun perusteella molemmat mitat antavat pääpiirteiltään saman suuntaisia tuloksia systeemiriskin tason kehityksestä Euroopassa 2010-luvulla. Tämän

perusteella *DCC-GARCH-CoVaR*-mitta vaikuttaa kykenevän kuvaamaan suhteellisen hyvin Euroopan finanssimarkkinoiden systeemiriskiä.

Mallinnettujen mittojen suoriutumista arvioitiin tutkielman puitteissa myös tilastollisilla toteumatesteillä. Testien perusteella *VaR*-mitta läpäisee yli puolet pankkikohtaisista toteumatesteistä, kun taas *CoVaR*-mitta selvästi epäonnistuu testeissä jokaisen pankin kohdalla. Tämä viittaa siihen, ettei varsinkaan mallinnettu *CoVaR*-mitta kykene mittaamaan tuottojakaumien häntiä kovinkaan tarkasti. Toteumatestien epäonnistuminen kertoo myös molemmissa malleissa piilevästä malliriskistä. Testattujen *AR-GARCH-VaR*- ja *DCC-GARCH-CoVaR*-mallien merkittävimmäksi malliriskin lähteeksi arvioidaan normaalijakaumaoletus, joskin myös mallien parametrien estimoimisessa hyödynnettävissä aikasarjamalleissa havaitaan potentiaalisia ongelmakohtia. Aikasarjamallien ongelmat liittyvät esimerkiksi mallien ennalta määriteltyyn muotoon. Kaiken kaikkiaan aikasarjamallien ongelmien arvioidaan kuitenkin olevan normaalijakaumaoletusta merkityksettömämpiä malliriskin lähteitä. Tätä arviota tukee esimerkiksi Girardin ja Ergünün (2013) havainto, jonka mukaan *t*-jakautunut *DCC-GARCH-CoVaR*-malli suoriutuu toteumatesteistä paremmin kuin vastaavilla aikasarjamalleilla toteutettu normaalijakautunut malli.

Tutkielman puitteissa toteutetuissa tarkasteluissa ilmeni, että *CoVaR*-mittaa voidaan potentiaalisesti hyödyntää erityisesti pankkikohtaisen systeemiriskin mittaamisessa sekä *SIFI*-yritysten tunnistamisessa, sillä pankkikohtaisesti estimoidut *VaR*- ja *CoVaR*-mittojen tulokset eroavat toisistaan. Markkinatason vertailukohtana käytetyn *SRISK*-mitan ja estimoidun *DCC-GARCH-CoVaR*-mallin tulosten välinen yhteneväisyys tukee myös sitä, että *DCC-GARCH-CoVaR* kuvaa tunnettua systeemiriskiä verrattain hyvin. Toisaalta markkinatasolla *CoVaR*- ja *VaR*-mitat seuraavat varsin läheisesti toisiaan, eli markkinatasolla *CoVaR*-mitan tuoma lisähyöty jää vähäiseksi. Lisäksi *CoVaR*-mitan epäonnistuminen toteumatesteissä viittaa siihen, ettei normaalijakautunut *DCC-GARCH-CoVaR*-malli kykene mittaamaan systeemiriskiä riittävällä tarkkuudella. Tätä ongelmaa voitaneen kuitenkin korjata *DCC-GARCH-CoVaR*-mallin puitteissa asettamalla tuotot noudattamaan normaalijakaumaa paksuhäntäisempää jakaumaa. Myös mallien parametrien estimoimisessa hyödynnettäviä *AR*-, *GARCH*- ja *DCC*-malleja voidaan muuttaa niin, että mallien muodot asetetaan pankkikohtaisesti tilastollisia menetelmiä hyödyntäen, jolloin aikasarjamallien ominaisuudet potentiaalisesti paranevat. Tämän lisäksi erilaiset jo olemassa olevat *VaR*-mallit antavat kiinnostavan pohjan laajentaa *CoVaR*-mitan mallinnusta teknisesti yhä monimuotoisempiin suuntiin.

LÄHTEET

- Abad, Pilar – Lobež, Camen – Muela, Sonia Benito (2013) A comprehensive review of value at risk methodologies. *Spanish Review of Financial Economics*, Vol. 12 (1), 15–32.
- Acerbi, Carlo – Tasche, Dirk (2002) On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 26 (7), 1487–1503.
- Acharya, Viral – Engle, Robert – Richardson, Matthew (2012) Capital shortfall: A new approach to ranking and regulating systemic risks. *American Economic Review*, Vol. 102 (3), 59–64.
- Acharya, Viral – Pedersen, Lasse H. – Philippon, Thomas – Richardson, Matthew (2017) Measuring systemic risk. *The Review of Financial Studies*, Vol. 30 (1), 2–47.
- Adrian, Tobias – Brunnermeier, Markus (2016) CoVaR. *American Economic Review*, Vol. 106 (7), 1705–1741.
- Alexander, Carol (2008) *Market risk analysis: Value at risk models*. 4. p. John Wiley & Sons, Chichester.
- Artzner, Philippe – Delbaen, Freddy – Eber, Jean-Marc – Heath, David (1999) Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, Vol. 9 (3), 203–228.
- Barone-Adesi, Giovanni – Giannopoulos, Kostas – Vosper, Les (2002) Backtesting derivative portfolios with filtered historical simulation (FHS). *European Financial Management*, Vol. 8 (1), 31–58.
- Bauwens, Luc – Laurent, Sébastien – Rombouts, Jeroen (2006) Multivariate GARCH models: A survey. *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 21 (1), 79–109.
- Benoit, Sylvain – Colliard, Jean-Edouard – Hurlin, Christophe – Pérignon, Christophe (2017) Where the risks lie: A survey on systemic risk. *Review of Finance*, Vol. 21 (1), 109–152.

- Bernardi, Mauro – Maruotti, Antonello – Petrella, Lea (2017) Multiple risk measures for multivariate dynamic heavy-tailed models. *Journal of Empirical Finance*, Vol. 43, 1–32.
- BIS, FSB ja IMF (2009) = *Bank for International Settlements, Financial Stability Board ja International Monetary Fund* (2009) Guidance to assess the systemic importance of financial institutions, markets and instruments: Initial considerations. Report to the G-20 finance ministers and central bank governors. < <https://www.imf.org/external/np/g20/pdf/100109.pdf>>, haettu 18.4.2020.
- Bollerslev, Tim (1986) Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, Vol. 31 (3), 307–327.
- Bollerslev, Tim (1990) Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 72 (3), 498–505.
- Brownlees, Christian – Engle, Robert (2017) SRISK: A conditional capital shortfall measure of systemic risk. *The Review of Financial Studies*, Vol. 30 (1), 48–79.
- Bullard, James – Neely, Christopher – Wheelock, David (2009) Systemic risk and the financial crisis: A primer. *Federal reserve bank of ST. Louis: Review*, Vol. 91 (5), osa 1, 403–417.
- Caporin, Massimiliano – McAleer, Michael (2013) Ten things you should know about the dynamic conditional correlation representation. *Econometrics*, Vol. 1 (1), 115–126.
- Chen, Chen – Iyengar, Garud – Moallemi, Ciamac (2013) An axiomatic approach to systemic risk. *Management Science*, Vol. 59 (6), 1373–1388.
- Cheng, Wan-Hsiu – Hung, Jui-Cheng (2011) Skewness and leptokurtosis in GARCH-typed VaR estimation of petroleum and metal asset returns. *Journal of Empirical Finance*, Vol. 18 (1), 160–173.
- Christoffersen, Peter (1998) Evaluating interval forecast. *International Economic Review*, Vol. 39 (4), 841–862.

- Daniélsson, Jón – Embrechts, Paul – Goodhart, Charles – Keating, Con – Muennich, Felix – Renault, Olivier – Shin, Hyun Song (2001) *An academic response to Basel II*. LSE Financial Markets Group, an ESRC Research Centre. Special paper series, nro. 130.
- Diebold, Francis – Schuermann, Til – Strouhair, John (2000) Pitfalls and opportunities in the use of extreme value theory in risk management. *The Journal of Risk Finance*, Vol. 1 (2), 30–35.
- ECB (2009) = *European Central Bank* (2009) Financial stability review: December 2009. <<https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/other/financialstabilityreview200912en.pdf??7e1073aa7dd961b1248c19c2fecbf696>>, haettu 26.4.2020.
- Engle, Robert (1982) Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, Vol. 50 (4), 987–1007.
- Engle, Rober (2002) Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 20 (3), 339–350.
- Engle, Robert – Manganelli, Simone (2004) CAViaR: Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 22 (4), 367–381.
- FSB (2010) = *Financial Stability Board* (2010) Reducing the moral hazard posed by systemically important financial institutions: FSB recommendations and time lines. <http://www.fsb.org/wp-content/uploads/r_101111a.pdf>, haettu 18.4.2020.
- Freixas, Xavier – Laeven, Luc – Peydró, José-Luis (2015) *Systemic risk, crises, and macroprudential regulation*. The MIT Press, Cambridge.
- Fuller, Wayne (1996) *Introduction to statistical time series*. 2. uud. p. John Wiley & Sons, New York.
- Föllmer, Hans – Schied, Alexander (2002) Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastics*, Vol. 6 (4) 429–447.

Gerber, Hanser U. (1997) *Life insurance mathematics*. 3. p. Springer, Berlin.

Girardi, Giulio – Ergün, Tolga (2013) Systemic risk measurement: Multivariate GARCH estimation of CoVaR. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 37 (8), 3169–3180.

Hansen, Lars Petersen (2014) Challenges in identifying and measuring systemic risk. Teoksessa: *Risk topography: Systemic risk and macro modelling*, toim. Markus Brunnermeier – Arvind Krishnamurthy, 15–30. University of Chicago Press, Chicago.

Hull, John (2015) *Options, futures and other derivatives*. 9. p. Pearson Education, Boston.

Hull, John – White, Allen (1999) Incorporating volatility updating into the historical simulation method for VaR. *Journal of Risk*, Vol. 1 (1), 1–19.

Jorion, Philippe (2001) *Value at risk: The new benchmark for managing financial risk*. 2. p. McGraw-Hill, New York.

Jorion, Philippe (2009) Risk management lessons from the credit crisis. *European Financial Management*, Vol. 15 (5), 923–933.

Kupiec, Paul (1995) Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The Journal of Derivatives*, Vol. 3 (2), 73–84.

Li, Qi – Racine, Jeffrey (2008) Nonparametric estimation of conditional CDF and quantile functions with mixed categorical and continuous data. *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 26 (4), 423–343.

Ljung, Greta – Box, George (1978) On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, Vol. 65 (2), 297–303.

Lüthkepohl, Helmut (2005) *New introduction to multiple time series analysis*. Springer, Berliini.

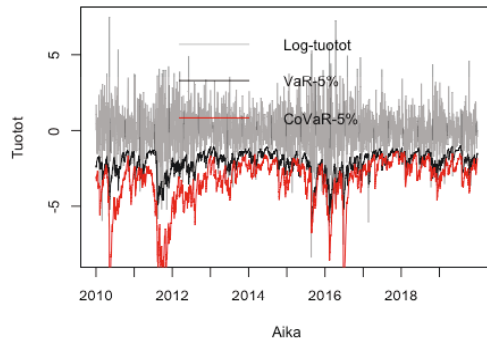
Mainik, Georg – Schaanning, Eric (2012) *On dependence consistency of CoVaR and some other systemic risk measures*. < <https://arxiv.org/pdf/1207.3464.pdf>>, haettu 18.4.2020.

- McNeil, Alexander – Frey, Rüdiger – Embrechts, Paul (2005) *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*. Princeton University Press, New Jersey.
- McLeod, A. I. – Li, W. K. (1983) Diagnostic checking ARMA time series models using squared-residual autocorrelations. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 4 (4) 269–273.
- Mitnik, Stefan – Paoletta, Marc (2000) Conditional density and value-at-risk prediction of Asian currency exchange rates. *Journal of Forecasting*, Vol. 19 (4), 313–333.
- Reiss, Rolf-Dieter – Thomas, Michael (2007) *Statistical analysis of extreme values*. 3. p. Springer, Berlin.
- RiskMetrics™ – Technical document* (1996) J.P.Morgan/Reuters
<<https://www.msci.com/documents/10199/5915b101-4206-4ba0-ae2-3449d5c7e95a>>, haettu 18.4.2020.
- Shealter, Simon – Marron, James (1990) Kernel quantile estimator. *Journal of the American Statistical Association*, Vol.85 (410), 410–416.
- Silva, Walmir – Kimura, Herbert – Sobreiro, Vinicius Amorim (2017) An analysis of the literature on systemic financial risk: A survey. *Journal of Financial Stability*, Vol. 28, 91–114.
- Summer, Martin (2003) Banking regulation and systemic risk. *Open Economies Review*, Vol. 14 (1), 43–70.
- Sweeting, Paul (2011) *Financial enterprise risk management*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Tsay, Ruey (2005) *Analysis of financial time series*. 2. p. John Wileys & Sons, New Jersey.
- V-Lab* (2020) <<https://vlab.stern.nyu.edu/welcome/srisk>>, haettu 26.4.2020.

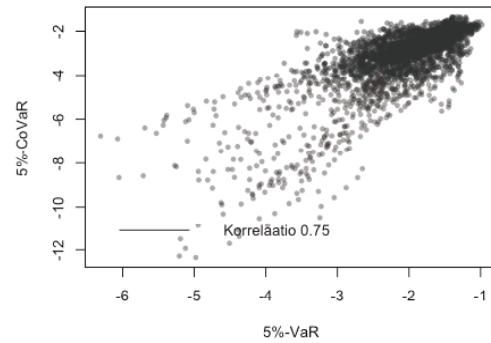
Zhang, Qi – Vallascas, Francesco – Keasey, Kevin – Cai, Charlie (2015) Are market-based measures of global systemic importance of financial institutions useful to regulators and supervisors. *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 47 (7), 1403–1442.

LIITE A: PANKKIEN COVaR-MITTOJEN TULOKSET

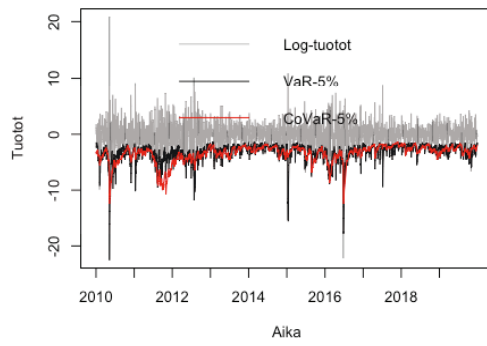
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Hsbc_Holdings



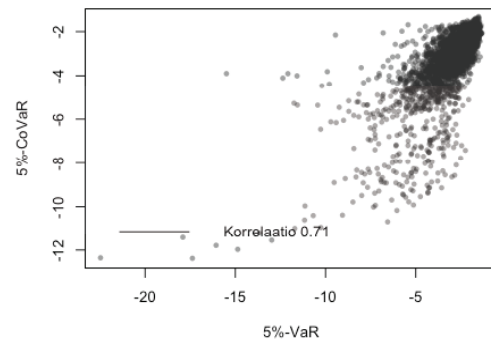
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Hsbc_Holdings



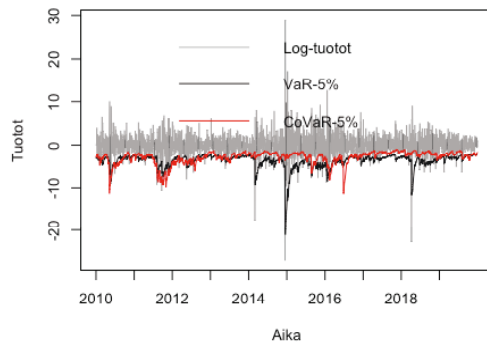
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Banco_Santander



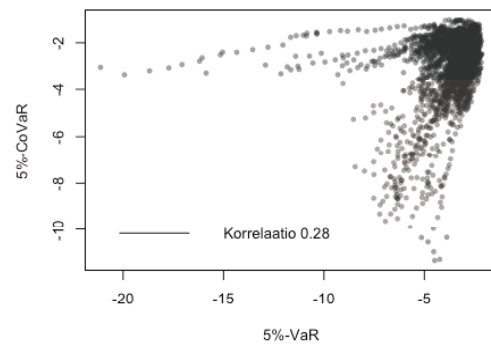
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Banco_Santander



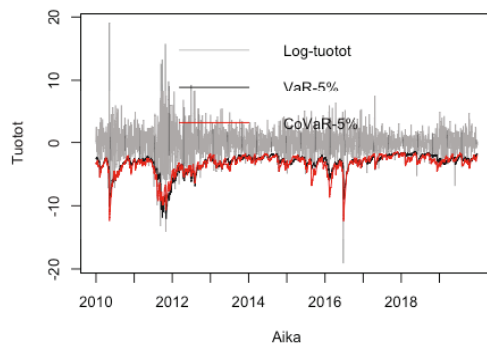
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Sberbank



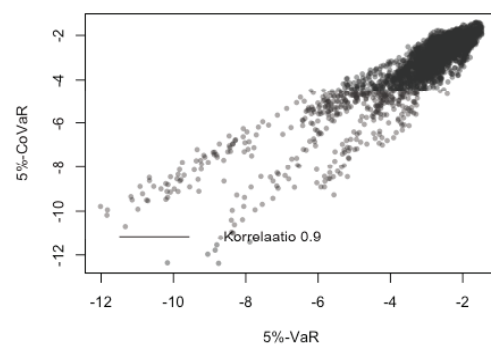
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Sberbank



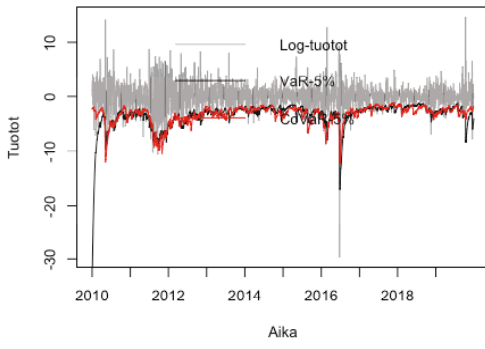
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Bnp_Paribas



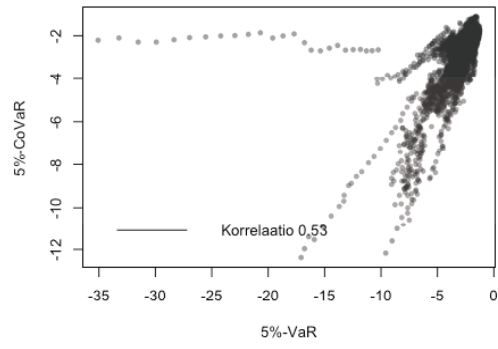
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Bnp_Paribas



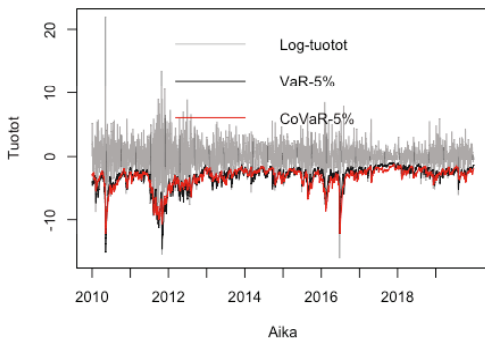
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Lloyds_Banking



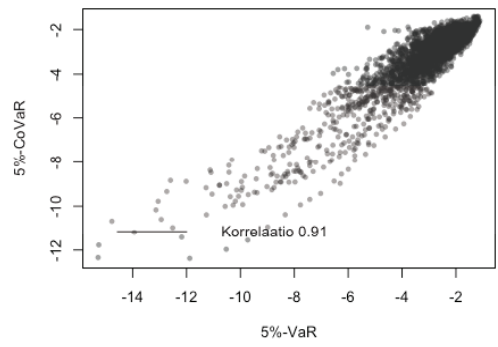
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Lloyds_Banking



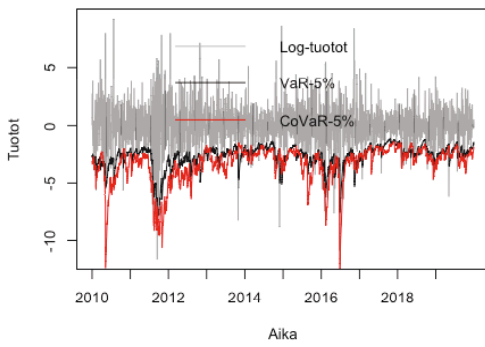
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Ing



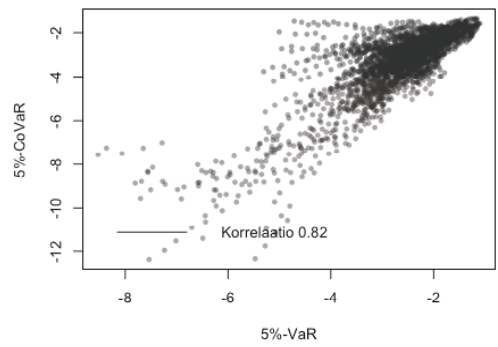
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Ing



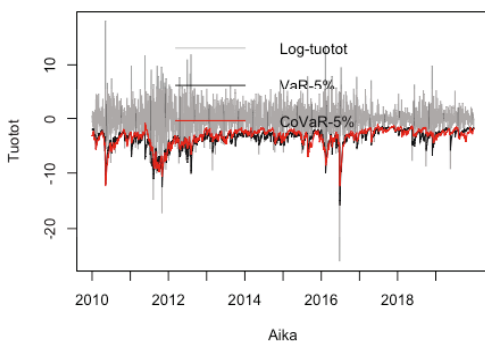
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Ubs



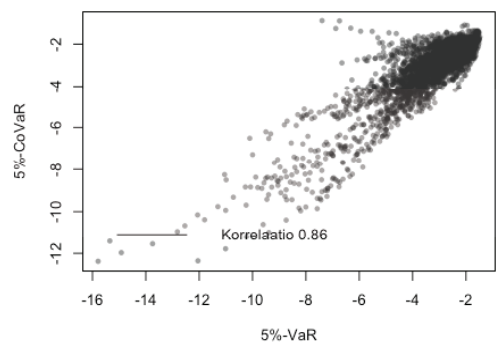
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Ubs



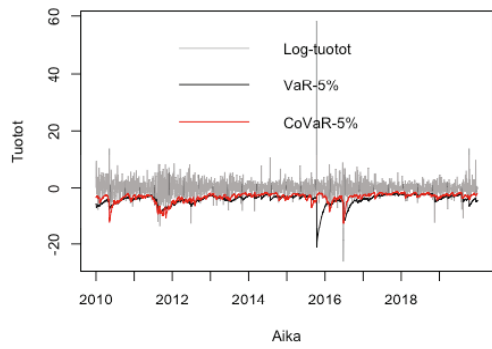
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Intesa_Sanpaolo



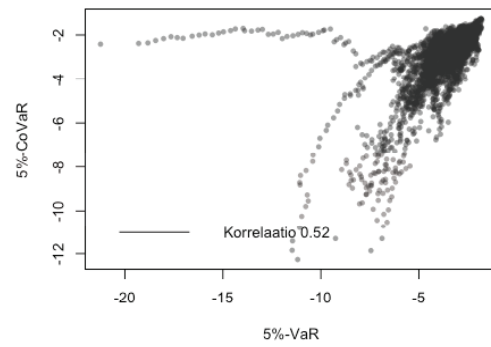
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Intesa_Sanpaolo



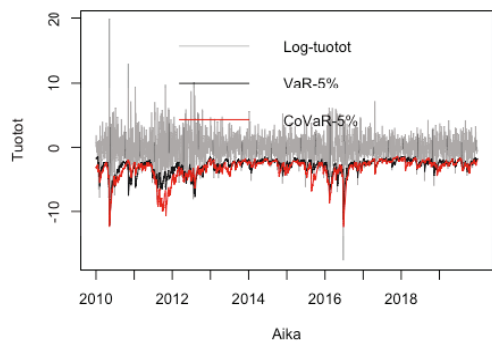
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Royal_Bank_of_Scotland



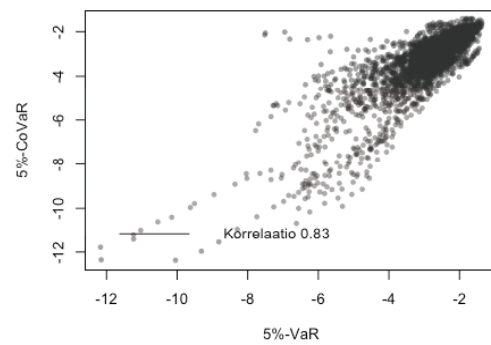
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Royal_Bank_of_Scotland



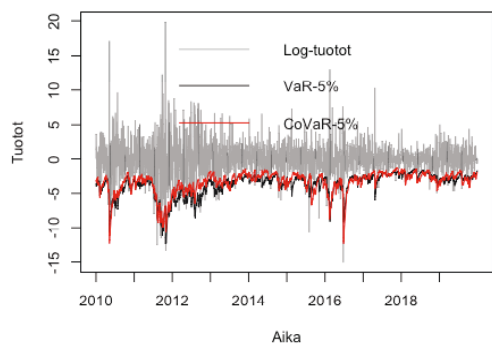
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Banco_Bilbao



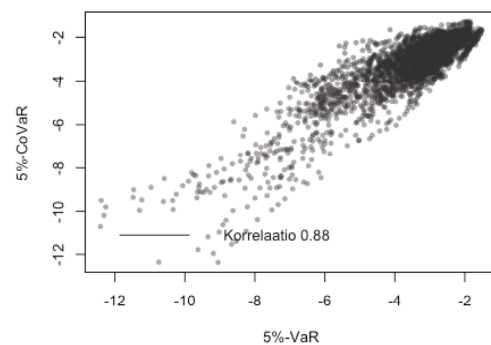
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Banco_Bilbao



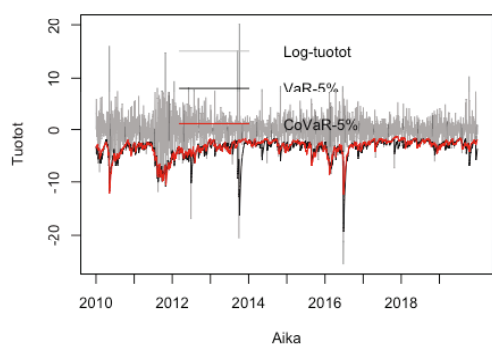
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Credit_Agricole



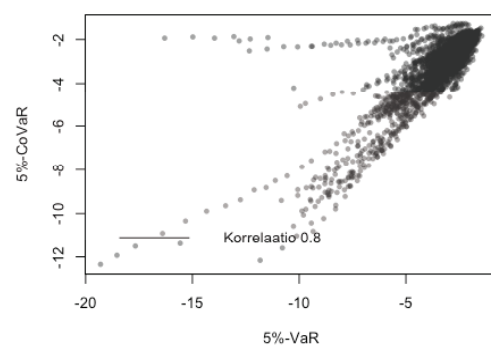
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Credit_Agricole



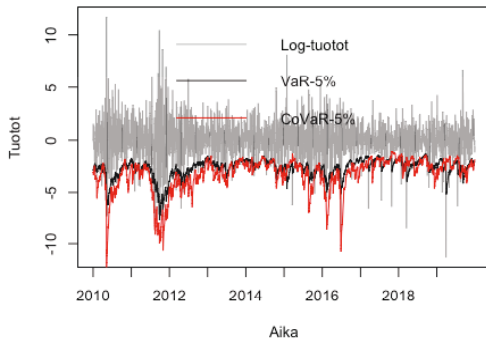
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Barclays



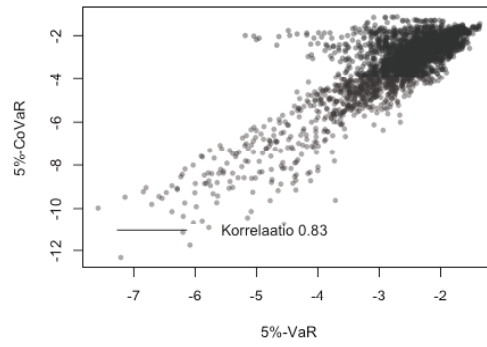
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Barclays



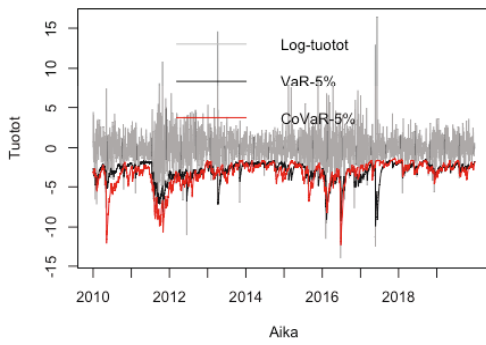
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Nordea



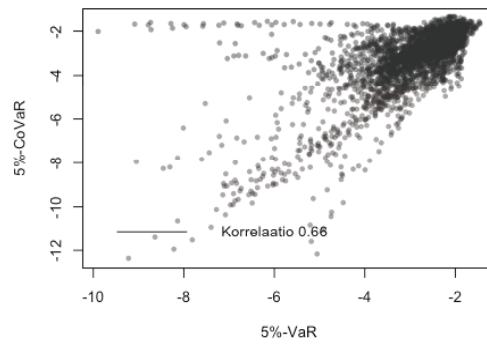
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Nordea



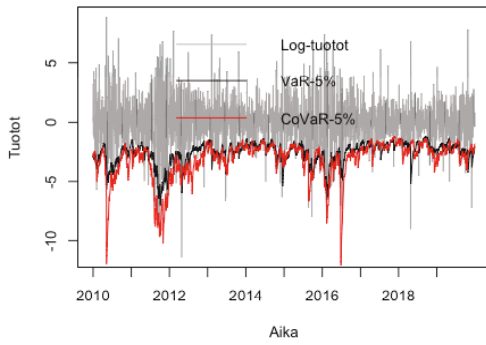
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Credit_Suisse



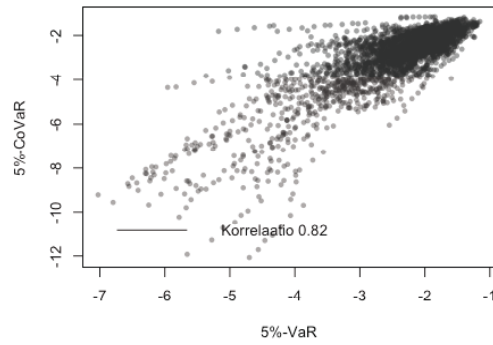
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Credit_Suisse



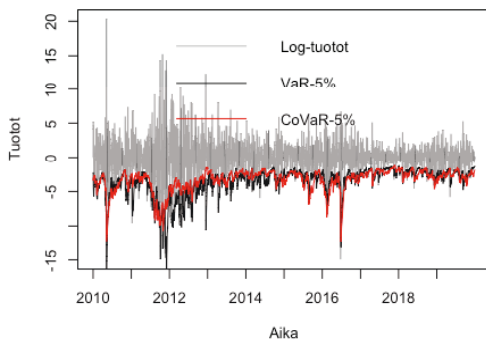
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Dnb



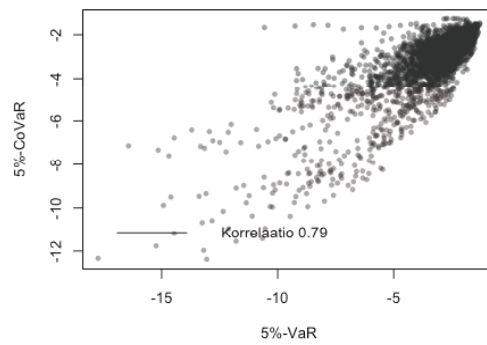
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Dnb



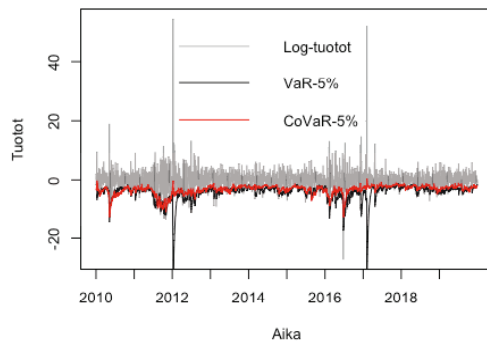
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Kbc



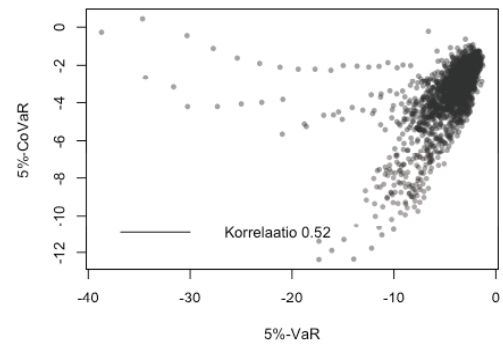
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Kbc



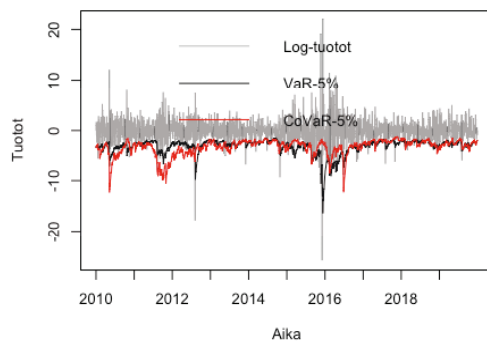
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Unicredit_Spa



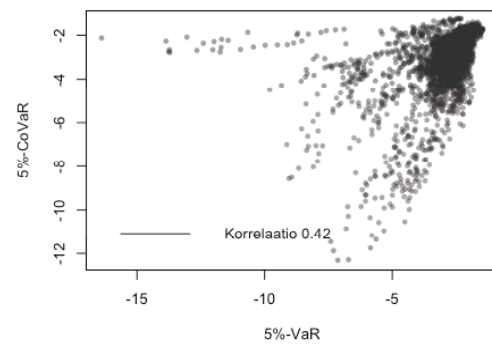
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Unicredit_Spa



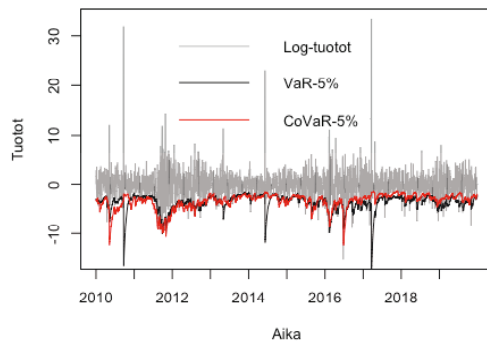
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Standard_Chartered



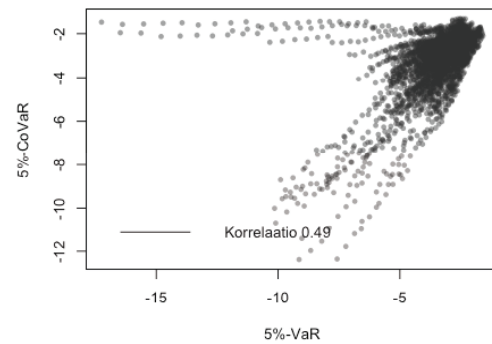
5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Standard_Chartered



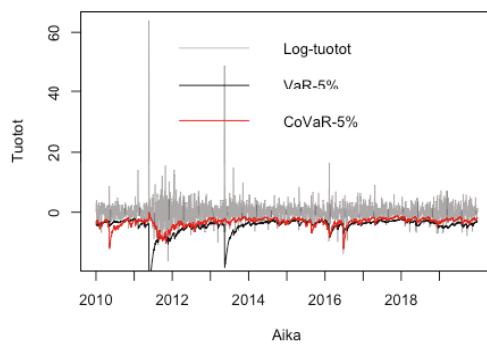
5%-VaR ja 5%-CoVaR, Deutsche_Bank



5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Deutsche_Bank



5%-VaR ja 5%-CoVaR, Commerzbank



5%-VaR vs. 5%-CoVaR, Commerzbank

