



Turun yliopisto
University of Turku

YRITYSTEN KOKONAISINVESTOINNIT AIKASARJAMENETELMIN

Taloustieteen
pro gradu -tutkielma

Laatija:
Sami Paavola

Ohjaaja:
KTM Timo Virtanen

12.10.2020
Turku



Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -järjestelmällä.

SISÄLLYS

1	JOHDANTO	7
2	TAUSTAA	11
2.1	KIRJALLISUUS	11
2.2	IMPLISIITTISET INVESTOINTIMALLIT	16
2.3	DYNAAMISET INVESTOINTIMALLIT	19
3	BVAR-MALLI	23
3.1	REUNAUSKOTTAVUUS	25
3.2	METROPOLIS-HASTINGS -ALGORITMI	27
3.3	MINNESTOTAN PRIORI	30
3.4	IMPULSSIVASTEET JA VARIANSSIHAJOTELMA	32
4	METODOLOGIA	34
4.1	TUTKIMUSAINEISTO	34
4.2	TUTKIMUSMALLI	38
4.3	PRIORIEN JA PARAMETRIEN ALKUARVOJEN VALINTA	42
4.4	KÄYTETYT R-OHJELMOINTIKIELEN PAKETIT	44
5	TULOKSET	45
6	PÄÄTELMÄT	61
	LÄHTEET	62

KUVIOT

Kuvio 1	Muuttujien logaritmisoidut aikasarjat	36
Kuvio 2	Hyperparametrit BVAR(4) 1	48
Kuvio 3	Hyperparametrit BVAR(4) 2	49
Kuvio 4	Etukertoimien jakaumat BVAR(4) 1	50
Kuvio 5	Etukertoimien jakaumat BVAR(4) 2	51
Kuvio 6	Impulssivasteet	54
Kuvio 7	Mallien sovitteet ja ennusteet	58
Kuvio 8	Residuaalit	59
Kuvio 9	Autokorrelaatiokuvaajat	60

TAULUKOT

Taulukko 1	Granger-kausaisuustestin tulokset	37
Taulukko 2	<i>BVAR(4)</i> 1-mallin tulokset	46
Taulukko 3	<i>BVAR(4)</i> 2-mallin tulokset	47
Taulukko 4	<i>VAR(4)</i> -mallin tulokset	53
Taulukko 5	Varianssijotelmien arvot	56
Taulukko 6	Keskineliövirheen neliöjuurten arvot	57

1 JOHDANTO

Yrityssektorin tuotannolliset investoinnit romahtivat Suomessa finanssikriisin seurauksena, minkä jälkeen yrityssektori ajautui lähes vuosikymmenen kestäneeseen investointilamaan. Investointilaman pitkäkestoisuudesta johtuen tuotannolliseen kapasiteettiin on panostettu aiempaa vähemmän, minkä pelätään vaikuttavan yritysten kilpailukykyyn tulevaisuudessa. Edes Euroopan Keskuspankin (EKP) epätavanomaiset finanssipoliittiset toimet eivät riittäneet nostamaan yritysten tuotannollisia investointeja Suomessa. Investointilaman syyt eivät ole ilmeiset, sillä vaikutuskanavat joiden uskottiin vaikuttavan investointeihin, eivät toimineet odotetusti.

EKP laski ohjauskoron vuosien 2008-2014 aikana nolnaan ja aloitti massiivisen omaisuuserien osto-ohjelman vuonna 2015, mihin sisältyi myös yritysten velkakirjojen ostot vuodesta 2016 alkaen. Toimenpiteiden tarkoitus oli torjua deflaation uhkaa ja toisaalta auttaa yrityksiä investoimaan tuotannolliseen pääoman. Epätavanomaiset toimet helpottivat rahoituksen saatavuutta ja laskivat investointien kustannuksia pienempien rahoituskustannusten muodossa. Tästä huolimatta yritysten nimelliset investoinnit saavuttivat Finanssikriisiä edeltäneen tason vasta vuosikymmen myöhemmin vuonna 2018.

Pelkästään yritysten investoinnit eivät ole kärsineet aneemisesta kasvusta Finanssikriisin jälkeen, vaan sama voidaan todeta myös yritysten tuotannon osalta. Vasta vuoden 2018 toisella neljänneksellä nimellinen tuotannon arvonnisa kipusi vastaavalle tasolle, josta se syöksyi alas Finanssikriisin seurauksena. Yritysten investointihaluttomuus ei yllätä, jos tuotannon romahtaminen johtuu yleisestä kysynnän heikkoudesta. Havaittu kehitys antaa tukea tällaiselle näkemykselle, sillä investointien ja tuotannon välistä suhdetta kuvaava investointiaste ei ole muuttunut merkittävästi 1999Q1-2019Q4 välisenä aikana.

Tiedämme, että investoinnit ja tuotanto riippuvat toisistaan, mutta kumpi ohjaa toista? Vaikutussuhteet eivät ole kovin ilmeiset edes teorian tasolla, ja teoriasta riippuen tekijöitä painotetaan hyvin eri tavoin: Keynesiläiset teoriat painottavat kysyntää investointeja ohjaavana tekijänä, jolloin investointien tulisi reagoida tuotannon muutoksiin. Neoklasinen teoria sen sijaan painottaa tuotannontekijöiden suhteellisten hintojen vaikutusta investointeihin, jolloin tuotannon kuuluisi seurata investointeja. Todellisuus ei välttämättä ole näin yksiselitteinen, sillä makrotaloudellisten aikasarjojen tapauksessa molempiin suuntiin kulkevat vaikutussuhteet ovat mahdollisia. Yhden yrityksen investointi voi merkitä investointihyödykkeitä toimittavalle yritykselle tuotannon lisäystä, jolloin koko yrityssektorin kokonaisinvestoinnit ja kokonaistuotanto voivat olla yhteisintegroituneita.

Tässä tutkielmassa yritysten investointikehitystä tutkitaan näiden kahden teorian osoittaman tekijän avulla. Tutkimuksessa kysyntää mallinnetaan yritysten tuottamalla arvonnisällä, joka kertoo yritysten myymän lopputuotteen tai palvelun euromääräisen arvon tietynä ajankohtana. Tuotannontekijöiden suhteellisten hintojen vaikutusta kuvaavaa pääoman varjohintaa ei kuitenkaan havaita sellaisenaan, ja se täytyy approksimoida muilla tavoin. Hayashi (1982) osoitti, että pääoman varjohinta vastaa tietyin oletuksin pääoman

markkinahinnan ja pääomakannan uushakintahinnan välistä suhdetta, joka tunnetaan paremmin James Tobinin mukaan nimettynä Tobinin Q:na tai keskimääräisenä Q:na. Keskimääräinen Q ei ole kuitenkaan osoittautunut kovin hyväksi investointien selittäjäksi, mitä on perusteltu sillä, että Hayashi (1982) käyttämät oletukset harvoin pitävät todellisuudessa paikkaansa, ja että ne ovat lähinnä teoreettinen artifakti. Tästä huolimatta Caballero ja Leahy (1996) argumentoivat, että keskimääräistä Q:ta on perusteltua käyttää investointien selittäjänä, sillä se sisältää investoinnin kannattavuuteen liittyvää tietoa.

Yritysten investointikehitystä tutkitaan tutkielmassa kolmen muuttujan avulla. Tutkimuksen muuttujat on valittu teorian pohjalta, mutta ne eivät täysin noudata teorian implikoimia muotoja. Esimerkiksi pääomakantaa ei käytetä tutkimuksessa, mistä syystä emme voi tutkia keskimääräisen Q:n vaikutusta investointeihin. Sen sijaan tutkimme tuotannon ja pääoman markkina-arvojen tasojen vaikutuksia investointien tasoon. Ajatuksena on, että nämä kolme muuttujaa takaavat tietyn yhteisriippuvuuden, sillä pitkässä juoksussa olisi hankala perustella, että yksittäinen muuttuja voisi kehittyä täysin irrallaan mallin muista muuttujista. Investoinnit riippuvat lopulta tavalla tai toisella tuotannon tasosta, koska tuotannon taso määrittelee investointeihin allokoitavien varojen määrän tuotantomenojen ja voitonjaon jälkeen, joko suoraan tai välillisesti. Tuotanto määrittelee pitkässä juoksussa myös osakkeiden arvostuksen, koska osakkeetkaan eivät voi täysin irtautua fundamenteista. Toisaalta investoinnit määräävät reaalisen tuotannon rajat ja osakeannit antavat yrityksille keinot rahoittaa toimintaansa keräämällä omaa pääomaa. Edellä esitetyn perusteella on hankala osoittaa, miten muuttujien välinen dynamiikka todellisuudessa toimii. Doms ja Dunne (1998) esittävät empiirisessä tutkimuksessaan, joka kattoi hyvin laajan yritysaineiston, investointien olevan hyvin könttämäisiä. Investoinnit ovat tyypillisemmin suuria suhteessa liikevaihtoon ja ajoittuvat usein useammalle vuodelle, minkä vuoksi edellisen periodin investoinnit tyypillisesti selittävät kuluvan periodin investointeja. Tutkielmassa kiinnostus on siinä, kuinka paljon näiden kolmen muuttujan mennyt kehitys auttaa kuvaamaan nykyistä ja tulevaa investointikehitystä.

Vektoriautoregressiiviset (VAR) mallit ovat osoittautuneet hyväksi työkaluiksi oheisen kaltaisissa tilanteissa, joissa ollaan kiinnostuneita muuttujien välisestä dynamiikasta. Vektoriautoregressiivisistä malleista on kehittynyt hyvin yleinen työkalu makrotaloustieteellisessä tutkimuksessa Christopher Simsin esiteltyä ne urauurtavassa työssään *Macroeconomics and Reality* (Sims, 1980). VAR-malleilla voidaan tutkia hyvin vapaasti aikasarjamuuttujien ominaisuuksia, keskinäisiä riippuvuuksia ja dynaamisia vaikutuksia. VAR-malissa selitettävää muuttujaa selitetään sen omilla sekä mallin muiden muuttujien viipeiden avulla. Lähtökohtaisesti VAR-mallit pitävät kaikkia mallin muuttujia endogeenisinä, mikä mahdollistaa monimutkaisten vaikutussuhteiden ja rikkaan dynamiikan kuvaamisen.

VAR-malleilla on kuitenkin omat heikkoutensa ja yksi niistä on yliparametrisointi. Yliparametrisointi tarkoittaa käytännössä tilannetta, jossa mallin selitettävää muuttujaa selitetään tarpeettoman monella selitettävällä muuttujalla. VAR-malleissa yliparametri-

sointi voi johtua pelkästään siitä, että käytettävät aikasarjat sisältävät vähän havaintoja, mikä on tyypillistä esimerkiksi vuosittaisille ja neljännesvuosittaisille taloudellisille aikasarjoille. Ongelmaa pahentaa entisestään, jos samaan aikaan on tarkoitus tutkia montaa muuttujaa. Tyypillisesti yliparametrisoidun mallin sovite on erittäin hyvä otoksessa, mutta otoksen ulkopuolinen osumatarkkuus voi kuitenkin jäädä hyvin heikoksi, jolloin estimoitu malli ei ole selitysvoimainen otoksen ulkopuolella. Yliparametrisointi johtuu estimoitavien parametrien määrästä, ja tyypillisesti jopa pienissä VAR-malleissa on paljon estimoitavia parametrejä. Useita parametreja estimoidessa päädytään estimoimaan myös paljon kohinaa, mistä syystä mallit voivat jäädä epätarkasti estimoiduiksi (Kilian ja Lütkepohl, 2017).

Koska VAR-mallit estimoidaan yleensä lyhyistä aikasarjoista, moni VAR-mallin käyttäjä on valmis lisäämään malliin rakennetta yliparametrisoinnin vaikutusten vähentämiseksi. Parametrien kutistaminen kohti tiettyjä arvoja voi auttaa vähentämään estimaattoreihin liittyvää varianssia. Litterman (1980) esitti Bayesilaisen vektori-autoregression (BVAR) keinona hallita yliparametrisointiin liittyvää problematiikkaa. Bayesilaisessa vektori-autoregressiossa malliin tuodaan lisärakennetta niin kutsutun priorin muodossa, mikä kuvaa tutkijan uskomuksia aineistosta. Juuri priorien avulla mallin parametreille voidaan pakottaa lisärakennetta, jolla voidaan vähentää estimoitavien parametrien varianssia ja näin myös yliparametrisoinnin riskiä.

Bayesilaisella metodologialla on myös etunsa, kun halutaan tutkia tasoissa mitattuja aikasarjoja. Tyypillisesti VAR-mallin muuttujilta odotetaan stationaarisuutta, mikä toteutuu harvoin taloudellisten aikasarjojen tapauksessa. Yksikköjuuren omaavat aikasarjat saadaan toki stationaarisiksi jollain matemaattisella muunnoksella, joista muuttujien differointi on mahdollisesti yleisin. Tällöin tutkimme tasomuuttujien sijaan muuttujien muutosaikasarjoja. Sims argumentoi, että differoitaessa menetämme muuttujien tasoihin liittyvän informaation, eikä näillä perusteilla differointia tulisi suorittaa. Muuttujien stationaarisuuden edellyttäminen VAR-malleissa on herättänyt paljon keskustelua, eikä asian suhteen vallitse yksimielisyyttä. Sims (1989) esitti, että ei-stationaarisia muuttujia voidaan tutkia BVAR-malleilla, koska niissä ei-stationaarisuus ei vaikuta parametriestimaatteihin, toisin kuin tavanomaisissa VAR-malleissa. Toisaalta Phillips ja Durlauf (1986), Stock (1987) ja Sims, Stock ja Watson (1990) esittivät, että tavanomaisen VAR-mallin PNS-estimaatit tuottavat konsistentit parametriestimaatit yhteisintegroituneille muuttujille, jolloin VAR-malli ei-stationaarisille muuttujille on validi vaihtoehto.

Tutkielmassa yritysten investointeja selitetään kahdella BVAR-mallilla, joissa käytetään Minnesotan prioria hallitsemaan aikasarjojen persistenttiyttä. BVAR-mallit eroavat toisistaan priorin tiukkuuteen suhteen, mikä vaikuttaa mallien tuloksiin ja tuloksista tehtävään päättelyyn. Tämä tehdään siitä syystä, ettemme tiedä ennalta mikä priorii kuvaisi parhaiten tutkittavaa ilmiötä, joten tutkimme aihetta useammalla mallilla. BVAR-mallien rinnalla käytetään tavanomaista VAR-mallia viitemallina, jota vasten verrataan BVAR-mallien implikoimia tuloksia. Tutkimusasetelman kannalta BVAR-mallit tarjoavat luon-

tevamman tavan lähestyä aihetta kuin tavanomaiset VAR-mallit, joiden käyttöön liittyy useita ongelmia käytettäessä lopputyön kaltaista aineistoa. Mallien robustisuutta ja paremmuutta tutkitaan suhteessa niiden ennustekykyyneen, eli siihen kuinka tarkasti ne kykenevät ennustamaan bruttoinvestointien tulevaa kehitystä.

BVAR-mallin tuloksia voidaan tulkita tavanomaisten VAR-mallien tapaan, mutta yksittäisistä etukertoimista tehtävää päättelyä ei voida tehdä vastaavalla tavalla. Bayesilaisessa päättelyssä yksittäiselle etukertoimelle ei ole olemassa tilastollista merkitsevyyttä frekventistisessä mielessä, sillä etukertoimet ovat satunnaisia. Bayesilaisessa mallissa etukertoimien arvot lähestyvät nopeasti nollaa, jos ne eivät ole selitysvomaisia. Muutenkin VAR-mallien etukertoimista tehtävä tulkinta voi osoittautua haastavaksi, sillä VAR-malleissa kaikki muuttujat riippuvat toisistaan, milloin yksittäiset etukertoimet kertovat rajoitetusti tietoa shokin vaikutuksista tutkittavaan systeemiin. Muuttujien välistä dynamiikka voidaan esittää impulssivasteilla, joiden avulla voidaan tutkia yhden muuttujan häiriötermiin kohdistetun shokin vaikutusta systeemin muihin muuttujiin. Impulssivasteet johdetaan mallin etukertoimista, joten tietyin rajoituksin impulssivasteiden tulkinta on analogista etukertoimista tehtävään päättelyyn.

Seuraavissa luvuissa esitetään lyhyesti valittuihin muuttujiin liittyvää teoreettista kirjallisuutta sekä empiirisiä tuloksia. Bayesilaiseen vektoriautoregressioon liittyvää metodologiaa käydään läpi sen verran, mikä on perusteltua tämän tutkimuksen puitteissa. Kilian ja Lütkepohl (2017) sekä Lütkepohl (2005) tarjoavat huomattavasti kattavammat kuvaukset bayesilaisista menetelmistä, mitä tässä työssä voidaan esittää. Myös tutkimuksessa käytettävä aineisto ja aineiston käsittely käydään läpi seuraavissa luvuissa. Viimeisissä luvuissa tulkitaan tutkimusmallien implikoimat tulokset, jonka pohjalta johdetaan tutkimukseen liittyvä loppupäätelmä.

2 TAUSTAA

2.1 KIRJALLISUUS

Yritysten investoinnit syntyvät tuotannollisesta tarpeesta, jossa investoinnit määräävät tuotannollisen kapasiteetin määrän, laadun sekä potentiaalisen tuotannon tason. Tuotanto ja pääoma liittyvät erottamattomasti toisiinsa, mutta investointiteoriat painottavat eri tekijöitä investointeja ohjaavina tekijöinä. Chirinko (1993) esitti hyvän yhteenvedon eri investointimalleista ja tekijöistä, joilla investointeja on pyritty selittämään. Chirinko jakoi mallit karkeasti kahteen eri luokkaan – implisiittisiin ja eksplisiittisiin. Jako implisiittisiin ja eksplisiittisiin malleihin perustuu siihen, miten investointidynamiikka sisällytetään osaksi mallia.

Implisiittisissä malleissa investointeihin liittyvä dynamiikka tuodaan mallin ulkopuolelta, kun eksplisiittisissä malleissa dynamiikka syntyy mallin sisällä. Karkeasti voidaan sanoa, että joustavat akseleraattorimallit sekä Jorgensonin johtama neoklassinen investointimalli ovat tyypillisiä esimerkkejä implisiittisistä malleista, joissa dynamiikka lisätään malliin erilaisten viiverakenteiden muodossa. Ekspiliittisinä malleissa investointidynamiikka sen sijaan syntyy mallin sisällä asennuskustannusten (*eng. Adjustment Costs*) avulla. Tyypillisiä esimerkkejä eksplisiittisistä investointimalleista ovat q-mallit sekä investoinnin Euler yhtälöt.

Ensimmäiseksi on syytä käsitellä akseleraattorimallit, jotka ovat investointimalleista vanhimpia ja minkä juuret ulottuvat aina 1900-luvun ensimmäisille vuosikymmenille saakka. Vaikka kyseiset mallit ovat vanhoja sekä suhteellisen yksinkertaisia, ne ovat siitä huolimatta kyenneet selittämään investointeja monimutkaisempia eksplisiittisiä malleja paremmin Chirinko (1993). Akseleraattorimalleissa kysyntä ja tuotanto kiihdyttävät yritysten investointeja, kun yritykset kasvattavat tuotannollista kapasiteettia reagoidakseen paremmin kysynnän muutoksiin. Yksinkertaisessa akseleraattorimallissa investoinnit ovat ainoastaan tuotannon tason muutoksen funktio, mutta yleinen tapa on ollut lisätä tuotannon viipeet vastaamaan paremmin pääoman sopeutumisprosessia (Chenery, 1952). Joustavissa akseleraattorimalleissa investoinnit riippuvat ainoastaan tuotannon tason muutoksista ja muutosten viipeistä. Näissä malleissa hintatekijöillä tai korolla ei ole suoraan merkitystä investointeihin, vaan ne operoivat tuotannon kautta, sillä tuotannon muutosten oletetaan sisältävän myös relevanttien hinta- ja kustannustekijöiden vaikutukset. Akseleraattorimallit eivät varsinaisesti pohjautu mikrotaloustieteelliselle pohjalle, vaan niissä muutujien väliset riippuvuudet johdetaan makrotaloudellisista relaatioista. Akseleraattorimalleja on kritisoitu juuri täsmällisen mikrotaloudellisen rakenteen puutteesta tai heikkoudesta, minkä vuoksi ne saivat tehdä tilaa neoklassisille investointimalleille 1970-luvun taitteessa.

Neoklassiset investointimallit huomioivat suhteellisten hintojen vaikutukset investointipäätöksissä, joille ei aikaisemmissa investointimalleissa ollut täsmällistä roolia.

Neoklassiset investointimallit johdetaan yksittäisen yrityksen pohjalta, jolloin niillä on myös koherentti mikrotaloustieteellinen pohja, toisin kuin akseleraattorimalleilla. Neoklassisessa investointikirjallisuudessa yrityksen toimintaa ohjaa voiton tavoittelu tai tarkemmin voittojen maksimointi. Yritys valitsee tuotannon sekä tuotannossa käytettävän pääoman tasot, jotka maksimoivat yrityksen diskontatut tulevaisuuden voitot. Tällöin yritys valitsee sellaiset tuotantotekijöiden määrät, joilla tuotantotekijöiden rajatuottavuudet vastaavat niiden rajakustannuksia – niin kutsutut ensimmäisen kertaluvun ehdot. Pääoman rajakustannuksena toimii pääoman varjohinta, minkä puitteissa yritys optimoi pääomansa määrän.

Pääoman varjohinnalla on monta nimeä ja usein siitä kuulee käytettävän nimityksiä pääoman käyttäjäkustannus, marginaali q tai keskimääräinen q . Nimitys johtuu lähinnä siitä miten pääoman varjohinta on johdettu. Dale Jorgensonia voidaan pitää neoklassisen investointiteorian pioneerinä, sillä hän johti ensimmäisenä pääomalle varjohinnan, mitä hän kutsui pääoman käyttäjäkustannukseksi (*eng. User Cost of Capital*). Pääoman käyttäjäkustannus kertoo optimaalisen pääoman määrän hintojen avulla, jolloin tuotannon suhteelliset hintatekijät yksin määräävät optimaalisen investointien määrän Jorgenson (1963).

Jorgensonin esittämän pääoman käyttäjäkustannuksen suurimmat ongelmat liittyvät mallin staattisuuteen ja sitä on kritisoitu sen kyvyttömyydestä selittää investointeihin liittyvää dynaamisuutta. Investoinnit on virtasuure, mikä kuvaa pääomakannan muutoksia eri ajanhetkien välillä. Jorgensonin esittämä malli kertoo ainoastaan optimaalinen pääomakannan tason, eikä optimaalisen investoinnin suuruutta. Tällöin inkrementaalinenkin muutos pääoman varjohinnassa vaatisi äärettömän suuret investoinnit, jotta pääoma siirtyisi tasolta toiselle. Pääoman käyttäjäkustannuksesta puuttuu tekijä, joka hidastaisi pääomakannan siirtymistä tasolta toiselle ja sallisi käytännössä investoinnit.

Jorgensson lisäsi pääoman käyttäjäkustannukseen viiverakenteen, joka hidastaa pääomakannan muutoksia ja käytännössä sallii investointien olemassaolon. Tällöin yrityksellä on tietty optimaalinen pääomakannan määrä, jota yritys pyrkii investoinnein tavoittelemaan. Pääoman käyttäjäkustannus sen sijaan vaikuttaa suoraan optimaalisen pääoman määrään, joka vaihtelee suhteellisten hintojen muutosten mukaan. Tällöin yritykset investoivat kun niiden nykyinen ja optimaalinen pääomakanta eroavat toisistaan. Viiverakenteen kuitenkin tuodaan malliin ulkopuolelta, jolloin Jorgensonin mallikaan ei pysty vastaamaan Lucas-kritiikkiin akseleraattorimallien tapaan. Tästä syystä pääoman käyttäjäkustannus sekä akseleraattorimallit kuuluvat implisiittisten mallien luokkaan, sillä niiden pohjalta ei voida tehdä täsmällisiä politiikkasuosituksia.

Lucas Jr (1967), Gould (1968) sekä Treadway (1969) esittivät asennuskustannukset¹ ratkaisuna ongelmaan, missä asennuskustannukset riippuvat investoinnin suuruudesta

¹Asennuskustannuksista (*eng. Installment Costs*) näkee käytettävän myös sopeutuskustannusten nimeä (*eng. Adjustment Costs*, mutta työssäni päätän käyttää asennuskustannusten nimeä, sillä se kuvaa mielestäni paremmin kyseisten kustannusten roolia.

sekä pääomakannasta. Investoinnin kustannuksen oletetaan riippuvan investoinnin koon suhteesta yrityksen pääomakantaan. Investoinnin ollessa suuri suhteutettuna pääomakantaan, yrityksen kannattaa toteuttaa investointi useassa osassa pidempänä aikana verrattuna suureen välittömään investointiin, mikä tulee suhteessa kalliimmaksi. Yrityksellä on toki optimaalinen pääomakanta, mitä se tavoittelee maksimoidakseen kaikki kannattavat hankkeensa, mutta sen ei kuitenkaan kannatta investoida liian nopeasti, ettei se vaaranna tulevaisuuden nettotulojaan. Yritys pyrkii maksimoimaan voittonsa pitämällä huolen siitä, että nykyisten ja tulevien hankkeiden rajatulo vastaa niiden rajamenoa. Kaikki tämä tieto voidaan tiivistää muuttujaan, jota kutsutaan marginaali q :ksi. Voittoa maksimoivan yrityksen ei pidä tietää muuta kuin marginaali q :n arvo, jotta se voi maksimoida voittonsa.

Marginaali q :n ongelma empiirisen testauksen kannalta on ettei sitä voida suoraan havaita, vaan se on estimoitava. Jotta marginaali q voitaisiin estimoida, tarvitsisimme tietoa odotettujen marginaalituottojen ja asennuskustannusten rakenteesta. Ongelmana on ettei teoria tarjoa kumpaankaan vastauksia. Tyypillisimmät tavat kiertää mittaamiseen liittyvät ongelmat on ollut käyttää joko keskimääräistä q :ta tai Eulerin yhtälöä, marginaali q :n selittämiseksi. Hayashi (1982) osoitti, vaikkakin tiukkojen ehtojen vallitessa, marginaali q :n vastaavan keskimääräistä q :ta, joka tunnetaan myös Tobinin Q :na. Tobin (1969) esitti 1960-luvulla että yrityksen kannattaa investoida, jos sen markkina-arvo on sen kirjanpitoarvoa suurempi. Tällöin pääoma yrityksen sisällä on kalliimpaa kuin yrityksen ulkopuolella; yritys saa hankittua pääomaa alennuksella verrattuna pääoman hankintahintaan. Jos yrityksen markkina-arvo kuvastaa täydellisesti yrityksen diskonttaamia tulevia voittoja, ovat marginaali q ja keskimääräinen q sama asia. Empiiriset testit tehdään pääsääntöisesti hyödyntäen keskimääräistä q :ta, koska keskimääräinen q havaitaan empiirisesti pörssiyrityksille. Keskimääräisen q :n etu on sen mittaamisen helppoudessa verrattuna marginaali q :hun.

Keskimääräinen q ei kuitenkaan ole nauttinut empiiristä menestystä, vaikka se on investointimallien työhevonen. Keskimääräinen q on monesti merkitsevä investointeja selittävä tekijä, mutta sen tarjoama selitysaste on pääsääntöisesti keho. Teorian mukaan marginaali q :n pitäisi kuitenkin olla riittävä tekijä selittämään investointeja, mutta silti suuri osa investointien vaihtelusta jää selittämättä, jos investointeja regressoidaan vain keskimääräisellä q :lla. Abel ja Blanchard (1983) esittivät ettei marginaali q välttämättä vastaa keskimääräistä q :ta, sillä ehdot ekvivalenssille ovat erittäin tiukat. Jos marginaali q ja keskimääräinen q eroavat toisistaan, niin tällöin ainoastaan marginaali q on riittävä investointien selittäjä ja keskimääräisellä q suoritettavat regressiot jättävät osan investointien vaihtelusta selittämättä. Abel ja Blanchard estimoivat marginaali q :lle aikasarjan vektoriautoregression avulla, missä marginaali q rakentui tulevien tuottojen ja asennuskustannusten odotuksista. Menettelyssä Abel ja Blanchard joutuivat ottamaan kantaa odotusten rakenteeseen, joten tämäkään menettely ei ollut täysin yksioikoinen, varsinkaan kun mallin selitysaste ei juurikaan parantunut verrattuna keskimääräisellä q :lla saatuihin tuloksiin. Abelin ja Blanchardin konstruoima marginaali q oli hyvä yritys parantaa mallin

selityksastetta, vaikka he siinä epäonnistuiivatkin.

Caballero ja Leahy (1996) argumentoivat puolestaan keskimääräisen q puolesta empiirisessä työssä ja heidän mukaansa keskimääräisellä q :lla saadaan robustimpia tuloksia verrattuna marginaali q :hun. Tämä johtuu marginaali q :n asennuskustannuksien luonteesta, joiden oletetaan lähtökohtaisesti olevan konveksit investointien suhteen. Konveksisuus tarkoittaa, että asennuskustannukset kasvavat investointien suhteen, mikä on järkeenkäypä oletus. Konveksisuus takaa myös sen, että marginaali q :lla on yksiselitteinen ratkaisu. Konveksien asennuskustannusten maailmassa yrityksillä on kannusteet tasoittaa investointeja ajassa; huomisen odotettu pääoman tarve ajaa yritykset investoimaan tänään. Investointien kuuluisi käyttäytyä hyvin tasaisesti ajassa, mutta todellisuudessa investointien on todettu esiintyvän pyrhdyksinä. Doms ja Dunne (1998) tarkastelivat Yhdysvaltalaisia yrityksiä ja löysivät investointien olevan könttämäisiä yksittäisiä tuotantolaitoksia tarkasteltaessa, mikä on ristiriidassa konveksien asennuskustannusten kanssa.

Caballero ja Leahy (1996) osoittivat ettei marginaali q ole yksin riittävä tekijä selittämään investointeja, jos asennuskustannukset ovat luonteeltaan diskreettejä konveksien kustannusten sijaan. Tällöin yrityksellä voi olla sama marginaali q siitä riippumatta, onko se juuri investoinut vai ei. Samalla asennuskustannusten diskreettisyys tarkoittaa ettei investointeja voida ilmaista marginaali q :n funktiona, jolloin marginaali q ei enää toimi investointien ainoana selittäjänä. Tämä tukee tuloksia, jotka ovat havainneet investointien olevan herkkiä muille fundamenteille, kuten osaketuotoille, myynneille tai kassavirroille (Blanchard, Rhee ja Summers, 1993). Varsinkin kassavirtojen on ajateltu vaikuttavan likvideettirajoitteisten yritysten investointeihin, missä yritykset joutuvat turvautumaan sisäiseen rahoitukseen ulkoisen sijaan. Caballero ja Leahy (1996) mukaan kassavirrat ja keskimääräinen q kertovat yrityksillä eri asioista. Kassavirta kertoo lähinnä nykyhetken ympäristöstä, kun taas keskimääräiseen q :hun sisältyy tietoa niin nykyhetkestä kuin tulevaisuudestakin. Caballero ja Leahy argumentoivat että keskimääräinen q voi silti toimia hyvin investointien selittävänä tekijänä vaikka marginaali q toimisi huonosti. Marginaali q rakennetaan spesifinä optimointiongelmana, kun taas keskimääräinen q on lähempänä perinteistä arbitraasiehtoa, joka on robustimpi taloudellisen ympäristön muutoksille.

Kuten aiemmin mainittiin, marginaali q :n mittaaminen voi osoittautua haastavaksi tehtäväksi. Sen sijaan, että olettaisimme keskimääräisen ja marginaalisen q :n vastaavan toisiinsa, voidaan marginaali q :ta mallintaa myös Euler-yhtälöiden avulla. Investoinnin Euler-yhtälöillä vältämme marginaali q :n mittaamiseen liittyvät ongelmat, sillä nyt yhtälön tärkeimmät muuttujat ovat mitattavissa. Euler-yhtälöiden ongelmat liittyvät yhtälöiden funktionaalisten muotojen sekä oikeiden instrumenttimuuttujien valintaan, joilla kontrolloidaan regressorien sekä virhetermien välisiä korrelaatioita. Teoreettisesta hienostuneisuudesta huolimatta, Euler-yhtälötkään eivät tuoneet mainittavaa parannusta neoklassisten investointiteorioiden selityskyvyn suhteen.

Viimeaikaisempi investointikirjallisuus on keskittynyt enemmän epävarmuuden rooliin investointipäätöksissä. Esimerkiksi Leahy ja Whited (1995) ja myöhemmin Bloom

(2009) ovat tutkineet epävarmuuden vaikutuksia yritysten investointeihin. Leahy ja Whited (1995) havaitsivat epävarmuuden vähentävän investointeja, kun epävarmuuden mittana käytettiin yritysten osaketulon vuosittaista varianssia, jota regressoitiin investointien ja pääomakannan välistä suhdetta vasten. Mallissa kirjoittajat olivat kiinnostuneet varianssin odotuksista, jota he mallinsivat stokastisena prosessina, jolla on äärellinen autoregressiivinen muoto. Kun regressioon lisättiin Tobinin q , epävarmuus ei ollut enää tilastollisesti merkitsevä investointeja selittävä muuttuja. Kirjoittajien mukaan tämä voi johtua siitä, että epävarmuus ilmenee joko Tobinin q :n kautta tai se korreloi vahvasti muiden investointeihin vaikuttavien tekijöiden kanssa.

Bloom (2009) käytti investointimallina tyypillistä neoklassista investointimallia asennuskustannuksilla, mitä vasten hän tutki epävarmuuden aiheuttamien shokkien vaikutuksia eri mikro- ja makrotaloudellisiin muuttujiin. Mallissa epävarmuus on luonteeltaan stokastinen prosessi, missä prosessin varianssi riippuu shokista eikä ole vakio. Myös Bloom käytti osaketulon vuotuista varianssia epävarmuuden mittarina. Toisin kuin Leahy ja Whited, Bloom tutki epävarmuuden vaikutuksia rakenteellisella mallilla, mikä mahdollistaa shokkien vaikutusten laajemman tarkastelun. Simuloidun aineiston perusteella Bloom havaitsi investointien hidastuvan merkittävästi epävarmuuden kasvaessa. Samalla Bloom havaitsi että yritysten investoinnit eivät olleet responsiivisia hintatekijöiden vaikutuksille epävarmuuden aiheuttaman shokin jälkeen, millä voi olla merkittäviä vaikutuksia mahdollisten ohjauskeinojen suhteen.

Yritysten investointeja on tutkittu myös kyselytutkimusten keinoin, jossa kyselylomakkeilla on pyritty kartoittamaan yritysjohtajien ja analyytikkojen odotuksia talouskehityksen suhteen. Guiso ja Parigi (1999) tutkivat epävarmuuden vaikutuksia italialaisten yritysten investointeihin, jossa yritykset saivat arvioida kuinka paljon kysynnän odotettiin muuttuvan epävarmuuden johdosta. Kirjoittajat havaitsivat epävarmuuden vaikuttavan negatiivisesti investointeihin; varsinkin yritykset, joiden tulevaisuuden näkymät arvioitiin epävarmemmiksi, olivat vähemmän responsiivisia investoimaan vaikka tulevaisuuden kysyntäodotukset olisivat kasvaneetkin. Yritykset, joiden oli hankala myydä pääomahyödykkeensä toisisijaisilla markkinoilla, reagoivat voimakkaammin epävarmuuteen.

Empiirisesti implisiittiset mallit ovat menestyneet eksplisiittisiä malleja paremmin, ja yllättävää sinänsä, että menestyksekkäimpiä ovat olleet yksinkertaiset akseleraattorimallit. Neoklassiset investointimallit sen sijaan ovat olleet pettymyksiä, niiden teoreettisesta hienostuneisuudesta huolimatta. Vaikka pääoman varjohinnan tulisi olla riittävä investointeja selittävä muuttuja, sen muutokset ovat selittäneet poikkeuksellisen vähän investointien vaihtelusta. Tutkimuksesta riippuen pääoman varjohinnan selitysasteet ovat jääneet noin prosenttiin, vaikka pääoman varjohinnan usein raportoidaan olevan tilastollisesti merkitsevä.

Neoklassisten investointimallien heikkoutena on pidetty niiden tiukkoja oletuksia, jotka ovat malleissa enemmän analyyttisen yksinkertaisuuden kuin realistisuuden vuoksi. Sims (1980) esitti VAR-malleja vaihtoehtona makromalleille, jotka perustuvat "uskomat-

tomille taustaoletuksille". VAR-malleilla voidaan tutkia useiden aikasarjojen keskinäisiä vuorovaikutuksia, jossa jokaista muuttujaa regressoidaan sen omilla sekä muiden muuttujien viipeillä. VAR itsessään on tilastotieteellinen malli, joten se ei kerro mitä muuttujia malliin tulisi sisällyttää. Tähän tarvitsemme taloustieteen teoriaa sekä aikaisempia tutkimustuloksia. VAR antaa vain keinot lähestyä aihetta huomattavasti vapaammin.

2.2 IMPLISIITTISET INVESTOINTIMALLIT

Implisittisissä investointimalleissa investointeihin liittyvä dynaamiikka sisällytetään malliin ad hoc². Tällöin dynaamisuus ei synny mallin sisällä, vaan se tuodaan keinotekoisesti malliin ulkopuolelta. Implisiittisten investointimallien luokkaan kuuluu suuri määrä investointimalleja ja tietyin varauksin niin Jorgensonin esittämä neoklassinen investointimalli kuin akseleraattorimallitkin voidaan katsoa implisiittisten mallien luokkaan kuuluviksi. Jorgensonin neoklassinen investointimalli esitetään ensin, koska sitä voidaan pitää aikaisempien akseleraattorimallien yleistyksenä.

Yrityksen optimaalisen investointisäännön johtaminen aloitetaan yrityksen arvon maksimointiongelmasta, sillä yrityksen arvo on yhtä kuin sen kyky tuottaa voittoa. Yrityksen arvo maksimoituu, kun yritys maksimoi kaikkien ajanhetkien nettotulot nykyhetkestä tulevaisuuteen. Jorgenson (1963) esitti yrityksen optimointiongelman seuraavassa muodossa:

$$V_t = \max_{K_t, L_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{p_t^Y F(K_t, L_t) - w_t L_t - p_t^I I_t\} \quad (1)$$

$$s.e \quad K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t \quad (2)$$

missä V_t on yrityksen arvo, joka on yhtä kuin yrityksen voittojen päättymätön summa. Esitys tosin eroaa Jorgensonin esityksestä siinä, ettei yhtälö (1) huomioi veroluonteisia maksuja. Yrityksen voitto hetkellä t on tulojen $p_t^Y F(K_t, L_t)$ sekä menojen $w_t L_t$ ja $p_{K,t} I_t$ välinen erotus. Menoiksi lasketaan palkkakulut, jossa w_t on palkka ja L_t on tehty työtunnit sekä investointikulut $p_t^I I_t$, jossa p_t^I on pääomahyödykkeen hankintahinta ja I_t on investoinnin volyyymi. Yritys on kiinnostunut myös tulevista voitoista, joita diskontataan diskonttoterminillä $\beta = \frac{1}{(1+r)^t}$, jossa r tarkoittaa diskonttauksessa käytettyä korkoa, eli tuottovaatimusta. Alaviite t viittaa tutkittavaan ajanhetkeen, missä t erottaa ajanhetket toisistaan. Yritys kohtaa vielä pääoman liikeyhtälön, joka kertoo että seuraavan periodin pääomakanta K_{t+1} vastaa nykyisen periodin pääomakannan K_t ja nettoinvestointien $I_t - \delta K_t$ summaa. Pääoman liikeyhtälö toimii optimointiongelman rajoitteena.

Jorgensonin esitys on staattinen, jolloin muuttujien ei odoteta muuttuvan nykyhetken ja tulevaisuuden välillä – nykyisyys on hyvä esitys tulevaisuudesta. Tällöin mallissa ei ole

²Tieteen filosofiassa ad hoc tarkoittaa hypoteesia, joka hyväksytään teorian pelastamiseksi.

odotuksia ja optimointiongelma on hyvin suoraviivainen, riittää että maksimoimme yrityksen arvon valitsemalla optimaaliset työvoiman ja pääoman määrät joka ajanhetki. Oletetaan, että työvoiman määrä on maksimoitu valitsevalla palkkatasolla w_t , jolloin meitä kiinnostaa ainoastaan optimaalisen pääoman määrä. Optimaalinen pääoman määrä saadaan selvitettyä derivoimalla yrityksen arvofunktiota pääoman ja investointien suhteen.

Muodostetaan optimointiongelma Lagrangian ja otetaan ensimmäisen kertaluvun ehdot hetken $t + 1$ pääomakannan K_{t+1} sekä investointien I_t suhteen. Nykyhetken t pääomakanta K_t on lyöty lukkoon hetken $t - 1$ investointipäätöksen myötä, jolloin yritystä kiinnostaa ainoastaan seuraavan periodin pääomakanta sekä nykyhetken investoinnit. Toisin sanoen seuraavan periodin pääomakanta päätetään nykyhetkessä. Lagrangian on muotoa:

$$\mathcal{L} = \beta^t [p_t^Y F(K_t, L_t) - w_t L_t - p_t^I I_t] + \lambda (I_t + (1 - \delta)K_t - K_{t+1}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} : \beta^{t+1} p_t^Y F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - \lambda_t + (1 - \delta)\lambda_{t+1} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_t} : \lambda_t = \beta^t p_t^I \quad (5)$$

Sijoitetaan yhtälö (5) yhtälöön (4) ja saadaan pääoman käyttäjäkustannus

$$C_t = F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) = \frac{(1 + r)p_t^I - (1 - \delta)p_{t+1}^I}{p_t^Y} \quad (6)$$

Yrityksen optimaalinen pääoman määrä riippuu nyt pääoman käyttäjäkustannuksesta C_t , joka riippuu pääomahyödykkeiden ja tuotannon suhteellisista hinnoista $\frac{p_t^I}{p_t^Y}$, korosta r sekä pääoman kulumisasteesta δ . Yhtälöä (6) voidaan manipuloida, jolloin saadaan Jorgensonin (1963) tunnettu pääoman käyttäjäkustannuksen esitys:

$$C_t = \frac{p_t^I}{p_t^Y} \left\{ r + \delta - (1 - \delta) \left[\frac{p_{t+1}^I - p_t^I}{p_t^I} \right] \right\} \quad (7)$$

Pääoman käyttäjäkustannus riippuu positiivisesti pääomahyödykkeiden hinnoista, korosta sekä kulumisasteesta. Näiden tekijöiden kasvu, ceteris paribus, tarkoittaa pienempää optimaalisen pääomakannan määrää ja näin ollen myös pienempiä investointeja. Myynnin hinnat, sekä pääomahyödykkeiden hinnan muutokset puolestaan vaikuttavat negatiivisesti pääoman käyttäjäkustannukseen, ja positiivisesti investointeihin.

Pääoman käyttäjäkustannus kertoo vasta yrityksen optimaalisen pääoman määrän, muttei sitä miten yrityksen kannattaa pyrkiä saavuttamaan kyseinen pääoman taso. Tästä syystä malliin joudutaan lisäämään viiverakenne pääomatason sopeutumiselle, joka sallii investoinnit. Ilman viiverakennetta pääoma "hyppäisi" uudelle optimaaliselle tasolle aina kun pääoman käyttäjäkustannus muuttuisi. Toimenpiteelle ei kuitenkaan ole teoreettista perustetta, jolloin viiveet tuodaan mukaan keinotekoisesti, ja tästä syystä mallin dynaamisuus on implisiittistä.

Tyypillinen neoklassisen investointimalli voidaan esittää seuraavassa muodossa, missä yrityksen optimaalinen pääomakanta K^* riippuu tuotannosta Y_t sekä pääoman käyttäjäkustannuksesta C_t jakaumaparametrilla α seuraavasti:

$$K^* = \alpha Y_t C_t^{-\sigma} \quad (8)$$

sillä oletuksella, että tuotantofunktiossa pääoman substituutiojousto σ on vakio suhteessa muihin tuotantontekijöihin. Tällöin yhtälö (8) kertoo optimaalisen pääoman riippuvan sekä tuotannon määrästä Y_t , mutta myöskin kustannuksista, jotka vaikuttavat pääoman käyttäkustannuksen kautta.

Yhtälö (8) kertoo optimaalisen pääoman tason, jonka pääoman käyttäjäkustannus määrää. Jotta malliin saadaan tuotua viiverakenne, joudumme esittämään investoinnit reaationa, jossa kokonaisinvestoinnit jaetaan sekä netto- että korvauskomponentteihin seuraavasti:

$$I_t^n = \sum_{j=0}^J \beta_j \Delta K_{t-j}^* \quad (9)$$

$$I_t^r = \delta K_{t-1} \quad (10)$$

jossa I_t^n kuvaa nettoinvestointeja, eli sitä kasvaako vai supistuuko pääomakanta. I_t^r sen sijaan kertoo olemassa olevan pääomakannan kulumisen, eli paljonko pääomaa muuttuu käyttökelvottomaksi ajanhetkellä t . Näin ollen kokonaisinvestoinnit on korvaus- ja nettokomponenttien summa.

Yhdistämällä yhtälöt (9) ja (10) sekä lisäämällä häiriötermi u_t , saadaan Chirinko (1993) mainitsema neoklassinen investointiyhtälö

$$I_t = I_t^r + I_t^n = \delta K_{t-1} + \sum_{j=0}^J \beta_j \Delta (\alpha Y_{t-j} C_{t-j}^{-\sigma}) + u_t \quad (11)$$

Jorgensson oletti tutkimuksissaan substituutiojouston saavan arvon yksi, jolloin tuotantontekijöiden väliset substituutiojoustot ovat täysin elastisia. Substituutiojousto voi saada muitakin arvoja ja asettamalla $\sigma = 0$, saadaan Leontief tuotantofunktio, jossa tuotantontekijät ovat keskenään komplementaarisia. Tällöin neoklassinen investointimalli redusoituu itse asiassa joustavaksi akseleraattorimalliksi, jossa investoinnit riippuvat ainoastaan tuotannon muutosten viipeistä:

$$I_t = I_t^r + I_t^n = \delta K_{t-1} + \sum_{j=0}^J \beta_j \Delta (\alpha Y_{t-j}) + u_t \quad (12)$$

Yhtälö (12) voidaan muuttaa vielä yksinkertaisemmaksi naiviksi akseleraattorimalliksi poistamalla mallista myös tuotannon viiveiden vaikutukset investointeihin, jolloin investoinnit ovat ainoastaan nykyhetken tuotannon muutoksen funktio. Akseleraattorimalleja on kritisoitu siitä, etteivät ne anna käyttäjäkustannuksen kautta operoiville hintateki-

jöille mahdollisuutta vaikuttaa investointeihin. Tämä ei kuitenkaan täysin pidä paikkaansa, sillä hintatekijöiden muutokset voivat muuttaa toimijoiden preferenssejä, jotka sitten muuttavat kysytyjä määriä. Määrän muutokset operoivat kuitenkin ΔY_{t-j} kautta ja voivat näin vaikuttaa myös investointeihin.

Yhtälön (11) tapauksessa on hankala ottaa kantaa, kumpi vaikuttaa enemmän investointeihin, määrät vai hinnat? Tämä johtuu siitä, että optimaalinen pääomakanta riippuu tuotannon ja käyttäjäkustannuksen yhteistermistä. Tutkimustulokset ovat vaihdelleet tutkimuksesta riippuen, Coen (1971) esimerkiksi tutki vuoden 1954 veromuutoksen vaikutuksia yhdysvaltalaisen yritysten investointeihin. Hän havaitsi veroleikkauksen piristäneen yritysten investointeja 6,89 prosenttia mallilla, joka vastaa yhtälöä (11). Tämä johtui kuitenkin tuotannon vaikutuksesta yhdystermissä; sillä malli, jossa tuotannolla ja käyttäjäkustannuksella on omat viiveensä, veroleikkauksen vaikutus jäi enää 1,46-3,87 prosenttiin. Chirinko (1993) tulee siihen lopputulokseen, että oheiset tulokset vahvistavat määrien merkittävämpää vaikutusta investointeihin suhteessa käyttäjäkustannukseen.

Implisiittiset investointimallit eivät kestä Lucas-kritiikkiä. Implisiittisissä malleissa investoinnit ovat aina riippuvaisia viiverakenteen pituudesta ja painotuksista. Nämä seikat ovat taas tutkijan päätettävissä, jolloin mallien tulokset herkkiä tutkijoiden valinnoille. Eksplisiittiset mallit tarjoavat vaihtoehdon implisiittisille malleille, sillä niissä investointidynamiikka syntyy mallin sisällä eikä sitä tarvitse tuoda keinotekoisesti ulkopuolelta. Tällöin myöskään mallin tulokset eivät ole niin herkkiä tutkijan omille valinnoille.

2.3 DYNAAMISET INVESTOINTIMALLIT

Dynaamisiksi investointimalleiksi luetaan niin q -mallit kuin investoinnin Euler yhtälötkin. Tässä työssä käsitellään ainoastaan marginaali q :ta sekä keskimääräistä q :ta koskevat yksityiskohdat, sillä niiden osoittamia tekijöitä hyödynnetään tutkimuksen empiirisessä osiossa. Investoinnin Eulerin yhtälöihin liittyvä kirjallisuus käsittelee lähinnä epävarmuuteen liittyvien tekijöiden vaikutuksia investointeihin, eikä niitä tulla käsittelemään sen tarkemmin empiirisessä osiossa.

Marginaali q :n johtaminen aloitetaan samasta optimointiongelmasta, mistä Jorgensonin esittämä pääoman käyttäjäkustannuskin johdetaan. Voiton maksimointiongelmaan lisätään vain pääoman asennuskustannukset, sillä ilman asennuskustannuksia kyseessä olisi juuri Jorgensonin johtama optimaalisen pääomakannan malli. Jorgensonin mallissa pääomakanta siirtyy uudelle tasolle välittömästi, eikä se täten salli investointien olemassaoloa. Investointi kuvaa pääomakannan siirtymistä, joten tarvitsemme malliimme tekijän joka mahdollistaa investoinnit ja hidastaa pääomakannan siirtymistä tasolta toiselle. Tähän tarkoitukseen investointimalleihin on sisällytetty asennuskustannukset, jotka kasvattavat investoinnin kustannuksia suhteessa investointiin itseensä.

Yleensä asennuskustannukset esitetään investointien ja pääomakannan funktiona, missä pääoma skaalaa investoinnin kustannukset suhteessa pääomakantaan; suuri inves-

toinnin määrä suhteessa pääomakantaan johtaa suurempiin kuluihin. Asennuskustannusten oletetaan olevan konvekssi funktio asennettavan pääoman suhteen. Yleinen kirjallisuudessa esitetty tapa on ollut esittää asennuskustannukset kvadraattisena funktiona, jolloin pääoman asennuskustannukset kasvavat asennettavaa pääomaa nopeammin. Yrityksellä on optimaalinen pääoman taso, mitä se tavoittelee. Nyt yrityksen ongelma on siinä, miten se saavuttaa haluamansa pääoman tason vaarantamatta diskontattuja tulevaisuuden voittoja.

Nykyhetken pääomakanta koostuu edellisen periodin pääkannasta ja investoinneista, joten nykyhetkenä yritys voi vaikuttaa ainoastaan nykyhetken investointeihin sekä seuraavien periodien pääomakannan määrään. Päätöksentekohetkellä t pääomakanta on annettu ja päätöksentekijä päättää ainoastaan kuinka paljon hetkellä t investoidaan. Investointia suunniteltaessa päätöksentekijä huomioi asentamisesta aiheutuvat kustannukset $C(I_t, K_t)$, jotka vaikuttavat aikatauluun jona pääomakannan halutaan siirtyvän halutulle tasolle. Näin ollen yrityksen ei kannata investoida liian nopeasti, sillä kasvavat asennuskustannukset syövät muuten hankkeesta odotetut tulot.

Marginaali q johdetaan lähes samasta optimointiongelmasta kuin pääoman käyttäjäkustannuskin, mutta nyt yritys maksimoi arvonsa maksimoimalla voittonsa joka ajanhetki, kuitenkin siten ettei tuotannontekijöiden lisäys vaikuta negatiivisesti tulevaisuuden nettotuloihin. Maksimoinnissa pääoman liikeyhtälö toimii rajoitteena, joka antaa jokaisena hetkenä käytettävissä olevan pääomakannan määrään. Maksimointiongelma on muotoa:

$$V_t = \max_{K_t, L_t} \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [F(K_t, L_t) - w_t L_t - p_t^I I_t - C(I_t, K_t)] \quad (13)$$

$$s.e \quad K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t \quad (14)$$

jossa yritys maksimoi arvonsa maksimoimalla tulevien voittojen äärettömän summan. Yllä esitettyjen oletusten avulla yrityksen maksimoitu arvo saadaan ratkaistua rajoitetun optimoinnin keinoin esimerkiksi Bellman yhtälön avulla, jossa pääomakannan liikeyhtälö toimii optimoinnin rajoitteena. Ratkaistava Bellman yhtälö on muotoa

$$V_t = \max_{K_t, L_t} \{F(K_t, L_t) - w_t L_t - p_t^I I_t - C(I_t, K_t) + \beta \mathbb{E}_t V_{t+1}\} \quad (15)$$

Ensimmäisen kertaluvun ehdot investoinneille ovat

$$C_I(I_t, K_t) + p_t^I = F_K(K_t, L_t) - C_K(I_t, K_t) + \beta \left(\frac{V_{t+1}}{K_t} \right) \quad (16)$$

$$C_I(I_t, K_t) + p_t^I = F_K(K_t, L_t) - C_K(I_t, K_t) + (1 - \delta)\beta \left(\frac{V_{t+1}}{K_{t+1}} \right) \quad (17)$$

Käyttämällä sopeutuskustannuksille kvadraattista muotoa saadaan

$$C(I_t, K_t) = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{I_t}{K_t} \right]^2 K_t \quad (18)$$

$$C_I(I_t, K_t) = \alpha \left[\frac{I_t}{K_t} \right] \quad (19)$$

Yhdistetään yhtälöt yhteen, voimme kirjoittaa investoinnin ensimmäisen kertaluvun ehdon toisessa muodossa

$$\alpha \left[\frac{I_t}{K_t} \right] + p_t^I = \frac{\partial V_t}{\partial K_t} \quad (20)$$

jossa

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t}{\partial K_t} &= F_K(K_t, L_t) - C_K(I_t, K_t) + (1 - \delta)\beta \frac{V_{t+1}}{K_{t+1}} \\ \frac{I_t}{K_t} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial V_t}{\partial K_t} - p_t^I \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Yhtälöä (21) voidaan pitää tyypillisenä marginaali q:n esityksenä. Aina kun pääoman varjohinta eroaa pääomahyödykkeen hankintahinnasta, yrityksellä on kannusteet muuttaa pääoman määrää. Parametri α kuvaa asennuskustannusten vaikutusta, jotka hillitsevät pääoman sopeutusprosessin nopeutta. Yhtälön (21) ongelma on ettei vasemman puolimaista termiä voida havaita, mikä vaikeuttaa empiiristä tarkastelua huomattavasti.

Hayashi (1982) kuitenkin osoitti marginaali q:n olevan mitattavissa, kun seuraavat ehdot toteutuvat:

1. Markkinat tuotteille ja tuotannontekijöille ovat kilpailulliset, eli yhdelläkään toimijalla ei ole hinnoitteluvoimaa
2. Tuotanto sekä asennuskustannusten funktiot ovat lineaarisesti homogeeniset, mikä tarkoittaa vakioisia tuottoja
3. Pääoma on homogeenista
4. Investointipäätökset ovat irrallisia muista reaalisista sekä rahoituksellisista päätöksistä

jolloin yrityksen markkina-arvo voidaan ilmaista muodossa

$$V_t = \frac{\partial V_t}{\partial K_t} K_t \quad (22)$$

missä ei-havaittu pääoman varjohinta $\frac{\partial V_t}{\partial K_t}$ vastaa markkina-arvon ja olemassa olevan pääomakannan välistä suhdetta. Pääoman markkina-arvot on saatavissa pörssiin listatuille yrityksille ja pääoman uudelleen hankintahinnat saadaan tilinpäätöstiedoista. Tyypillisesti

q ilmoitetaan seuraavassa muodossa, jossa pääomakannan uudelleenhankintahintaan vaikuttaa myös pääomahyödykkeiden hinnat:

$$q_t^T = \frac{V_t}{p_t^I K_t} \quad (23)$$

Nyt yhtälö (21) voidaan ilmaista havaittavassa muodossa pienin manipulaatioin, Hayashi (1982) osoittamin ehdoin:

$$\begin{aligned} \frac{I_t}{K_t} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial V_t}{\partial K_t} - p_t^I \right) \\ \frac{I_t}{K_t} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{V_t}{K_t} - p_t^I \right) \\ \frac{I_t}{K_t} &= \frac{1}{\alpha} \left(q_t^T - p_t^I \right) \\ \frac{I_t}{K_t} &= \frac{1}{\alpha} q_t \end{aligned}$$

jossa

$$q_t = q_t^T - p_t^I \quad (24)$$

3 BVAR-MALLI

Bayesilainen vektoriautoregressiivinen (BVAR) malli on vektoriautoregressiivisen (VAR) mallin laajennus. Molemmat ovat stokastisia aikasarjamalleja, joilla pyritään kuvaamaan usean muuttujan keskinäisiä lineaarisia riippuvuuksia. Kaikkia mallin muuttujia käsitellään samalla tavalla. Jokaisella muuttujalla on oma yhtälö, joka selittää muuttujan kehitystä sen omien sekä mallin muiden muuttujien viipeiden ja virhetermin avulla. Suurin ero BVAR- ja VAR-mallien välillä on se, että VAR-malli käsittelee mallin aineistoa satunnaisena ja parametrejä vakioina, kun taas BVAR-mallissa aineisto on kiinnitetty ja parametrit ovat satunnaisia.

BVAR- ja VAR-mallit voidaan esittää seuraavassa matriisimuodossa:

$$y_t = C + B_1 y_{t-1} + \dots + B_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (25)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma)$$

missä y_t on endogeenisten muuttujien $n \times 1$ vektori, ε_t on häiriötermien $n \times 1$ vektori ja C, B_1, \dots, B_p sekä Σ ovat tuntemattomien parametrien matriisit.

VAR-mallissa dataa Y_t pidetään satunnaisena ilmentymänä jostain aineiston tuottamasta prosessista, jota voidaan kuvata jollain parametriarvoilla. Tilastollinen päättely tehdään sen suhteen, kuinka hyvin estimoitu parametri onnistuu kuvaamaan aineiston tuottamaa prosessia, jos testi suoritettaisiin usealla toistetulla kokeella. Bayesilainen lähestymistapa toimii päinvastaisesti ja pitää dataa $y = (y'_1, \dots, y'_T)$ kiinnitettynä ja parametrejä β tuntemattomina, jolloin parametriin β liittyvä päättely on ehdollinen aineistolle. Bayesilainen todennäköisyyskäsite on subjektiivinen, eikä se vaadi useaa toistettua koetta parametrin arvioimiseksi, vaan siinä subjektiivista arviota korjataan sitä mukaan, kun tutkittavasta aiheesta saadaan lisää tietoa.

Bayesilainen vektoriautoregressiivinen malli on vektoriautoregressiivisen mallin laajennus, missä mallin tuodaan lisärakennetta niin kutsuttujen priorien avulla. Priorit ovat tutkijan aineistoon liittämiä subjektiivisia uskomuksia, jotka voidaan esittää formaalisesti. Prioreilla voidaan pakottaa mallin estimaatteja tiettyyn suuntaan, kuitenkin niin, että sallimme aineistosta saatavalle informaatiolle positiivisen painon mallissa. Tyypillisesti prioritiedolle voidaan antaa isompi painoarvo, jos se on perusteltua esimerkiksi teorian tai aikaisempien tutkimusten perusteella. Toisaalta, mitä vähemmän prioritietoa on tarjolla, sitä enemmän annetaan painoarvoa aineistosta saatavalle informaatiolle. Myös erittäin suurten VAR-mallien tapauksessa priorille voidaan antaa suuri painoarvo, jotta mallista estimoitavan kohinan määrä saadaan rajoitettua. Bańbura, Giannone ja Reichlin (2010) esittivät, että priorien painoarvoa voidaan kasvattaa mallin dimensioiden kasvaessa, jolloin parametrien vaihtelulle asetetaan tiukemmat priorit. Tämä toimenpide hillitsee muuttujien lisäämisestä aiheutuvaa varianssin kasvamista, kun malliin lisätään selittäviä

muuttujia.

Hyvin valituilla prioreilla voidaan redusoida merkittävästi malliin estimoitavien parametrien määrää, jolloin myös estimoitavan kohinan määrä laskee suhteessa tavanomaiseen VAR-malliin. Priori uskomukset yhdistetään suurimman uskottavuuden menetelmällä aineistosta saatuun tietoon, jotka yhdessä muodostavat posterior jakauman estimaattorille. Posterior käytännössä kertoo kaiken mitä tutkija tietää aiheesta tutkittuaan aineistoa. Varsinainen priorin valinta on subjektiivinen päätös, eikä sillä välttämättä ole tieteellistä perustetta. Tätä ei kuitenkaan nähdä ongelmana bayesilaisessa päättelyssä, koska parametrit lähestyvät kohti aineiston implikoimia arvoja kohti, kunhan aikasarjapisteitä on vain riittävästi.

Parametrien priorijakauma voidaan esittää formaalisti muodossa

$$\beta \mid \Sigma \sim N(b, \Sigma \otimes \Omega\lambda)$$

missä vektori b ja matriisi Ω ovat tunnettuja ja λ kontrolloi prioritiedon vaikutusta. Parametrien ehdollinen posteriorijakauma saadaan kertomalla priorin uskottavuusfunktion kanssa. Ensimmäiset p havaintoa käsitellään annettuina, jolloin posteriorilla on seuraavanlainen esitys

$$\begin{aligned} \beta \mid \Sigma, y &\sim N(\hat{\beta}(\lambda), \hat{V}(\lambda)) \\ \hat{\beta}(\lambda) &\equiv \text{vec}(\hat{B}(\lambda)) \\ \hat{B}(\lambda) &\equiv (x'x + (\Omega\lambda)^{-1})^{-1}(x'y + (\Omega\lambda)^{-1}\hat{b}) \\ \hat{V}(\lambda) &\equiv \Sigma \otimes (x'x + (\Omega\lambda)^{-1})^{-1}, \end{aligned}$$

missä $y \equiv [y_{p+1}, \dots, y_T]'$, $x \equiv [x_{p+1}, \dots, x_T]'$, $x_t \equiv [1, y'_{t-1}, \dots, y'_{t-p}]'$ ja \hat{b} on matriisi, joka on järjestelty vektorista b siten, että sarakkeet vastaavat parametrien priorin keskiarvoja. Yllä olevien relaatioiden peusteella on ilmeistä, että pienet λ arvot johtavat prioritiedon korostumiseen, milloin parametrien β posterior keskiarvot lähestyvät priorin keskiarvoa ja posteriorin varianssi laskee. Tämä kuvaa prioritiedon estimaattorien keski-
virhettä pienentävää vaikutusta.

Bayesilaisessa päättelyssä priorijakaumien informatiivisuutta voidaan estimoida vastaavalla tavalla kuin mallin muitakin tuntemattomia parametrejä. Malli voidaan esittää uskottavuusfunktion $p(y \mid \Theta)$ ja priorijakauman $p_\gamma(\Theta)$ avulla, missä Θ kuvaa mallin parametrejä ja γ mallin hyperparametrejä, jotka määrittävät priorijakauman, mutteivät vaikuta suoraan uskottavuusfunktioon. Tällöin malli voidaan esittää niin sanotusti hierarkisena, jolloin priorijakauma on ehdollinen hyperparametreille ja $p_\gamma(\Theta)$ korvataan seuraavalla ehdollisella priorijakaumalla $p(\Theta \mid \gamma)$. Prioritieto sekä aineisto voidaan yhdistää uskottavuusfunktion ja priorijakauman funktiona Bayesin teoreemaa hyödyntäen:

$$p(\gamma|y) \propto p(y|\gamma) \cdot p(\gamma) \tag{26}$$

jossa $p(\gamma)$ kuvaa hyperparametrien priorijakaumaa ja $p(y|\gamma)$ kuvaa reunauskottavuutta (Marginal Likelihood), jolla on seuraava esitys:

$$p(y|\gamma) = \int p(y|\Theta, \gamma)p(\Theta|\gamma)d\Theta \quad (27)$$

Toisin sanoen, reunauskottavuus on hyperparametrien funktiona saatava aineiston tiheysfunktio, joka on saatu integroimalla mallin parametreihin liittyvä epävarmuus pois. Kirjallisuudessa priorin valintaa ja informatiivisuutta on pyritty perustelevaan eri tavoin, ettei priorin ja hyperparametrien valinta olisi täysin subjektiivinen päätös. Pelkkä tutkijan oma näkemys priorin ja hyperparametrien arvoista on altis kritiikille, sillä kyseiset valinnat voivat vaikuttaa merkittävästi aiheesta tehtävään tilastolliseen päättelyyn. Doan, Litterman ja Sims (1984) esimerkiksi valitsivat priorin vaikuttavuuden sen perusteella, millä mallin ennuste saatiin maksimoitua otoksen ulkopuolella. Bańbura ym. (2010) sen sijaan ehdottivat, että priorin vaikuttavuus tulisi valita mallin sovituksen perusteella, kuitenkin niin että sovitteessa huomiodaan myös yliparametrisoinnin riskit. Käytännössä tämä tarkoittaa prioria, jonka vaikuttavuus kasvaa mallin parametrien suhteen. Giannone, Lenza ja Primiceri (2015) sen sijaan esittivät, että mallin priorin ja hyperparametrit voidaan estimoida kuten mallin muutkin parametrit. Tällöin mallin tulkinta on lähempänä frekventististä VAR-mallia, kun kaikki mallin parametrit estimoidaan aineiston perusteella. Käytännössä tämä tarkoittaa, että mallin priorit ja hyperparametrit valitaan sen perusteella, että ne maksimoivat mallin uskottavuusfunktion.

3.1 REUNAUSKOTTAVUUS

BVAR-mallin parametrit estimoidaan integroimalla mallin uskottavuusfunktio parametrien suhteen, eli toisin sanoen pyrimme löytämään parametriarvot, jotka ovat todennäköisimmin muodostaneet tutkittavan aineiston realisaatiot. Kirjoitetaan yhtälö (25) eri muodossa:

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (28)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \Sigma \otimes I_{T-p}) \quad (29)$$

jossa $y \equiv [y_{p+1}, \dots, y_T]'$, $Y \equiv \text{vec}(y)$, $x_t \equiv [1, y'_{t-1}, \dots, y'_{t-p}]'$, $X_t \equiv I_n \otimes x'_t$, $x \equiv [x_{p+1}, \dots, x_T]'$, $X \equiv I_n \otimes x$, $\varepsilon \equiv [\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_T]$, $\varepsilon \equiv \text{vec}(\varepsilon)$, $B \equiv [C, B_1, \dots, B_p]'$ ja $\beta \equiv \text{vec}(B)$. Merkitään vielä selittävien tekijöitä k :lla, joka on $k \equiv np + 1$.

Oletamme priorien kuuluvan Normal-Inverse-Wishart -jakaumien joukkoon, jotka voidaan esittää muodossa

$$\Sigma \sim IW(\Psi, d) \quad (30)$$

$$\beta|\Sigma \sim N(b, \Sigma \otimes \Omega) \quad (31)$$

jossa jakaumia ei yksinkertaisuuden vuoksi ehdollisteta eksplisiittisesti hyperparametrien b , Ω , Ψ ja d suhteen (Giannone ym., 2015). Wishart-jakauma on moniulotteinen yleistyys yksiulotteisesta gamma-jakaumasta, ja sen käänteisjakauma (Inverse-Wishart) toimii konjugaatti-priorina usean muuttujan vektorin kovarianssimatriisille (Koop ja Korobilis, 2010). Konjugaatilla priorilla tarkoitetaan, että sillä ja posteriorilla on sama funktionaalinen muoto (Kilian ja Lütkepohl, 2017). Konjugaateilla prioreilla on useita käytännöllisiä puolia, johon palataan myöhemmin työssä.

Näin ollen β :n ja Σ :n ei-normalisoidut posteriorijakaumat saadaan priorijakauman ja uskottavuusfunktion tulona, mikä voidaan ilmaista seuraavassa muodossa, kun otoksen ensimmäiset p havaintoa kiinnitetään ja priorien Inverse-Wishart -jakaumalle käytetään Giannone ym. (2015) esittämää parametrisointia:

$$p(\beta, \Sigma|Y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n(T-p+k)}{2}} |\Sigma|^{-\frac{T-p+k+n+d+1}{2}} |\Omega|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{\frac{d}{2}} \frac{e^{-\frac{1}{2}tr(\Psi\Sigma^{-1})}}{2^{\frac{nd}{2}} \cdot \Gamma_n(\frac{d}{2})} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left[(Y-X\beta)'(\Sigma \otimes I_T)^{-1}(Y-X\beta) + (\beta-b)'(\Sigma \otimes \Omega)^{-1}(\beta-b) \right]} \quad (32)$$

jossa yhtälön (32) ensimmäinen termi on parametrien priorijakauma ja jälkimmäinen on mallin uskottavuusfunktio. Giannone ym. (2015) muotoilivat jälkimmäisen termi toiseen muotoon, mikä helpottaa reunauskottavuuden johtamisessa.

$$p(\beta, \Sigma|Y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n(T-p+k)}{2}} |\Sigma|^{-\frac{T-p+k+n+d+1}{2}} |\Omega|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{\frac{d}{2}} \frac{e^{-\frac{1}{2}tr(\Psi\Sigma^{-1})}}{2^{\frac{nd}{2}} \cdot \Gamma_n(\frac{d}{2})} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left[(\beta-\hat{\beta})' [X'(\Sigma \otimes I_T)^{-1}X + (\Sigma \otimes \Omega)^{-1}] (\beta-\hat{\beta}) + (\hat{\beta}-b)'(\Sigma \otimes \Omega)^{-1}(\hat{\beta}-b) + \hat{\epsilon}'(\Sigma \otimes I_T)^{-1}\hat{\epsilon} \right]} \quad (33)$$

Reunauskottavuus on ei-normalisoidun posteriorin integraali.

$$p(Y) = \int \int p(Y|\beta, \Sigma) \cdot p(\beta|\Sigma) \cdot p(\Sigma) d\beta d\Sigma \quad (34)$$

Reunauskottavuus saadaan sijoittamalla yhtälö (33) yhtälöön (34) ja ottamalla integraalit β :n ja Σ :n suhteen.

$$p(Y) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_n(\frac{T-p+d}{2})}{\Gamma_n(\frac{d}{2})} |\Omega|^{-\frac{n}{2}} \cdot |\Psi|^{\frac{d}{2}} \cdot |x'x + \Omega^{-1}|^{-\frac{n}{2}} \cdot |\Psi + \hat{\epsilon}'\hat{\epsilon} + (\hat{B} - \hat{b})' \Omega^{-1}(\hat{B} - \hat{b})|^{-\frac{T-p+d}{2}} \quad (35)$$

Konjugaattipriorilla lasketulla reunauskottavuudella on useita hyviä puolia. Yksi niistä on suljettu esitys, jolloin reunauskottavuus koostuu rajallisesta määrästä termejä. Reunauskottavuuden suljettu esitys takaa sen, että posterioria voidaan maksimoida ja simuloida suhteellisen vaivattomasti hyperparametrien suhteen (Giannone ym. (2015)).

Giannone ym. (2015) osoittivat, että edellä esitetty reunauskottavuus koostuu kahdesta merkittävästä termistä, jotka on esitetty yhtälössä (36). Ensimmäinen termi suosii hyperparametrin arvoja, jotka tuottavat mallille pienimmät virhetermit. Jälkimmäinen termi sen sijaan rankaisee huonosta otoksen ulkopuolisesta ennustekyvystä, joka voi johtua virhetermien suuresta priorivarianssista tai parametriestimaatteihin liittyvästä epävarmuudesta.

$$p(y|\gamma) \propto \underbrace{|(V_\epsilon^{posterior})^{-1}V_\epsilon^{prior}|^{\frac{T-p+d}{2}}}_{\text{Sovite}} \cdot \underbrace{\prod_{t=p+1}^T |V_{t|t-1}|^{-\frac{1}{2}}}_{\text{Rankaisu kompleksisuudesta}} \quad (36)$$

missä $V_\epsilon^{posterior}$ ja V_ϵ^{prior} ovat posteriorin ja priorin virhetermien varianssin keskiarvot tai moodit, $V_{t|t-1} = \mathbb{E}_\Sigma[\text{var}(y_t|y_{t-1}, \Sigma)]$ on y_t :n yhden periodin ennustevirheen varianssi, joka on ehdollinen kovarianssimatriisille Σ . Näin ollen mallilla pitäisi lähtökohtaisesti olla hyvä kyky poimia kaikki aineistoon käyttäytymiseen liittyvät ominaisuudet, kuitenkin niin, että se antaa pienen todennäköisyyden kaikille mahdollisille lopputulemille. Tämä on yliparametrisointia kuvaava ominaisuus, josta reunauskottavuus rankaisee. Edellä esitetyn perusteella reunauskottavuus huomio mallin sovituksen suhteessa sen kompleksisuuteen.

Kirjoittajat osoittivat edelle esitetyn tavan valita hyperparametrit tehostavan mallin ennustetarkkuutta sekä tarjoavan mielekkäämpiä arvoja impulssivasteille. BVAR-mallin parametrit estimoidaan simuloimalla ne posteriorijakaumasta Markovin ketjuun perustuvalla Monte Carlo -menetelmällä. Tarkemmin simulointi suoritetaan Metropolis-Hastings -algoritmeilla, jolla simuloidaan posteriorijakaumat hyperparametreille, mistä saadaan piste-estimaatit hyperparametreille. Muut mallin parametrit voidaan nostaa Inverse-Wishart -jakaumasta hyperparametreille ehdollisina.

3.2 METROPOLIS-HASTINGS -ALGORITMI

Bayesilainen analyysi perustuu posteriori-jakaumasta tehtävään päättelyyn. Aina posteriori-jakaumalla ei ole suljettua esitystä, että se voitaisiin esittää jonkin tunnetun jakauman muodossa. Tällöin jakauma voidaan simuloida numeerisin metodein.

Tutkimuksessa käytettävän BVAR-mallin parametrit estimoidaan nostamalla hyperparametreille arvoja simuloituista posteriorijakaumista. Simulointi suoritetaan Metropolisin ja Hastingsin algoritmin (MH) avulla, mikä on Markovin ketjuun perustuva Monte Carlo -algoritmi (MCMC). Se on näytteistysalgoritmi, jolla voidaan generoida likimääräisesti tietyn todennäköisyysjakauman mukainen lukujoukko. MH-algoritmi on suosittu juuri bayesilaisessa tilastotieteessä, jossa ilmenee hyvin monimutkaisia todennäköisyysjakaumia, joiden avulla lasketaan posteriorijakaumia estimoitaville parametreille.

Tyypillisesti MH-algoritmia ei ole perusteltua käyttää, jos tarjolla on helpompia laskennallisia menetelmiä. MH-algoritmi tulee kyseeseen, kun ongelmaan ei löydy standardimuotoista ratkaisua. Esimerkiksi Giannone ym. (2015) esittämä tapa maksimoida reu-

nauskottavuus hyperparametrien suhteen vaati MH-algorimin käyttöä, koska hyperparametreille ei lähtökohtaisesti voida osoittaa ennalta tietyn muotoista jakaumaa, vaan se täytyy simuloida MH-algoritmin avulla.

MH-algoritmillä on seuraava standardimuotoinen esitys:

1. Valitaan simuloitavan hyperparametrin alkuarvo siten, että kyseisessä pisteessä simuloitava tiheysfunktio on nolasta poikkeava
2. Nostetaan hyperparametrin ehdokasarvo γ^* gaussisesta todennäköisyysjakaumasta siten, että keskiarvo vastaa γ^{t-1} :ää ja varianssi vastaa $c \cdot W$, jossa γ^{t-1} on γ :n edellinen nosto ja W hyperparametrien käänteinen Hessin matriisi negatiivisen log-posteriorin huippukohdassa ja c on vakio, jolla pyritään haluttuun prosentuaaliseen hyväksymisasteeseen

3. Asetetaan

$$\gamma^{(t)} = \begin{cases} \gamma^* & \text{todennäköisyydellä } \alpha^{(t)} \\ \gamma^{(t-1)} & \text{todennäköisyydellä } 1 - \alpha^{(t)} \end{cases}$$

jossa

$$\alpha^{(t)} = \min\left(1, \frac{p(\gamma^*|y)}{p(\gamma^{(t-1)}|y)}\right)$$

4. Nostetaan $[\beta^{(t)}, \Sigma^{(t)}]$ Normal-Inverse-Wishart -jakaumasta $p(\beta, \Sigma|y, \gamma^{(t)})$
5. Päivitetään ajanhetken t arvo $t + 1$:een, siirrytään takaisin vaiheeseen kaksi ja jatketaan menettelyä määriteltyyn rajaan saakka

MH-algoritmin hyöty on siinä, ettei parametrien posteriorijakauman funktionaalista muotoa tarvitse tietää. MH-algoritmia varten tarvitaan ainoastaan parametrien priorijakaumat sekä uskottavuusfunktio, joiden avulla saadaan selville kulloisenkin parametriarvon uskottavuus tai todennäköisyys. MH-algoritmi pyrkii arvioimaan, mitkä generoiduista parametriarvoista kuuluvat posteriorijakaumaan ja mitkä eivät. Algoritmi tekee tämän arvioimalla uuden generoidun parametriarvon todennäköisyyden ja aiemman generoidun parametriarvon todennäköisyyden välisen suhteen avulla, kohdan kolme mukaisesti. Mikäli suhde saa yli yhden arvon, uusi generoitu parametriarvo hyväksytään automaattisesti. Alle yhden jääviä parametriarvoja ei automaattisesti hylätä, vaan ne käsitellään hyväksymistodennäköisyyden mukaan tai tarkemmin hyväksymisasteen mukaan.

Ensimmäisessä vaiheessa hyperparametrien alkuarvot pyritään asettamaan siten, että kyseisessä pisteessä niiden tiheysfunktio on nolasta poikkeava. Alkuarvot voidaan selvittää numeerisen maksimoinnin avulla (Giannone ym., 2015) tai ne asetetaan subjektiivisin perustein. Alkuarvot toimivat numeerisen estimoinnin lähtöpisteinä, jolloin seuraava

gaussisesta-jakaumasta nostettu arvo on ehdollinen alkuarvon keskiarvolle sekä varianssille. Ehdokasjakaumasta nostettu arvo hyväksytään todennäköisyydellä $\alpha^{(t)}$ tai hylätään todennäköisyydellä $1 - \alpha^{(t)}$. Mikäli nostettu arvo hylätään, käytetään edellisen noston keskiarvoa seuraavan noston ehdokasjakauman keskiarvona. Nostetun arvon hyväksyminen riippuu nostetun arvon ja edellisen nostetun arvon välisestä suhteesta, kohdan kolme mukaisesti. Mikäli otokselle ehdollinen uusi generoitu parametriarvo on todennäköisempi kuin aiempi generoitu, generoidun parametriarvon $\alpha^{(t)}$ todennäköisyys on yksi kolmannen kohdan mukaan. Jos uusi generoitu parametriarvo ei ole otoksen suhteen yhtä todennäköinen kuin aiempi parametriarvo, hyväksytään uusi generoitu arvo seuraavasti: Nostetaan tasajakaumasta $u \in [0, 1]$ arvo ja verrataan sitä uuden ja aiemman parametriarvon suhteeseen $\alpha^{(t)}$. Mikäli $u \leq \alpha^{(t)}$ niin hyväksymme uuden parametriarvon ja toisaalta hylkäämme sen, jos $u > \alpha^{(t)}$.

Hyväksymisaste tarkoittaa nimensä mukaisesti prosentuaalista lukua, joka kertoo hyväksytyjen parametrinostojen määrän. Tyypillisesti hyväksymisasteelle käytetään jotain haluttua prosentuaalista arvoa, jonka oletetaan sopivan hyvin tutkittavalle aineistolle. Giannone ym. (2015) esimerkiksi käyttivät työssään Metropoli-Hastings -algoritmillemme 20 prosentin hyväksymisastetta generoiduille parametriarvoille, mutta tutkielmassa hyväksymisastetta ei rajata ennalta.

Seuraavaksi Normal-Wishart -jakaumasta nostetaan ehdokkaat parametriarvoille kaavojen (30) ja (31) mukaisesti, mitkä ovat ehdolliset aiemmin hyväksytyille hyperparametrien arvoille, kohdan neljä mukaisesti. Nyt ensimmäinen (MCMC) iteraatio on suoritettu, jonka jälkeen korotamme j :n arvon $j + 1$:een ja toistamme kaikki vaiheet uudelleen. Vaiheita toistetaan haluttu määrä, eikä toistojen määrään ole vakiintunutta käytäntöä. Toistoja on syytä olla riittävästi, sillä suurten lukujen laki ja keskeinen raja-arvolause takaavat MH-algoritmin toimivuuden. MH-algoritmillä tuotetut Markovin ketjut eivät tyypillisesti ole toisistaan riippumattomia, joten yleiset esitykset suurten lukujen laista tai keskeisestä raja-arvolauseesta eivät sellaisinaan ole riittävät. Roberts, Rosenthal ym. (2004) kuitenkin esittävät paperissaan, että MH-algoritmillä voidaan esittää oma suurten lukujen laki sekä keskeinen raja-arvolause. MH-algoritmin suurten lukujen laki takaa, että otoksen keskiarvo lähestyy kohdejakauman keskiarvoa otoskoon lähestyessä ääretöntä, kunhan vain ehdokasjakauman kantaja sisältää kohdejakauman kantajan. MH-algoritmin keskeinen raja-arvolauseella voidaan myös osoittaa, että suurilla otosko'oilla otoskeskiarvo on lähes normaalijakautunut ja sen poikkeama odotusarvosta riippuu ketjun pituudesta.

Käytännössä emme voi olla täysin varmoja, kuvaako jokin simuloitu ketju kovin hyvin kohdejakaumaa. MH-algoritmin testaaminen tapahtuu usein näytehistoriaa silmämääräisesti tutkimalla, missä näytehistoria kuvaa ketjun tilan ajan funktiona. Usein ehdokasjakauman varianssi on keskeinen algoritmin tehokkuutta säätelevä parametri. Liian pieni varianssi vaatii paljon toistoja, sillä ketju on tällöin todennäköisesti hyvin autokorreloitu; toisaalta liian suuri varianssi taas johtaa helposti algoritmin tehottomuuteen. Tällöin ehdokasjakauman varianssin valinta on vaihtokauppa molempien ääripäiden välillä.

Giannone ym. (2015) pyrkivätkin kohdan (2) mukaisesti haarukoimaan varianssin niin, että se johtaisi noin 20 prosentin hyväksymisasteeseen. Kohdan (2) käänteinen Hessen matriisi kuvaa parametrien kovarianssimatriisia halutussa pisteessä, mikä tässä tapauksessa on posteriorijakauman huippu, jonka ympärille havainnot tiivistyvät. Noin 20 prosentin hyväksymisasteen käyttäminen MH-algoritmilla perustuu useisiin lähteisiin, joiden mukaan 23,4 prosentin hyväksymisaste on asympotoottisesti optimaalinen.

MH-algoritmin käytössä on huomiotava, että sen tuottama parametriarvojen ketju on riippuvainen parametrien alkuarvosta sekä Markov ketjulle ominaisesta autokorrelaatiosta. Riippuvuutta valituista alkuarvoista pyritään vähentämään niin sanotulla 'burn in' -periodilla, joka kuvaa aikapisteiden lukumäärää, joka vaaditaan ketjun stabilisoimiseksi. Simuloinnissa tämä toteutetaan niin, että simulointi suoritetaan N määrälle tapauksia, joista M ensimmäistä simuloitua arvoa jätetään huomiotta. Edellä esitetyn perusteella on ilmeistä, että huomiotta jätettäviä tapauksia täytyy olla vähemmän kuin simuloitavia tapauksia, eli ehdon $M < N$ tulee toteutua.

3.3 MINNESTOTAN PRIORI

Litterman (1986) ja Doan ym. (1984) ehdottivat tietynlaista gaussilaista prioria VAR-mallin parametreille, johon viitataan yleensä Minnesotan tai Littermanin priorina. Priorin tarkoitus on kutistaa mallin estimaatit kohti usean muuttujan satunnaiskulku-mallia, joka Litterman (1986) ja Doan ym. (1984) mukaan on osoittautunut varsin tehokkaaksi työkaluksi ennustettaessa persistenttejä aikasarjoja. Persistentillä aikasarjalla viitataan aikasarjaan, jolla on selvä trendi, jonka ympärillä se heiluu satunnaisesti. Nimelliset aikasarjat kuvaavat hyvin tällaisia prosesseja, sillä ne tyypillisesti kasvavat tai laskevat ajan kuluessa, kuitenkin niin että lyhyellä tähtämellä niihin liittyy myös satunnaisuutta. Minnesotan priorin avulla voimme tutkia edellä mainitun kaltaisia stokastisen trendin omaavia prosesseja, joiden tulkinta tavanomaisten VAR-mallien kanssa ei ole aina perusteltua. Stokastisen trendin omaavat prosessit ovat usein niin kutsuttuja yksikköjuuriprosesseja, jotka joudutaan muuntamaan stationaariseksi, että ne ovat käyttökelpoisia VAR-malliin. Muuttujat muunnetaan stationaariseksi tyypillisesti jollain matemaattisella muunnoksella, jonka seurauksena tutkimme muuttujien muutoksia tasojen sijaan. Sims (1980) argumentoi priorien käyttöä juuri siitä syystä, että menetämme pitkän ajan riippuvuuksiin liittyvää tietoa, muuntaessa sarjat stationaariseksi.

Minnesotan priorin toimii siten, että jokaisen yhtälön selitettävän muuttujan ensimmäisen oman viipeen keskiarvo asetetaan yhdeksi, ja muiden viipeiden keskiarvot nolllaksi. Tämä menettely kuvaa parametrien persistenttiyttä, eli oletamme seuraavan arvon olevan lähellä edellistä arvoa – mikä on perusteltua useiden taloudellisten aikasarjojen tapauksessa. Jos priorin keskiarvot pitävät paikkansa, kaikki muuttujat seuraavat satunnaiskävelyä. Vakiotermin priorin varianssit asetetaan lähestyvän äärettömyyttä, mikä kuvaa epävarmuutta vakiotermin parametreihin liittyen. Giannone ym. (2015) esittämällä Minnesotan

priorilla on seuraavat momentit:

$$\mathbb{E}[(B_s)_{ij} | \Sigma] = \begin{cases} 1 & \text{kun } i = j \text{ ja } s = 1 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

$$\text{cov}((B_s)_{ij}, (B_r)_{kl} | \Sigma) = \begin{cases} \lambda^2 \frac{1}{s^\alpha} \frac{\sum_{ik}}{\psi_j / (d-n-1)} & \text{jos } l = j \text{ ja } r = s \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

jossa λ on oleellisin hyperparametri, joka määrää mallin varianssien ja kovarianssien suuruuden, ja näin myös koko priorin vaikuttavuuden (*eng. tightness*). Nollaa lähestyvät lambdan arvot tarkoittavat, että malli selittyisi vain priorin avulla, kun taas ääretöntä lähestyvät lambdan arvot johtaisivat pienimmän neliösumman avulla johdettuun VAR-malliin. \sum_{ik} on kovarianssimatriisin diagonaalelementti, α rankaisee kaukaisempien viipeiden painoarvoa ja Ψ kontrolloi muiden muuttujien viipeiden priorikeskihajonnan vaikutusta selitettävään muuttujaan. Rajoittamalla muuttujien viipeiden keskihajontaa sekä keskinäisiä riippuvuuksia, saadaan malliin muuten estimoitavaa kohinaa rajoitettua tehokkaasti.

Kilian ja Lütkepohl (2017) havainnollistivat Minnesotan priorin seuraavan kahden muuttujan VAR(2)-mallin avulla:

$$y_{1t} = 0 + 1 \cdot y_{t-1} + 0 \cdot y_{2,t-1} + 0 \cdot y_{1,t-2} + 0 \cdot y_{2,t-2} + u_{1t} \quad (37)$$

$(\infty) \quad (\lambda) \quad (\lambda\theta\sigma_1/\sigma_2) \quad (\lambda/2) \quad (\lambda\theta\sigma_1/2\sigma_2)$

$$y_{2t} = 0 + 1 \cdot y_{t-1} + 0 \cdot y_{2,t-1} + 0 \cdot y_{1,t-2} + 0 \cdot y_{2,t-2} + u_{2t} \quad (38)$$

$(\infty) \quad (\lambda\theta\sigma_2/\sigma_1) \quad (\lambda) \quad (\lambda\theta\sigma_2/2\sigma_1) \quad (\lambda/2)$

y_{1t} ja y_{2t} ovat mallin selitettävät muuttujat. Yhtälöiden alla sulussa olevat numerot ovat mallin etukertoimien priorikeskihajonnat. Yhtälöissä (37) ja (38) selitettävälle muuttujalle on asetettu satunnaiskulkua kuvaava priorikeskiarvoksi. Nollasta poikkeavat keskihajonnat kuvastavat mallin valintaan liittyvää epävarmuutta. Keskihajonnan merkitys häviää viipeiden kasvaessa, koska oletamme tuoreimpien viipeiden olevan informatiivisempia kaukaisiin viipeisiin nähden. Vakiotermin keskihajonta on asetettu lähestyvän äärettömyyttä, mikä kuvastaa tietämättömyytämme vakiotermin arvoa kohtaan.

Yhtälöitä (37) ja (38) tulkitessa on hyvä huomioida, ettei Kilian ja Lütkepohl (2017) esittämät etukertoimien priorikeskihajonnat vastaa Giannone ym. (2015) esittämästä kovarianssimatriisista saatavia priorikeskihajontoja. Tämä johtuu siitä, että Kilian ja Lütkepohl (2017) esityksessä kovarianssimatriisin priorikeskiarvot lasketaan otoksesta, kun taas Giannone ym. (2015) käsittelevät kovarianssimatriisin priorikeskiarvot estimoitavana hyperparametrinä. Esityksissä ψ_j ja θ kuvaavat käytännössä samaa hyperparametriä; ero on siinä, että θ on kiinnitetty ja ψ_j estimoidaan aineistolle ehdollisena.

Priorijakauma olettaa parametrien olevaan toisistaan riippumattomia, jolloin kovarianssimatriisi Σ on diagonaalimatriisi, jonka käänteismatriisi voidaan esittää muodossa:

taan rajoitteet esimerkiksi teorian pohjalta. Tutkielmassa esitetään ainoastaan Cholesky-muunnos, sillä se on laskennallisesti helpompi eikä vaadi teorian pohjalta tehtyjä oletuksia muuttujien välisistä vaikutuksista.

Impulssivasteet saadaan VAR-yhtälön liukuvan keskiarvon esityksestä. VAR-malleilla on seuraava liukuvan keskiarvon esitys:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^i \Phi_{i-j} B_j, \quad i = 1, 2, \dots \quad (39)$$

missä $\Phi_0 = I_K$ ja $B_j = 0$ kaikilla $j > p$ ja K on selitettävien muuttujien määrä ja p on VAR-mallin viipeiden lukumäärä. Edellä esitetyn mukaiset impulssivasteet eivät tosin mahdollista välittömien vaikutusten tutkimista muuttujien välillä, koska impulssivasteet johdetaan siten, että etukertointen matriisit sisältävät tietoa vain edellisiltä perioodeilta. Toisaalta edellä esitetyt impulssivasteet eivät myöskään kerro vaikutusten suunnasta muuttujien välillä, jos muuttujien häiriötermit korreloivat keskenään. Oheisia puutteita voidaan korjata esimerkiksi siten, että varianssi-kovarianssimatriisi hajotetaan Cholesky-hajotelmalla osiin $\Sigma = PP'$, jossa P on alakolmio matriisi, jolla on positiiviset diagonaaliarvot. Tällöin muuttujien välisiä reaktioita voidaan tutkia hajotelman avulla saatujen ortogonaalisten impulssivasteiden avulla:

$$\Theta_i^0 = \Phi_i P \quad (40)$$

Koska Cholesky-hajotelma on alakolmiomatriisi, ensimmäisellä rivillä oleva muuttuja ei ole ikinä herkkä muiden muuttujien välittömille shokeille. Viimeisellä rivillä oleva muuttuja sen sijaan on herkkä kaikkien muiden muuttujien välittömille shokeille. Juuri tästä syystä muuttujien ryhmittelyä on syytä miettiä tarkkaan, jos dynaamisia vaikutuksia halutaan tutkia ortogonaalisten impulssivasteiden avulla.

Varianssihakotelma on toinen VAR-analyysiin keskeisesti liittyvä työkalu impulssivasteiden lisäksi. Varianssihajotelma kertoo paljon yhden muuttujan variaatiosta selittyä kunkin muuttujan shokin perusteella. Cholesky-hajotelmaan perustuva varianssihajotelma voidaan esittää muodossa:

$$w_{jk,h} = \frac{\sum_{i=0}^{h-1} (\varepsilon_j' \Theta_i^0 \varepsilon_k)^2}{(\sum_{i=0}^{h-1} \Phi_i \sum_u \Phi_i')_{jj}} \quad (41)$$

missä $w_{jk,h}$ kuvaa varianssihajotelmaa, mikä kertoo paljonko muuttujan j ennustevirheen varianssista selittyä muuttujaan k kohdistetun eksogeenisen shokin perusteella.

4 METODOLOGIA

4.1 TUTKIMUSAINEISTO

Tutkimuksen muuttujat ovat P51K, B1GPH ja F51, missä P51K on bruttoinvestoinnit, B1GPH on tuotannon arvonlisä ja F51 on osakkeet ja osuudet, jota käytetään approksimaationa pääoman markkina-arvolle. Aikasarjat on haettu Tilastokeskuksen sektori- ja rahoitustilinpidon neljännesvuosittaisista tilastoista (Tilastokeskus, 2020a,b). Kaikki muuttujat ovat käypähintaisia, sillä sektori- ja rahoitustilinpidon neljännesvuosiaikasarjat ovat saatavissa ainoastaan käypähintaisina. Sektoritilinpidon aikasarjoista on käytetty TRAMO/SEATS -menetelmällä työpäiväkorjattuja ja kausitasoitettuja aikasarjoja. Rahoitustilinpidon käytettävät aikasarjat ovat alkuperäisessä muodossa, koska niitä ei ole saatavana työpäiväkorjattuna ja kausitasoitettuna. Osakkeiden ja osuuksien aikasarja on tutkittu silmämääräisesti kausivaihtelun varalta, mitä ei ole havaittavissa kuvaajan perusteella.

Tutkimusaineisto käsittää neljännesvuosittaiset havainnot vuosilta 1999–2019. Kaikki aikasarjat ovat vapaasti saatavilla Tilastokeskuksen kotisivuilta, mutta muuttujien tiedot esitetään myös tutkimuksen liitetiedoissa. Yritysten bruttoarvonlisä sekä bruttoinvestoinnit on saatu suoraan sektoritilinpidon neljännesvuositilinpidon aikasarjoista. Yritysten kiinteisiin investointeihin lasketaan tuotannolliset investoinnit, jotka liittyvät suoraan tuotantoon. Investoinnit arvopapereihin ja muihin rahoitusinstrumentteihin jäävät tämän tutkimuksen tarkastelun ulkopuolelle. Investointeihin lasketaan kaikki kiinteän pääoman bruttomuodostus tietyinä vuosineljänneksinä. Myös aineettomat investoinnit, kuten tuotekehitys, lasketaan osaksi kiinteitä investointeja. Tuotantona toimii yrityssektorin yhtenä neljännesvuonna tuottama arvonlisä, joka on myyty loppukäyttäjille. Arvonlisään ei sisälly varastoon tai omaan välituotekäyttöön tuotetut tuotteet tai palvelut. Osakkeet ja osuudet F51 on saatu rahoitustilinpidon neljännesvuosittaisista aikasarjoista, missä kyseiseen muuttujaan sisältyy ainoastaan yritysten velat muille talouden sektoreille. Toisin sanoen yritysten osakkeiden ja osuuksien saatavia muilta sektoreilta ei huomioida tutkimuksessa. Kaikki muuttujat ovat ilmoitettu miljoonissa euroissa.

Kyseiset muuttujat valikoituivat tutkittavaan systeemiin teoreettisen kirjallisuuden perusteella. Tyypillisesti investointeja selitetään teoreettisessa kirjallisuudessa tuotannon funktiona. Tuotanto määrittelee optimaalisen investointien tason, mutta tehdyt taustaoletukset vaikuttavat siihen, minkä tekijöiden oletetaan vaikuttavan investointipäätöksiin. Yleensä selittävinä muuttujina ovat joko tuotanto tai pääoman markkina-arvo. Käytännössä tuotannon taso on ilmeinen investointeja selittävä tekijä, mutta se ei sellaisenaan takaa mitään optimaalista määrää investointeille. Pääoman markkina-arvo sen sijaan takaa optimaalisen investointisäännön, mikäli Hayashi (1982) esittämät oletukset pitävät paikkansa. Tällöin pääoman markkina-arvon ja pääomakannan uushankintahinnan välinen suhde määrittelee, milloin yrityksen kannattaa investoida uuteen käyttöpääomaan ja milloin hankkia se pääomamarkkinoilta. Toisaalta Gilchrist ja Himmelberg (1998) esit-

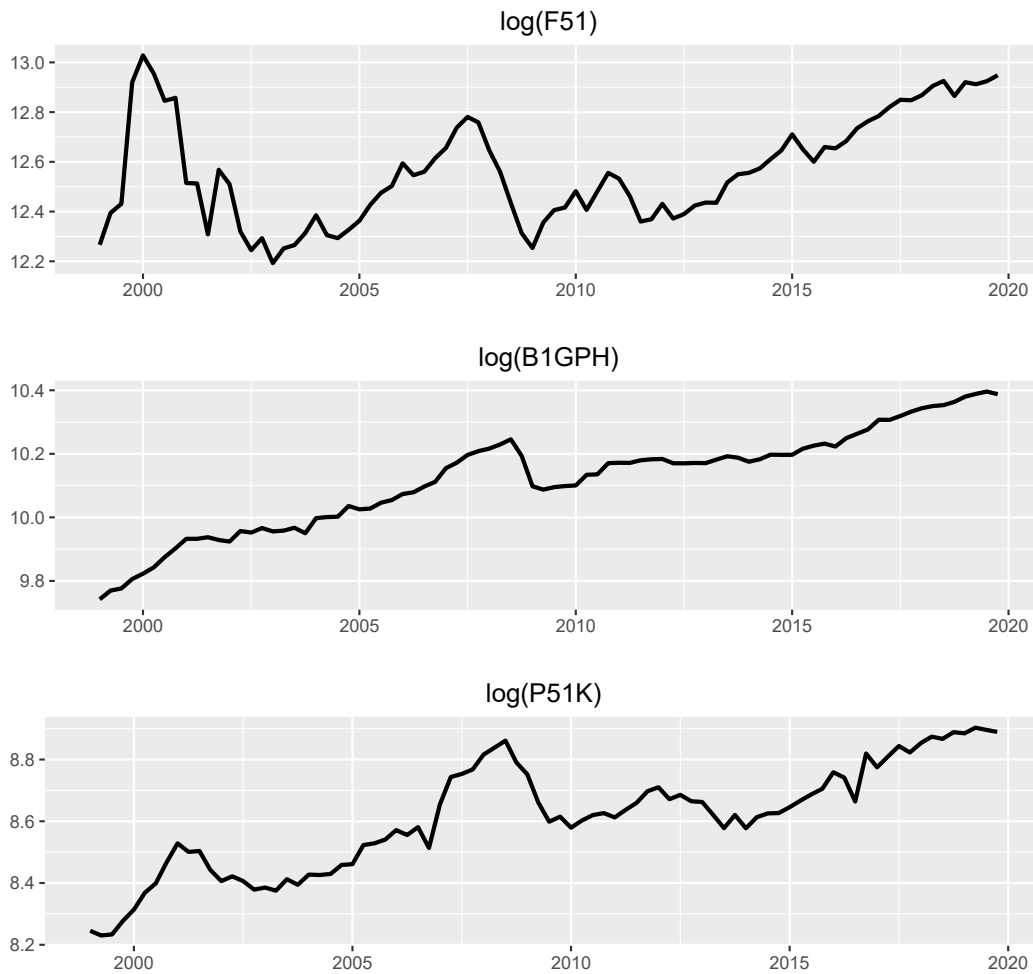
tivät yritysten paneeliaineistolla, että tuotannon tason ja pääomakannan välinen suhde kuvaa tietyin edellytyksin pääoman marginaalista tehokkuutta. Love ja Zicchino (2006) puolestaan sisällyttivät molemmat tekijät investointeja selittävään malliin ja tulkitsivat niiden olevan fundamentaaliset tekijät, jotka selittävät investointeja.

Tutkimuksessa investointeja selitetään juuri tuotannon tasolla ja pääomakannalla, koska niiden oletetaan olevan keskeisimmät investointidynamiikkaan liittyvät tekijät. Tutkimuksessa mitään muuttujista ei tosin jaeta pääomakannalla, koska kyseistä tietoa ei ole saatavissa neljännesvuosittaisille sektoritilinpidon aikasarjoille. Tämän ei pitäisi kuitenkaan aiheuttaa ongelmaa, koska käytännössä tutkittavan systeemin relaatiot pysyvät samana siitä huolimatta, jaetaanko systeemin muuttujat samalla tekijällä vai ei. Vektoriautoregressiivisessä kehikossa tämä ei tosin pidä paikkaansa, koska selittävien muuttujien ja selitettävän muuttujan jakajat eivät ole identtiset. Tutkielman kannalta pelkkien logaritmisoitujen tasomuotoisten muuttujien tulkinnan pitäisi olla riittävä tutkittavan investointidynamiikan ymmärtämiseksi. Tutkimuksessa käytettävän BVAR-mallin tulkinnan kannalta on oleellista tunnistaa muuttujien välinen dynamiikka, koska muuten BVAR-mallin pohjalta tehty päättely voi jäädä vajavaiseksi.

Kaikista muuttujista on otettu luonnolliset logaritmit useammasta syystä. Logaritmisoinnilla saadaan poistettua muuttujien ajan suhteen kasvavan varianssin vaikutukset. Kasvava varianssi on ominainen nimellisiä aikasarjoja kuvaava piirre, mikä johtuu yleensä nimellisten hintojen noususta, eli inflaatiosta. Samankokoinen suhteellinen muutos eri ajankohtina implikoi eri varianssin arvoja, koska sama reaalin tekijä saa eri hinnan ajankohdasta riippuen. Logaritmisointi toisaalta helpottaa myös mallin muuttujien tulkintaa, sillä logaritmin differenssi on hyvä likiarvo prosenttimuutokselle, jolloin mallin muuttujien muutokset voidaan tulkita prosentuaalisiksi muutoksiksi mallin muissa muuttujissa. Muuttujien logaritmisoidut aikasarjat on esitetty kuviossa 1.

Kuvion 1 perusteella bruttoinvestointien ja tuotannon arvonlisän logaritmisoidut aikasarjat kehittyvät samansuuntaisesti, mikä antaa olettaa, että muuttujien välillä on keskinäistä riippuvuutta. Bruttoinvestointien aikasarja vaikuttaa kuitenkin tuotannon arvonlisän aikasarjaa volatiilimmalta. Osakkeiden ja osuuksien aikasarjan käytös erottuu bruttoinvestointien ja tuotannon arvonlisän aikasarjoista, mutta siitä erottuu vähäisiä yhtäläisyyksiä bruttoinvestointien aikasarjan kanssa - varsinkin investointien kasvun kiihtyminen vaikuttaa osuvan yhteen osakkeiden ja osuuksien kasvun kanssa. Vaikka silmämääräisellä tarkastelulla on omat etunsa ja hyötynsä, sen perusteella ei voida tehdä tilastollista päättelyä, jota varten tarvitsemme tilastollisia menetelmiä.

Mallin muuttujille tehdään myös muutamat tilastolliset testit, ennen kuin ne viedään lopulliseen tutkimusmalliin. VAR ja BVAR-mallien etukertoimien ja korrelaatioiden tarkastelu on hyödytöntä, jos olemme kiinnostuneita muuttujien dynaamisista vaikutuksista. Etukertoimet ja kovarianssimatriisi toki kertovat, kuinka muuttujat vaikuttavat toisiinsa, mutta vaikutusten suunnasta ne eivät kerro mitään. Koska kiinnostus on investoinneissa, on tärkeää tietää vaikuttaako tuotanto ja pääoman markkina-arvo investointeihin vai in-



Kuvio 1: Muuttujien logaritmisoidut aikasarjat

vestoinnit tuotantoon ja pääoman markkina-arvoon. Myös molempiin suuntiin kulkevat vaikutussuhteet eivät ole poissuljettuja, sillä mallin kaikkia muuttujia voidaan lähtökohdaisesti pitää endogeenisina.

Muuttujien vaikutussuuntia voidaan tutkia Granger (1969) esittelemällä Granger-kausalisuuden käsitteellä. Granger-kausalisuutta ei tule kuitenkaan sotkea kausalisuuden käsitteeseen, sillä Granger-kausalisuus kertoo ainoastaan sen, auttaako lisämuuttujan viipeet ennustamaan tutkittavaa muuttujan kehitystä paremmin kuin pelkät muuttuja omat viipeet. Vaikutussuhteiden tunnistaminen on oleellista myös impulssivasteiden tulkinnan kannalta, jos olemme kiinnostuneita muuttujien välittömistä vaikutuskanavista. Esimerkiksi Cholesky-muunnoksen kannalta on oleellista tietää, miten muuttujat vaikuttavat toisiinsa, ja kuinka ne tulee ryhmitellä impulssivastetarkastelua varten. Muuttujien ryhmitelyllä on merkitystä, sillä järjestys voi vaikuttaa impulssivasteisiin. Muuttujille suoritetun Granger-testin tulokset on esitetty taulussa 1.

Taulun 1 perusteella tuotanto sekä osakkeiden ja osuuksien muutokset auttavat ennustamaan investointeja. Sama ei kuitenkaan päde toisinpäin, eli investoinnit eivät auta ennustamaan tuotannon sekä osakkeiden ja osuuksien kehitystä. Tulokset ovat linjassa teo-

Taulukko 1: Granger-kausalisuustestin tulokset

<i>Nollahypoteesi</i>	<i>Havainnot</i>	<i>F-testi</i>	<i>p-arvo</i>
B1GPH Granger aiheuttaa P51K:n	71	7.7669	$2.994e-5^{***}$
P51K Granger aiheuttaa B1GPH:n	71	1.6158	0.1798
F51 Granger aiheuttaa P51K:n	71	2.9647	0.02527*
P51K Granger aiheuttaa F51:n	71	1.3432	0.2625
B1GPH Granger aiheuttaa F51:n	71	1.856	0.1277
F51 Granger aiheuttaa B1GPH:n	71	2.5705	0.04513*

*Huom: (***) ja (*) tarkoittavat nollahypoteesiin hylkäämistä <0.1% ja 5% merkitsevyystasoilla*

reettisen kirjallisuuden kanssa, sillä sekä tuotanto että osakkeiden ja osuuksien arvo näyttävät vaikuttavan investointeihin. Osakkeet ja osuudet auttavat ennustamaan myös tuotantoa, mutta tuotanto ei anna lisäarvoa osakkeiden ja osuuksien ennustamisessa. Tämä ei kuitenkaan ole yllätys, koska osakkeiden ja osuuksien arvoa pidetään muuttujista selvästi eteenpäin katsovimpana, sillä tulevaisuuden odotukset sisältyvät vahvasti pääoman markkina-arvoihin.

Kaikki muuttujat ovat I(1)-prosesseja, eli niistä jokainen omaa yhden yksikköjuuren. Yksikköjuurella tarkoitetaan aikasarjan integroitumisen astetta, missä integroitumisen aste kertoo differenssien lukumäärän, mikä on otettava huomioon, jotta aikasarjasta saadaan stationaarinen. Tavanomaisten VAR-mallien tapauksessa muuttujat tutkitaan vielä yhteisriippuvuuden osalta, minkä jälkeen niille sovellettaisiin joko VEC- tai VAR-mallia riippuen yhteisriippuvuustestin tuloksista. Mikäli yhteisriippuvuutta ei havaita, muuttujat differoitaisiin ja VAR-mallia sovellettaisiin muutosajaksarjoille. Muutosajaksarjojen tulkinta perustuu ainoastaan lyhyen tähtäimen muutosten tulkintaan pitkän ajan riippuvuuksien kustannuksella. Muuttujien ollessa keskenään yhteisriippuvia, niitä voitaisiin mallintaa VEC-mallilla, joka huomio lyhyen tähtäimen poikkeamat pidemmän ajan tasapainorelaatioista. VEC-mallissa muuttujien tasapainorelaatiota kuvaa yhteisriippuva vektori, mikä kattaa tiedon pitkän aikavälin riippuvuuksista. VEC-mallien ongelmana on se, että yhteisriippuva vektori kertoo yhteisriippuvuuden tietyllä tilastollisella merkitsevyydellä. Tämä tarkoittaa, että voimme olla varmoja yhteisriippuvuudesta tietyllä todennäköisyydellä, mutta emme voi ikinä olla täysin varmoja löytyykö muuttujien välillä todellisuudessa yhteisriippuvaa vektoria.

Yhteisriippuvuustesti tehtiin mallissa käytettävälle otokselle, eli havaintoarvoille jotka kattavat ajanjakson 1999Q1-2017Q4. Johanssenin yhteisriippuvuustestin perusteella

systemissä saattaa olla yksi yhteisriippuva vektori alle 10 prosentin merkitsevyytasolla. Tuloksen perusteella on syytä olettaa, ettei systeemin muuttujien välillä ole yhteisriippuvuutta tai ainakaan sen osoittamiseen ei ole tilastollisesti vahvaa evidenssiä. Toki on hyvä muistaa, että tässäkin tapauksessa yhteisriippuvuustestin tulokset riippuvat viipeiden määrästä, minkä pohjalta testi tehdään. Esimerkiksi lyhyemmällä viipeiden arvoilla, testi implikoi yhteisriippuvuutta muuttujien välillä. Tässä kohdataan Kilian ja Lütkepohl (2017) esille nostama yhteisriippuvuustesteihin liittyvä ongelma. Yhteisriippuvuustestit kertovat ainoastaan todennäköisyyden sille havaitaanko yhteisriippuvuutta vai ei, mistä ei välttämättä voida varmistua todellisuudessa. Tutkielmassa ei esitetä Johanssenin yhteisriippuvuustestin määritelmää eikä tuloksia, sillä ne eivät varsinaisesti vaikuta tutkielmassa käytettävien menelmien valintaan. Esimerkiksi Brooks (2008) ja Lütkepohl (2005) käyvät kattavasti yhteisriippuvuustestiin liittyvää teoriaa ja terminologiaa läpi.

Muuttujille ei tehdä enempää tilastollisia testejä tai muunnoksia, sillä edellä tehdyt toimenpiteet riittävät tutkielmassa käytettäviä BVAR-malleja ja tietyin edellytyksin myös VAR-mallia varten, johon palataan myöhemmin tutkielmassa. Kaikki muuttujat näyttävät omaavan stokastisen trendin, joten niitä kuvataan mallissa satunnaiskulkuna, joka huomioidaan malliin sovellettavan Minnesotan priorin avulla. Granger-kausalisuustestien perusteella meillä on hyvä arvio siitä, kuinka muuttujat on syytä ryhmitellä ortogonaalista impulssivastetarkastelua varten.

4.2 TUTKIMUSMALLI

Suurin ero BVAR- ja VAR-mallien välillä on se, että VAR-malli käsittelee mallin aineistoa satunnaisena ja parametrejä vakioina, kun taas BVAR-mallissa aineisto on kiinnitetty ja parametrit ovat satunnaisia. Yritysten kokonaisinvestoinnit ovat tutkimuksen kannalta kiinnitetyt, jolloin aineistolle ei voi tehdä satunnaisotantaa. Investointeihin ja muihin tutkimuksessa käytettäviin aikasarjoihin liittyvä epävarmuus voi johtua ainoastaan mahdollisesta mittausvirheestä. Tässä mielessä BVAR-mallin käyttö on perusteltua, sillä tutkittava aineisto ei ole satunnainen. Aikasarjojen käytöstä ei pysty toistamaan uudella otoksella, jolla voisimme validoida otoksen implikoimia tuloksia. BVAR-mallin käyttöä tukee myös se, että kiinnostus on yrityssektorin investointikehityksestä juuri Suomessa, eikä tarkastelua ole tarkoitus laajentaa Suomen ulkopuolelle. BVAR-malli mahdollistaa myös yli ajan muuttuvien riippuvuuksien joustavamman käsittelyn, koska etukertoimet ovat lähtökohdaisesti satunnaisia. Tämän pitäisi auttaa poimimaan mahdolliset rakenteelliset muutokset eri ajan hetkien välillä, mitkä voivat johtua esimerkiksi yrityssektorin toimialarakenteen muutoksista tutkittavana ajanjaksona.

BVAR-mallin käyttö on perusteltua myös tutkimusasetelman kannalta, sillä bruttoinvestointeja selitetään kolmen muuttujan ja neljän viipeen avulla, jolloin estimoitavien parametrien määrä kasvaa eksponentiaalisesti valittavien viipeiden ja muuttujien mukaan. Esimerkiksi VAR(4)-mallille, jossa on kolme muuttujaa ja vakiotermi, täytyy estimoida

39 parametriä aineistosta, jossa on 254 havaintoa. Tämä on tyypillinen yliparametrisointia kuvaava tilanne, jossa helposti päädytään estimoidaan paljon kohinaa, mikä puolestaan voi johtaa parametrien varianssin kasvamiseen. BVAR-malleissa oheista ongelmaa vähennetään lisäämällä malliin rakennetta, joka antaa muuttujien aikaisemmille arvoille pienemmän painoarvon tuoreempiin arvoihin verrattuna, sekä vähentää muiden selittävien muuttujien viipeiden vaikutusta suhteessa muuttujan omiin viipeisiin. Tutkimusmallissa lisärakenne tuodaan Minnesotan priorilla, joka esiteltiin aiemmassa luvussa tarkemmin.

Tutkimuksen BVAR-mallien robustisuutta tutkitaan suhteessa VAR(4)-malliin, joka estimoidaan pienimmän neliösumman menetelmällä. Tämä tehdään siitä syystä, ettei muuttujia tarpeettoamsti pakoteta kohti satunnaiskulkua, mikäli se ei ole niitä todellisuudessa kuvaava piirre. BVAR-mallit valikoituivat tutkimusmalleiksi useasta syystä, joista yksi oli yliparametrisoinnin mahdollisuus, jota kyseisillä malleilla saadaan hallittua tavanomaista VAR-mallia paremmin. Jos VAR-mallissa kaikki selittävät muuttujat ovat oleellisia, yliparametrisointia ei välttämättä pääse tapahtumaan, ja priorin muodossa tuotu lisätieto voi ainoastaan sotkea tutkimusaiheesta tehtävää päättelyä. Tutkimusmallien keskinäinen vertailu tehdään sovitteiden sekä ennusteiden keskineliövirheiden perusteella.

Tutkimuksen BVAR-mallissa selitettävää muuttujaa selitetään sen omilla sekä mallin muiden muuttujien viipeiden avulla. Koska tutkittavat aikasarjat ovat neljännesvuosittaisia, mallin viivepituudeksi valittiin neljä viipeetä. Annetaan $Y_t = (Y'_{1t}, \dots, Y'_{nt})$ olla selitettävien aikasarjojen vektori, jolla on seuraava matriisimuotoinen esitys:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_p Y_{t-p} + \epsilon_t \quad (42)$$

missä α on n -ulotteinen vakiovektori, β_1, \dots, β_p ovat parametrien matriisit sekä ϵ on n -ulotteiden valkoisen kohinan prosessi, jonka kovarianssimatriisi on $\mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_t') = \Psi$.

Parametriin liittyvä prioritieto tiivistetään yleensä todennäköisyysjakaumaan $g(\beta)$, missä aineiston todennäköisyysjakauma on ehdollinen parametrin β tietylle arvolle $f(y|\beta)$. Jälkimmäinen funktio on identtinen uskottavuusfunktion $l(\beta|y)$ kanssa ja molemmat voidaan yhdistää Bayesin teoreeman avulla:

$$f(\beta, y) = g(\beta|y)f(y)$$

ja

$$g(\beta|y) = \frac{f(y|\beta)g(\beta)}{f(y)}$$

missä $f(y)$ kuvaa aineiston ehdotonta jakaumaa, ja mikä on vakio sekä parametrissa β riippumaton, kun otos on kiinnitetty. Prioritieto sekä aineisto voidaan yhdistää uskottavuusfunktion ja priorijakauman funktiona:

$$g(\beta|y) \propto f(y|\beta)g(\beta) = l(\beta|y)g(\beta) \quad (43)$$

missä \propto viittaa siihen, että yhtälön oikea puoli on suhteellinen yhtälön vasemman puolen kanssa. Yhtälössä $g(\beta|y)$ on posteriori todennäköisyysjakauma, joka pitää sisällään kaiken tiedon mitä tiedämme parametrissa β , päivitettyämme aineistoon liittyvät prioriuskomukset tutkittuamme aineistoa. Bayesilaisessa analyysissä kaikki estimointi ja päätely tehdään posterioriin jakaumaan liittyen. Bayesilaista päättelyä on esitetty tarkemmin muun muassa Kilian ja Lütkepohl (2017) ja Lütkepohl (2005) kattavissa teoksissa.

Litterman (1986) ja Doan ym. (1984) ehdottivat tietynlaista gaussilaista prioria VAR-mallin parametreille, joihin viitataan yleensä Minnesotan tai Littermanin priorina. Priorin tarkoitus on kutistaa mallin estimaatit kohti usean muuttujan satunnaiskulku-mallia, joka Litterman (1986) ja Doan ym. (1984) mukaan on osoittautunut varsin tehokkaaksi työkaluksi ennustettaessa polkuriippuvia aikasarjoja. Polkuriippuvalla aikasarjalla viitataan aikasarjaan, joka on vahvasti riippuvainen aikaisemmista arvoistaan. Nimelliset aikasarjat kuvaavat hyvin tällaisia prosesseja, sillä ne tyypillisesti kasvavat tai laskevat ajan kuluessa, kuitenkin niin että lyhyellä tähtämellä niihin liittyy myös satunnaisuutta. Minnesotan priorin avulla voimme tutkia edellä mainitun kaltaisia stokastisen trendin omaavia prosesseja, joiden tulkinta tavanomaisten VAR-mallien kanssa ei ole aina perusteltua. Stokastisen trendin omaavat prosessit ovat usein niin kutsuttuja yksikköjuuriprosesseja, jotka joudutaan muuntamaan stationaariseksi, että ne ovat käyttökelpoisia VAR-malliin. Muuttujat muunnetaan stationaariseksi tyypillisesti jollain matemaattisella muunnoksella, mikä seurauksena tutkimme muuttujien muutoksia tasojen sijaan. Sims (1980) argumentoi priorien käyttöä juuri siitä syystä, että menetämme pitkän ajan riippuvuuksiin liittyvää tietoa, muuntaessa sarjat stationaariseksi.

Minnesotan priorin toimii siten, että jokaisen yhtälön selitettävän muuttujan ensimmäisen oman viipeen keskiarvo asetetaan yhdeksi ja muiden viipeiden keskiarvot nollassi. Tämä menettely kuvaa parametrien polkuriippuvuutta, eli oletamme seuraavan arvon olevan lähellä edellistä arvoa – mikä on perusteltua useiden taloudellisten aikasarjojen tapauksessa. Jos priorin keskiarvot pitävät paikkansa, kaikki muuttujat seuraavat satunnaiskävelyä. Vakiotermin priorin varianssit asetetaan lähestyvän äärettömyyttä, mikä kuvaa epävarmuutta vakiotermin parametreihin liittyen. Parametrimatriisien odotusarvot ja momentit asetetaan kappaleessa 3.3 esitettyjen määritysten mukaisesti.

BVAR-malleja verrataan myös tavanomaiseen frekventistiseen VAR-malliin, joka on estimoitu pienimmän neliösumman menetelmällä. Estimoitava yhtälö on vastaavaa muotoa kuin yhtälö (42), mutta nyt satunnaisuus liittyy mallin muuttujiin eikä niiden etukertoihin. Käytännössä tämä tarkoittaa, että valitsemme estimaattorit, jotka minimoivat mallin sovituksen ja todellisten havaintojen erot. Tämä tapahtuu siten, että otamme derivaatan residuaalien tulosta ja asetamme derivaatan nolnaan. Tämä toki edellyttää residuaalien normaalisuutta ja toisistaan riippumattomuutta, jotta estimaattori saadaan johdettua, mikä asettaa mallille tiukemmat rajoitteet Bayesilaiseen estimointiin verrattuna. VAR-mallin estimaattorit voidaan esittää muodossa

$$\hat{B} = YX'(XX')^{-1} \quad (44)$$

jossa X on selittävien muuttujien havaintoarvojen matriisi.

Tyypillisesti VAR-mallia sovelletaan stationaarisille tai stationaariseksi muunnelluille muuttujille. Tähän löytyy useampi syy, mutta tärkeimmät lienevät mallin tulosten uskottavuus ja impulssivasteiden realistisuus. Kun mallin muuttujat eivät ole stationaarisia, mallin estimaattoreista ei voida tehdä tilastollista päättelyä, koska päättelyssä hyödynnettävien t - ja F -jakaumien asymptootiset edellytykset eivät toteudu ei-stationaarisille muuttujille Brooks (2008). Toinen seikka liittyy impulssivasteisiin, sillä ei-stationaarisilla muuttujilla alkuperäisen shokin vaikutukset eivät välttämättä häviä ollenkaan ajan kuluessa, mitä voi olla hankala perustella. Tätä ominaisuutta kutsutaan polkuriippuvuudeksi, mikä on ominainen piirre satunnaiskuluksi kutsutulle dynamiikalle. Brooks (2008) mukaan ei-stationaariset muuttujat voivat johtaa myös harhaanjohtavaan regressioon (Spurious regression), jolloin toisistaan täysin riippumattomat sarjat voivat antaa mallille korkean selityksasteen. Korkea selityksaste voi johtua esimerkiksi siitä, että muuten toisistaan riippumattomat sarjat voivat omata samansuuntaisen trendin. Toisaalta juuri tämän takia aihetta tutkitaan myös BVAR-malleilla, koska harhaanjohtava regressio ja yliparametrisointi ovat saman ilmiön kaksi eri puolta. Kun malliin estimaattoreihin sisällytetään virheellisesti kohinaa mallin dynamiikkaa kuvaavana tekijänä, päädyimme korkeaan selityksasteeseen, jolle ei kuitenkaan löydy todellisuudessa mitään perustetta.

Aikasarjojen stationaariseksi saattamisessa on omat haasteensa, eikä se aina ole yksiselitteistä Brooks (2008) s.320-326. Muunnokset voivat hävittää tutkittavan systeemiin dynamiikkaa, jolloin joudumme luopumaan osasta mallia kuvaavista piirteistä, joiden rikkaan dynamiikan kuvaamisessa VAR-mallit ovat parhaimmillaan. Tutkielmassa on keskeisesti haluttu analysoida tasomuotoisia aikasarjoja differoitujen aikasarjojen sijaan, koska differenssiaikasarjat hävittävät mahdollisiin pidemmän aikavälin riippuvuuksiin sisältyvän tiedon. Tässä BVAR-mallit pääsevät paremmin oikeuksiinsa, sillä niiden tulkinta ei riipu vastaavanlaisesta tilastollisesta päättelystä kuin VAR-mallin. VAR-mallin tuloksia analysoitaessa on syytä muistaa kaikki sudenkuopat, joita ei-stationaariset muuttujat voivat aiheuttaa.

Impulssivasteita tutkimalla voidaan havaita muuttujien keskinäiset dynaamiset vaikutukset, jotka syntyvät valitun mallin perusteella. Edellä esitetyn perusteella ei kuitenkaan tiedetä, mikä esitetyistä malleista mimikoi parhaiten aineiston tuottanutta prosessia. Frekventistisessä analyysissä mallien paremmuutta voitaisiin vertailla selityksasteen avulla, mikä kertoo kuinka paljon mallin selittävien muuttujien varianssi selittää selitettävän muuttujan varianssista. BVAR-malleille ei ole määritelty selityksastetta, jolloin parhaan mallin arvioiminen selityksasteen perusteella ei käy päinsä. Toisaalta korkeankin selityksasteen omaavan mallin selityskyky voi jäädä matalaksi yliparametrisoinnin takia, jolloin korkea selityksaste voi ainoastaan implikoida siitä, että malliin on päädytty estimoimaan

kohinaa malliin kuuluvana osana. Mallien vertailu tehdään mallien sovitteita ja ennusteita tutkimalla. Sovitteelle ja ennusteelle voidaan laskea keskineliövirheen neliöjuuri (Root mean squared error), joka kuvaa estimaattorin ja todellisen havaintoarvon välistä eroa. Toisin sanoen, mitä pienemmän arvon keskineliövirheen neliöjuuri saa, sitä paremmin estimaattori pystyy kuvaamaan todellisia havaintoarvoja.

4.3 PRIORIEN JA PARAMETRIEN ALKUARVOJEN VALINTA

Prioriksi valitaan Minnesotan priorin, joka on Kilian ja Lütkepohl (2017) mukaan osoittautunut toimivaksi valinnaksi empiirisessä analyysissä. Hyperparametrit valitaan Giannone ym. (2015) osoittamalla tavalla, jolloin hyperparametrejä käsitellään estimoitavina parametreina, sen sijaan että ne valittaisiin subjektiivisin perustein. Hyperparametreille määritellään jakaumat, joista tehdään riittävästi satunnaisia nostoja parametriarvojen arvioimiseksi. Hyperparametrit optimoidaan posterior-jakaumasta Metropolis-Hastings -algoritmin avulla, asettamalla hyperparametrien λ ja α priori-jakaumille moodi, keskijakauma sekä ala- ja ylärajat, joiden suhteen optimointi suoritetaan. Optimoinnissa moodi, keskijakauma sekä ala- ja ylärajat toimivat parametrin uskottavina arvoina, jotka määrittävät kohdejakauman. Ala- ja ylärajat asetetaan subjektiivisin perustein ja ne määrittelevät hylkäykseen johtavat rajat jakaumasta nostetuille parametriarvoille, jotka oletetaan ei-uskottaviksi. Muuttujien priorijakaumien oletetaan olevan gamma-jakautuneita, joiden arvojoukko on positiivinen reaalitylukujen joukko. Jakaumaoletus tehdään lähinnä siitä syystä, ettei hyperparametreille ole määritelty negatiivisia arvoja.

Vaikka hyperparametrien alkuarvot valittaisiin huonosti, riittää että hyperparametrien arvojen sallitaan vaihtelevan jakauman moodin ympärillä. Riittävä vaihtelu takaa sen, että MH-algoritmi saa muodostettua "järkevä" kohdejakauman. Liian pieni vaihtelu johtaisi simuloituihin hyperparametrien arvoihin, jotka olisivat hyvin lähellä valittua hyperparametrien alkuarvoa. Tällöin simuloitujen hyperparametrien hyväksymisaste on hyvin suuri, mutta simuloitu hyperparametrien ketju konvergoituisi hitaasti kohti kohdejakaumaa. Toisaalta liian suuri vaihtelu johtaa myös hitaaseen konvergoitumiseen, joka johtuu taas turhan alhaisesta hyväksymisasteesta, jolloin hyväksytyjä arvoja muodostuu hitaasti. Tässä tutkimuksessa riittävä konvergoituminen pyritään takaamaan valitsemalla kohdejakauman parametrit niin, että MH-algoritmin hyväksymisaste on noin 30 prosenttia kaikista simuloituista hyperparametrien arvoista. Tämä on samaa suuruusluokkaa aiemmassa luvussa esitetyn 23,4 prosentin asympotoottisesti optimaalisen hyväksymisasteen kanssa.

Hyperparametrien arvot optimoidaan siten, että ne maksimoivat mallin soviteen otoksessa Giannone ym. (2015) osoittamalla tavalla. Koska priorien, ja tässä tutkimuksessa hyperparametrien, valitut alkuarvot vaikuttavat mallin tuloksiin, hyperparametreille valittiin kahdet vaihtoehtoiset arvot vertailun vuoksi. Näin ollen estimoitavia BVAR-malleja on kaksi kappaletta: nimetään ne BVAR(4) 1 ja BVAR(4) 2 -malliksi. Suluissa oleva numero neljä viittaa viipeiden lukumäärään. BVAR(4) 1 ja BVAR(4) 2 -mallien lisäksi tut-

kimus suoritetaan myös tavanomaista VAR(4)-mallia hyödyntäen, jonka tuloksia voidaan verrata BVAR(4)-mallien implikoimiin tuloksiin.

Alkuarvot λ :n optimointia varten asetetaan malleissa seuraavasti: BVAR(4) 1 -mallin uskottavuudeksi (moodi) asetetaan yksi ja BVAR(4) 2 -mallin uskottavuudeksi asetetaan kaksi. Keskihajonnaksi molemmissa malleissa asetetaan 0.4, jotta λ :n arvojen sallitaan vaihtelevan moodin ympärillä. Keskihajonta kuvaa periaatteessa varmuutta, jonka liitämme moodin arvoon. Jos moodin alkuarvo on valittu huonosti, riittävän suuri keskihajonta onnistuu nappaamaan aineistosta saatavan tiedon, joka korjaa λ :n posterioria arvoa. Optimoinnin alarajaksi λ :n suhteen valittiin 0.001 ja ylärajaksi 5 molemmissa malleissa, jotta mallit eivät redusoidu pelkäksi yksittäisen muuttujan satunnaiskuluksi $\lambda \rightarrow 0$ tai tavanomaiseksi VAR-malliksi $\lambda \rightarrow \infty$. Molemmissa malleissa viipeiden kasvaessa pienenevän varianssin vaikutusta kuvaavan α :n moodiksi valittiin 2, keskihajonnaksi 0.25 sekä optimoinnin alarajaksi 1 ja ylärajaksi 3. Vakiotermin varianssi sai molemmissa malleissa arvon 10 000 000, joka kuvaa kyseisen parametrin arvoon liittyvää epävarmuutta. Valinnoissa noudatettiin moodin arvoja lukuun ottamatta Giannone ym. (2015) esittämiä arvoja, eikä alkuarvoihin kiinnitetty sen enempää huomiota. Alkuarvot on yritetty valita siten, että ne ohjautuvat kohti "todellisia" arvoja optimoinnin perusteella. Muiden muuttujien keskihajonnan vaikutusta selittävään muuttujaan kuvaavan Ψ :n moodi asetetaan mallin varianssin perusteella.

Giannone ym. (2015) käyttämät optimoinnin alkuarvot noudattavat Sims ja Zha (1998) käyttämiä alkuarvoja hyperparametreille, jotka ovat osoittautuneet hyviksi valinnoiksi tutkittaessa Yhdysvaltojen taloudellisia aikasarjoja. Tässä tutkimuksessa kyseiset alkuarvot eivät toimineet, sillä optimoinnin tuloksena lambda sai lähellä nollaa olevan arvon, jonka perusteella kaikki muuttujat redusoituisivat pelkiksi priorin esittämiksi satunnaiskulkuprosesseiksi. Tämä voi mahdollisesti johtua siitä, että systeemi optimoidaan kaikkien muuttujien suhteen, jolloin satunnaiskulku voi olla jotain systeemin muuttujaa enemmän kuvaava prosessi kuin toista. Esimerkiksi tuotannon arvonlisän ja osakkeiden ja osuuksien suhteen satunnaiskulku voisi vaikuttaa perustellulta, mutta investointien suhteen tätä on hankalampi sulattaa. Granger-kausalisuustestin tulokset puoltavat toisenlaisia dynamiikka investoinneille, kuin puhdasta satunnaiskulkua, mikä olisi linjassa myös teoreettisen kirjallisuuden ja empiiristen tulosten kanssa. Pienen lambda arvon omaavan BVAR-mallin otoksen sovite sekä ennusteen keskineliövirhe olivat selvästi jopa tavanomaista VAR-mallia heikommat, minkä perusteella on syytä olettaa ettei kyseinen dynamiikka kuvaa investointien kehitystä kovin hyvin ja mistä syystä kyseisen mallin tuloksia ei esitetä tässä tutkielmassa.

4.4 KÄYTETYT R-OHJELMOINTIKIELEN PAKETIT

Tutkimuksessa käytetään R-ohjelmointikieltä (R) ja kahta vektoriautoregressiivisiin menetelmiin kehitettyä valmista pakettia. R on avoimeen lähdekoodiin perustuva ohjelmointikieli, johon käyttäjät voivat rakentaa paketteja, jotka koostuvat käyttäjien määrittelemistä toiminnallisuuksista ja työkaluista. Kaikki R:n käyttäjät voivat ladata vapaasti muiden käyttäjien tekemiä paketteja CRAN-palvelun (<https://cran.r-project.org>) kautta. Merkittävimmät tutkielmassa käytetyt paketit ovat Vars, joka tarjoaa hyvin laajat mahdollisuudet käyttää VAR- ja VEC-malleja sekä niihin liittyviä testejä sekä Bvar, joka on suppeampi BVAR-malleihin keskittyvä paketti. Vars-paketin käyttömahdollisuuksia voi tutkia paketin kehittäjien tekemästä manuaalista (Pfaff ym., 2008). Bvar-paketille löytyy vastaavanlainen manuaali, josta voi tutkia paketin tarjoamia käyttömahdollisuuksia (Kuschnig ja Vashold, 2019).

Molemmat paketit edellyttävät useamman alkeellisemmän paketin lataamista toimiakseen, mitä ei esitellä tarkemmin tutkielmassa. Pakettien tarkempiin sisältöihin voi tutustua CRAN-palvelussa, jossa jokaisen paketin yhteyteen on dokumentoitu kaikki muut paketit, joita varsinainen käytettävä paketti tarvitsee toimiakseen. Vars-pakettia käytetään tutkimuksessa pääosin VAR(4)-mallin estimoimiseen sekä mallista johdettaviin impulsivasteisiin ja ennusteisiin. Bvar-pakettia sen sijaan käytetään BVAR(4) 1 ja BVAR(4) 2 -mallien estimoimiseen ja malleista saatavien tulosten johtamiseen. Molempia paketteja käytetään siitä syystä, ettei kumpikaan paketeista yksinään pysty tarjoamaan riittäviä työkaluja aiheen tutkimiseen.

5 TULOKSET

Tutkimus suoritettiin osakkeiden ja osuuksien (F51), tuotannon arvonlisän (B1GPH) ja bruttoinvestointien (P51K) suhteen. Kaikista muuttujista on otettu luonnolliset logaritmit, jotta muuttujien ajan suhteen kasvavan varianssin vaikutukset saadaan poistettua. Muuttujien logaritmisointi auttaa myös mallien tulosten tulkinassa, sillä logaritmisoitujen aikasarjojen vasteet voidaan tulkita läheisinä approksimaatioina prosentuaalisille muutoksille. Kaikki muuttujat sisältävät 84 havaintoa vuosilta 1999Q1-2019Q4, mutta menetämme neljä ensimmäistä havaintoa mallin viiverakenteen takia sekä kahdeksan viimeistä havaintoa mallin ennustekyvyn arvioimiseksi. Muuttujia tutkitaan kahdella BVAR(4)-mallilla, jossa jokaista muuttujaa selitetään neljän viipeen avulla, mikä on yleinen käytäntö neljännesvuosittaisille aikasarjoille. Viipeitä ei ole valittu informaatiokriteerien mukaan, mikä olisi tyypillinen tapa frekventistisessä VAR-analyysissä, jolla voitaisiin vaikuttaa tarpeettomien viipeiden valintaan. BVAR-mallissa voimme asetaa viipeiden etukertoimille rajoitteita priorien avulla. Rajoittamalla viipeiden rakennetta, kaukaisemmat viipeet kutistuvat kohti nollaa, jos ne eivät ole selitysvoimaisia mallin kannalta.

Estimoidut BVAR(4)-mallit sekä optimoidut hyperparametrien arvot esitetään taulukoissa 2 ja 3. Taulukoiden 2 ja 3 perusteella on ilmeistä, että viipeiden vaikutukset häviävät merkityksettömiksi hyvin nopeasti kaikissa yhtälöissä. Investointien kuluva hetken tasoon vaikuttaa selvästi eniten investointien oma taso edellisenä jaksona, mutta tämä johtuu aineiston lisäksi osittain siitä, että muuttujat on lähtökohtaisesti pakotettu seuraamaan satunnaiskulkua. Toisaalta, jos satunnaiskulku olisi huono approksimaatio, aineiston tulisi ohjata estimaattorin arvoa kohti aineiston implikoimaa arvoa priorin sijaan. Myös tuotannon sekä osakkeiden ja osuuksien viipeet vaikuttavat investointien tasoon, mutta huomattavasti vähemmän kuin investointien omat viipeet. Muuttujien välinen dynamiikka ei kuitenkaan ilmene helposti systeemin yksittäisten yhtälöiden etukertoimia tutkimalla, mistä syystä dynamiikka on syytä tutkia impulssivasteiden avulla. Ennen impulssivasteiden käsittelyä arvioidaan vielä estimoitujen hyperparametrien arvojen uskottavuus ja stabiilius.

Taulukko 2: *BVAR(4)* I-mallin tulokset

Lambdan arvo optimoinnin jälkeen: 0.472
 Iteraatiot: 25 000, joista 10 000 käytetty burn-in -periodiin
 Hyväksytyjä nostoja: 4791 (0.319)
 Havainnot: 72

	<i>Selitettävät muuttujat:</i>		
	F51(<i>t</i>)	B1GPH(<i>t</i>)	P51K(<i>t</i>)
VAKIOTERMI	0.448	-0.143	-0.914
F51(<i>t</i> - 1)	0.955	0.035	0.066
B1GPH(<i>t</i> - 1)	0.116	1.011	0.131
P51K(<i>t</i> - 1)	-0.050	-0.028	0.847
F51(<i>t</i> - 2)	-0.034	0.003	0.012
B1GPH(<i>t</i> - 2)	0.039	-0.001	0.019
P51K(<i>t</i> - 2)	-0.037	-0.014	-0.011
F51(<i>t</i> - 3)	-0.033	0.000	0.004
B1GPH(<i>t</i> - 3)	0.027	0.002	-0.009
P51K(<i>t</i> - 3)	-0.010	-0.005	-0.009
F51(<i>t</i> - 4)	-0.015	-0.004	0.001
B1GPH(<i>t</i> - 4)	0.018	0.001	-0.002
P51K(<i>t</i> - 4)	-0.001	-0.001	-0.011

	<i>Kovarianssimatriisin mediaani arvot:</i>		
	F51	B1GPH	P51K
F51	0.007	0.000	0.000
B1GPH	0.000	0.001	0.000
P51K	0.000	0.000	0.002

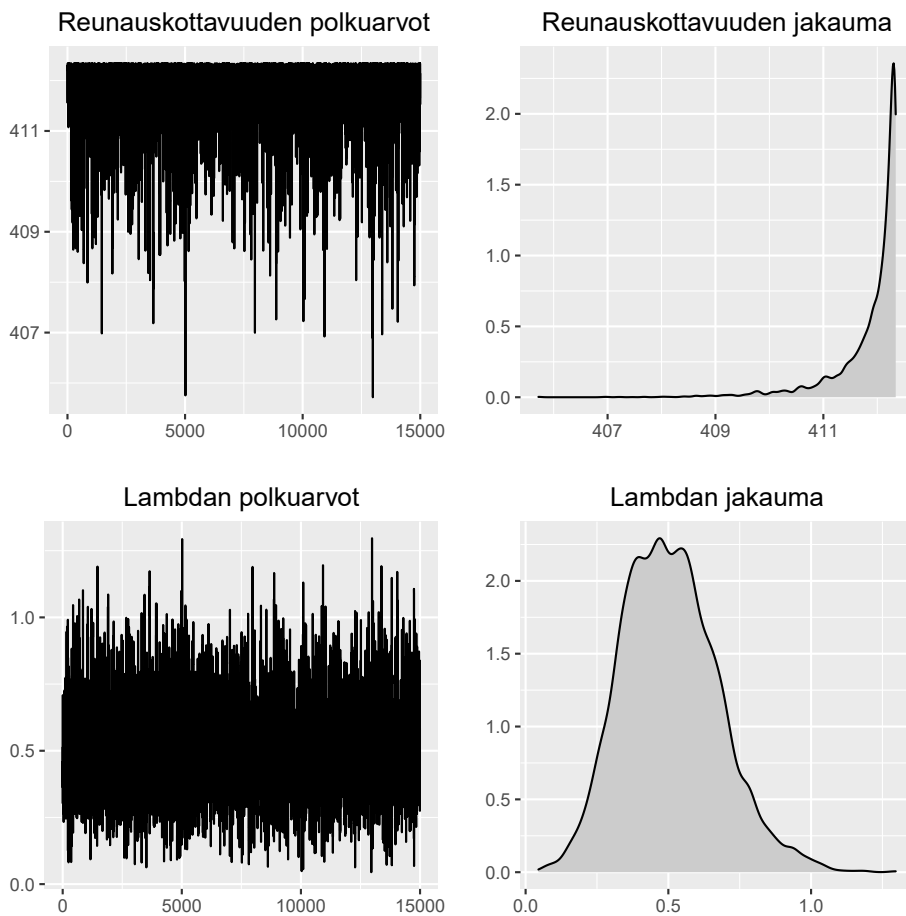
Log-uskottavuus: 325.7951

Taulukko 3: *BVAR(4)* 2-mallin tulokset

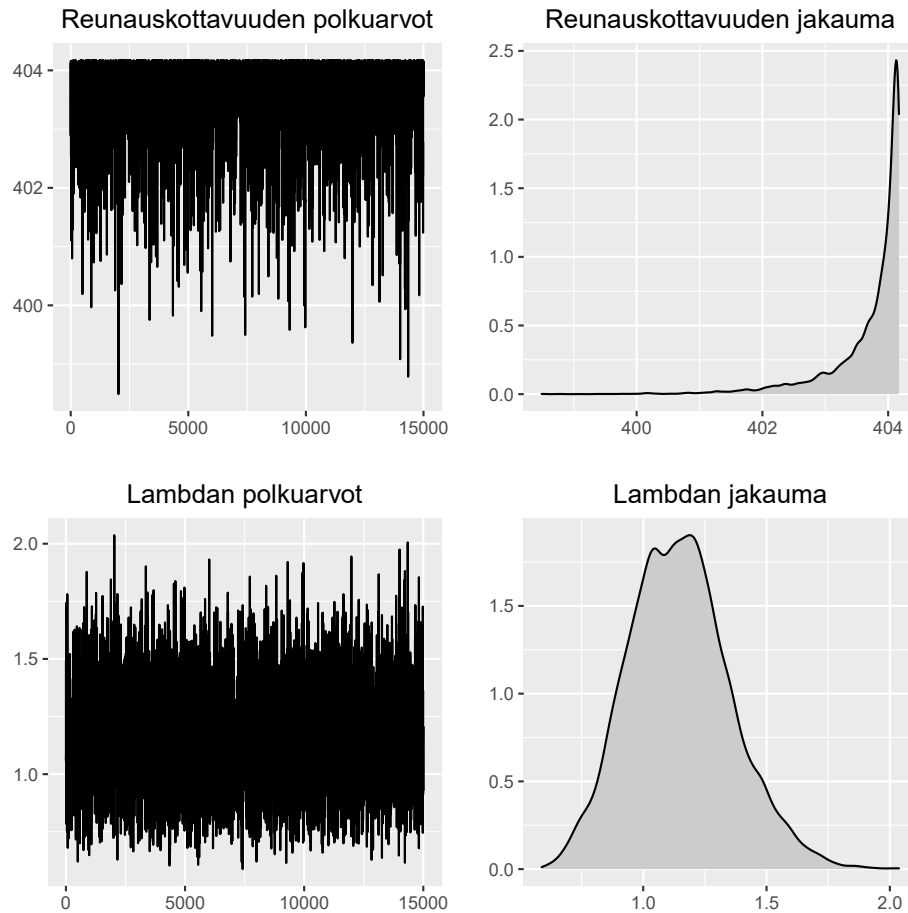
Lambdan arvo optimoinnin jälkeen: 1.107			
Iteraatiot: 25 000, joista 10 000 käytetty burn-in -periodiin			
Hyväksytyjä nostoja: 5640 (0.376)			
Havainnot: 72			
	<i>Selitettävät muuttujat:</i>		
	F51(t)	B1GPH(t)	P51K(t)
VAKIOTERMI	0.457	-0.227	-1.407
F51($t - 1$)	0.973	0.041	0.071
B1GPH($t - 1$)	0.086	1.018	0.270
P51K($t - 1$)	-0.017	-0.033	0.691
F51($t - 2$)	-0.040	0.003	0.015
B1GPH($t - 2$)	0.084	-0.001	0.055
P51K($t - 2$)	-0.114	-0.033	-0.023
F51($t - 3$)	-0.068	0.003	0.011
B1GPH($t - 3$)	0.072	0.014	-0.042
P51K($t - 3$)	-0.036	-0.010	-0.006
F51($t - 4$)	-0.019	-0.009	0.009
B1GPH($t - 4$)	0.050	0.008	-0.006
P51K($t - 4$)	-0.006	0.002	-0.028
	<i>Kovarianssimatriisin mediaani arvot:</i>		
	F51	B1GPH	P51K
F51	0.007	0.000	0.000
B1GPH	0.000	0.001	0.000
P51K	0.000	0.000	0.002

Log-uskottavuus: 357.8878

Mallin etukertoimien ja hyperparametrien estimaattorit on simuloitu MH-algoritmilla. MH-algoritmin stabiilius edellyttää, että hyperparametrit konvergoituvat kohti tiettyä arvoa. Konvergenssia voidaan tutkia, sopivan hyväksymisasteen lisäksi, hyperparametrien jakaumia tutkimalla. Kuvioissa 2 ja 3 ilmenee hyperparametrien polkuarvojen realisaatiot sekä realisaatioiden massan jakaumat. Kuvioiden perusteella λ :n arvot kasaantuvat 0,47 ja 1,11 ympärille, riippuen siitä minkälaiset lähtöarvot MH-algoritmille on syötetty. Kuviossa 2 valittu Minnesotan priori kutistaa BVAR(4) 1 -mallia selvästi lähemmäs yksittäisen muuttujan satunnaiskulkua, kuin kuvion 3 BVAR(4) 2 -mallia. Kummastakaan kuvioista ei ilmene merkittäviä poikkeavia havaintoja ja voimme varovaisesti olettaa hyperparametrien realisaatioiden käyttäytyvän stabiilisti.



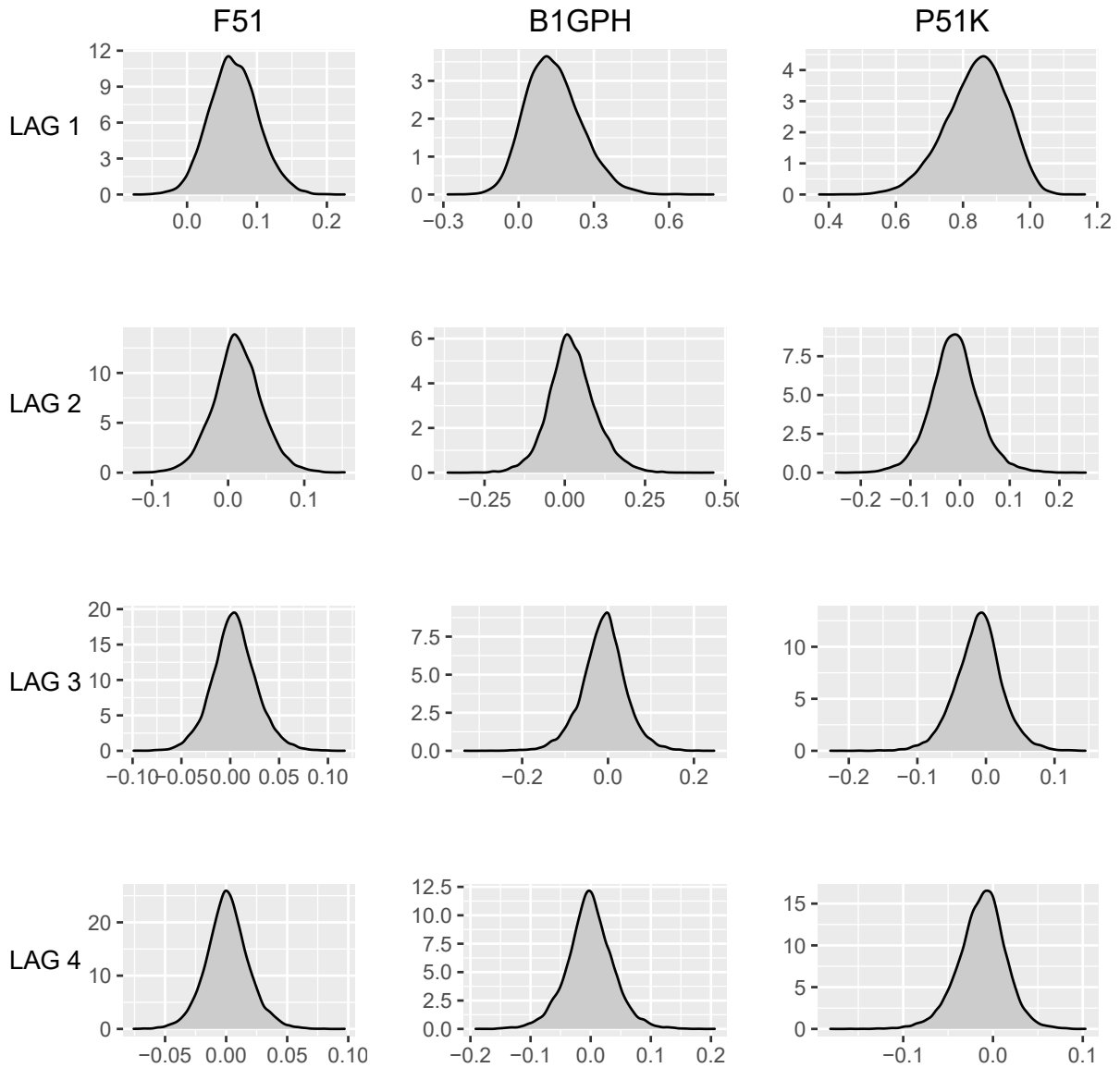
Kuvio 2: Hyperparametrit BVAR(4) 1



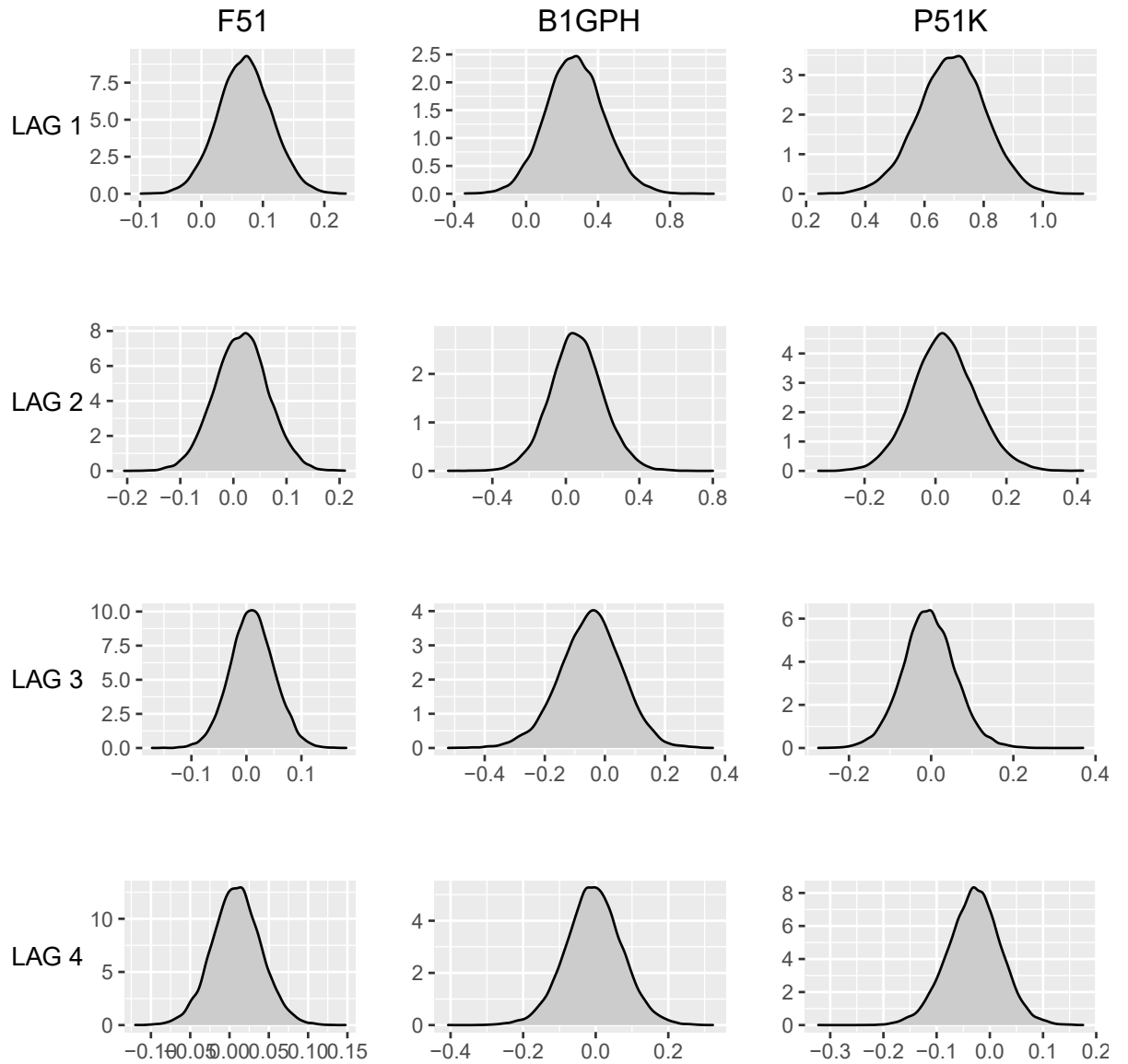
Kuvio 3: Hyperparametrit BVAR(4) 2

Hyperparametrien lisäksi, BVAR(4)-mallin etukertoimille voidaan esittää jakaumat, jotka on esitetty kuviossa 4 ja 5. Kuvioista ilmenee, että selittävien muuttujien etukerrointen jakaumat muuttuvat huipukkaammiksi mitä kaukaisemmasta viipeestä on kyse. Osakkeiden ja osuuksien etukerrointen jakaumat keskittyvät nollan ympärille, mikä kertoo että BVAR(4)-malleissa osakkeet ja osuudet eivät ole kovin selitysvomaisia investointien suhteen. Sen sijaan investointien ja tuotannon arvonlisän jakaumat muuttuvat huipukkaammiksi viipeiden kasvaessa, mutta ne eivät tiivisty nollan ympärille. Tämä implikoi sitä, että investointien ja tuotannon arvonlisän kaukaisemmat viipeet ovat investointien kannalta selitysvomaisempia kuin osakkeiden ja osuuksien viipeet.

Vaikka tuotannon arvonlisän ja bruttoinvestointien viipeet ovat selitysvomaisia, prioripakottaa kaukaisempiin viipeisiin liittyvän varianssin pienemmäksi, mikä ilmenee etukertoimiin liittyvänä jakauman tiivistymisenä ja epävarmuuden vähenemisenä. BVAR(4)-malleissa suurin bruttoinvestointeihin liittyvä epävarmuus johtuu tuotannon arvonlisän ja bruttoinvestointien ensimmäisten viipeiden etukertoimien jakaumista.



Kuvio 4: Etukertoimien jakaumat BVAR(4) 1



Kuvio 5: Etukertoimien jakaumat BVAR(4) 2

Tavanomaisen VAR(4)-mallin etukerrointen arvot eroavat selvästi BVAR(4)-mallien vastaavista. VAR(4)-mallissa tilastollisesti merkitseviä kertoimia ovat investointien oma yhden periodin takainen viipee sekä tuotannon arvonlisän kolmen periodin takainen viipee. Osakkeiden ja osuuksien ensimmäinen viipee on tilastollisesti merkitsevä 10 % merkitsevyystasolla, miksi sitä ei esitellä taulukossa 4. Varsinkin VAR(4)-mallin tulkin-ta etukertoimien perusteella on haastavaa, sillä toisin kuin BVAR(4)-malleissa, mallin etukertoimet eivät lähene nollaa viipeiden kasvaessa. Ehkä suurin ero VAR(4)-mallin ja BVAR(4)-mallien välillä on, että VAR(4)-malli antaa suuremman painoarvon tuotannon arvonlisän vaikutuksille BVAR(4)-malleihin nähden. Osakkeiden ja osuuksien merkitys vaikuttaa hyvin vastaavalta mallien välillä. Mallien vertailu pelkkien etukertoimien perusteella on hyvin haastavaa, mistä syystä mallien dynamiikkaa tutkitaan impulssivasteiden avulla.

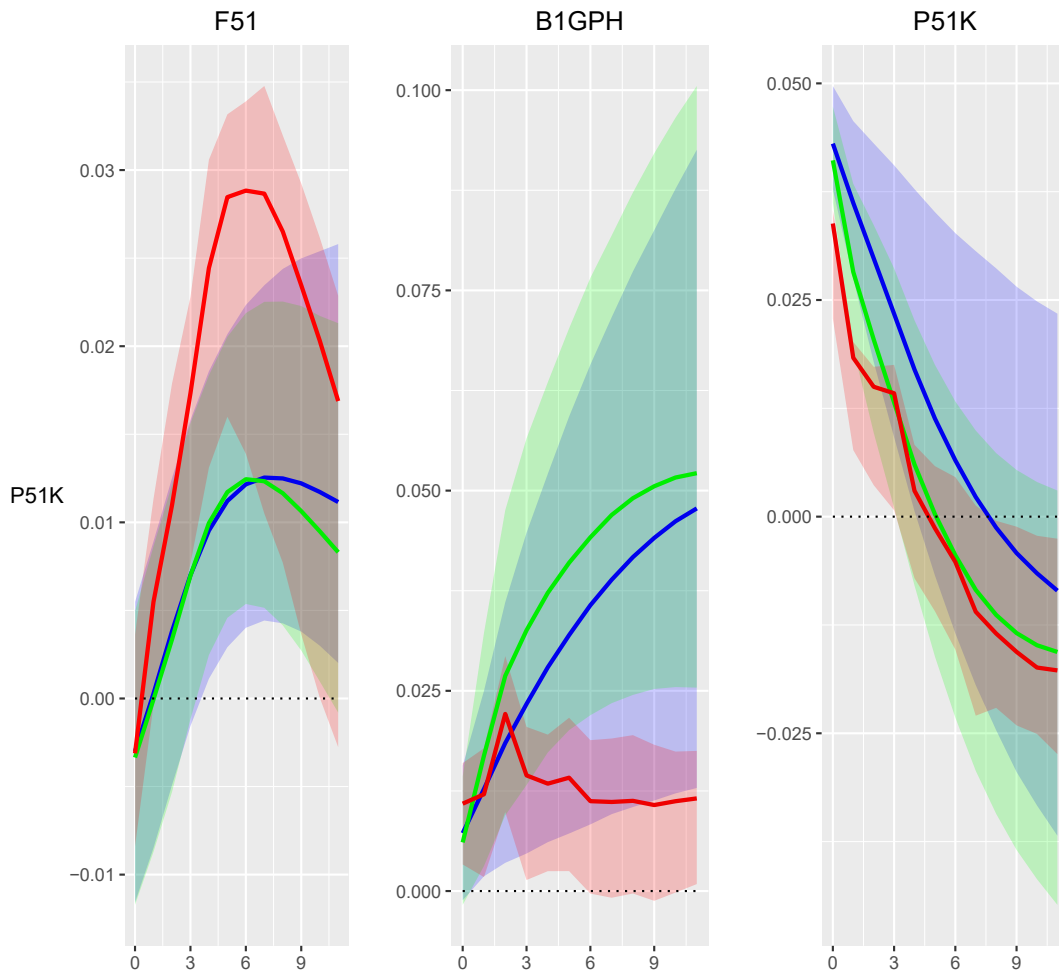
Muuttujien keskinäisiä vaikutuksia tutkitaan orthogonaalisilla impulssivasteilla, jolloin tutkimme systeemin yhteen muuttujan kohdistetun shokin välittymistä systeemin muihin muuttujiin. Ortogonaaliset impulssivasteet on esitetty kuviossa 6 siten, että investointeihin (P51K) kohdistetut impulssit löytyvät sarakkeista ja investointien vasteet riviltä. Impulssivastekuvaajien tummat viivat kuvaavat BVAR(4)-mallien tapauksessa impulssinen mediaaniarvoja ja haaleasti värjätty alueet kuvaavat 5 ja 95 persentiilin uskottavuusväliä (*eng. Credible set*). VAR(4)-mallin tapauksessa tumma viiva kuvaa estimaattorin perusteella arvioitua keskimääräistä arvoa ja vaihteluväli kuvaa vastaavaa 5 ja 95 persentiilin luottamusväliä, mikä on saatu bootstrapping -menetelmällä. Uskottavuusvälit ovat tyypillinen bayesilaisessa päättelyssä käytetty työkalu, joka kertoo todennäköisyyden, että tutkittu arvo osuu tietylle uskottavuusvälille. Kuviossa 6 impulssivasteet osuvat 90 prosentin todennäköisyydellä esitetyille vaihteluväleille.

Osakkeisiin ja osuuksiin (F51) kohdistettu noin 8,3 prosentin shokki, aiheuttaa investointien tasossa ensimmäiset merkitykselliset vaikutukset BVAR(4)-malleissa vasta vuoden viiveellä, kun taas VAR(4)-mallilla vaikutusten voidaan osoittaa olevan tilastollisesti merkittäviä jo toisella vuosineljänneksellä havaitun impulssin jälkeen. BVAR(4)-malleissa ensimmäisen neljän vuosineljänneksen aikana osakkeisiin ja osuuksiin aiheutettu shokki voi aiheuttaa joko positiivisen tai negatiivisen vasteen investointien tasossa. Tämä tarkoittaa, ettei vaikutuksen pystytä osoittaa olevan tilastollisesti merkitsevä frekventistisessä mielessä. Vasta neljän vuosineljänneksen jälkeen investointien taso reagoi positiivisesti alkuperäiseen osakkeisiin ja osuuksiin kohdistettuun shokkiin, josta eteenpäin investointien taso on seuraavien kahdeksan vuosineljänneksen ajan noin prosentin alkuperäistä tasoaan korkeammalla. VAR(4)-mallilla vasteella on positiivinen vaikutus, mikä on korkeimmillaan seitsemäntenä vuosineljänneksenä alkuperäisen impulssin jälkeen. VAR(4)-mallissa ainoastaan ensimmäinen ja viimeinen vuosineljännes eivät ole tilastollisesti merkittäviä. VAR(4)-mallin impulssivaste reagoi selvästi BVAR(4)-mallien vastaavia voimakkaammin, mikä ilmenee hyvin kuviosta 6.

Impulssivasteiden perusteella tuotantoon kohdistettu shokki aiheuttaa samansuuntai-

Taulukko 4: VAR(4)-mallin tulokset

Havainnot: 72			
	<i>Selittävät muuttujat:</i>		
	F51(t)	B1GPH(t)	P51K(t)
VAKIOTERMI	0.0761 (1.3440)	-0.3117 (0.2932)	-1.48724* (0.5751)
F51($t - 1$)	0.9839*** (0.1065)	0.0384 (0.2324)	0.0795 (0.0456)
B1GPH($t - 1$)	-0.3177 (0.6191)	0.9953*** (0.1351)	0.3405 (0.2649)
P51K($t - 1$)	0.1829 (0.1492)	-0.0043 (0.0322)	0.5420*** (0.0639)
F51($t - 2$)	-0.0159 (0.1492)	0.0030 (0.0326)	-0.0047 (0.0639)
B1GPH($t - 2$)	0.2294 (0.8532)	-0.0828 (0.1861)	0.4554 (0.3651)
P51K($t - 2$)	-0.3138 (0.3404)	-0.0773 (0.0743)	0.1363 (0.1456)
F51($t - 3$)	-0.1286 (0.1478)	0.0240 (0.0322)	0.0163 (0.0632)
B1GPH($t - 3$)	0.1451 (0.8594)	0.1154 (0.1875)	-0.7522* (0.3677)
P51K($t - 3$)	-0.1807 (0.3394)	-0.0379 (0.0740)	0.1386 (0.1452)
F51($t - 4$)	0.0323 (0.1141)	-0.0216 (0.0249)	0.0137 (0.0488)
B1GPH($t - 4$)	0.3669 (0.6732)	0.0348 (0.1469)	-0.2746 (0.2881)
P51K($t - 4$)	-0.0079 (0.2763)	0.0191 (0.0603)	-0.1702 (0.1182)
Jäännöskeskivirhe	0.0834	0.0182	0.0357
R ²	0.8373	0.9823	0.9461
Korjattu R ²	0.8042	0.9787	0.9352
F-statistiikka	25.31	272.5	86.38
<i>Kovarianssimatriisin arvot:</i>			
	F51	B1GPH	P51K
F51	0.0069531	0.0001339	-0.0002597
B1GPH	0.0001339	0.0003309	0.0001927
P51K	-0.0002597	0.0001927	0.0012731



Kuvio 6: Impulssivasteet

sen vasteen investoinneissa, eikä shokin vaikutus vaikuta kuolevan pois kahdentoista vuosineljänneksen aikana. Tuotannon tasoon kohdistetun impulssin vaikutukset vaikuttavat sitkeästi investointeihin koko 12 vuosineljänneksen mittaisen tarkastelujakson ajan. Tuotannon shokki investointeihin vaikuttaa bayesilaisessa mielessä merkitsevältä koko tarkastelujakson ajan, ja ainoastaan VAR(4)-mallilla vasteet eivät ole tilastollisesti merkittäviä seitsemännestä vuosineljänneksestä eteenpäin. Suurin ero BVAR(4)-mallien ja VAR(4)-mallin välillä on itse vasteissa, mikä ilmenee kuviosta 6. Siinä missä BVAR(4)-mallien vasteiden vaikutus kasvaa koko 12 vuosineljänneksen ajan, VAR(4)-mallin vasteet saavuttavat huippunsa jo toisena vuosineljänneksenä impulssista, jonka jälkeen ne tasoittuvat noin prosentin tuntumaan. Noin 2,3 prosentin shokki vuosineljännettäiseen tuotannontasoon aiheuttaa noin 4,7 prosentin positiivisen vaikutuksen BVAR(4) 1 -mallissa ja 5,2 prosentin positiivisen vaikutuksen BVAR(4) 2 -mallissa investointien tasossa 12 vuosineljänneksen kuluttua alkuperäisestä impulssista. VAR(4)-mallissa sen sijaan noin 1,8 prosentin impulssi aiheuttaa parhaimmillaan noin 2,2 prosentin vaikutuksen kolmantena vuosineljänneksenä impulssista. VAR(4)-mallissa vaste muuttuu tilastollisesti ei-merkitseväksi seitsemäntenä vuosineljänneksenä impulssin jälkeen. BVAR(4)-malleissa alkuperäisen

shokin vaikutus ei näytä kuolevan pois, mikä johtuu todennäköisesti aineistosta. Aineiston muuttujat ovat nimellishintaisia ja tasomuotoisia, joten paluu johonkin tasapainoarvoon ei edes ole oletettavaa. Pelkästään inflaatiosta johtuen aikasarjojen voidaan olettaa kasvavan, vaikka reaaliset arvot pysyisivät kiinnitettyinä.

Investointeihin kohdistettu noin neljän prosentin shokki aiheuttaa investoineissa positiivisen vasteen, jonka merkitsevyys häviää BVAR(4) 1 -mallilla kuudentena vuosineljänneksenä sekä BVAR(4) 2 ja VAR(4)-malleilla viidentenä vuosineljänneksenä. Investointishokin vaikutus hiipuu hiljalleen pois, mikä kuvaa investointien jakautumista useammalle jaksolle. Vasteiden dynamiikka on hyvin samankaltainen mallien välillä; ainoastaan BVAR(4) 1 -mallilla vasteen vaikutus on muita malleja voimakkaampi, mutta vaste häviää hyvin vastaavanlaisella tavalla kuin muissakin malleissa.

Impulssivasteita tutkimalla merkittävimmät erot investointidynamiikassa löytyvät BVAR(4)-mallien ja VAR(4)-mallin väliltä. BVAR(4)-mallien välinen dynamiikka toimii hyvin vastaavalla tavalla ja erot syntyvät lähinnä λ dan vaikutuksesta; BVAR(4) 1 -malissa osakkeiden ja osuuksien (F51) sekä tuotannon arvonlisän vaikutukset jäävät maltillisemmiksi BVAR(4) 2 -malliin verrattuna, koska pienempi λ :n arvo ohjaa niitä lähemmäs satunnaiskulkua. BVAR(4)- ja VAR(4)-malleissa dynamiikka eroaa selvästi tuotannon arvonlisän suhteen. Siinä missä BVAR(4)-malleissa tuotannon arvonlisään kohdistettu shokki vaikuttaa merkittävästi investointeihin, ei vastaavaa vaikutusta havaita tavanomaisesta VAR(4)-mallista. VAR(4)-mallissa impulssin vaikutus investoineissa palautuu prosentin tuntumaan, mikä johtuu suurista negatiivisista tuotannon arvonlisän painoista kolmannen ja neljännen viipeen etukertoimissa. BVAR(4)-malleissa vastaavat etukertoimet ovat negatiivisia, mutta priorit pakottavat niille häviävän pienen painoarvon. Myös osakkeiden ja osuuksien välinen dynamiikka BVAR(4)- ja VAR(4)-mallien välillä eroaa toisistaan, vaikkakin vasteet reagoivat samansuuntaisesti. Erot syntyvät lähinnä vasteiden voimakkuudessa, jotka ovat selvästi voimakkaammat tavanomaisessa VAR(4)-mallissa.

Impulssivasteiden lisäksi voimme tutkia myös mallien tuottamia varianssihajotelmia. Varianssihajotelma kuvaa, kuinka paljon selittävän muuttujan ennustevirheen varianssista selittyy muuttujaan kohdistetun shokin perusteella. Varianssihajotelman tulokset on esitetty taulukossa 5, johon on kirjattu muuttujien varianssihajotelmat 12 vuosineljänneksen ennustehorisontilla. Kiinnostus on jokaisen mallin kohdalla kolmannessa rivissä, joka kertoo bruttoinvestointien hajotelman. Erot mallien välillä syntyvät lähinnä tuotannon tason ja investointien varianssin painotuksista, tulevaisuuden investointien varianssia selitettäessä. Varianssihajotelmia tulkitessa on hyvä ymmärtää, että BVAR(4)-malleille on laskettu vastaava lukumäärä varianssihajotelmia kuin malleissa on hyväksytyjä nostoja parametriaarvoille. Näistä hajotelmista on laskettu mediaaniarvot kaikkien nostojen sekä ajanhetkien yli, minkä takia arvot eivät välttämättä summaudu yhteen. Vastaavaa menettelyä ei löydy R-ohjelmointikielen Vars-paketista, joka laskee varianssihajotelmat tutkijan määrittelemille vuosineljänneksille. Nyt hajotelmat on laskettu 12 vuosineljänneksen mukaan, joiden yli on laskettu keskiarvot, jotta tulokset olisivat verrattavissa BVAR(4)-

mallien vastaaviin tuloksiin.

Tulokset viittaavat siihen, että BVAR(4)-malleilla investoinnit riippuvat herkemmin tuotannon tasosta kuin pääoman markkina-arvoista. BVAR(4)-mallit eroavat toisistaan lähinnä tuotannon arvonlisän vaikutusten suhteen, milloin BVAR(4) 1 -mallilla tuotantoon kohdistettu shokki selittää noin 37 prosenttia investointien ennustevirheen varianssista, kun vastaava luku BVAR(4) 2 -mallilla on noin 52 prosenttia. Vastaavasti investointeihin kohdistettu shokki selittää suuremman osan investointien ennustevirheen varianssista BVAR(4) 1 -mallissa kuin BVAR(4) 2 -mallissa. Osakkeisiin ja osuuksiin kohdistetulla shokilla ei tutkimuksen BVAR(4)-malleissa ole juuri merkitystä investointien ennustevirheen varianssissa. VAR(4)-malli eroaa selvästi BVAR(4)-malleista, sillä sen mukaan investointien ennustevirheen varianssista suurin osa selittyy osakkeisiin ja osuuksiin sekä tuotannon arvonlisään kohdistetuista shokeista, joista osakkeisiin ja osuuksiin kohdistetun shokin vaikutus on selvästi suurin. Tulokset ovat keskenään hieman ristiriidassa; niiden perusteella on haastavaa tehdä päätelmiä muuttujien keskinäisistä vaikutussuhteista sekä vaikutussuhteiden voimakkuudesta.

Taulukko 5: Varianssihajotelmien arvot

<i>BVAR(4) 1</i>			
	<i>F51</i>	<i>BIGPH</i>	<i>P51K</i>
<i>F51</i>	0.6841	0.2225	0.0664
<i>BIGPH</i>	0.0174	0.9557	0.0192
<i>P51K</i>	0.0399	0.3689	0.5822
<i>BVAR(4) 2</i>			
	<i>F51</i>	<i>BIGPH</i>	<i>P51K</i>
<i>F51</i>	0.6136	0.2569	0.0895
<i>BIGPH</i>	0.0180	0.9486	0.0261
<i>P51K</i>	0.0382	0.5169	0.4401
<i>VAR(4)</i>			
	<i>F51</i>	<i>BIGPH</i>	<i>P51K</i>
<i>F51</i>	0.9663	0.0033	0.0304
<i>BIGPH</i>	0.2279	0.7049	0.0672
<i>P51K</i>	0.2822	0.2232	0.4946

Malleja voidaan verrata keskenään sovitteiden ja niiden tuottamien ennusteiden mukaan. Sovitteille ja ennusteille voidaan laskea keskineliövirheen neliöjuuri, joka on tilastollinen tunnusluku, jolla voidaan arvioida mallin hyvyttä suhteessa havaittuun aineistoon. Bayesilaisien VAR-mallien hyvyttä arvioidaan tyypillisesti juuri keskineliövirheen neliöjuurella, joka on laskettu mallin ennusteelle Kilian ja Lütkepohl (2017). Toisin sa-

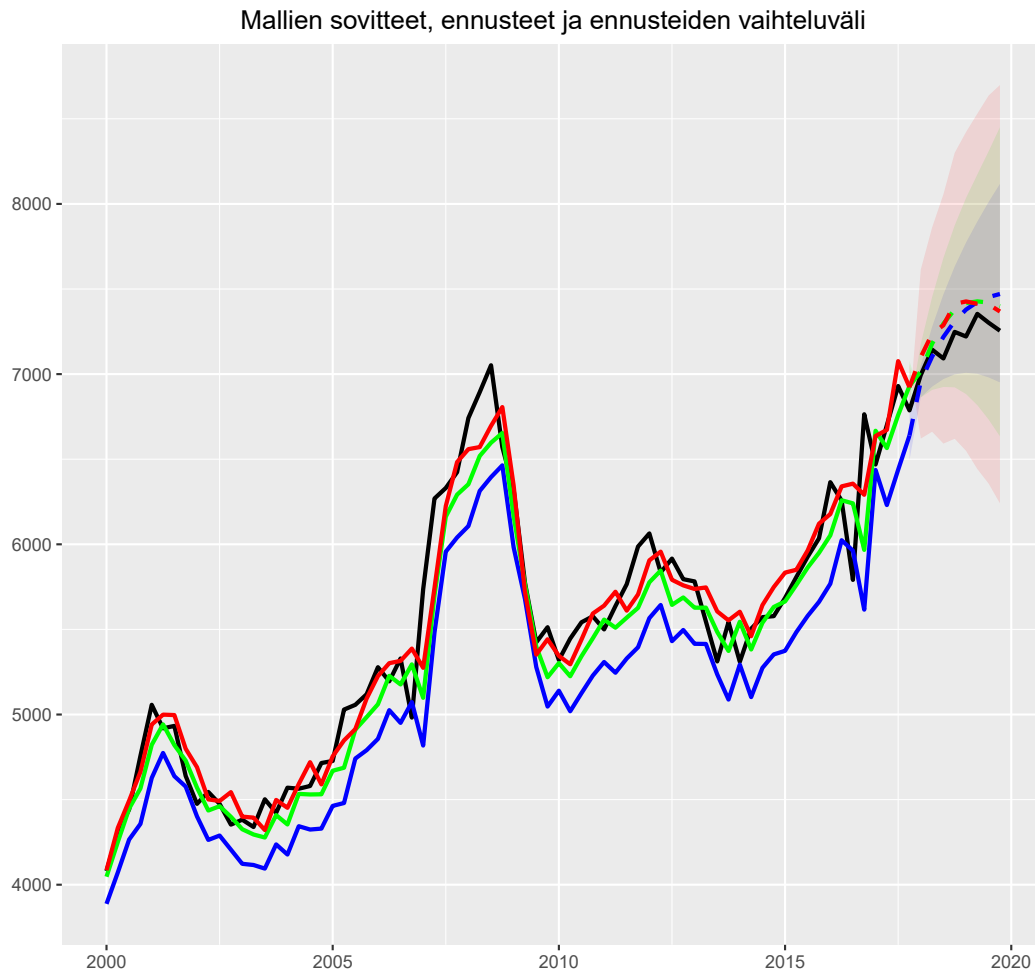
noen malli, joka tuottaa pienimmän keskineliövirheen neliöjuuren ja näin tarkimman ennusteen, katsotaan olevan parhaiten aineistoa kuvaava malli. Keskineliövirheen neliöjuuri voidaan laskea myös aineistolle, mutta tällöin on syytä muistaa yliparametrointiin liittyvät riskit, kun mallinamme aineistoa aineiston perusteella.

Taulukko 6: Keskineliövirheen neliöjuurten arvot

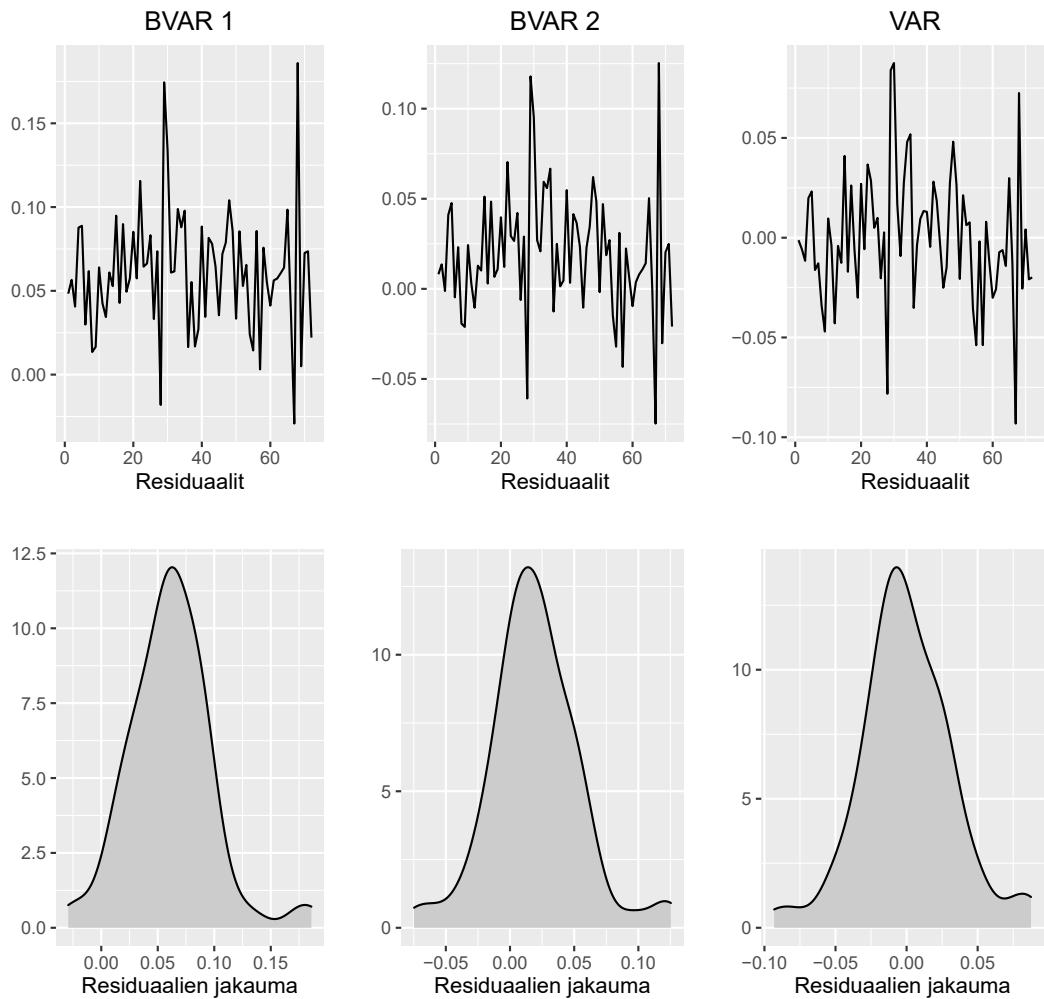
	<i>RMSE:</i>	
	<i>Otos</i>	<i>Ennuste</i>
<i>BVAR(4) 1</i>	0.0710	0.0170
<i>BVAR(4) 2</i>	0.0557	0.0187
<i>VAR(4)</i>	0.0323	0.0192

BVAR-mallien ennusteen keskineliövirheet ovat odotetusti tavanomaisen VAR-mallin ennusteen keskineliövirhettä pienemmät, mutteivat merkittävästi. Lähtökohtaisesti pienemmät λ :n arvot - eli tiukempi priorin vaikutus - takaavat paremman ennustekyvyn suhteessa VAR(4)-malliin, mikäli VAR(4)-malli kärsii yliparametrisoinnista. Ennustekyvyn parantuminen tulee kuitenkin otoksen sovituksen kustannuksella, mikä heikkenee prioritiedon lisääntyessä. Tämä ei kuitenkaan ole täysin yllättävää, koska tiedämme VAR(4)-mallin tulkitsevan herkemmin aineistoon liittyvää kohinaa muuttujiin liittyväksi informaatioksi. Toisaalta tavanomaisen VAR(4)-mallin ennusteen keskineliövirhe ei ole kovin paljon BVAR(4)-malleja heikompi, mikä antaa olettaa ettei yliparametrisointi välttämättä ole merkittävä VAR(4)-mallia koskeva ongelma. Kaikista kehnoin tuloksen niin otoksen sovituksen, kuin ennusteen keskineliövirheen suhteen antaa lähes satunnaiskuluksi redusoitava BVAR(4)-malli, jota ei esitellä työssä tarkemmin. Mallien otosten sovitteet sekä ennusteiden keskineliövirheet on luetteloitu taulukkoon 6.

Kuvioon 7 on piirretty yritysten bruttoinvestoinnit sekä mallien soviteet bruttoinvestoinneille. Kuvan perusteella voidaan tulkita, että VAR(4)- ja BVAR(4) 2 -mallin sovitteet seuraavat tyydyttävästi yritysten todellisia investointeja, muutamaa poikkeavaa havaintoa lukuun ottamatta, mitkä ilmenevät selvästi residuaalikuvaajasta 8. Myös ennustekyvyyssä mallin tarjoavat hyvin vastaavat tulokset. BVAR(4) 1 -mallin sovite on selvästi VAR(4)- ja BVAR(4) 2 -malleja kehnompina, mutta ennustekyvyyssä se voittaa molemmat mallit. Vaikkakin BVAR(4) 1 -malli tarjoaa parhaimman ennustetarkkuuden, ero ei ole valtava VAR(4)- ja BVAR(4) 2 -malleihin nähden. Mallien otosten ja ennusteiden keskineliövirheiden neliöjuurten arvot on kirjattu taulukkoon 6. Haaleasti värjätty alueen kuvaavat BVAR(4)-mallien tapauksessa 90 persentiilin uskottavuusväliä ja VAR(4)-mallin tapauksessa 90 persentiilin luottamusväliä.



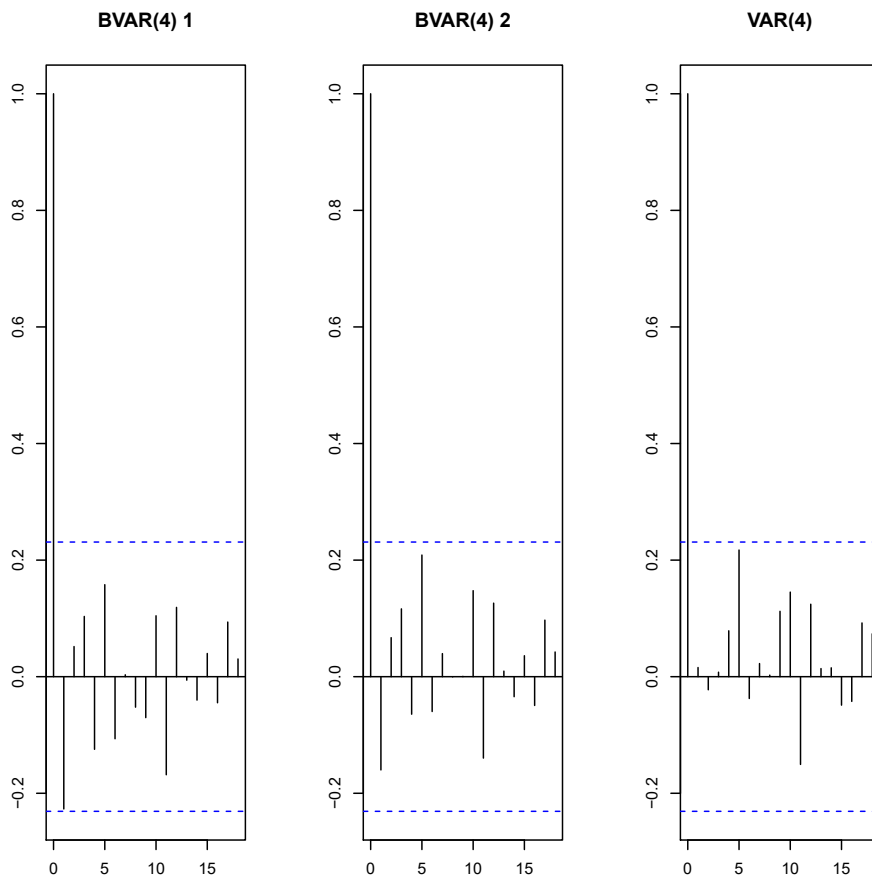
Kuvio 7: Kuviossa tumma viiva kuvaa todellisia bruttoinvestinteja (P51K), sininen viiva kuvaa BVAR(4) 1 -mallin sovitetta, vihreä viiva BVAR(4) 2 -mallin sovitetta sekä punainen viiva VAR(4)-mallin sovitetta. Katkoviivat kuvaavat mallien ennusteita ja värjättyt alueet ennusteiden 5% ja 95% uskottavuus- ja luottamusvälejä.



Kuvio 8: Residuaalit

Kuvion 8 perusteella residuaalit näyttävät suhteellisen normaalisti jakautuneilta, muutamia poikkeavia havaintoja lukuun ottamatta. Residuaalien perusteella voi tehdä tulkinnan, että mallit onnistuvat keskimäärin selittämään investointeja hyvin. Poikkeavat havainnot implikoivat, että kyseisinä ajankohtina malli ei ole onnistunut huomioimaan investointeihin vaikuttavia tekijöitä oikein.

Bruttoinvestointien residuaalit eivät ole autokorreloituneita yhdessäkään malleista, jonka perusteella voidaan todeta, että residuaalit ovat toisistaan riippumattomia. Tämä tarkoittaa, että residuaaleihin ei sisälly mallia kuvaavaa dynamiikkaa, jolloin residuaalit ovat vain kohinaa ja mallien parametrit poimivat oleellisen malleja kuvaavan dynamiikan aineistosta. Kuvio 9 ilmenee bruttoinvestointeja koskevien yhtälöiden residuaalien autokorrelaatiofunktiot.



Kuvio 9: Autokorrelaatiokuvaajat

6 PÄÄTELMÄT

Tutkielman perusteella yritysten nimelliset investoinnit riippuvat kaikista mallin muuttujista, mikä on linjassa sekä teorian että aikaisempien empiiristen tulosten kanssa. Varsinkin VAR(4)-mallille laskettu 94,6 prosentin selitysaste on erittäin korkea, mikä tarkoittaa, että malli pystyy selittämään 94,6 prosenttia nimellisten bruttoinvestointien vaihtelusta. BVAR(4)-malleille selitysastetta ei ole määritelty, mutta niidenkin tapauksessa sovitteet ja ennusteet olivat hyvin tarkkoja. VAR(4)-mallin korkean selitysasteen sekä muuttujien tasomuotoisuuden perusteella voitaisiin tehdä päätelmä, että malli saattaa kärsiä yliparametrisoinnista. Toisaalta VAR(4)-mallin ennustetarkkuus ei hävinnyt merkittävästi BVAR(4)-malleille, jotka hallitsevat paremmin mahdollisen yliparametrisoinnin prioreilla tuodun lisärakenteen ansiosta. Kyseisten muuttujien aikaisemman kehityksen voidaan todeta selittävän hyvin investointien nykyarvoa.

Tulosten perusteella yrityssektorin investointilama vaikuttaa yhtä lailla tuotannon lammalta. Mallista riippumatta tuotannolla on merkittävä rooli investointien selittäjänä, vaikka suurin vaikutus on aikaisemmilla investoinneilla itsellään. Tuotannon taso vaikuttaa kuitenkin siihen, mihin suuntaan investoinnit kehittyvät. Jos tuotannon taso romahtaa äkillisesti, niin mallien etukertoimien perusteella myös investointien tason tulisi laskea seuraavana periodina ceteris paribus. Tietty tuotannon taso edellyttää tietyn suuruisen bruttoinvestointien virran, johon sisältyy niin uuden pääoman lisääminen kuin olemassa olevan pääoman uusiminen. Näin ollen voidaan olettaa, ettei bruttoinvestointien virtakaan pysy saman suuruisena, jos tuotanto laskee merkittävästi.

Impulssivasteiden perusteella tuotannon shokit kasvattavat investointeja kaikissa malleissa; erot syntyvät lähinnä vasteiden voimakkuudessa. BVAR(4)-malleissa alkuperäinen tuotannon shokki aiheutti investoinneissa prosentuaalisesti noin tuplasti voimakkaamman vaikutuksen. VAR(4)-mallissa vaikutus investointeihin jäi prosentuaalisesti pienemmäksi kuin tuotantoon kohdistettu shokki. Mallien perusteella on hankala arvioida, mikä vaihtoehtoista on lähempänä totuutta, koska mallien ennustetarkkuuden perusteella arviotu hyvyys tai paremmuus oli samaa luokkaa kaikilla malleilla. Joka tapauksessa tuotannon tason aneeminen kehitys vaikuttaa bruttoinvestointeihin mallista riippumatta, ja BVAR(4)-malleilla vaikutus vain korostuu tavanomaiseen VAR(4)-malliin nähden.

Osakkeiden ja osuuksien vaikutukset eivät olleet niin ilmeiset, kuin olisi voinut kuvitella. Toki on muistettava, että osakkeet ja osuudet kuvaavat pääoman markkina-arvoa arvostusmielessä, eli arvona jolla pääomakantaa arvotetaan kyseisenä ajanhetkenä. Samalla osakkeisiin ja osuuksiin sisältyy myös yritysten ulkoisena rahoituksena keräämä pääoma, jolloin osakkeiden ja osuuksien tulisi lähtökohtaisestikin kulkea osittain linjassa investointien kanssa. Tutkielman perusteella osakkeisiin ja osuuksiin kohdistetun shokin on oltava hyvin merkittäviä, jotta se vaikuttaisi investointeihin. Osakkeiden ja osuuksien mennyt kehitys auttaa selittämään nykyistä investointikehitystä, muttei läheskään yhtä paljon kuin tuotannon arvonnisa. BVAR(4)-malleissa osakkeiden ja osuuksien kehityksel-

lä ei vaikuttaisi olevan juurikaan merkitystä bruttoinvestointeihin. VAR(4)-malleissa sen sijaan osakkaiden ja osuuksien paino korostui; mitä kauemmas alkuperäisestä impulsista edetään, sitä enemmän osakkeisiin ja osuuksiin kohdistettu shokki selitti investointien ennustevirheen varianssista.

Tulokset ovat linjassa aikaisempien tutkimusten perusteella, joissa tuotannon arvonlisä on selittänyt investointeja pääoman markkina-arvoa paremmin. Tutkielmassa on toki omat puutteensa, sillä mallien muuttujat eivät täysin noudata talousteorian implikoimia muotoja. Tämä ei tosin ollut tarkoituskaan, vaan tutkielmassa pyrittiin löytämään vastaukset siihen, auttaako tuotannon arvonlisän sekä pääoman markkina-arvon kehitys selittämään toteutunutta investointikehitystä. Tutkimuksen valossa on selvää, että saamme parannettua investointien ennustekykä, jos lisäämme tuotannon arvonlisän sekä osakkeet ja osuudet selittävinä muuttujina malliin. BVAR(4)-mallien mukaan investoinnit riippuvat lähinnä tuotannon arvonlisän sekä investointien aiemmasta tasosta. Osakkeiden ja osuuksien kehityksellä ei BVAR-malleissa vaikuttaisi olevan juurikaan merkitystä. VAR(4)-malleissa sen sijaan osakkaiden ja osuuksien paino korostui BVAR(4)-malleihin nähden.

Tutkielman mukaan suuri osa bruttoinvestointien vaihtelusta - sekä investointilama - selittyy osakkeiden ja osuuksien, tuotannon arvonlisän ja investointien aiemman kehityksen perusteella. Se, miten näiden tekijöiden kautta voidaan vaikuttaa bruttoinvestointeihin, olisi mielenkiintoinen jatkotutkimuksen aihe.

LÄHTEET

- Abel, A. B. – Blanchard, O. J. (1983) The present value of profits and cyclical movements in investment.
- Bańbura, M. – Giannone, D. – Reichlin, L. (2010) Large bayesian vector auto regressions. *Journal of applied Econometrics*, vol. 25 (1), 71–92.
- Blanchard, O. – Rhee, C. – Summers, L. (1993) The stock market, profit, and investment. *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 108 (1), 115–136.
- Bloom, N. (2009) The impact of uncertainty shocks. *econometrica*, vol. 77 (3), 623–685.
- Brooks, C. (2008) *Introductory econometrics for finance*. Cambridge university press.
- Caballero, R. J. – Leahy, J. V. (1996) Fixed costs: The demise of marginal q. Tech. rep., National bureau of economic research.
- Chenery, H. B. (1952) Overcapacity and the acceleration principle. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1–28.
- Chirinko, R. S. (1993) Business fixed investment spending: Modeling strategies, empirical results, and policy implications. *Journal of Economic literature*, vol. 31 (4), 1875–1911.
- Coen, R. M. (1971) The effect of cash flow on the speed of adjustment. *Tax incentives and capital spending*, 131–96.
- Doan, T. – Litterman, R. – Sims, C. (1984) Forecasting and conditional projection using realistic prior distributions. *Econometric reviews*, vol. 3 (1), 1–100.
- Doms, M. – Dunne, T. (1998) Capital adjustment patterns in manufacturing plants. *Review of economic dynamics*, vol. 1 (2), 409–429.
- Giannone, D. – Lenza, M. – Primiceri, G. E. (2015) Prior selection for vector autoregressions. *Review of Economics and Statistics*, vol. 97 (2), 436–451.
- Gilchrist, S. – Himmelberg, C. (1998) Investment: fundamentals and finance. *NBER macroeconomics annual*, vol. 13, 223–262.
- Gould, J. P. (1968) Adjustment costs in the theory of investment of the firm. *The Review of Economic Studies*, vol. 35 (1), 47–55.
- Granger, C. W. (1969) Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, 424–438.

- Guiso, L. – Parigi, G. (1999) Investment and demand uncertainty. *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 114 (1), 185–227.
- Hayashi, F. (1982) Tobin's marginal q and average q: A neoclassical interpretation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 213–224.
- Jorgenson, D. W. (1963) Capital theory and investment behavior. *The American Economic Review*, vol. 53 (2), 247–259.
- Kilian, L. – Lütkepohl, H. (2017) *Structural vector autoregressive analysis*. Cambridge University Press.
- Koop, G. – Korobilis, D. (2010) *Bayesian multivariate time series methods for empirical macroeconomics*. Now Publishers Inc.
- Kuschnig, N. – Vashold, L. (2019) Bvar: Bayesian vector autoregressions with hierarchical prior selection in r.
- Leahy, J. V. – Whited, T. M. (1995) The effect of uncertainty on investment: Some stylized facts. Tech. rep., National Bureau of Economic Research.
- Litterman, R. B. (1980) *A Bayesian procedure for forecasting with vector autoregressions*. MIT.
- Litterman, R. B. (1986) Forecasting with bayesian vector autoregressions—five years of experience. *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 4 (1), 25–38.
- Love, I. – Zicchino, L. (2006) Financial development and dynamic investment behavior: Evidence from panel var. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, vol. 46 (2), 190–210.
- Lucas Jr, R. E. (1967) Adjustment costs and the theory of supply. *Journal of Political Economy*, vol. 75 (4, Part 1), 321–334.
- Lütkepohl, H. (2005) *New introduction to multiple time series analysis*. Springer Science & Business Media.
- Pfaff, B. ym. (2008) Var, svar and svec models: Implementation within r package vars. *Journal of Statistical Software*, vol. 27 (4), 1–32.
- Phillips, P. C. – Durlauf, S. N. (1986) Multiple time series regression with integrated processes. *The Review of Economic Studies*, vol. 53 (4), 473–495.
- Roberts, G. O. – Rosenthal, J. S. ym. (2004) General state space markov chains and mcmc algorithms. *Probability surveys*, vol. 1, 20–71.

- Sims, C. A. (1980) Macroeconomics and reality. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1–48.
- Sims, C. A. (1989) Models and their uses. *American Journal of Agricultural Economics*, vol. 71 (2), 489–494.
- Sims, C. A. – Stock, J. H. – Watson, M. W. (1990) Inference in linear time series models with some unit roots. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 113–144.
- Sims, C. A. – Zha, T. (1998) Bayesian methods for dynamic multivariate models. *International Economic Review*, 949–968.
- Stock, J. H. (1987) Asymptotic properties of least squares estimators of cointegrating vectors. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1035–1056.
- Tilastokeskus (2020a) Suomen virallinen tilasto (svt): Rahoitustilinpito [verkkajulkaisu]. URL <http://www.stat.fi/til/rtp/index.html>, haettu: 24.04.2020.
- Tilastokeskus (2020b) Suomen virallinen tilasto (svt): Sektoritilit neljännesvuositain [verkkajulkaisu]. URL <http://www.stat.fi/til/sekn/index.html>, haettu: 24.04.2020.
- Tobin, J. (1969) A general equilibrium approach to monetary theory. *Journal of money, credit and banking*, vol. 1 (1), 15–29.
- Treadway, A. B. (1969) On rational entrepreneurial behaviour and the demand for investment. *The Review of Economic Studies*, vol. 36 (2), 227–239.