



POLYOMINOJEN LASKEMINEN

Joni Vainio-Kaila

Pro gradu -tutkielma  
Huhtikuu 2021

Tarkastajat:  
Prof. J. K.  
Prof. I. H.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

JONI VAINIO-KAILA: Polyominojen laskeminen  
Pro gradu -tutkielma, 48 s.  
Matematiikka  
Huhtikuu 2021

---

Tässä tutkielmassa tutkitaan samankokoisista neliöistä koostuvia yhtenäisiä tason kuvioita, polyominoja. Tutkielmassa tutkitaan erityisesti polyominojen laskemiseen liittyviä ongelmia. Tutkimusongelmia ovat polyominojen lukumäärien laskeminen algoritmisesti, polyominojen lukumäärien ylä- ja alarajat sekä polyominojen lukumääriä generoivat funktiot.

Tutkielmassa esitetään ensin taustatietona generoiviin funktioihin ja rekursiivisiin lukujonoihin liittyviä tuloksia. Tämän jälkeen polyominoille ja tietynlaisista polyominoista muodostetuille osajoukoille annetaan tarkat matemaattiset määritelmät sekä johdetaan niille joitakin perustuloksia. Tässä tutkielmassa tutkittavia polyominoja ovat kiinnitetyt, kiraaliset, vapaat, suunnatut ja rivikonveksit polyominot.

Tutkielman alussa esitettyjen määritelmien ja tulosten avulla annetaan eräs algoritmi polyominojen laskemiseksi sekä johdetaan ylä- ja alarajat erilaisten polyominojen lukumäärille ja Klarnerin vakiolle, jonka suuruus kuvastaa polyominojen lukumäärän asymptoottista kasvuvauhtia. Tutkielman lopussa annetaan vielä kaksi generoivaa funktiota, joiden avulla rivikonveksien ja suunnattujen polyominojen lukumäärät voidaan laskea.

Asiasanat: kombinatoriikka, polyomino, generoiva funktio, Klarnerin vakio, rekursiivinen lukujono.



# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Generoivista funktioista ja rekursiivisista lukujonoista</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Polyominot</b>	<b>7</b>
3.1	Ekvivalentit polyominot . . . . .	9
3.2	Suunnatut ja rivikonveksit polyominot . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Polyominojen laskeminen</b>	<b>16</b>
4.1	Polyominojen laskeminen algoritmien avulla . . . . .	16
4.2	Eksponentiaaliset rajat polyominojen lukumäärille . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Klarnerin vakio</b>	<b>23</b>
5.1	Parempi alaraja Klarnerin vakiolle . . . . .	25
5.2	Parempi yläaraja Klarnerin vakiolle . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Polyominojen lukumääriä generoivat funktiot</b>	<b>41</b>
	<b>Viitteet</b>	<b>47</b>



# 1 Johdanto

Tason kuvioiden lukumäärien laskeminen tiettyjen ominaisuuksien mukaan jaotellen on perustavanlaatuinen kombinatoriikan ongelma. Kuuluisia tällaisia ongelmia ovat esimerkiksi itseään välttävien polkujen ja itseään välttävästä poluista muodostettujen monikulmioiden laskeminen. Tässä tutkielmassa tutkittavia tason kuvioita kutsutaan polyominoiksi. Polyominot ovat yhtenäisiä samankokoisista neliöistä koostuvia kuvioita, joissa jokainen neliö on asetettu sivu vasten jonkin toisen neliön sivua. Tarkka matemaattinen määritelmä polyominoille annetaan luvussa 3.

Solomon Golomb kehitti nimityksen polyomino vuonna 1954 ja nimitys juontaa juurensa peliin domino, jossa kahdesta rinnakkain olevasta neliöstä muodostettuja palikoita kutsutaan dominoiksi. Polyominoja on kuitenkin käytetty ainakin jo vuodesta 1907 asti kuuluisissa pulmatehtävissä. Tämän lisäksi viidestä neliöstä muodostettujen polyominojen lukumäärä on ollut muinaisten Go-lautapelimestareiden tiedossa jo satoja vuosia sitten. [1]

Polyominojen nimityksissä käytetään yleensä kreikkalaista etuliitettä kuvaamaan polyominossa olevien neliöiden lukumäärää. Niinpä yhdestä neliöstä koostuvasta polyominosta alkaen polyominoista käytetään nimityksiä monomino, domino, tromino, tetromino, pentomino, ja niin edelleen [1]. Tässä tutkielmassa polyominoja, joissa on  $n$  solua, kutsutaan  $n$ -ominoiksi.

Laskettaessa erilaisten polyominon lukumääriä, niiden siirtäminen tasossa on aina sallittua. Sen sijaan kiertäminen tai peilaaminen voidaan joko sallia tai kieltää. Niinpä polyominoja laskettaessa saadaan eri tuloksia riippuen siitä, mitkä polyominot ajatellaan samoiksi. Polyominoja, joita ei voi kiertää eikä peilata, kutsutaan kiinnitetyiksi. Sallittaessa polyominojen kiertäminen, polyominoja kutsutaan kiraaliksi eli yksipuolisiksi. Kun kierron lisäksi sallitaan vielä peilaaminen, polyominoja kutsutaan vapaiksi. Esimerkiksi Tetris-pelissä on käytössä kaikki ne seitsemän neljästä neliöstä koostuvaa kiraalista polyominoa eli tetrominoa, joita voi kiertää, mutta ei kääntää ympäri. Kiinnitettyjä tetrominoja on sen sijaan 19 erilaista ja vapaita tetrominoja vain 5 erilaista.

Tarkkaa kaavaa kiinnitettyjen, kiraalisten ja vapaiden polyominojen lukumäärille ei tunneta. Lukumääriä voidaan kuitenkin laskea algoritmisesti ja lukumäärille voidaan antaa myös joitakin ylä- ja alarajoja. Tämän tutkielman luvut 4 ja 5 keskittyvät näihin kahteen aiheeseen. Kaikkien polyominojen sijaan voidaan myös tutkia tietynlaisista polyominoista muodostettuja osajoukkoja. Polyominojen osajoukoissa olevien polyominojen lukumäärät osataan joissain tapauksissa laskea generoivien funktioiden avulla. Generoivat funktiot ovat muodollisia potenssisarjoja, joissa muuttujan potenssien kertoimet kertovat tietynkokoisten polyominojen lukumäärät. Tämän tutkielman luvussa 6 annetaan kahdelle tietynlaisista polyominoista koostuville osajoukoille generoivat funktiot.

Tässä tutkielmassa taustatietona tarvittavat generoiviin funktioihin ja rekursiivisiin lukujonoihin liittyvät määritelmät ja tulokset esitetään luvussa 2. Näiden aiheiden lisäksi lukijan oletetaan tuntevan graafiteorian peruskäsitteet ja kombinatoriikan osalta joitakin peruskaavoja, kuten binomikaavan ja sen yleistyksenä saatavan multinomikaavan.

## 2 Generoivista funktioista ja rekursiivisista lukujonoista

Tässä luvussa tutustutaan lukujonoja generoiviin funktioihin ja rekursiivisiin lukujonoihin. Näistä aihealueista esitetään ainoastaan määritelmät ja tulokset, joita hyödynnetään tämän tutkielman myöhemmissä luvuissa. Jos tämän luvun aiheet ovat lukijalle jo entuudestaan tuttuja, voi hän siirtyä suoraan lukuun 3, josta alkaa tutkielman polyominoja käsittelevä osuus. Tämän luvun määritelmät ja tulokset perustuvat kirjan *Introductory Combinatorics* kappaleeseen *Recurrence Relations and Generating Functions* [2].

Lukujonot voidaan tunnetusti esittää luettelomaisena jonona pilkulla erotettuja lukuja. Luettelomaisesta esityksestä ei kuitenkaan pysty heti kertomaan, kuinka mones jokin lukujonon jäsen on. Määritelläänkin lukujonoille seuraavaksi toisenlainen esitysmuoto, josta näkee jäsenten suuruuden lisäksi heti myös niiden sijainnin lukujonossa.

**Määritelmä 1.** Lukujonon  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  generoiva funktio on

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

Lukujonon generoiva funktio on siis muuttujan  $x$  muodollinen potenssisarja, jossa potenssin  $x^n$  kerroin kertoo lukujonon järjestykseltään kohdassa  $n + 1$  olevan jäsenen arvon. Potenssisarjojen muodollisuus tarkoittaa, että sarjoja käsitellään ainoastaan algebrallisina objekteina. Toisin sanoen emme ole kiinnostuneita sarjojen suppenemisestä, eikä muuttujan  $x$  paikalle sijoiteta koskaan mitään konkreettista arvoa.

Generoivat funktiot voidaan yleistää myös reaalityyppisistä koostuville moniulotteisille listoille käyttämällä yhden muuttujan sijaan useampaa muuttujaa.

**Määritelmä 2.** Listan  $u : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{R}$  generoiva funktio on

$$G(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{i=0}^k \sum_{n_i \geq 0} u(n_1, n_2, \dots, n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}.$$

Vaikka generoivat funktiot ovatkin muodollisia potenssisarjoja, niiden nimityksessä käytetään sanaa funktio. Tämä nimitys johtuu siitä, että joskus generoiva funktio voidaan kirjoittaa suljetussa muodossa funktiona, jonka sarjakehitelmänä generoivaa funktiota vastaava potenssisarja saadaan.

**Esimerkki 1.** Lukujonon  $(1, 1, 1, \dots)$  generoiva funktio on  $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ . Tämä voidaan esittää geometrisen sarjan summana myös funktiona

$$G(x) = \frac{1}{1-x},$$



joka sisältää erittäin kompaktissa muodossa tiedon lukujonon  $(1, 1, 1, \dots)$  jäsenten arvoista. Kertomalla generoiva funktio  $G(x)$  vakiolla  $a$  ja sijoittamalla muuttujan  $x$  paikalle termi  $qx$ , jossa  $q$  on jokin vakio, saadaan lukujonon  $(a, aq, aq^2, \dots)$  generoiva funktio

$$aG(qx) = \frac{a}{1 - qx} = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n x^n.$$

Esimerkissä 1 pystyimme esittämään geometrinen lukujonojen generoivat funktiot kahden polynomin osamääränä. Osoitetaan seuraavaksi, että tämänkaltaisen esitysmuoto on aina yksikäsitteinen. Toisin sanoen osoitetaan, että jokaista polynomien osamäärää kohti on olemassa yksikäsitteinen muodollinen potenssisarja, kunhan vain nimittäjässä olevan polynomin vakiotermin nollasta eroava. Lasketaan kuitenkin ennen tämän väitteen osoittamista hyödyllinen esitysmuoto minkä tahansa polynomin ja muodollisen potenssisarjan tulolle.

**Lemma 1.** *Olkoon  $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$  ja  $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_nx^n$ . Tällöin tulo*

$$a(x)G(x) = \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{i=0}^n a_i u_{n-i} x^n + \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{i=0}^k a_i u_{n-i} x^n.$$

*Todistus.* Polynomin  $a(x)$  ja potenssisarjan  $G(x)$  tulolle on voimassa

$$a(x)G(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{i=0}^k \sum_{n=0}^{\infty} a_i u_n x^{n+i}.$$

Muuttamalla edellisen yhtälöketjun viimeisen lausekkeen summan indeksöintiä ja erottamalla näin saadusta summasta muuttujan  $x$  astetta  $k$  pienemmät potenssit omaksi summakseen saadaan yhtälö

$$a(x)G(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{n=i}^{k-1} a_i u_{n-i} x^n + \sum_{i=0}^k \sum_{n=k}^{\infty} a_i u_{n-i} x^n.$$

Edellisen yhtälön jälkimmäisen summan summausjärjestys voidaan vaihtaa. Lisäksi ensimmäiselle summalle on voimassa yhtälöketju

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{n=i}^{k-1} a_i u_{n-i} x^n = \sum_{0 \leq i \leq n \leq k-1} a_i u_{n-i} x^n = \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{i=0}^n a_i u_{n-i} x^n,$$

mikä todistaa väitteen. □

Edellisen lemmän avulla on helppo laskea, kuinka suuri potenssin  $x^n$  kerroin on polynomin ja formaalisen potenssisarjan tulossa. Hyödynnetään tätä tietoa heti seuraavan lauseen todistuksessa.

**Lause 1.** Olkoon  $p(x)$  ja  $q(x)$  polynomeja, jossa  $q(0) \neq 0$ . Tällöin on olemassa yksikäsitteinen formaali potenssisarja  $G(x)$ , jolle on voimassa  $q(x)G(x) = p(x)$ .

*Todistus.* Olkoon  $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$  jokin formaali potenssisarja. Lisäksi voimme olettaa, että

$$\begin{aligned} p(x) &= p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k \text{ ja} \\ q(x) &= q_0 + q_1 x + \cdots + q_r x^r, \end{aligned}$$

joillakin luonnollisilla luvuilla  $k$  ja  $r$ . Lemman 1 perusteella tulo

$$q(x)G(x) = \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{i=0}^n q_i u_{n-i} x^n + \sum_{n=r}^{\infty} \sum_{i=0}^r q_i u_{n-i} x^n.$$

Asetetaan nyt  $p_i = 0$  kaikilla  $i > k$ . Tällöin ehdosta  $q(x)G(x) = p(x)$  seuraa edellisen yhtälön perusteella yhtälöryhmä

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 u_0 = p_0 \\ q_0 u_1 + q_1 u_0 = p_1 \\ \vdots \\ q_0 u_{r-1} + q_1 u_{r-2} + \cdots + q_{r-1} u_0 = p_{r-1} \\ q_0 u_r + q_1 u_{r-1} + \cdots + q_r u_0 = p_r \\ q_0 u_{r+1} + q_1 u_r + \cdots + q_r u_1 = p_{r+1} \\ \vdots \\ q_0 u_{r+i} + q_1 u_{r+i-1} + \cdots + q_r u_i = p_{r+i} \\ \vdots \end{array} \right. ,$$

jossa on siis äärettömän monta yhtälöä. Lauseen oletuksen  $q(0) \neq 0$  perusteella  $q_0 \neq 0$  ja näin ollen voimme jakaa vakiolla  $q_0$ . Niinpä yhtälöryhmällä, johon kuuluu edellisistä yhtälöistä ainoastaan  $i$  ensimmäistä yhtälöä, on aina yksikäsitteinen ratkaisu. Formaalin potenssisarjan  $G(x)$  mikä tahansa kerroin  $u_n$  määräytyy nyt siis yksikäsitteisesti yhtälöryhmästä, johon kuuluu yllä olevista yhtälöistä ensimmäiset  $n + 1$  yhtälöä.  $\square$

Jos nyt jonkin lukujonon generoivalle funktiolle  $G(x)$  löytyy polynomit  $p(x)$  ja  $q(x)$ , jossa  $q(0) \neq 0$  ja joille  $q(x)G(x) = p(x)$ , niin voimme edellisen lauseen perusteella merkitä  $G(x) = p(x)/q(x)$ . Osoittautuu, että tällaiset polynomit löytyvät aina, kun lukujonon jäsenet toteuttavat seuraavan määritelmän tiettyä muotoa olevan yhtälön.

**Määritelmä 3.** *Kertalukua  $k$  oleva lineaarinen, kokonaislukukertoiminen ja homogeeninen rekursioyhtälö on muotoa*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} \quad (1)$$

oleva yhtälö, jossa  $k$  on positiivinen kokonaisluku ja kertoimet  $a_i$  ovat kokonaislukuja kaikilla  $1 \leq i \leq k$ .

Edellisessä määritelmässä lineaarisuus viittaa siihen, että yhtälö (1) on lineaarinen muuttujien  $u_i$  suhteen, kokonaislukukertoimisuus siihen, että kertoimet  $a_i$  ovat kokonaislukuja ja homogeenisuus siihen, että yhtälössä ei ole jo siinä olevien termien lisäksi jotain muuta luvusta  $n$  riippuvaa lauseketta. Yleensä kertalukua  $k$  olevan lineaarisen rekursioyhtälön määritelmässä vaaditaan lisäksi, että kerroin  $a_k$  on erisuuri kuin nolla. Tässä tutkielmassa kerroin  $a_k$  saa olla myös nolla, ellei erikseen toisin mainita.

**Määritelmä 4.** Lukujono  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  on *rekursiivinen*, jos sen jäsenet toteuttavat jonkin muotoa (1) olevan rekursioyhtälön kaikilla  $n \geq k$ .

Osoitetaan seuraavaksi, että jokaisen rekursiivisen lukujonon generoiva funktio voidaan esittää kahden polynomin osamääränä. Erityisesti nähdään, että nämä osamäärässä esiintyvät kaksi polynomia voidaan muodostaa rekursiivisen lukujonon ensimmäisten jäsenten ja niiden toteuttaman rekursioyhtälön avulla.

**Lause 2.** Olkoon  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  rekursiivinen lukujono ja  $k$  pienin positiivinen kokonaisluku, jolla lukujonon  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  jäsenet toteuttavat muotoa (1) olevan rekursioyhtälön kaikilla  $n \geq k$ . Tällöin lukujonon  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  generoiva funktio

$$G(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

jossa

$$p(x) = \sum_{n=0}^{k-1} \left( u_n - \sum_{i=1}^n a_i u_{n-i} \right) x^n \text{ ja}$$

$$q(x) = 1 - \sum_{i=1}^k a_i x^i.$$

*Todistus.* Olkoon  $p(x)$  ja  $q(x)$  kuten lauseessa. Tutkitaan polynomin  $q(x)$  ja lukujonon  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  generoivan funktion  $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$  tuloa. Lemman 1 perusteella

$$q(x)G(x) = \sum_{n=0}^{k-1} \left( u_n - \sum_{i=1}^n a_i u_{n-i} \right) x^n + \sum_{n=k}^{\infty} \left( u_n - \sum_{i=1}^k a_i u_{n-i} \right) x^n.$$

Koska lauseen oletuksen mukaan lukujonon jäsenet toteuttavat muotoa (1) olevan rekursioyhtälön kaikilla  $n \geq k$ , myös  $u_n - \sum_{i=1}^k a_i u_{n-i} = 0$  kaikilla  $n \geq k$ . Näin ollen edellisen yhtälön toinen summa menee nolllaksi. Koska edellisen yhtälön ensimmäinen summa on polynomi  $p(x)$ , yhtälö saadaan muotoon  $q(x)G(x) = p(x)$ .  $\square$

**Esimerkki 2.** Fibonaccin lukujonon  $(F_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$  jäsenet toteuttavat rekursioyhtälön  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  kaikilla  $n \geq 2$ . Niinpä lauseen 2 perusteella Fibonaccin lukujonon generoivalle funktiolle  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$  on voimassa

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Tutkimalla rekursiivisen lukujonon generoivalle funktiolle edellisen lauseen menetelmän avulla muodostettua osamäärää, lukujonon jäsenille voitaisiin ainakin teoriassa johtaa eksplisiittinen järjestysluvusta  $n$  riippuva kaava. Kyseinen kaava voidaan muodostaa myös tutkimalla lukujonon jäsenten toteuttamaa rekursioyhtälöä (1) ja siihen liittyvää seuraavan määritelmän polynomia.

**Määritelmä 5.** Muotoa (1) olevan rekursioyhtälön *karakteristinen polynomi* on

$$p(x) = x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \dots - a_k.$$

Karakteristisen polynomin juuret liittyvät vahvasti rekursioyhtälön toteuttaviin yhdestä termistä koostuviin lausekkeisiin. Oletetaan seuraavassa lauseessa, että rekursioyhtälössä (1) kerroin  $a_k \neq 0$ , jolloin karakteristisen polynomin  $p(x)$  jokainen juuri on nollasta eroava.

**Lause 3.** *Olkoon  $a_k \neq 0$  ja  $\alpha$  nollasta eroava kompleksiluku. Tällöin lauseke  $u_n = \alpha^n$  toteuttaa muotoa (1) olevan rekursioyhtälön, jos ja vain jos  $\alpha$  on karakteristisen polynomin  $p(x)$  juuri.*

*Todistus.* Lauseke  $u_n = \alpha^n$  toteuttaa muotoa (1) olevan rekursioyhtälön, jos ja vain jos

$$\alpha^n = a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \dots + a_k\alpha^{n-k}.$$

Koska  $\alpha \neq 0$ , edellinen yhtälö voidaan jakaa tekijällä  $\alpha^{n-k}$ . Saadaan yhtälö

$$\alpha^k = a_1\alpha^{k-1} + a_2\alpha^{k-2} + \dots + a_k.$$

Siirtämällä edellisessä yhtälössä kaikki termit vasemmalle puolelle, nähdään että  $\alpha$  on karakteristisen polynomin  $p(x)$  juuri. Koska todistuksen jokainen kohta on ekvivalentti aina edellisen kohdan kanssa, lauseen väite pätee myös toiseen suuntaan.  $\square$

Tutkitaan seuraavaksi tapausta, jossa karakteristisen polynomin kaikki juuret ovat erisuuria ja nollasta eroavia. Edellisen lauseen perusteella jokainen karakteristisen polynomin juuri antaa yhden rekursioyhtälön toteuttavan lausekkeen. Rekursioyhtälön lineaarisuuden perusteella myös näiden lausekkeiden jokainen lineaarikombinaatio toteuttaa sen.

Osoitetaan seuraavassa lauseessa, että jokin karakteristisen polynomin juurien avulla muodostetuista lineaarikombinaatioista antaa rekursiivisen lukujonon jäsenille järjestysluvusta  $n$  riippuvan kaavan. Väitteen todistamiseksi tarvitsemme seuraavaa *Vandermonden determinantteja* koskevaa lemmaa, joka esitetään sen yleisyyden vuoksi ilman todistusta.

**Lemma 2.** *Vandermonden astetta  $n$  olevalle determinantille on voimassa*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

**Lause 4.** Olkoon  $(u_n)_{n=0}^\infty$  rekursiivinen lukujono, jonka  $k$  ensimmäistä jäsentä tunnetaan ja jonka jäsenten toteuttaman muotoa (1) olevan rekursioyhtälön karakteristisen polynomin juuret  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$  ja  $\alpha_k$  ovat erisuuria ja nolasta eroavia. Tällöin on olemassa kompleksivakiot  $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$  ja  $c_k$ , joilla

$$u_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \dots + c_k\alpha_k^n.$$

*Todistus.* Koska jokainen lineaarikombinaatio  $u_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \dots + c_k\alpha_k^n$  toteuttaa muotoa (1) olevan rekursioyhtälön, riittää osoittaa, että lauseen vakiot  $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$  ja  $c_k$  ovat olemassa. Lukujonon  $(u_n)_{n=0}^\infty$  ensimmäisen  $k$  jäsenen avulla saadaan muodostettua yhtälöryhmä

$$\begin{cases} u_0 = c_1 + c_2 + \dots + c_k \\ u_1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k \\ u_2 = c_1\alpha_1^2 + c_2\alpha_2^2 + \dots + c_k\alpha_k^2 \\ \vdots \\ u_{k-1} = c_1\alpha_1^{k-1} + c_2\alpha_2^{k-1} + \dots + c_k\alpha_k^{k-1}. \end{cases}$$

Lemman 2 perusteella tämän yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \dots & \alpha_k^{k-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Koska  $\alpha_j \neq \alpha_i$  aina kun  $j \neq i$ , kerroinmatriisin determinantti on nolasta eroava. Näin ollen yhtälöryhmän vakiot saadaan ratkaistua ja väite seuraa.  $\square$

### 3 Polyominot

Tässä luvussa määritellään tarkasti, millaisia tason kuvioita polyominot ovat, ja millaisia eri polyominojen joukkoja tässä tutkielmassa tutkitaan. Tämän luvun määritelmät ja tulokset perustuvat kirjan *Handbook of Discrete and Computational Geometry* kappaleeseen *Polyominoes* [3].

Määritellään ensin pienimmät merkitykselliset pisteiden joukot, joista jokainen polyomino koostuu. Tässä tutkielmassa yksikköneliöllä tarkoitetaan yksikön pituisista sivuista koostuvan neliön rajaamaa pisteiden joukkoa.

**Määritelmä 6.** *Solu* on kaksiulotteisen karteesisen koordinaatiston yksikköneliö, jonka sivut ovat koordinaatiston akselien suuntaiset ja keskipisteen koordinaatit kokonaislukuja.

Solusta, jonka keskipiste on  $C = (c_1, c_2)$ , käytetään merkintää  $[C]$  tai  $[c_1, c_2]$ . Joissakin lähteissä, kuten artikkelissa [4], solu on määritelty yksikköneliönä, jonka kulmapisteiden koordinaatit ovat kokonaislukuja. Tässä tutkielmassa käytetään

kuitenkin edellä annettua määritelmää, sillä sen avulla tietty solu voidaan nimetä yksinkertaisesti sen keskipisteen koordinaattien avulla. Solujen keskipisteiden koordinaattien avulla voidaan myös määrittellä, mitkä solut ovat keskenään vierekkäisiä.

**Määritelmä 7.** Kaksi solua  $[a_1, a_2]$  ja  $[b_1, b_2]$  ovat *vierekkäisiä*, jos

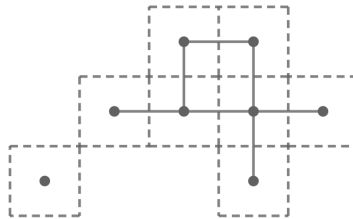
$$|b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| = 1.$$

Kahdella vierekkäisellä solulla on siis tarkalleen yksi yhteinen sivu ja niinpä jokaisella solulla on neljä vierekkäistä solua. Solut, joilla on yksi yhteinen kulma, eivät ole vierekkäisiä.

Solujen keskipisteiden ja niitä yhdistävien viivojen avulla voidaan muodostaa graafeja. Erityisen hyödylliseksi osoittautuvat sellaiset graafit, jotka saadaan yhdistämällä aina kahden vierekkäisen solun keskipisteet viivalla.

**Määritelmä 8.** Olkoon  $Q$  epätyhjä joukko soluja. Joukon  $Q$  solujen *indusoima graafi* on graafi, jonka pisteitä ovat joukossa  $Q$  olevien solujen keskipisteet, ja jossa kaksi pistettä on yhdistetty viivalla aina, kun vastaavissa kohdissa olevat solut ovat vierekkäisiä.

**Esimerkki 3.** Kuvassa 1 on esitetty katkoviivoin kahdeksan solua sekä pistein ja viivoin niiden indusoima graafi. Graafi koostuu kahdeksasta pisteestä ja seitsemästä vierekkäisiä soluja yhdistävästä viivasta.



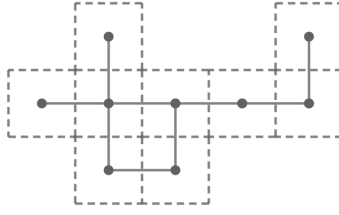
Kuva 1: Joukko soluja ja niiden indusoima graafi.

Solujen ja niiden indusoimien graafien ominaisuuksien avulla polyominot voidaan määrittellä varsin yksinkertaisesti.

**Määritelmä 9.** *Polyomino* on äärellinen ja epätyhjä joukko soluja, joiden indusoima graafi on yhtenäinen.

Käytetään polyominoille merkintää  $P_n$ , jossa alaindeksi  $n$  kertoo polyominossa olevien solujen lukumäärän. Alaindeksin  $n$  voi jättää pois, jos solujen lukumäärä ei ole merkityksellinen. Polyominoa, jossa on  $n$  solua, sanotaan  *$n$ -ominoksi*.

**Esimerkki 4.** Kuvan 1 solut eivät muodosta polyominoa, sillä niiden indusoima graafi ei ole yhtenäinen. Kuvassa 2 olevien solujen indusoima graafi sen sijaan on yhtenäinen, joten niistä koostuva joukko on polyomino. Tarkemmin sanottuna se on 9-omino, sillä se sisältää yhdeksän solua.



Kuva 2: Eräs 9-omino ja sen solujen indusoima yhtenäinen graafi.

Polyominon määritelmän perusteella polyominot ovat samanlaisia, jos ne koostuvat tarkalleen samoista soluista. Muutoin polyominot ovat erilaisia. Tutkielman tavoitteena olisi laskea, kuinka monta erilaista  $n$ -ominoa on olemassa kullakin luonnollisella luvulla  $n$ . Tyhjä joukko ei muodosta polyominoa, joten nolla solua sisältäviä polyominoja on aina nolla kappaletta. Kun  $n$  on aidosti positiivinen kokonaisluku, niin silloin erilaisia  $n$ -ominoja onkin jo äärettömän monta. Nimittäin äärettömän monesta solusta voidaan valita äärettömän monella tavalla  $n$  solua, jotka muodostavat polyominon. Jotta siis olisi mielekästä laskea polyominojen lukumääriä, on polyominojen samanlaisuus määriteltävä eri tavalla.

### 3.1 Ekvivalentit polyominot

Määritellään tässä luvussa kolme erilaista polyominojen ekvivalenssirelaatiota ja tutkitaan niiden määrittämistä ekvivalenssiluokista muodostettuja joukkoja. Osoitetaan, että nämä joukot ovat äärellisiä, jolloin niissä olevien alkioiden lukumääriä voidaan laskea.

Ensimmäinen polyominojen ekvivalenssirelaatio saadaan samaistamalla polyominot, jotka ovat eri kohdissa koordinaatistoa, mutta muuten samanlaisia.

**Määritelmä 10.** Kaksi polyominoa  $P$  ja  $P'$  ovat *translaatio-ekvivalentteja*, jos

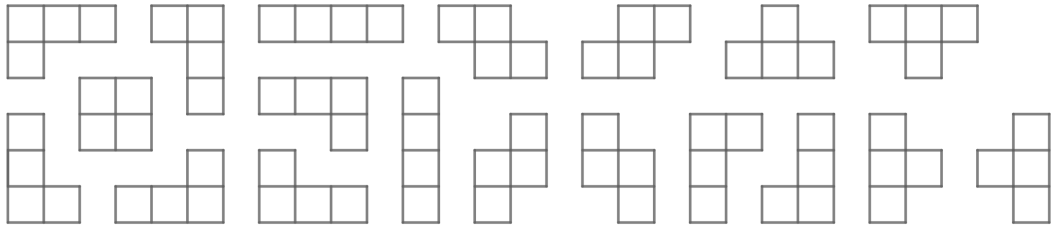
$$P = P' + \mathbf{r} \quad (2)$$

jollakin joukkoon  $\mathbb{Z}^2$  kuuluvalla alkiolla  $\mathbf{r}$ .

Translaatio-ekvivalenssirelaation määrittelemiä ekvivalenssiluokkia kutsutaan *kiinnitetyiksi polyominoiksi*. Jos jotkin polyominot ovat translaatio-ekvivalentteja, sanotaan myös, että ne ovat toistensa translaatioita. Polyominot voivat olla toistensa translaatioita vain, jos niissä on yhtä monta solua. Niinpä yhdessä kiinnitetyssä polyominossa on ainoastaan saman verran soluja sisältäviä polyominoja. Kiinnitettyä polyominoa, joka koostuu  $n$  solua sisältävistä polyominoista, sanotaan *kiinnitetyksi  $n$ -ominoksi*. Kiinnitettyjen  $n$ -ominojen joukosta käytetään merkintää  $T_n$  ja siinä olevien alkioiden lukumäärästä merkintää  $t(n)$ .

**Esimerkki 5.** Joukossa  $T_4$  on 19 erilaista kiinnitettyä 4-ominoa, joiden eräs edustajisto on esitetty kuvassa 3. Kaikki 4-ominot saadaan siis kuvassa olevien 4-ominojen translaatioina.

Toinen polyominojen ekvivalenssirelaatio saadaan, kun samaistetaan polyominot, jotka voivat eri kohdan lisäksi olla myös eri asennossa.



Kuva 3: Kiinnitettyjen 4-ominon edustajisto.

**Määritelmä 11.** Kaksi polyominoa  $P$  ja  $P'$  ovat *rotaatio-ekvivalentteja*, jos

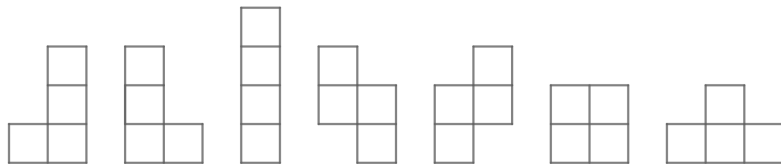
$$P = P' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k + \mathbf{r} \quad (3)$$

jollakin kokonaisluvulla  $k$ , jolle  $0 \leq k \leq 3$ , ja joukkoon  $\mathbb{Z}^2$  kuuluvalla alkiolla  $\mathbf{r}$ .

Rotaatio-ekvivalenssirelaation määrittelemiä ekvivalenssiluokkia kutsutaan *kiraaliseksi polyominoiksi*. Jos jotkin polyominot ovat rotaatio-ekvivalentteja, sanotaan myös, että ne ovat toistensa rotaatio-translaatioita. Kuten kiinnitetty polyominot, myös kiraaliset polyominot koostuvat ainoastaan saman verran soluja sisältävistä polyominoista. Kiraalista polyominoa, joka koostuu  $n$  solua sisältävistä polyominoista, sanotaan *kiraaliseksi  $n$ -ominoksi*. Kiraalisten  $n$ -ominon joukosta käytetään merkintää  $R_n$  ja siinä olevien alkioiden lukumäärästä merkintää  $r(n)$ .

Yhtälön (3) matriisilla kertominen vastaa polyominon kiertoa origon suhteen  $90^\circ$  myötäpäivään. Kun jonkin kiinnitetyn polyominon edustaja kerrotaan yhtälön (3) matriisin potensseilla, se voi kuvautua saman kiinnitetyn polyominon polyominoksi joko ensimmäisellä, toisella tai vasta neljännellä potenssilla. Niinpä yksi kiraalinen polyomino saadaan 1, 2 tai 4 kiinnitetyn polyominon unionina.

**Esimerkki 6.** Joukossa  $R_4$  on 7 erilaista kiraalista 4-ominoa, joiden eräs edustajisto on esitetty kuvassa 4. Kaikki 4-ominot saadaan siis kuvassa olevien 4-ominon rotaatio-translaatioina.



Kuva 4: Kiraalisten 4-ominon edustajisto.

Kolmas ja viimeinen tässä tutkielmassa tarkasteltava polyominon ekvivalenssirelaatio saadaan, kun samaistetaan polyominot, jotka voivat eri kohdan ja asennon lisäksi olla toistensa peilikuvia.



**Määritelmä 12.** Kaksi polyominoa  $P$  ja  $P'$  ovat *kongruentteja*, jos

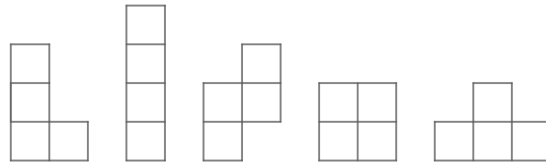
$$P = P' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^i + \mathbf{r} \quad (4)$$

joillakin kokonaisluvuilla  $k$  ja  $i$ , joille  $0 \leq k \leq 3$  ja  $0 \leq i \leq 1$ , ja jollakin joukkoon  $\mathbb{Z}^2$  kuuluvalla alkiolla  $\mathbf{r}$ .

Kongruenssirelaation määrittelemiä ekvivalenssiluokkia kutsutaan *vapaiksi polyominoiksi*. Kuten edellisinkin polyominojen ekvivalenssiluokat, myös vapaat polyominot koostuvat ainoastaan saman verran soluja sisältävistä polyominoista. Vapaata polyominoa, joka koostuu  $n$  solua sisältävistä polyominoista, sanotaan *vapaaksi  $n$ -ominoiksi*. Vapaiden  $n$ -ominojen joukosta käytetään merkintää  $S_n$  ja siinä olevien alkioiden lukumäärästä merkintää  $s(n)$ .

Yhtälön (4) jälkimmäisellä matriisilla kertominen vastaa polyominon peilausta  $x$ -akselin suhteen. Kun jonkin kiraalisen polyominon edustaja kerrotaan yhtälön (4) jälkimmäisellä matriisilla, se voi kuvautua joko saman tai eri kiraalisen polyominon polyominoksi. Niinpä yksi vapaa polyomino saadaan 1 tai 2 kiraalisen polyominon unionina. Jos jokin vapaa  $n$ -omino on kahden kiraalisen polyominon unioni, niin nämä kiraaliset polyominot ovat toistensa peilikuvia ja näin ollen ne koostuvat yhtä monen vapaan polyominon polyominoista. Yksi vapaa polyomino saadaan siis 1, 2, 4 tai 8 kiinnitetyn polyominon unionina.

**Esimerkki 7.** Joukossa  $S_4$  on 5 erilaista vapaata 4-ominoa, joiden eräs edustajisto on esitetty kuvassa 5. Jokainen 4-omino on siis kongruentti jonkin kuvassa 5 esitetyn 4-ominon kanssa.



Kuva 5: Vapaiden 4-ominojen edustajisto.

Esimerkkien 5, 6 ja 7 nojalla joukot  $T_4$ ,  $R_4$  ja  $S_4$  ovat äärellisiä. Osoitetaan, että tämä pätee yleisesti joukoille  $T_n$ ,  $R_n$  ja  $S_n$ . Muodostetaan sitä ennen kaksi määritelmää, joista ensimmäisen avulla voidaan verrata solujen suhteellisia sijainteja koordinaatistossa, ja jälkimmäisen avulla tutkia tietyssä koordinaatiston kohdassa olevia polyominoja.

**Määritelmä 13.** Solu  $[a_1, a_2]$  on *leksigraafiselta järjestykseltään pienempi* kuin solu  $[b_1, b_2]$ , jos

$$\begin{cases} a_2 < b_2 \text{ tai} \\ a_2 = b_2 \text{ ja } a_1 < b_1. \end{cases}$$

Jotakin solua leksiografisesti pienempiä soluja ovat siis kaikki sen alapuolella olevat solut ja sen vasemmalla puolella samalla x-akselin suuntaisella suoralla olevat solut. Koska leksiografinen pienempiys on transitiiivista, ja jokin solu on aina joko leksiografiselta järjestykseltään pienempi, yhtäsuuri tai suurempi kuin mikä tahansa toinen solu, niin edellisen määritelmän relaatio on järjestysrelaatio. Niinpä polyominoista löytyy äärellisinä ja epätyhjinä soluista koostuvina joukkoina aina leksiografiselta järjestykseltään pienin solu.

**Määritelmä 14.** Polyomino  $P$  on *normaalikohdassa*, jos sen leksiografiselta järjestykseltään pienin solu on origossa.

Normaalikohdassa olevissa polyominoissa ei siis ole yhtään solua x-akselin alapuolella tai x-akselin negatiivisella osuudella. Todistetaan seuraavaksi kaksi normaalikohdassa oleviin polyominoihin liittyvää lausetta, joista seuraa joukkojen  $T_n$ ,  $R_n$  ja  $S_n$  äärellisyys.

**Lause 5.** *Jokainen polyomino on tarkalleen yhden normaalikohdassa olevan polyominon translaatio.*

*Todistus.* Olkoon  $P$  jokin polyomino ja  $[c_1, c_2]$  sen leksiografiselta järjestykseltään pienin solu. Yhtälön (2) perusteella polyomino  $P$  voi olla korkeintaan yhden normaalikohdassa olevan polyominon translaatio. Koska  $P' = P - (c_1, c_2)$  on tällainen polyomino, väite seuraa.  $\square$

Kaikki polyominot, jotka ovat translaatio-ekvivalentteja keskenään, ovat yhtälöiden (3) ja (4) perusteella myös rotaatio-ekvivalentteja ja kongruentteja keskenään. Niinpä edellisen lauseen nojalla joukkojen  $T_n$ ,  $R_n$  ja  $S_n$  ekvivalenssiluokkien edustajisto voidaan valita normaalikohdassa olevista  $n$ -ominoista. Edellisestä lauseesta seuraa siis suoraan seuraava tulos.

**Seuraus 1.** *Joukoissa  $T_n$ ,  $R_n$  ja  $S_n$  on kussakin korkeintaan yhtä monta  $n$ -ominoa kuin normaalikohdassa on erilaisia  $n$ -ominoja. Erityisesti kiinnitettyjä  $n$ -ominoja on yhtä monta kuin normaalikohdassa olevia  $n$ -ominoja.*

Joukot  $T_n$ ,  $R_n$  ja  $S_n$  ovat siis äärellisiä, jos erilaisia normaalikohdassa olevia  $n$ -ominoja on äärellinen määrä. Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että näin todellakin on.

**Lause 6.** *Normaalikohdassa olevia  $n$ -ominoja on äärellinen määrä kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$ .*

*Todistus.* Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku ja  $U_n$  joukko, joka koostuu niistä soluista  $[c_1, c_2]$ , joissa  $c_2 \geq 0$  ja

$$\begin{cases} 0 \leq c_1 < n, \text{ kun } c_2 = 0 \text{ ja} \\ |c_1| + c_2 < n, \text{ kun } c_2 > 0. \end{cases}$$

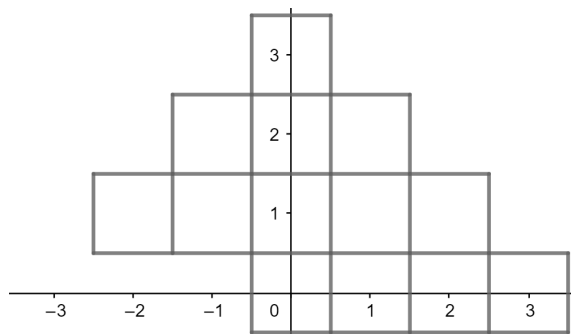
Jokainen normaalikohdassa oleva  $n$ -omino on jokin joukon  $U_n$   $n$  solua sisältävistä osajoukoista. Koska

$$|U_n| = n + \sum_{i=1}^{n-1} (2(n-i) - 1) = n^2 - n + 1,$$

joukosta  $U_n$  voidaan muodostaa  $n$  alkioinen osajoukko  $\binom{n^2-n+1}{n}$  tavalla. Normaalkohdassa olevia  $n$ -ominoja on siis korkeintaan  $\binom{n^2-n+1}{n}$  kappaletta.  $\square$

**Seuraus 2.** Joukot  $T_n$ ,  $R_n$  ja  $S_n$  ovat äärellisiä kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$ .

**Esimerkki 8.** Kuvassa 6 on esitetty joukko  $U_4$ . Joukossa  $U_4$  on 13 solua, joista voidaan muodostaa neljäalkioinen osajoukko  $\binom{13}{4} = 715$  tavalla. Näistä osajoukoista 19 osajoukkoa muodostaa normaalikohdassa olevan 4-ominon. Yhdessä ne muodostavat kiinnitettyjen 4-ominonjen edustajiston.



Kuva 6: Joukko  $U_4$ .

### 3.2 Suunnatut ja rivikonveksit polyominot

Määritellään vielä kaksi erityistä normaalikohdassa olevien  $n$ -ominonjen osajoukkoa. Ensimmäinen osajoukko saadaan, kun tarkastellaan ainoastaan origosta tiettyyn suuntaan laajenevia polyominoja. Seuraava määritelmä perustuu artikkelissa [5] esitettyyn määritelmään.

**Määritelmä 15.** Normaalkohdassa oleva polyomino on *suunnattu*, jos sen solujen indusoimassa graafissa origon ja minkä tahansa muun pisteen välillä on aina joko  $x$ - tai  $y$ -akselin positiiviseen suuntaan etenevä polku.

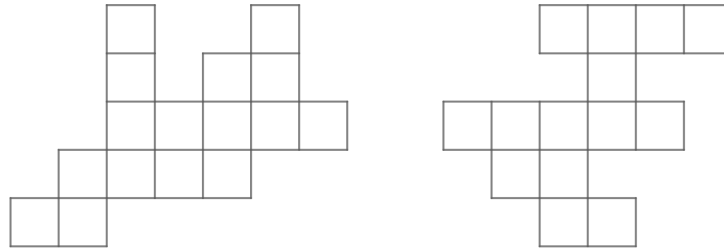
Suunnatut polyominot voitaisiin määritellä myös rekursiivisesti kuten kirjassa [3]. Rekursiivisesti määriteltynä normaalikohdassa oleva polyomino on suunnattu, jos se koostuu vain origossa olevasta solusta tai jos se saadaan muodostettua lisäämällä johonkin suunnattuun polyominoon yksi uusi solu siihen jo kuuluvien solujen oikealla tai yläpuolella olevista vierekkäisistä soluista.

Suunnattujen  $n$ -ominonjen joukosta käytetään merkintää  $D_n$  ja siinä olevien alkoiden lukumäärästä merkintää  $d(n)$ . Luvussa 6 johdetaan lukujonon  $(d(n))_{n=0}^{\infty}$  generoivan funktion  $D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n$  suljettu esitys funktiona.

Toinen normaalikohdassa olevien polyominonjen osajoukko saadaan, kun polyominonjen konveksisuus määritellään hieman poikkeavalla tavalla euklidisen tason osajoukon konveksisuuden määritelmään verrattuna.

**Määritelmä 16.** Normaalikohdassa oleva polyomino on *rivikonvekksi* (*sarakekonvekksi*), jos sen ja jokaisen x-akselin (y-akselin) suuntaisen suoran leikkaus on yhtenäinen.

**Esimerkki 9.** Kuvassa 7 vasemmalla puolella oleva polyomino on suunnattu 15-omino ja oikealla puolella oleva polyomino on rivikonvekksi 14-omino.



Kuva 7: Suunnattu polyomino ja rivikonvekksi polyomino.

Rivikonveksien  $n$ -ominojen joukosta käytetään merkintää  $B_n$  ja siinä olevien alkoiden lukumäärästä merkintää  $b(n)$ . Myös lukujonon  $(b(n))_{n=0}^{\infty}$  generoivalle funktiolle  $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)x^n$  annetaan suljettu esitys funktiona luvussa 6. Johdetaan seuraavaksi kuitenkin jo eräs keino laskea lukumäärä  $b(n)$ .

Jokaisessa rivikonveksissa polyominossa on päällekkäisiä soluista koostuvia x-akselin suuntaisia rivejä. Niinpä rivikonveksit polyominot voidaan jaotella sen mukaan, kuinka monta soluista koostuvaa riviä niissä on ja kuinka monta solua kullakin rivillä on. Riveillä olevien solujen tarkastelun seurauksena jokaiseen rivikonvekssiin polyominoon voidaan liittää jokin seuraavan määritelmän mukaisista lukujonoista.

**Määritelmä 17.** Positiivisen kokonaisluvun  $n$  hajotelma on positiivisista kokonaisluvuista koostuva lukujono  $(a_i)_{i=1}^k$ , jossa  $1 \leq k \leq n$  ja

$$\sum_{i=1}^k a_i = n.$$

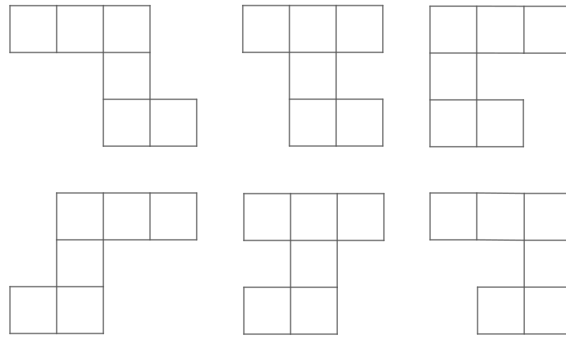
Jokaista rivikonveksia  $n$ -ominoa, jossa on  $k$  päällekkäin olevaa soluista koostuvaa riviä ja alimmasta rivistä laskettuna rivillä  $i$  on  $a_i$  solua, vastaa luvun  $n$  hajotelma  $(a_i)_{i=1}^k$ . Lasketaan seuraavaksi, kuinka monta jotakin yhtä luvun  $n$  hajotelmaa vastaavaa rivikonveksia  $n$ -ominoa on olemassa.

**Lause 7.** Positiivisen kokonaisluvun  $n$  hajotelmaa  $(a_i)_{i=1}^k$  vastaavien rivikonveksien  $n$ -ominojen lukumäärä saadaan tulosta

$$\prod_{i=1}^{k-1} (a_i + a_{i+1} - 1).$$

*Todistus.* Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku ja  $(a_i)_{i=1}^k$  jokin luvun  $n$  hajotelma. Kaksi peräkkäistä soluista koostuvaa riviä, joissa on  $a_i$  ja  $a_{i+1}$  solua, voidaan asettaa päällekkäin  $(a_i + a_{i+1} - 1)$  tavalla niin, että niissä olevien solujen indusoima graafi on yhtenäinen. Väite saadaan nyt tuloperiaatteen nojalla.  $\square$

**Esimerkki 10.** Luvun 6 hajotelmaa  $(2, 1, 3)$  vastaavissa rivikonvekseissa polyominoissa on kolme soluista koostuvaa riviä, joista alimmalla rivillä on kaksi solua, keskimmäisellä yksi solu ja ylimmällä kolme solua. Lauseen 7 perusteella hajotelmaa  $(2, 1, 3)$  vastaavien rivikonveksien 6-ominojen lukumäärä on  $(2+1-1)(1+3-1) = 6$ . Nämä kuusi rivikonveksia polyominoa on esitetty kuvassa 8.



Kuva 8: Kaikki luvun 6 hajotelmaa  $(2, 1, 3)$  vastaavat rivikonveksit 6-ominot.

Luku  $b(n)$  saadaan laskettua edellistä lausetta hyödyntäen. Nimittäin summamalla yhteen luvun  $n$  hajotelmia vastaavien rivikonveksien  $n$ -ominojen lukumäärät saadaan kaikkien rivikonveksien  $n$ -ominojen lukumäärä  $b(n)$ .

**Seuraus 3.** *Kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$*

$$b(n) = \sum \prod_{i=1}^{k-1} (a_i + a_{i+1} - 1),$$

*jossa summataan yli luvun  $n$  jokaisen hajotelman  $(a_i)_{i=1}^k$ .*

Edellinen seuraus antaa siis yhden menetelmän rivikonveksien  $n$ -ominojen laskemiseksi. Menetelmä on kuitenkin erittäin työläs, sillä erilaisten hajotelmien lukumäärä kasvaa eksponentiaalisesti luvun  $n$  suhteen. Positiivisella kokonaisluvulla  $n$  on nimittäin  $2^{n-1}$  erilaista hajotelmaa, mikä on osoitettu esimerkiksi artikkelissa [6]. Luvussa 5.1 johdetaan luvuille  $b(n)$  rekursioyhtälö, jonka avulla lukumäärät  $b(n)$  voidaan laskea tehokkaammin.

## 4 Polyominojen laskeminen

Tutkitaan tässä luvussa, kuinka monta erilaista kiinnitettyä, kiraalista ja vapaata  $n$ -ominoa on olemassa. Tarkkoja kaavoja lukumäärille  $t(n)$ ,  $r(n)$  ja  $s(n)$  ei tunneta. Niiden arvoja voidaan kuitenkin laskea algoritmisesti. Luvussa 4.1 esitetään eräs algoritmi kiinnitettyjen polyominojen laskemiseksi ja taulukoidaan lukujen  $t(n)$ ,  $r(n)$  ja  $s(n)$  arvot solujen lukumäärään  $n = 24$  asti.

Taulukoiduista arvoista havaitaan, että kiinnitettyjen, kiraalisten ja vapaiden  $n$ -ominojen lukumäärät vaikuttaisivat kasvavan eksponentiaalisesti solujen lukumäärän  $n$  suhteen. Luvussa 4.2 johdetaan eksponentiaaliset ylä- ja alarajat lukumäärille  $t(n)$ ,  $r(n)$  ja  $s(n)$ , mikä vahvistaa niiden eksponentiaalisen kasvunopeuden.

### 4.1 Polyominojen laskeminen algoritmien avulla

Lasketaan tässä luvussa kiinnitettyjen, kiraalisten ja vapaiden  $n$ -ominojen lukumäärät solujen lukumäärään  $n = 24$  asti. Näin saadaan käsitys siitä, kuinka erilaisten  $n$ -ominojen lukumäärät käyttäytyvät solujen lukumäärän  $n$  kasvaessa suuremmaksi.

Kun soluja on vain muutama, kiinnitettyjen, kiraalisten ja vapaiden  $n$ -ominojen lukumäärät voidaan laskea manuaalisesti etsimällä niille normaalikohdassa olevien  $n$ -ominojen joukosta edustajisto. Kun solujen määrä lisääntyy, manuaalinen laskeminen käy nopeasti liian työlääksi. Siksi onkin hyödyllistä tutkia keinoja automatisoida polyominojen laskeminen tietokoneen suorittamien algoritmien avulla.

Tutkitaan seuraavaksi ainoastaan, miten kiinnitettyjen  $n$ -ominojen lukumäärä voidaan laskea algoritmisesti. Seurauksen 1 perusteella kiinnitettyjen  $n$ -ominojen sijaan voidaan ekvivalentisti laskea normaalikohdassa olevien  $n$ -ominojen lukumääriä.

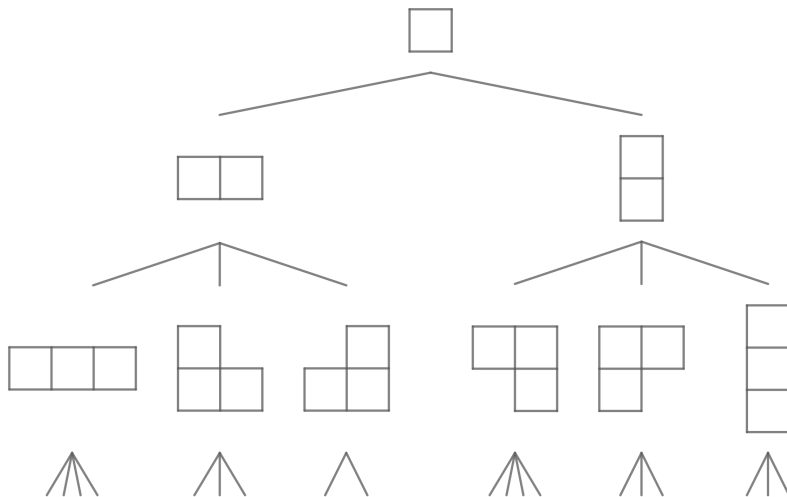
Jotta normaalikohdassa olevien  $n$ -ominojen lukumäärät voidaan laskea algoritmisesti, muodostetaan puugraafi, jonka solmuna jokainen normaalikohdassa oleva polyomino esiintyy tarkalleen kerran. Kutsutaan puugraafissa jonkin solmun vasemmalla puolella olevia sisaruksia sen vanhemmiksi sisaruksiksi ja oikealla puolella olevia sisaruksia sen nuoremmiksi sisaruksiksi.

**Määritelmä 18.** Puugraafi  $G$  on *polyominojen sukupu*, jos se täyttää seuraavat ehdot:

- i. Puun  $G$  juurena on ainoa normaalikohdassa oleva 1-omino ja jokainen normaalikohdassa oleva polyomino esiintyy vähintään kerran puussa  $G$ .
- ii. Olkoon  $P_n$  jokin normaalikohdassa oleva  $n$ -omino. Jokainen  $n$ -ominon  $P_n$  lapsi puussa  $G$  on jokin normaalikohdassa olevista  $(n + 1)$ -ominoista, jotka saadaan lisäämällä  $n$ -ominoon  $P_n$  yksi uusi solu.
- iii. Olkoon  $P_{n+1}$  jokin normaalikohdassa oleva  $(n + 1)$ -omino ja  $[C]$  se solu, joka lisäämällä polyominon  $P_{n+1}$  vanhempaan puussa  $G$  saadaan polyomino  $P_{n+1}$ . Tällöin solu  $[C]$  ei kuulu yhteenkään polyominon  $P_{n+1}$  tai sen esivanhemman vanhempaan sisarukseen puussa  $G$ .

Polyominojen sukupuun voi muodostaa monellakin tavalla. Kuvassa 9 on esitetty ensimmäiset kolme riviä yhdestä mahdollisesta polyominojen sukupuusta. Tässä sukupuussa jokainen jonkin polyominon  $P_n$  seuraavaksi vanhin lapsi on muodostettu lisäämällä polyominoon  $P_n$  leksiografisessa suuruusjärjestyksessä pienin määritelmän

18 sallimista soluista. Jos sukupuu olisikin muodostettu lisäämällä leksiografisessa suuruusjärjestyksessä aina suurin mahdollisista soluista, saataisiin huomattavasti erilainen sukupuu.



Kuva 9: Polyominojen sukupuu.

Osoitetaan vielä, että jokainen normaalikohdassa oleva polyomino esiintyy polyominojen sukupuussa tarkalleen kerran. Tällöin voimme muodostaa hakualgoritmin, joka laskee polyominojen sukupuussa olevien  $n$ -ominojen lukumäärän.

**Lause 8.** *Olkoon  $G$  polyominojen sukupuu. Jokainen normaalikohdassa oleva polyomino esiintyy polyominojen sukupuussa  $G$  tarkalleen kerran.*

*Todistus.* Olkoon  $P_n$  jokin normaalikohdassa oleva  $n$ -omino. Polyominojen sukupuun määritelmän ehdon i perusteella polyomino  $P_n$  esiintyy sukupuussa  $G$  vähintään kerran. Riittää siis osoittaa, että polyomino  $P_n$  esiintyy sukupuussa  $G$  korkeintaan kerran.

Polyominojen sukupuun määritelmän ehtojen ii ja iii perusteella  $n$ -ominon  $P_n$  jokainen vanhempi sisarus sisältää tarkalleen yhden solun, joka ei kuulu  $n$ -ominoon  $P_n$ . Vastaavasti  $P_n$  sisältää tarkalleen yhden solun, joka ei kuulu yhteenkään sen nuorempaan sisarukseen. Lisäksi ehdon iii perusteella  $n$ -ominon  $P_n$  jokaisen esivanhemman vanhemmasta sisaruksesta alkavien alipuiden jokainen polyomino sisältää vähintään yhden solun, joka ei kuulu  $n$ -ominoon  $P_n$ . Vastaavasti  $P_n$  sisältää vähintään yhden solun, joka ei kuulu yhteenkään sen jonkin esivanhemman nuoremmasta sisaruksesta alkavan alipuun polyominoon. Näin ollen polyomino  $P_n$  esiintyy sukupuussa  $G$  korkeintaan kerran.  $\square$

Normaalikohdassa olevien  $n$ -ominojen lukumäärä voidaan nyt laskea syvyys- tai leveyshaku-menetelmää käyttäen polyominojen sukupuusta. Redelmeierin artikkelissa [7] esittämä algoritmi, jonka pseudokoodi on esitetty algoritmissa 1, laskee polyominojen sukupuusta kaikki korkeintaan  $N$  solua sisältävät polyominot. Algoritmi hyödyntää syvyyshakua ja on luonteeltaan rekursiivinen, sillä se laskee sukupuun

jokaisessa alipuussa olevien polyominojen lukumäärät käyttäen aina samaa algoritmia.

Kun algoritmi 1 suoritetaan syötteenä jokin positiivinen kokonaisluku  $N$ , solun  $[0, 0]$  sisältävä joukko  $U$  ja tyhjät joukot  $T$  ja  $P$ , saadaan tulosteena lista, joka sisältää kiinnitettyjen  $n$ -ominojen lukumäärät kaikilla  $n \leq N$ . Redelmeier pystyi tällä algoritmilla laskemaan kiinnitettyjen  $n$ -ominojen lukumäärät solujen lukumäärään  $n = 24$  asti. Sitä suuremmilla solujen lukumäärillä algoritmin suoritus kestäisi tietokoneeltakin jo niin kauan, että Redelmeierin ei ollut järkevää jatkaa algoritmin suorittamista pidemmälle.

---

**Algoritmi 1:** Normaalikohdassa olevien korkeintaan  $N$  solua sisältävien polyominojen lukumäärät laskeva algoritmi

---

**Syöte:**  $P$ : polyomino, jonka jälkeläisiä polyominojen sukuuusta lasketaan.

$N$ : solujen lukumäärä, johon asti jälkeläisten lukumääriä lasketaan.

$U$ : kokeilemattomien solujen joukko.

$T$ : kokeiltujen solujen joukko.

**Tuloste:**  $t_P$ :  $N$  pituinen lista, jonka kohtaan  $n$  lasketaan polyominon  $P$   $n$  solua sisältävien jälkeläisten lukumäärä.

```

1 aseta listan  $t_P$  arvot nolnaan
2 toista
3   poista joukosta  $U$  jokin solu  $[C]$ 
4   lisää solu  $[C]$  joukkoihin  $T$  ja  $P$ 
5   kasvata listan  $t_P$  kohdassa  $|P|$  olevaa arvoa yhdellä
6   jos  $|P| < N$  niin
7     lisää joukkoon  $U$  solun  $[C]$  vierekkäiset solut, jotka eivät ole jo
       joukossa  $U$ , eivät kuulu joukkoon  $T$  ja ovat leksiografiselta
       järjestykseltään suurempia kuin solu  $[0, 0]$ 
8     kutsu tätä algoritmia luvulla  $N$  ja joukkojen  $U$ ,  $T$  ja  $P$  kopioilla
9     lisää edellisen suoritusrivin tulosteena saadun listan arvot
       vastaavissa kohdissa oleviin listan  $t_P$  arvoihin
10    poista joukosta  $U$  algoritmin suoritusrivillä 7 siihen lisätyt solut
11    poista solu  $[C]$  joukosta  $P$ 
12 kunnes  $|U| = 0$ 
13 palauta  $t_P$ 

```

---

Myös kiraalisten ja kiinnitettyjen  $n$ -ominojen lukumääriä voidaan laskea algoritmisesti, kun otetaan huomioon polyominojen symmetriat erilaisten rotaatioiden ja peilausten suhteen. Esimerkiksi Redelmeier jaotteli artikkelissa [7] normaalikohdassa olevat  $n$ -ominot kahdeksaan eri joukkoon sen mukaan, mitkä symmetriat kullakin  $n$ -ominolla on voimassa, ja laski algoritmisesti näissä joukoissa olevien  $n$ -ominojen lukumäärät.

Redelmeierin algoritmisesti laskemien arvojen perusteella voidaan antaa myös kiraalisten ja vapaiden  $n$ -ominojen lukumäärät solujen lukumäärään  $n = 24$  asti. Taulukossa 1 onkin esitetty kiinnitettyjen, kiraalisten ja vapaiden  $n$ -ominojen lukumäärät solujen lukumäärään  $n = 24$  asti. Taulukoitujen arvojen perusteella erilaisten  $n$ -ominojen lukumäärät näyttäisivät kasvavan eksponentiaalisesti solujen



lukumäärän  $n$  suhteen.

Jensen kehitti artikkelissa [8] Redelmeierin algoritmia kekseliäämmän ja nopeamman kiinnitettyjen  $n$ -ominojen lukumäärän laskevan algoritmin. Sen avulla Jensen laski kiinnitettyjen  $n$ -ominojen lukumäärät solujen lukumäärään  $n = 46$  asti. Artikkelissa [9] Jensen hyödynsi algoritmin toteutuksessa rinnakkaislaskentaa, minkä ansiosta Jensen sai laskettua kiinnitettyjen  $n$ -ominojen lukumäärät aina solujen lukumäärään  $n = 56$  asti. Tämä on tähän mennessä suurin solujen lukumäärä, jolla kiinnitettyjen  $n$ -ominojen lukumäärä on saatu laskettua.

Taulukko 1: Kiinnitettyjen, kiraalisten ja vapaiden  $n$ -ominojen lukumääriä.

$n$	$t(n)$	$r(n)$	$s(n)$
1	1	1	1
2	2	1	1
3	6	2	2
4	19	7	5
5	63	18	12
6	216	60	35
7	760	196	108
8	2725	704	369
9	9910	2500	1285
10	36446	9189	4655
11	135268	33896	17073
12	505861	126759	63600
13	1903890	476270	238591
14	7204874	1802312	901971
15	27394666	6849777	3426576
16	104592937	26152418	13079255
17	400795844	100203194	50107909
18	1540820542	385221143	192622052
19	5940738676	1485200848	742624232
20	22964779660	5741256764	2870671950
21	88983512783	22245940545	11123060678
22	345532572678	86383382827	43191857688
23	1344372335524	336093325058	168047007728
24	5239988770268	1309998125640	654999700403

## 4.2 Eksponentiaaliset rajat polyominojen lukumäärille

Vaikka kiinnitettyjen, kiraalisten ja vapaiden  $n$ -ominojen lukumäärää ei yleisesti tunnetakaan, voimme silti tutkia, kuinka monta kutakin  $n$ -ominoa korkeintaan tai vähintään on olemassa. Tässä luvussa johdetaan eksponentiaaliset rajat luvuille  $t(n)$ ,  $r(n)$  ja  $s(n)$ . Nämä rajat vahvistavat hypoteesimme siitä, että kiinnitettyjen, kiraalisten ja vapaiden  $n$ -ominojen lukumäärät kasvavat eksponentiaalisesti solujen lukumäärän  $n$  suhteen.

Vertaillaan ensin lukujen  $t(n)$ ,  $r(n)$  ja  $s(n)$  suuruuksia toisiinsa. Seuraava lause on esitetty kirjassa [3] ilman todistusta, mutta selvyuden vuoksi sille on esitetty kirjoittajan oma todistus. Lauseen ensimmäinen epäyhtälö on todistettu myös artikkelissa [4].

**Lause 9.** *Kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$*

$$\frac{t(n)}{8} \leq s(n) \leq r(n) \leq t(n).$$

*Todistus.* Väitteen kaksi jälkimmäistä epäyhtälöä seuraavat siitä, että kaikki kongruentit polyominot ovat yhtälöiden (3) ja (4) perusteella myös rotaatio-ekvivalentteja, ja kaikki rotaatio-ekvivalentit polyominot ovat yhtälöiden (2) ja (3) perusteella myös translaatio-ekvivalentteja. Ensimmäinen epäyhtälö taas seuraa siitä, että jokainen vapaa  $n$ -omino saadaan korkeintaan kahdeksan kiinnitetyn  $n$ -ominon unionina.  $\square$

Jos luvulle  $t(n)$  löydetään eksponentiaaliset rajat, niistä saadaan edellisen lauseen perusteella eksponentiaaliset rajat myös luvuille  $r(n)$  ja  $s(n)$ . Voimme siis tutkia ylä- ja alarajoja ainoastaan luvulle  $t(n)$ . Lisäksi, koska kiinnitettyjä  $n$ -ominoja on seurauksen 1 perusteella yhtä monta kuin normaalikohdassa olevia  $n$ -ominoja, voimme yhtäpitävästi tutkia ylä- ja alarajoja normaalikohdassa oleville  $n$ -ominoille.

Yksi yläraja normaalikohdassa olevien  $n$ -ominon lukumäärälle löydettiin jo lauseen 6 todistuksessa. Löydetty yläraja on kuitenkin todella huono, kuten esimerkiksi 8 huomattiin. Seuraava lause, joka on alkuperäisesti esitetty artikkelissa [10], antaa huomattavasti paremman ylärajan normaalikohdassa olevien  $n$ -ominon lukumäärälle. Alla esitetty todistus mukailee artikkelissa [4] annettua todistusta kyseiselle lauseelle.

**Lause 10.** *Kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$*

$$t(n) \leq \binom{3n}{n-1}.$$

*Todistus.* Olkoon  $P_n$  jokin normaalikohdassa oleva  $n$ -omino. Nimetään alla esitettävän menetelmän avulla polyominon  $P_n$  solujen keskipisteet pisteiksi  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  ja  $C_n$  sekä muodostetaan samalla polyominoon  $P_n$  liitetty yksikäsitteinen binäärisana  $(a_1b_1c_1)(a_2b_2c_2) \dots (a_nb_nc_n)$ . Olkoon aluksi  $a_i = b_i = c_i = 0$  kaikilla  $1 \leq i \leq n$ .

Nimetään solun  $[0, 0]$  keskipiste pisteeksi  $C_1$ . Jos  $n = 1$ , olemme valmiita ja ainoaseen normaalikohdassa olevaan 1-ominoon liitetty binäärisana on  $(000)$ . Jos taas  $n > 1$ , niin vähintään toinen soluista  $[1, 0]$  ja  $[0, 1]$  kuuluu polyominoon  $P_n$ . Jos molemmat näistä soluista kuuluvat polyominoon  $P_n$ , niin nimetään solun  $[1, 0]$  keskipiste pisteeksi  $C_2$  ja solun  $[0, 1]$  keskipiste pisteeksi  $C_3$  ja piirretään viiva pisteestä  $C_1$  pisteisiin  $C_2$  ja  $C_3$ . Muutoin nimetään solun  $[0, 0]$  ainoan vierekkäisen polyominoon  $P_n$  kuuluvan solun keskipiste pisteeksi  $C_2$  ja piirretään pisteiden  $C_1$  ja  $C_2$  välille viiva. Jos solu  $[1, 0]$  tai  $[0, 1]$  kuuluu  $n$ -ominoon  $P_n$ , niin asetetaan vastaavasti  $b_1 = 1$  tai  $c_1 = 1$ . Seuraavat menetelmän vaiheet tulee suorittaa nimeämisyjärjestyksessä pisteille  $C_2, C_3, \dots, C_{n-1}$  ja  $C_n$ .

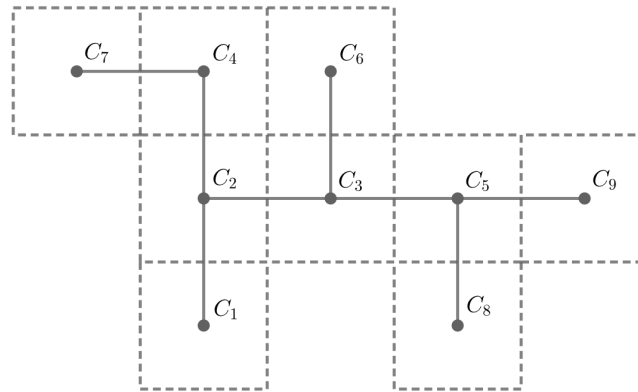
Oletetaan, että  $i$  pistettä on jo nimetty ja että näitä menetelmän vaiheita on suoritettu jo pisteille  $C_1, C_2, \dots, C_{j-2}$  ja  $C_{j-1}$ . Jos  $j-1 = n$ , niin olemme valmiita. Jos taas  $j-1 < n$ , niin olkoon  $C_k$  se piste, josta on piirretty jana pisteeseen  $C_j$ . Nimetään solun  $[C_j]$  vierekkäisten polyominoon  $P_n$  kuuluvien solujen nimeämättä olevat keskipisteet niitä vastaavien solujen kasvavassa leksiografisessa järjestyksessä pisteiksi  $C_{i+1}, C_{i+2}, \dots, C_{i+l}$ , jossa  $l$  on uusien nimettävien pisteiden lukumäärä. Lisäksi piirretään viiva pisteestä  $C_j$  jokaiseen uuteen nimettyyn pisteeseen. Jos pisteestä  $C_j$  piirrettiin viiva solun  $[C_j]$  vierekkäisistä solusta  $[C_k]$  eroavista soluista leksiografisesti suurimman, keskimmäisen tai pienimmän solun keskipisteeseen, niin asetetaan vastaavasti  $a_j = 1, b_j = 1$  tai  $c_j = 1$ .

Edellä esitetyssä menetelmässä muodostettavan binäärisanan yksi nolla muutettiin ykköseksi aina, kun kahden pisteen välille piirrettiin viiva. Koska viivoja piirrettiin  $n-1$  kappaletta, on saadussa binäärisanassa saman verran ykkösiä. Näin ollen jokaiseen normaalikohdassa olevaan  $n$ -ominoon voidaan liittää eri  $3n$  pituinen binäärisana, jossa on tarkalleen  $n-1$  ykköstä. Koska tällaisia binäärisanoja on  $\binom{3n}{n-1}$  kappaletta, väite seuraa.  $\square$

**Esimerkki 11.** Kuvassa 10 on esitetty katkoviivoin eräs normaalikohdassa oleva 9-omino, jonka keskipisteet on nimetty lauseen 10 todistuksen menetelmän avulla. Todistuksen menetelmä liittää kuvassa olevaan 9-ominoon binäärisanan

$$(001)(011)(011)(100)(110)(000)(000)(000)(000),$$

jonka jokainen ykkönen vastaa yhtä pisteiden välille piirrettyä viivaa. Niinpä binäärisanassa onkin yhteensä kahdeksan ykköstä.



Kuva 10: Eräs 9-omino, jonka pisteet on nimetty lauseen 10 todistuksen menetelmän avulla.

Lauseen 10 ylärajaa voidaan arvioida ylöspäin hyödyntämällä kertoman suuruutta rajaavaa epäyhtälöketjua, joka on esitetty ja todistettu artikkelissa [11]. Esitetään tämä epäyhtälöketju seuraavassa lemmassa todistuksetta.

**Lemma 3.** *Kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$*

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e.$$

Hyödyntämällä edellistä lemmaa kiinnitettyjen  $n$ -ominojen lukumäärälle saadaan eksponentiaalinen yläraja solujen lukumäärän  $n$  suhteen.

**Lause 11.** *Kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$*

$$t(n) < \left(\frac{27}{4}\right)^n$$

*Todistus.* Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku. Arvioidaan lauseen 10 antamaa ylärajaa ensin binomikertoimen ominaisuuksien avulla, jolloin saadaan epäyhtälöketju

$$t(n) \leq \binom{3n}{n-1} \leq \binom{3n}{n} = \frac{(3n)!}{n!(2n)!}.$$

Arvioidaan edellisen epäyhtälöketjun viimeistä lauseketta ylöspäin lemmassa 3 esitetyn kertomaa rajoittavan epäyhtälöketjun avulla, jolloin luvun  $t(n)$  ylärajaksi saadaan

$$t(n) < \frac{\sqrt{2\pi 3n} \left(\frac{3n}{e}\right)^{3n} e}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} < \left(\frac{27}{4}\right)^n.$$

□

Johdetaan seuraavaksi vielä eksponentiaalinen alaraja kiinnitettyjen  $n$ -ominojen lukumäärälle. Varsin yksinkertainen alaraja saadaan, kun tarkastellaan suunnattuja polyominoja, joiden solujen indusoimat graafit ovat polkuja.

**Lause 12.** *Kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$*

$$t(n) \geq 2^{n-1}.$$

*Todistus.* Tarkastellaan suunnattujen  $n$ -ominojen joukkoa  $D_n$ . Polkuja, joissa on  $n$  pistettä, ja jotka etenevät origosta aina yhden yksikön verran joko  $x$ - tai  $y$ -akselin positiiviseen suuntaan, on  $2^{n-1}$  kappaletta. Tällaisissa poluissa nimittäin etenemissuunta pisteestä seuraavaan voidaan valita aina kahdesta mahdollisesta vaihtoehdosta. Jokainen tällainen polku vastaa erilaisen suunnatun  $n$ -ominon solujen indusoimaa graafia. Näin ollen joukossa  $D_n$  on ainakin  $2^{n-1}$  erilaista  $n$ -ominoa. Koska luku  $t(n)$  on seurauksen 1 perusteella vähintään yhtä suuri kuin luku  $d(n)$ , väite seuraa. □

## 5 Klarnerin vakio

Tutkitaan tässä luvussa kiinnitettyjen  $n$ -ominojen eksponentiaalisen kasvun käyttäytymistä asympotoottisesti. Osoitetaan ensin, että luvun  $t(n)$  eksponentiaalinen kasvu tasaantuu solujen lukumäärän  $n$  kasvaessa tarpeeksi suureksi. Tarkemmin sanottuna siis osoitetaan, että raja-arvo  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} t(n)^{\frac{1}{n}}$  on olemassa. Raja-arvo  $\lambda$  tunnetaan Klarnerin vakiona sen olemassaolon ensimmäisenä todistaneen henkilön mukaan. Sen tarkkaa arvoa ei tiedetä, mutta joitakin ylä- ja alarajoja tunnetaan.

Klarnerin vakion olemassaolon todistuksessa hyödynnetään lemmaa, joka tunnetaan sen ensimmäisenä esitelleen henkilön mukaan Feketen lemmalla [12]. Todistus Feketen lemmalle löytyy esimerkiksi kirjasta [13]. Feketen lemma koskee reaaliarvoisia lukujonoja  $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ , joille on kaikilla indekseillä  $n$  ja  $m$  voimassa additiivista muotoa oleva epäyhtälö  $u_n + u_m \leq u_{n+m}$ . Feketen lemma sanoo, että tällaisilla lukujonoilla raja-arvo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n}$  on olemassa.

Alla esitettävä lemma sen sijaan antaa vastaavan tuloksen positiivisarvoisille lukujonoille  $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ , joille on voimassa kaikilla indekseillä  $n$  ja  $m$  multiplikaatiivista muotoa oleva epäyhtälö  $u_n u_m \leq u_{n+m}$ . Esitettävä lemma voitaisiin todistaa hyödyntäen alkuperäistä Feketen lemmaa, kuten kirjassa [14] on tehty. Tässä sille esitetään kuitenkin kirjoittajan oma suora todistus, joka mukailee vahvasti kirjojen [13] ja [14] todistuksia Feketen lemmalle.

**Lemma 4.** *Olkoon  $(u_n)_{n=1}^{\infty}$  positiivisista reaaliarvoista koostuva lukujono, jossa kaikilla indekseillä  $n$  ja  $m$  on voimassa  $u_n u_m \leq u_{n+m}$ . Tällöin raja-arvo  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{\frac{1}{n}}$  on olemassa.*

*Todistus.* Asetetaan  $u_0 = 1$ . Olkoon  $u_n$  jokin lauseen lukujonon jäsenistä ja  $k$  jokin nollaa suurempi kokonaisluku. Jakoyhtälön perusteella on olemassa kokonaisluvut  $j$  ja  $i$ , jossa  $0 \leq i \leq k - 1$ , ja joille  $n = jk + i$ . Kun lauseen epäyhtälöä käytetään useaan kertaan luvulle  $u_n$ , saadaan epäyhtälöketju

$$u_n \geq u_k u_{n-k} \geq u_k^2 u_{n-2k} \geq \cdots \geq u_k^j u_{n-jk} = u_k^{\frac{1}{k}(n-i)} u_i.$$

Kun tämä epäyhtälöketju korotetaan potenssiin  $\frac{1}{n}$  ja tutkitaan puolittaisia alaraja-arvoja luvun  $n$  suhteen, saadaan epäyhtälö

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n^{\frac{1}{n}} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} u_k^{\frac{1}{k}(1-\frac{i}{n})} u_i^{\frac{1}{n}} = u_k^{\frac{1}{k}}.$$

Tämä epäyhtälö pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $k$ . Niinpä siis

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n^{\frac{1}{n}} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n^{\frac{1}{n}}.$$

Koska alaraja-arvo on aina pienempi tai yhtä suuri kuin yläraja-arvo, on oltava

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n^{\frac{1}{n}},$$

ja näin ollen raja-arvo  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{\frac{1}{n}}$  on olemassa. □

Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että edellisen lemmän ehdot ovat voimassa lukujonolle  $(t(n))_{n=1}^{\infty}$ , jolloin raja-arvo  $\lambda$  on siis olemassa. Lauseen todistus perustuu Klarnerin artikkelissa [4] esittämään todistukseen vakion  $\lambda$  olemassaololle.

**Lause 13.** *Raja-arvo  $\lambda$  on olemassa.*

*Todistus.* Olkoon  $P_n$  jokin normaalikohdassa oleva  $n$ -omino ja  $P_m$  jokin normaalikohdassa oleva  $m$ -omino. Siirretään  $m$ -ominoa  $P_m$  koordinaatistossa siten, että sen leksiografiselta järjestykseltään pienimmästä solusta tulee  $n$ -ominon  $P_n$  leksiografiselta järjestykseltään suurimman solun yläpuolella oleva vierekkäinen solu. Siirron jälkeen polyominojen  $P_n$  ja  $P_m$  solut muodostavat yhdessä jonkin normaalikohdassa olevan  $(n + m)$ -ominon.

Lisäksi yhdistämällä mitkä tahansa kaksi normaalikohdassa olevaa  $n$ - ja  $m$ -ominoa edellä kuvatulla tavalla saadaan aina eri normaalikohdassa oleva  $(n + m)$ -omino. Näin ollen  $t(n)t(m) \leq t(n + m)$  kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$  ja  $m$ . Koska lemmän 4 ehdot ovat voimassa lukujonolle  $(t(n))_{n=1}^{\infty}$ , raja-arvo  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} t(n)^{\frac{1}{n}}$  on olemassa.  $\square$

Edellä tutkimme ainoastaan kiinnitettyjen  $n$ -ominon raja-arvoa  $\lim_{n \rightarrow \infty} t(n)^{\frac{1}{n}}$ . Tulee mieleen kysyä, ovatko kiraalisten ja vapaiden  $n$ -ominon vastaavat raja-arvot  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n)^{\frac{1}{n}}$  ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}$  olemassa. Osoitetaan seuraavaksi, että ne itse asiassa lähestyvät kaikki samaa lukua  $\lambda$ .

**Lause 14.** *Raja-arvoille  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n)^{\frac{1}{n}}$  ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}$  on voimassa*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}} = \lambda.$$

*Todistus.* Väite seuraa kuristusperiaatteen nojalla lauseesta 9, sillä sen perusteella luvuille  $t(n)$ ,  $r(n)$  ja  $s(n)$  on voimassa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t(n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{t(n)}{8} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} r(n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} t(n)^{\frac{1}{n}}.$$

$\square$

Luku  $\lambda$  voisi mahdollisesti olla ääretön, sillä sen äärellisyys ei seuraa sen olemassaolosta. Lauseista 11 ja 12 saadaan kuitenkin suoraviivaisesti ylä- ja alaraja luvun  $\lambda$  suuruudelle ja näin ollen niistä seuraa myös sen äärellisyys.

**Lause 15.** *Luvulle  $\lambda$  on voimassa*

$$2 \leq \lambda < \frac{27}{4}.$$

*Todistus.* Lauseen 11 perusteella

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} t(n)^{\frac{1}{n}} < \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{27}{4} \right)^n \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27}{4} = \frac{27}{4}$$

ja toisaalta lauseen 12 perusteella

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} t(n)^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{n-1})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1-\frac{1}{n}} = 2.$$

$\square$

## 5.1 Parempi alaraja Klarnerin vakiolle

Parantaaksemme lauseen 15 alarajaa luvulle  $\lambda$  tutkitaan seuraavaksi rivikonveksien  $n$ -ominojen joukkoa  $B_n$  ja siinä olevien  $n$ -ominojen lukumäärää  $b(n)$ . Johdetaan luvuille  $b(n)$  rekursioyhtälö, jonka avulla rivikonveksien  $n$ -ominojen lukumäärälle saadaan järjestysluvusta  $n$  riippuva kaava. Tutkimalla tätä kaavaa voimme arvioida Klarnerin vakion  $\lambda$  suuruutta alhaalta. Tämän luvun tulokset perustuvat artikkeliin [15].

Käytetään merkintää  $B_{n,r}$  joukon  $B_n$  osajoukosta, jossa on ne rivikonveksit  $n$ -ominot, joiden alimmalla rivillä on  $r$  solua. Lisäksi käytetään joukon  $B_{n,r}$  alkuiden lukumäärälle merkintää  $b_r(n)$ . Heti havaitaan, että  $b_0(n) = 0$  ja  $b_n(n) = 1$  kaikilla  $n \geq 1$ , sillä nolla solua ensimmäisellä rivillään sisältäviä rivikonvekseja polyominoja ei ole ja  $n$  solua ensimmäisellä rivillään sisältäviä  $n$ -ominoja on tarkalleen yksi. Lisäksi joukon  $B_{n,r}$  määritelmän nojalla kaikilla luonnollisilla luvuilla  $n$  on voimassa

$$b(n) = \sum_{r=1}^n b_r(n). \quad (5)$$

Jokaisen joukon  $B_{n,r}$  polyominon voidaan ajatella koostuvan yhdestä  $r$  solua sisältävästä rivistä ja sen päälle asetetusta joukkoon  $B_{n-r}$  kuuluvasta polyominosta. Luvulle  $b_r(n)$  saadaan siis johdettua laskukaava, kun lasketaan yhteen, kuinka monella tavalla voidaan muodostaa joukkoon  $B_{n,r}$  kuuluva polyomino asettamalla  $r$  solua sisältävän rivin päälle jokin joukon  $B_{n-r}$  polyomino.

**Lause 16.** *Olkkoon  $n$  ja  $r$  kokonaislukuja, joille  $1 \leq r < n$ . Tällöin*

$$b_r(n) = \sum_{i=1}^{n-r} (r+i-1)b_i(n-r). \quad (6)$$

*Todistus.* Rivin, jossa on  $r$  solua, päälle voidaan asettaa jokin joukon  $B_{n-r,i}$  polyomino  $(r+i-1)$  tavalla niin, että saatu solujen joukko muodostaa jonkin joukkoon  $B_{n,r}$  kuuluvan rivikonveksin  $n$ -ominon. Tällä tavalla muodostettuja rivikonvekseja  $n$ -ominoja on siis yhteensä  $(r+i-1)b_i(n-r)$  kappaletta. Väite saadaan, kun summataan yhteen lasketut muodostamistavat jokaiselle joukolle  $B_{n-r,i}$ , jossa  $1 \leq i \leq n-r$ .  $\square$

Yhtälöiden (5) ja (6) avulla voidaan muodostaa rekursioyhtälö luvuille  $b(n)$ . Rekursioyhtälön muodostamiseen johtavat askeleet on jaettu useampaan lemmaan sekä lauseeseen 17, joka kokoaa yhteen lemmaiden tulokset antaen lopulta tavoitellun rekursioyhtälön.

**Lemma 5.** *Olkkoon  $n$  ja  $r$  kokonaislukuja, joille  $1 \leq r < n$ . Tällöin*

$$b_r(n) - b_{r-1}(n-1) = b(n-r).$$

*Todistus.* Käyttämällä yhtälöä (6) lukujen  $b_r(n)$  ja  $b_{r-1}(n-1)$  erotukseksi saadaan

$$b_r(n) - b_{r-1}(n-1) = \sum_{i=1}^{n-r} (r+i-1)b_i(n-r) - \sum_{i=1}^{n-r} (r+i-2)b_i(n-r).$$

Yhdistetään edellisen yhtälön oikean puolen summat, jolloin

$$b_r(n) - b_{r-1}(n-1) = \sum_{i=1}^{n-r} b_i(n-r),$$

joka on yhtälön 5 perusteella yhtä suuri kuin luku  $b(n-r)$ . □

Käytännössä edellisessä lemmassa tarkastellaan, kuinka monella tavalla joukon  $B_{n-r}$  polyominoja voidaan asettaa  $r$  ja  $r-1$  solua sisältävien rivien päälle niin, että muodostuu rivikonvekksi polyomino. Vähentämällä näiden tapojen lukumäärät toisistaan saadaan siis joukon  $B_{n-r}$  polyominojen lukumäärä. Tämä selittyy sillä, että erotuksessa jää jäljelle vain ne tavat, jossa joukon  $B_{n-r}$  polyomino asetetaan yhdestä solusta koostuvan rivin päälle niin, että muodostuneessa polyominossa alimman rivin solu on mahdollisimman lähellä päälle asetettavan polyominon vasenta reunaa. Tällaisia tapoja on selvästi vain yksi jokaista joukon  $B_{n-r}$  polyominoa kohti.

Seuraavissa lemmoissa johdetuille yhtälöille onkin jo vaikeampi antaa geometrista tulkintaa. Niinpä esitetäänkin ainoastaan todistukset, joissa uudet yhtälöt saadaan muodostettua jo esitettyjä yhtälöitä käsittelemällä. Jokainen uusi yhtälö on aina askeleen lähempänä tavoiteltua rekursioyhtälöä. Johdetaan ensin lemmoissa 6 ja 7 kaksi uutta yhtälöä luvulle  $b(n)$  ja sen jälkeen lemmoissa 8, 9 ja 10 kolme yhtälöä luvulle  $b_1(n)$ .

**Lemma 6.** *Olkoon  $n \geq 0$ . Tällöin*

$$b(n) = b_1(n) + \sum_{r=1}^{n-1} b(n-r). \quad (7)$$

*Todistus.* Koska  $b(0) = b_1(0) = 0$  ja  $b(1) = b_1(1) = 1$ , väitteen yhtälö pätee, kun  $0 \leq n \leq 1$ . Olkoon siis  $n \geq 2$ . Kun yhtälöä (5) käytetään luvuille  $b(n)$  ja  $b(n-1)$ , niiden erotukselle saadaan yhtälö

$$b(n) - b(n-1) = \sum_{r=1}^n b_r(n) - \sum_{r=1}^{n-1} b_r(n-1).$$

Erotetaan edellisen yhtälön ensimmäisestä summasta luku  $b_1(n)$  erilleen ja muutetaan jälkimmäisen summan indeksointia, jolloin summat voidaan yhdistää. Saadaan yhtälö

$$b(n) - b(n-1) = b_1(n) + \sum_{r=2}^n (b_r(n) - b_{r-1}(n-1)).$$



Koska  $b_n(n) = b_{n-1}(n-1) = 1$ , edellisen yhtälön summaus voidaan lopettaa lukuun  $n-1$ . Lisäksi erotus  $b_r(n) - b_{r-1}(n-1)$  voidaan lemmän 5 perusteella korvata luvulla  $b(n-r)$ . Niinpä

$$b(n) - b(n-1) = b_1(n) + \sum_{r=2}^{n-1} b(n-r).$$

Kun tämän yhtälön molemmille puolille lisätään luku  $b(n-1)$  ja sisällytetään se yhtälön oikealla puolella esiintyvään summaan, saadaan väite.  $\square$

**Lemma 7.** *Olkoon  $n \geq 1$ . Tällöin*

$$b(n) = 2b(n-1) + b_1(n) - b_1(n-1). \quad (8)$$

*Todistus.* Kun yhtälöä (7) käytetään luvuille  $b(n)$  ja  $b(n-1)$ , niiden erotukselle saadaan yhtälö

$$b(n) - b(n-1) = b_1(n) + \sum_{r=1}^{n-1} b(n-r) - b_1(n-1) - \sum_{r=1}^{n-2} b(n-1-r).$$

Erotetaan edellisen yhtälön ensimmäisestä summasta luku  $b(n-1)$ , jolloin jäljelle jäävä summa on yhtäsuuri kuin jälkimmäinen summa ja ne siis kumoavat toisensa. Näin ollen edellinen yhtälö saadaan muotoon

$$b(n) - b(n-1) = b_1(n) + b(n-1) - b_1(n-1).$$

Väite saadaan lisäämällä tämän yhtälön molemmille puolille luku  $b(n-1)$ .  $\square$

**Lemma 8.** *Olkoon  $n \geq 3$ . Tällöin*

$$b_1(n) = b_1(n-1) + b(n-1) + \sum_{i=1}^{n-3} (n-2-i)b(i). \quad (9)$$

*Todistus.* Kun yhtälöä (6) käytetään luvuille  $b_1(n)$  ja  $b_1(n-1)$ , niiden erotukselle saadaan yhtälö

$$b_1(n) - b_1(n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} ib_i(n-1) - \sum_{i=1}^{n-2} ib_i(n-2). \quad (10)$$

Tämän yhtälön ensimmäiselle summalle on voimassa yhtälö

$$\sum_{i=1}^{n-1} ib_i(n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i(n-1) + \sum_{i=2}^{n-1} (i-1)b_i(n-1),$$

jonka oikean puolen ensimmäinen summa on yhtälön (5) perusteella yhtä suuri kuin luku  $b(n-1)$  ja jälkimmäinen summa voidaan indeksöintiä muuttamalla yhdistää yhtälön (10) jälkimmäisen summan kanssa. Niinpä siis

$$b_1(n) - b_1(n-1) = b(n-1) + \sum_{i=1}^{n-2} i(b_{i+1}(n-1) - b_i(n-2)).$$

Koska  $b_{n-1}(n-1) = b_{n-2}(n-2) = 1$ , edellisen yhtälön summan summaus voidaan lopettaa lukuun  $n-3$ . Lisäksi lemmän 5 perusteella erotus  $b_{i+1}(n-1) - b_i(n-2)$  voidaan korvata luvulla  $b(n-2-i)$ . Saadaan siis yhtälö

$$b_1(n) - b_1(n-1) = b(n-1) + \sum_{i=1}^{n-3} ib(n-2-i).$$

Väite saadaan lisäämällä tämän yhtälön molemmille puolille luku  $b_1(n-1)$  ja muokkaamalla yhtälössä esiintyvän summan indeksöintiä.  $\square$

**Lemma 9.** *Olkoon  $n \geq 4$ . Tällöin*

$$b_1(n) = 2b_1(n-1) - b_1(n-2) - 2b(n-2) + \sum_{i=1}^{n-1} b(i). \quad (11)$$

*Todistus.* Käytetään yhtälöä (9) luvulle  $b_1(n)$  ja  $b_1(n-1)$ , jolloin niiden erotukseksi saadaan

$$\begin{aligned} b_1(n) - b_1(n-1) &= b_1(n-1) + b(n-1) + \sum_{i=1}^{n-3} (n-2-i)b(i) \\ &\quad - b_1(n-2) - b(n-2) - \sum_{i=1}^{n-4} (n-3-i)b(i). \end{aligned}$$

Edellisen yhtälön jälkimmäisen summan indeksöinti voidaan jatkaa lukuun  $n-3$  asti ilman vaikutusta kyseisen summan suuruuteen. Niinpä edellisen yhtälön summat voidaan esittää muodoissa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-3} (n-2-i)b(i) &= \sum_{i=1}^{n-3} (n-i)b(i) - 2 \sum_{i=1}^{n-3} b(i) \text{ ja} \\ \sum_{i=1}^{n-4} (n-3-i)b(i) &= \sum_{i=1}^{n-3} (n-i)b(i) - 3 \sum_{i=1}^{n-3} b(i), \end{aligned}$$

jolloin niiden erotus on yhtä suuri kuin summa  $\sum_{i=1}^{n-3} b(i)$ . Nyt siis

$$b_1(n) - b_1(n-1) = b_1(n-1) - b_1(n-2) + b(n-1) - b(n-2) + \sum_{i=1}^{n-3} b(i).$$

Kun edellisen yhtälön oikealle puolelle lisätään luvut  $b(n-2)$  ja  $-b(n-2)$ , luvut  $b(n-1)$  ja  $b(n-2)$  voidaan sisällyttää yhtälön oikealla puolella esiintyvään summaan. Yhtälö saadaan siis muotoon

$$b_1(n) - b_1(n-1) = b_1(n-1) - b_1(n-2) - 2b(n-2) + \sum_{i=1}^{n-1} b(i)$$

Väite seuraa lisäämällä tämän yhtälön molemmille puolille luku  $b_1(n-1)$ .  $\square$

**Lemma 10.** *Olkoon  $n \geq 5$ . Tällöin*

$$b_1(n) = 4b_1(n-1) - 4b_1(n-2) + b_1(n-3) + 2b(n-3). \quad (12)$$

*Todistus.* Käytetään yhtälöä (11) luvuille  $b_1(n)$  ja  $b_1(n-1)$ , jolloin niiden erotukselle saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} b_1(n) - b_1(n-1) &= 2b_1(n-1) - b_1(n-2) - 2b(n-2) + \sum_{i=1}^{n-1} b(i) \\ &\quad - 2b_1(n-2) + b_1(n-3) + 2b(n-3) - \sum_{i=1}^{n-2} b(i). \end{aligned}$$

Erottamalla tämän yhtälön ensimmäisestä summasta luku  $b(n-1)$ , jäljelle jäävät summat kumoavat toisensa. Niinpä edellinen yhtälö saadaan vain lukujen järjestystä muuttamalla muotoon

$$\begin{aligned} b_1(n) - b_1(n-1) &= 2b_1(n-1) - 3b_1(n-2) + b_1(n-3) \\ &\quad + b(n-1) - 2b(n-2) + 2b(n-3). \end{aligned}$$

Edellisessä yhtälössä erotus  $b(n-1) - 2b(n-2)$  voidaan korvata lemmän 7 perusteella erotuksella  $b_1(n-1) - b_1(n-2)$ . Saadaan siis yhtälö

$$b_1(n) - b_1(n-1) = 3b_1(n-1) - 4b_1(n-2) + b_1(n-3) + 2b(n-3).$$

Väite saadaan, kun edellisen yhtälön molemmille puolille lisätään luku  $b_1(n-1)$ .  $\square$

Kun lemmoissa 7 ja 10 johdetut yhtälöt luvuille  $b(n)$  ja  $b_1(n)$  yhdistetään, saadaan vihdoin muodostettua rekursioyhtälö luvuille  $b(n)$ .

**Lause 17.** *Luvuille  $b(n)$  on voimassa kaikilla  $n \geq 5$*

$$b(n) = 5b(n-1) - 7b(n-2) + 4b(n-3). \quad (13)$$

*Todistus.* Sijoitetaan yhtälö (12) yhtälöön (8), jolloin

$$b(n) = 2b(n-1) + 4b_1(n-1) - 4b_1(n-2) + b_1(n-3) + 2b(n-3) - b_1(n-1).$$

Järjestelemällä termejä, edellinen yhtälö saadaan muotoon

$$b(n) = 2b(n-1) + 2b(n-3) + 3(b_1(n-1) - b_1(n-2)) - (b_1(n-2) - b_1(n-3)).$$

Lemman 7 perusteella edellisen yhtälön erotus  $b_1(n-1) - b_1(n-2)$  voidaan korvata erotuksella  $b(n-1) - 2b(n-2)$  ja erotus  $b_1(n-2) - b_1(n-3)$  erotuksella  $b(n-2) - 2b(n-3)$ . Nyt siis

$$b(n) = 2b(n-1) + 2b(n-3) + 3(b(n-1) - 2b(n-2)) - (b(n-2) - 2b(n-3)),$$

josta väite saadaan avaamalla sulut ja yhdistämällä samat termit keskenään.  $\square$

Kun lukujonon  $(b(n))_{n=0}^{\infty}$  ensimmäiset viisi jäsentä tunnetaan, seuraavien jäsenten arvot voidaan laskea rekursioyhtälön (13) avulla. Ensimmäisten viiden jäsenen arvot voidaan laskea joko seurauksen 3 avulla tai käyttämällä yhtälöitä (5) ja (6). Ensimmäisten jäsenten arvoiksi saadaan  $b(0) = 0$ ,  $b(1) = 1$ ,  $b(2) = 2$ ,  $b(3) = 6$  ja  $b(4) = 19$ .

Rekursioyhtälön (13) karakteristisella polynomilla  $x^3 - 5x^2 + 7x - 4$  on kolme eri suurta juurta. Reaalinen juuri on itseisarvoltaan suurin ja suuruudeltaan hieman yli 3,20. Muut kaksi juurta ovat toistensa kompleksikonjugaatteja. Osoitetaan seuraavaksi, että raja-arvo  $\lim_{n \rightarrow \infty} b(n)^{\frac{1}{n}}$  lähestyy polynomin  $x^3 - 5x^2 + 7x - 4$  reaalisen juuren arvoa.

**Lause 18.** *Raja-arvo  $\lim_{n \rightarrow \infty} b(n)^{\frac{1}{n}} = \beta$ , jossa  $\beta$  on rekursioyhtälön (13) karakteristisen polynomin reaalinen juuri.*

*Todistus.* Olkoon rekursioyhtälön (13) karakteristisen polynomin reaalinen juuri  $\beta$  ja kompleksiset juuret  $\alpha$  ja  $\bar{\alpha}$ . Tutkitaan lukujonoa  $(b(n+2))_{n=0}^{\infty}$ , jonka jäsenille on lauseen 4 perusteella joillakin kompleksiluvuilla  $c_1$ ,  $c_2$  ja  $c_3$  voimassa kaava

$$b(n+2) = c_1\beta^n + c_2\alpha^n + c_3\bar{\alpha}^n. \quad (14)$$

Kompleksiluku  $z$  potenssiin  $n$  voidaan tunnetusti esittää muodossa

$$z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)),$$

jossa  $\theta$  on kompleksiluvun  $z$  vaihekulma polaarisesityksessä. Näin ollen kaava (14) voidaan esittää muodossa

$$b(n+2) = c_1\beta^n + |\alpha|^n((c_2 + c_3) \cos(n\theta) + (c_2 - c_3)i \sin(n\theta)),$$

jossa  $\theta$  on kompleksiluvun  $\alpha$  vaihekulma polaarisesityksessä.

Koska lukujonon  $(b(n+2))_{n=0}^{\infty}$  jäsenet ovat kaikki reaalilukuja, edellisen kaavan imaginaarinen osa on oltava nolla kaikilla luvun  $n$  arvoilla. Niinpä vakioiden  $c_2$  ja  $c_3$  on oltava toistensa kompleksikonjugaatteja. Kaava (14) voidaan siis esittää myös muodossa

$$b(n+2) = c_1\beta^n + |\alpha|^n(c_4 \cos(n\theta) + c_5 \sin(n\theta)),$$

jossa  $c_4$  ja  $c_5$  ovat joitakin reaalilukuja. Otetaan tämän yhtälön oikean puolen lausekkeessa yhteiseksi tekijäksi  $\beta^n$  ja korotetaan molemmat puolet potenssiin  $\frac{1}{n}$ , jolloin saadaan yhtälö

$$\sqrt[n]{b(n+2)} = \beta \sqrt[n]{c_1 + \left(\frac{|\alpha|}{\beta}\right)^n (c_4 \cos(n\theta) + c_5 \sin(n\theta))}.$$

Koska  $|\alpha| < \beta$ , edellisen yhtälön oikea puoli lähestyy lukua  $\beta$  luvun  $n$  lähestyessä ääretöntä. Lisäksi vasemman puolen raja-arvo luvun  $n$  lähestyessä ääretöntä on yhtä suuri kuin raja-arvo  $\lim_{n \rightarrow \infty} b(n)^{\frac{1}{n}}$ . Niinpä siis  $\lim_{n \rightarrow \infty} b(n)^{\frac{1}{n}} = \beta$ .  $\square$

Klarnerin vakion  $\lambda$  alarajaa saadaan parannettua edellisen lauseen seurauksena, sillä seurauksen 1 perusteella  $\lim_{n \rightarrow \infty} t(n)^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b(n)^{\frac{1}{n}}$ .

**Seuraus 4.** Klarnerin vakio  $\lambda > 3,20$ .

Paras tähän mennessä osoitettu alaraja Klarnerin vakiolle on  $\lambda > 4,0025$ , jonka Barequet, Rote, ja Shalah osoittivat tietokonetta hyödyntävän algoritmin avulla [16].

## 5.2 Parempi yläraja Klarnerin vakiolle

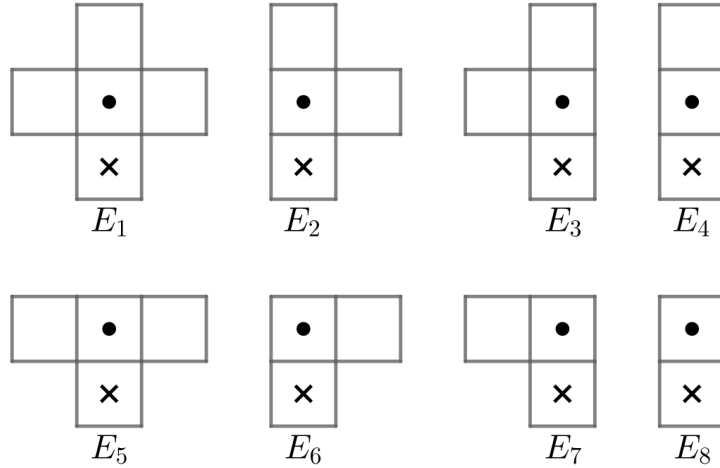
Lauseen 15 antaman alarajan lisäksi voimme parantaa myös sen antamaa ylärajaa luvulle  $\lambda$ . Ylärajan parantamiseksi tarvitsemme generoivia funktioita ja kekseliään tavan tarkastella normaalikohdassa olevia polyominoja. Tämän luvun tulokset perustuvat artikkeliin [17].

Lauseen 10 todistuksessa huomasimme, että jokaiseen normaalikohdassa olevaan polyominoon voidaan liittää jokin eri binäärinä. Normaalikohdassa olevat polynomit voidaan siis esittää kompaktisti ja yksikäsitteisesti myös binäärinä avulla.

Johdetaan normaalikohdassa oleville polyominoille seuraavaksi toisenlainen esitysmuoto, jossa jokainen polyomino voidaan esittää tietyistä pienemmistä polyominoista koostuvana jonona. Jotta tämä toisenlainen esitysmuoto olisi helpompi ymmärtää, esitetään se ensin tapauksessa, jossa jonot muodostetaan käyttämällä tiettyjä yksinkertaisia polyominoja. Sen jälkeen tarkastellaan haastavampaa tapausta, jossa jonoissa käytettävät polyominot ovat monimutkaisempia. Tutkimalla tätä haastavampaa tapausta, saamme johdettua paremman ylärajan vakiolle  $\lambda$ .

Olkoon  $E$  polyominoista

$$\begin{aligned} E_1 &= \{[0, -1], [0, 0], [0, 1], [1, 0], [-1, 0]\}, \\ E_2 &= \{[0, -1], [0, 0], [0, 1], [1, 0] \quad \}, \\ E_3 &= \{[0, -1], [0, 0], [0, 1], \quad [-1, 0]\}, \\ E_4 &= \{[0, -1], [0, 0], [0, 1] \quad \quad \quad \}, \\ E_5 &= \{[0, -1], [0, 0], \quad [1, 0], [-1, 0]\}, \\ E_6 &= \{[0, -1], [0, 0], \quad [1, 0] \quad \quad \}, \\ E_7 &= \{[0, -1], [0, 0], \quad [-1, 0]\} \text{ ja} \\ E_8 &= \{[0, -1], [0, 0] \quad \quad \quad \} \end{aligned}$$



Kuva 11: Joukossa  $E$  olevat polyominot.

koostuva joukko. Joukon  $E$  polyominot on esitetty kuvassa 11. Kuvassa solun  $[0, -1]$  keskipisteeseen on piirretty musta rasti ja solun  $[0, 0]$  keskipisteeseen musta ympyrä.

Osoittautuu, että normaalikohdassa olevat polyominot voidaan esittää yksikäsitteisesti joukon  $E$  polyominoista muodostettuina jonoina. Tutkitaan aluksi kaikkia mahdollisia äärellisiä joukon  $E$  polyominoista muodostettuja jonoja. Joukosta, joka sisältää kaikki mahdolliset joukon  $E$  polyominoista koostuvat  $k$ -pituiset jonot, käytetään merkintää  $E^k$ . Seuraavien määritelmien avulla joukon  $E$  polyominoista koostuvat jonot voidaan partitioida pienempiin osajoukkoihin samaan tapaan kuin ne voidaan partitioida jonojen pituuden perusteella joukkoihin  $E^k$ .

**Määritelmä 19.** Olkoon  $P_n$  jokin  $n$ -omino. *Polyominon*  $P_n$  *paino*

$$w(P_n) = x^a y^b,$$

jossa  $a = n - 2$  ja  $b$  on polyominoon  $P_n$  kuuluvien  $x$ -akselin alapuolella olevien solujen lukumäärä.

**Esimerkki 12.** Joukossa  $E$  olevien polyominojen painot ovat

$$\begin{aligned} w(E_1) &= x^3 y, \\ w(E_2) &= x^2 y = w(E_3) = w(E_5), \\ w(E_4) &= xy = w(E_6) = w(E_7) \text{ ja} \\ w(E_8) &= y. \end{aligned}$$

Määritellään paino myös polyominoista koostuville jonoille.

**Määritelmä 20.** Olkoon  $Y = (Y_i)_{i=1}^k$  jono, jossa  $Y_i$  on jokin polyomino kaikilla  $1 \leq i \leq k$ . Jonon  $Y$  *paino*

$$W(Y) = x \prod_{i=1}^k w(Y_i).$$

Joukon  $E$  polyominoista muodostettujen  $x^a y^b$ -painoisten jonojen lukumäärästä käytetään merkintää  $e(a, b)$ . Seuraavassa lauseessa tarkastellaan erästä generoivaa funktiota, jonka avulla saadaan johdettua laskukaava luvuille  $e(n, n)$ .

**Lause 19.** *Kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$*

$$e(n, n) = \binom{3n}{n-1}$$

*Todistus.* Tarkastellaan generoivaa funktiota  $G(x, y) = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} e(a, b)x^a y^b$ . Generoivan funktion  $G(x, y)$  summassa lasketaan yhteen kaikkien mahdollisten joukon  $E$  polyominoista muodostettujen jonojen painot. Tämä yhteenlasku voidaan suorittaa summaamalla yhteen jokaisessa joukossa  $E^k$  olevien  $k$ -pituisten jonojen painot, jolloin

$$G(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{Y \in E^k} W(Y).$$

Tuloperiaatteen nojalla edellisen yhtälön sisempi summa

$$\sum_{Y \in E^k} W(Y) = x \left( \sum_{P \in E} w(P) \right)^k.$$

Koska joukossa  $E$  olevien polyominojen painojen summa  $\sum_{P \in E} w(P) = (1+x)^3 y$ , generoivaksi funktioksi saadaan

$$G(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} x(1+x)^{3k} y^k.$$

Käytetään binomikaavaa potenssille  $(1+x)^{3k}$ , jolloin

$$G(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} x \left( \sum_{i=0}^{3k} \binom{3k}{i} x^i \right) y^k$$

Kun ulommassa summassa oleva muuttuja  $x$  siirretään sisemmän summan sisälle ja muutetaan sisemmän summan indeksöintiä, generoivaksi funktioksi saadaan

$$G(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{3k+1} \binom{3k}{i-1} x^i y^k$$

Näin ollen generoivassa funktiossa  $G(x, y)$  termin  $x^n y^n$  kerroin  $e(n, n) = \binom{3n}{n-1}$ .  $\square$

Jos nyt normaalikohdassa olevien  $n$ -ominojen joukolta on olemassa injektio joukolle, joka sisältää kaikki  $x^n y^n$ -painoiset joukon  $E$  polyominoista muodostetut jonot, niin normaalikohdassa olevia  $n$ -ominoja on korkeintaan  $e(n, n) = \binom{3n}{n-1}$  kappaletta. Osoitetaan seuraavassa lauseessa, että tällainen injektio on olemassa.

**Lause 20.** *Normaalikohdassa olevien  $n$ -ominojen joukolta on olemassa injektio joukon  $E$  polyominoista muodostettujen  $x^n y^n$ -painoisten jonojen joukolle.*

*Todistus.* Olkoon  $P_n$  jokin normaalikohdassa oleva  $n$ -omino ja  $G$  graafi, jonka pisteitä ovat ne pisteet  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  ja  $C_n$ , ja viivoja ne viivat, jotka saadaan suorittamalla lauseen 10 todistuksen pisteiden nimeämismenetelmä polyominolle  $P_n$ . Lisätään graafiin  $G$  piste  $C_0 = (0, -1)$  ja piirretään viiva pisteestä  $C_0$  pisteeseen  $C_1$ . Muodostetaan seuraavaksi polyominoa  $P_n$  vastaava joukon  $E$  polyominoista koostuva  $x^n y^n$ -painoinen jono  $Y = (Y_i)_{i=1}^n$ .

Olkoon  $C_i$  jokin graafin  $G$  piste ja  $G_i$  graafin  $G$  aligraafi, jonka pistejoukossa on kaikki yhden viivan päässä pisteestä  $C_i$  olevat pisteet ja viivajoukossa näitä pisteitä graafissa  $G$  yhdistävät viivat. Olkoon lisäksi  $C_k$  se aligraafin  $G_i$  pisteistä, jolle  $k < i$ , ja  $P$  aligraafia  $G_i$  vastaava polyomino. Muodostetaan polyominon  $P$  rotaatio-translaatio  $P'$ , jossa polynomin  $P$  solua  $[C_k]$  vastaa solu  $[0, -1]$  ja solua  $[C_i]$  solu  $[0, 0]$ . Nyt  $P' = E_j$  tarkalleen yhdellä joukkoon  $E$  kuuluvalla polyominolla  $E_j$ . Asetetaan  $Y_i = E_j$ .

Toistamalla edellinen tarkastelu kaikilla indekseillä  $i$ , jossa  $1 \leq i \leq n$ , polyomioon  $P_n$  saadaan liitetty joukon  $E$  polyominoista muodostettu jono  $Y = (Y_i)_{i=1}^n$ . Jokainen polyominon  $P_n$  solu, paitsi solu  $[0, 0]$ , vastaa tarkalleen yhdessä jonon  $Y$  polyominossa jotakin muuta solua kuin  $[0, 0]$  tai  $[0, -1]$ . Lisäksi jono  $Y$  koostuu polyominoista, joissa jokaisessa on tarkalleen yksi x-akselin alapuolella oleva solu. Niinpä jonon  $Y$  paino  $W(Y) = x \prod_{i=1}^n w(Y_i) = x x^{n-1} y^n = x^n y^n$ .

Edellinen menetelmä liittyy jokaiseen normaalikohdassa olevaan  $n$ -omioon eri joukon  $E$  polyominoista muodostetun  $x^n y^n$ -painoisen jonon. Nimittäin jos jotkin normaalikohdassa olevat polyominot johtaisivat edellä esitetystä menetelmästä samaan jonoon, niin tällöin myös polyominoihin liittyvät aligraafit  $G_i$  olisivat aina samoja kaikilla indekseillä  $i$ . Näin ollen myös polyominoihin liitetyt graafit ja siis itse polyominot olisivat samoja.  $\square$

**Esimerkki 13.** Kuvan 10 normaalikohdassa olevaan 9-omioon liitetty joukon  $E$  polyominoista koostuva jono on  $(E_4, E_2, E_3, E_7, E_2, E_8, E_8, E_8, E_8)$ .

Saimme siis johdettua toisen todistuksen lauseelle 10. Toisin kuin lauseen 10 todistuksen menetelmää, edellä esitettyä menetelmää voidaan parantaa vielä huomattavasti tutkimalla joukon  $E$  sijaan toista hieman monimutkaisempaa polyominojen joukkoa. Ennen kuin tämä monimutkaisempi polyominojen joukko voidaan määrittellä, tarvitsemme kahta määritelmää, joiden avulla polyominoissa oleville soluille voidaan määrittellä asento.

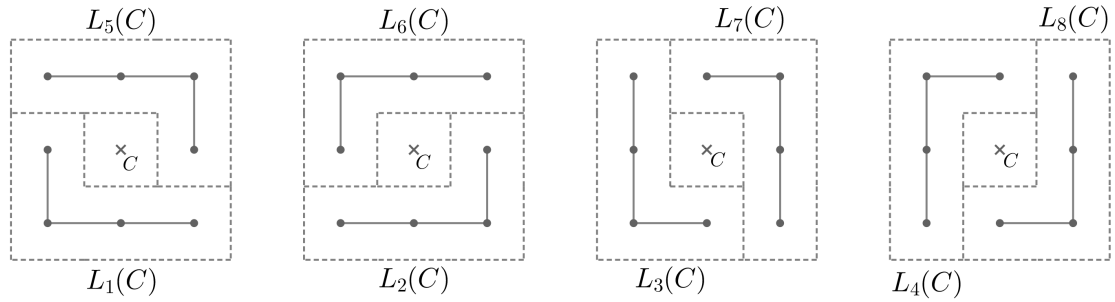


**Määritelmä 21.** Olkoon  $[C]$  jokin solu. Polyominot

$$\begin{aligned}
L_1(C) &= \{[C + (-1, -1)], [C + (0, -1)], [C + (1, -1)], [C + (-1, 0)]\}, \\
L_2(C) &= \{[C + (-1, -1)], [C + (0, -1)], [C + (1, -1)], [C + (1, 0)]\}, \\
L_3(C) &= \{[C + (-1, -1)], [C + (-1, 0)], [C + (-1, 1)], [C + (0, -1)]\}, \\
L_4(C) &= \{[C + (-1, -1)], [C + (-1, 0)], [C + (-1, 1)], [C + (0, 1)]\}, \\
L_5(C) &= \{[C + (1, 1)], [C + (0, 1)], [C + (-1, 1)], [C + (1, 0)]\}, \\
L_6(C) &= \{[C + (1, 1)], [C + (0, 1)], [C + (-1, 1)], [C + (-1, 0)]\}, \\
L_7(C) &= \{[C + (1, 1)], [C + (1, 0)], [C + (1, -1)], [C + (0, 1)]\}, \text{ ja} \\
L_8(C) &= \{[C + (1, 1)], [C + (1, 0)], [C + (1, -1)], [C + (0, -1)]\}
\end{aligned}$$

ovat solun  $[C]$   $L$ -ominoja.

Kuvassa 12 on esitetty solun  $[C]$  kaikki kahdeksan  $L$ -ominoa. Kuvassa solun  $[C]$  keskipiste on merkattu rastilla ja jokainen  $L$ -omino on esitetty sen solujen indusoiman graafin avulla. Lisäksi jokaisen  $L$ -ominon rajaaman alueen ääriviivat on piirretty katkoviivoin.



Kuva 12: Solun  $[C]$  kaikki kahdeksan  $L$ -ominoa.

**Määritelmä 22.** Olkoon  $P$  jokin polyomino ja  $[C]$  jokin siihen kuuluva solu. Solun  $[C]$   $L$ -konteksti polyominossa  $P$  on jokin solun  $[C]$   $L$ -ominoista  $L_i(C)$ .

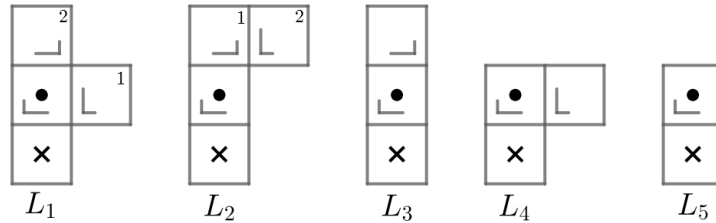
Solusta  $[C]$ , jonka  $L$ -konteksti polyominossa  $P$  on  $L_i(C)$ , käytetään joukon  $P$  sisällä merkintää  $[C]_i$ . Alaindeksi jätetään merkkäämättä, jos solun  $L$ -konteksti polyominossa  $P$  saa olla mikä tahansa kahdeksasta mahdollisesta vaihtoehdosta. Solun  $[C]$   $L$ -konteksti polyominossa  $P$  kertoo nyt solun asennon polyominossa  $P$ . Yksi solu voi olla kahdeksassa eri asennossa, mutta vain yhdessä asennossa tietyssä polyominossa. Samassa kohdassa oleva solu voi olla eri asennoissa eri polyominoissa, sillä solun  $L$ -konteksti on polyominokohtainen.

Määritelmän 22 avulla voimme antaa toisen joukon, jonka polyominoista koostuvina jonoina normaalikohdassa olevat polyominot voidaan esittää. Olkoon  $L$  po-

lyominoista

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{[0, -1], [0, 0]_1, [0, 1]_4, [1, 0]_5 \quad \}, \\
L_2 &= \{[0, -1], [0, 0]_1, [0, 1]_4, \quad [1, 1]_5\}, \\
L_3 &= \{[0, -1], [0, 0]_1, [0, 1]_4 \quad \}, \\
L_4 &= \{[0, -1], [0, 0]_1, \quad [1, 0]_5 \quad \} \text{ ja} \\
L_5 &= \{[0, -1], [0, 0]_1 \quad \}
\end{aligned}$$

koostuva joukko. Joukon  $L$  polyominot on esitetty kuvassa 13. Kuvassa solun  $[0, -1]$  keskipisteeseen on piirretty musta rasti ja solun  $[0, 0]$  keskipisteeseen musta ympyrä. Soluille asetetut  $L$ -kontekstit on kuvassa merkattu solujen sisälle piirrettyinä  $L$ -kirjaimina. Solun  $[C]_i$  sisälle piirretty  $L$ -kirjain on siis samassa asennossa kuin sille asetettu  $L$ -konteksti  $L_i(C)$ . Lisäksi solujen ylänurkkaan merkityt numerot vastaavat solujen nimeämisjärjestystä lauseessa 23.



Kuva 13: Joukossa  $L$  olevat polyominot.

**Esimerkki 14.** Joukon  $L$  polyominojen painot ovat

$$\begin{aligned}
w(L_1) &= w(L_2) = x^2y, \\
w(L_3) &= w(L_4) = xy \text{ ja} \\
w(L_5) &= y.
\end{aligned}$$

Kuten joukon  $E$  tapauksessa, tutkitaan aluksi kaikkia mahdollisia joukon  $L$  polyominoista muodostettuja äärellisiä jonoja. Joukosta, joka sisältää kaikki joukon  $L$  polyominoista koostuvat  $k$ -pituiset jonot, käytetään merkintää  $L^k$  ja joukon  $L$  polyominoista muodostettujen  $x^a y^b$ -painoisten jonojen lukumäärästä merkintää  $l(a, b)$ . Tarkastellaan seuraavassa lauseessa erästä generoivaa funktiota, jonka avulla saadaan johdettua laskukaava luvulle  $l(n, n)$ .

**Lause 21.** *Kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$*

$$l(n, n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{k, n-2k-1, k+1} 2^{n-k-1}$$

*Todistus.* Tarkastellaan generoivaa funktiota  $G(x, y) = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} l(a, b)x^a y^b$ . Generoivan funktion  $G(x, y)$  summassa lasketaan yhteen kaikkien mahdollisten joukon  $L$  polyominoista muodostettujen jonojen painot. Tämä yhteenlasku voidaan suorittaa summaamalla jokaisessa joukossa  $L^k$  olevien  $k$ -pituisten jonojen painot. Saadaan

$$G(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{Y \in L^k} W(Y).$$

Tuloperiaatteen perusteella edellisen yhtälön sisempi summa

$$\sum_{Y \in L^k} W(Y) = x \left( \sum_{P \in L} w(P) \right)^k.$$

Koska summa  $\sum_{P \in L} w(P) = (2x^2 + 2x + 1)y$ , generoivaksi funktioksi saadaan

$$G(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} x(2x^2 + 2x + 1)^k y^k.$$

Käytetään multinomikaavaa potenssille  $(2x^2 + 2x + 1)^k$ , jolloin

$$G(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} x \left( \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \binom{k}{k_1, k_2, k_3} 2^{k_1+k_2} x^{2k_1+k_2} \right) y^k$$

jossa  $k_1, k_2$  ja  $k_3$  ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja. Kun ulommassa summassa oleva muuttuja  $x$  siirretään sisemmän summan sisälle, generoivaksi funktioksi saadaan

$$G(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \binom{k}{k_1, k_2, k_3} 2^{k_1+k_2} x^{2k_1+k_2+1} y^k,$$

Näin ollen generoivassa funktiossa  $G(x, y)$  termin  $x^n y^n$  kerroin

$$l(n, n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{k, n-2k-1, k+1} 2^{n-k-1}$$

□

Edellisen lauseen kaavaa voidaan arvioida ylöspäin, jolloin luvulle  $l(n, n)$  saadaan eksponentiaalinen yläraja.

**Lause 22.** *Kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$*

$$l(n, n) < (2 + 2\sqrt{2})^n.$$

*Todistus.* Lauseen 21 kaava luvulle  $l(n, n)$  voidaan esittää myös muodossa

$$l(n, n) = \frac{2^n}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{k, n-2k-1, k+1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}.$$

Mutta tämän kaavan summassahan lasketaan yhteen ainoastaan osa muotoa

$$\binom{n}{k_1, k_2, k_3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k_3}$$

olevista positiivisista luvuista, joissa ei-negatiivisille kokonaisluvuille  $k_1, k_2$  ja  $k_3$  on voimassa  $k_1 + k_2 + k_3 = n$ . Voimme siis arvioida kaavaa ylöspäin sisällyttämällä summaan kaikki edellistä muotoa olevat luvut. Saadaan

$$l(n, n) < \frac{2^n}{\sqrt{2}} \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k_2}$$

Sovelletaan edellisen epäyhtälön summaan multinomikaavaa ja arvioidaan saatua lauseketta ylöspäin kertomalla se luvulla  $\sqrt{2}$ , jolloin

$$l(n, n) < 2^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)^n.$$

Sieventämällä edellisen epäyhtälön oikea puoli, saadaan väite.  $\square$

Osoitetaan seuraavaksi, että normaalikohdassa olevien  $n$ -ominojen joukolta on olemassa injektio joukolle, joka sisältää kaikki  $x^n y^n$ -painoiset joukon  $L$  polyominoista muodostetut jonot. Tällöin normaalikohdassa olevia  $n$ -ominoja on edellisen lauseen perusteella siis korkeintaan  $(2\sqrt{2} + 2)^n$  kappaletta. Injektion muodostamiseksi tarvitsemme keinon erotella jonkin polyominon kongruenteista polyominoista ne polyominot, joissa soluille asetetut L-kontekstit vastaavat toisiaan.

**Määritelmä 23.** Kaksi polyominoa  $P$  ja  $P'$  ovat  $L$ -kongruenteja jos on olemassa kokonaisluvut  $k$  ja  $i$ , joille  $0 \leq k \leq 3$  ja  $0 \leq i \leq 1$ , ja joukkoon  $\mathbb{Z}^2$  kuuluva alkio  $\mathbf{r}$ , joilla yhtälön (4) lisäksi on voimassa

$$L_a(C) = L_b(C') \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^i + \mathbf{r}$$

kaikilla niillä polyominossa  $P$  olevilla soluilla  $[C]_a$  ja polyominossa  $P'$  olevilla soluilla  $[C']_b$ , joille

$$[C] = \left[ C' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^i + \mathbf{r} \right].$$

Käytännössä edellinen määritelmä tarkoittaa, että kuvattaessa jokin polyomino toiseksi polyominoksi yhtälön (4) avulla, myös soluille asetetut L-kontekstit kuvataan samalla yhtälöllä toiseksi uuden polyominojen solujen L-konteksteiksi. Eli toisin sanoen soluille asetetut asennot muuttuvat polyominoa peilattaessa tai kierrettäessä. Nyt voimme muodostaa normaalikohdassa olevien polyominojen joukolta injektio joukon  $L$  polyominoista muodostettujen jonojen joukolle

**Lause 23.** *Normaalikohdassa olevien  $n$ -ominojen joukolta on olemassa injektio joukon  $L$  polyominoista muodostettujen  $x^n y^n$ -painoisten jonojen joukolle.*

*Todistus.* Olkoon  $P_n$  jokin normaalikohdassa oleva  $n$ -omino. Nimetään polyominoon  $P_n$  kuuluvien solujen keskipisteet pisteiksi  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  ja  $C_n$ , asetetaan jokaiselle polyominoon  $P_n$  kuuluvalla solulla L-konteksti polyominossa  $P_n$  ja muodostetaan polyominoon  $P_n$  liitetty joukon  $L$  polyominoista koostuva  $x^n y^n$ -painoinen jono  $Y = (Y_i)_{i=1}^n$  alla esitettävän menetelmän avulla.

Lisätään aluksi polyominoon  $P_n$  solu  $[0, -1]$  ja nimetään sen keskipiste pisteeksi  $C_0$ . Tämän lisäksi nimetään solun  $[0, 0]$  keskipiste pisteeksi  $C_1$  ja asetetaan polyominossa  $P_n$  solun  $[C_1]$  L-kontekstiksi  $L_1(C_1)$ . Seuraavat menetelmän vaiheet tulee suorittaa nimeämisyjärjestyksessä pisteille  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  ja  $C_n$ .

Oletetaan, että  $i$  pistettä on jo nimetty, ja että näitä menetelmän vaiheita on suoritettu jo pisteille  $C_1, C_2, \dots, C_{j-2}$  ja  $C_{j-1}$ . Jos  $j - 1 = n$ , niin olemme valmiita. Jos taas  $j - 1 < n$ , niin olkoon  $P$  polyominon  $P_n$  se L-kongruentti polyomino, jossa polyominon  $P_n$  solua  $[C_j]_u$  vastaa solu  $[0, 0]_1$ . Poistetaan joukosta  $P$  kaikki ne solut, joita vastaavien polyominon  $P_n$  solujen keskipisteet on jo nimetty. Näin poistuvat ainakin kaikki L-ominoon  $L_1(0, 0)$  kuuluvat solut, sillä niitä vastaavien polyominoon  $P_n$  kuuluvien solujen keskipisteet on nimetty jo edellisessä vaiheessa. Asetetaan nyt

$$Y_j = \begin{cases} L_1, & \text{jos } [0, 1], [1, 0] \in P \text{ ja } [1, 1] \notin P, \\ L_2, & \text{jos } [0, 1], [1, 1] \in P \text{ ja } [1, 0] \notin P, \\ L_3, & \text{jos } [0, 1] \in P \text{ ja } [1, 0], [1, 1] \notin P, \\ L_4, & \text{jos } [1, 0] \in P \text{ ja } [0, 1], [1, 1] \notin P, \text{ ja} \\ L_5 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Nimetään polyominon  $P$  soluja vastaavien polyominon  $P_n$  solujen keskipisteet seuraavaksi kuvaillulla tavalla. Jos  $Y_j = L_1$ , polyominon  $P$  solua  $[1, 0]$  vastaavan solun keskipiste nimetään pisteeksi  $C_{i+1}$  ja solua  $[0, 1]$  vastaavan solun keskipiste pisteeksi  $C_{i+2}$ . Jos  $Y_j = L_2$ , polyominon  $P$  solua  $[0, 1]$  vastaavan solun keskipiste nimetään pisteeksi  $C_{i+1}$  ja solua  $[1, 1]$  vastaavan solun keskipiste pisteeksi  $C_{i+2}$ . Jos  $Y_j = L_3$ , niin silloin polyominon  $P$  solua  $[0, 1]$  vastaavan solun keskipiste nimetään pisteeksi  $C_{i+1}$ , ja jos  $Y_j = L_4$ , niin silloin polyominon  $P$  solua  $[1, 0]$  vastaavan solun keskipiste nimetään pisteeksi  $C_{i+1}$ . Näin toimien polyominon  $P_n$  jokainen solu tulee lopulta nimetyksi, sillä jos solu  $[-1, 1]$  tai  $[1, 1]$  kuuluu polyominoon  $P$ , eikä sitä vastaavan polyominon  $P_n$  solun keskipistettä nimetty, niin se tulee nimetyksi tämän menetelmän myöhemmässä vaiheessa.

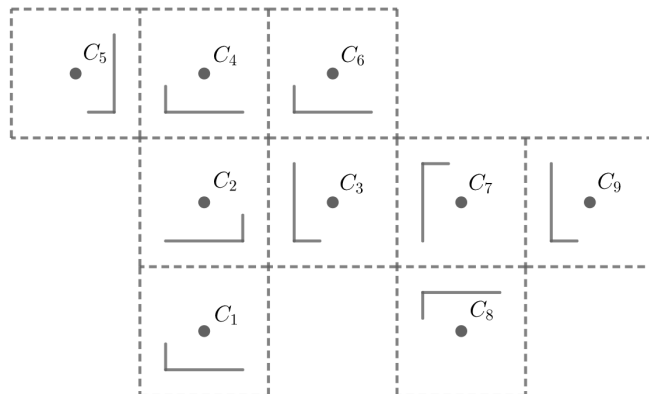
Olkoon vielä  $P'$  polyominon  $Y_j$  se L-kongruentti polyomino, jossa polyominon  $Y_j$  solua  $[0, 0]_1$  vastaa solu  $[C_j]_u$ . Asetetaan polyominossa  $P_n$  niille soluille, jotka kuuluvat polyominoon  $P'$  ja joiden L-kontekstia ei ole vielä asetettu, sama L-konteksti kuin niille on polyominossa  $P'$  asetettu.

Kun edelliset vaiheet on suoritettu jokaiselle nimetylle pisteelle, niin polyominoon  $P_n$  saadaan liitetty joukon  $L$  polyominoista koostuva jono  $Y = (Y_i)_{i=1}^n$ , jonka paino on  $x^n y^n$ . Nimittäin jokainen polyominon  $P_n$  solu, paitsi solu  $[0, 0]$ , vastaa tarkalleen yhdessä jonon  $Y$  polyominossa jotakin muuta solua kuin  $[0, 0]_1$  tai  $[0, -1]$ .

Lisäksi jono  $Y$  koostuu polyominoista, joissa jokaisessa on tarkalleen yksi  $x$ -akselin alapuolella oleva solu.

Edellinen menetelmä liittyy jokaiseen normaalikohdassa olevaan  $n$ -ominoon eri joukon  $L$  polyominoista muodostetun  $x^n y^n$  painoisen jonon. Nimittäin jos jotkin normaalikohdassa olevat  $n$ -ominot johtaisivat edellä esitetyssä menetelmässä samaan jonoon, niin silloin aina yhdessä menetelmän vaiheessa  $L$ -kongruentin polyominon  $P$  origossa olevaa solua vastaavan solun ympäriltä nimettäisiin aina samat solut ja asetettaisiin niille samat  $L$ -kontekstit. Jos solua  $[-1, 1]$  tai  $[1, 1]$  vastaava polyominoon  $P_n$  kuuluva solu jäisi nimeämättä, niin se nimettäisiin molemmissa polyominoissa samalla tavalla myöhemmässä menetelmän vaiheessa. Lisäksi voisi olla, että jossakin menetelmän vaiheessa  $L$ -ominoa  $L_1(0, 0)$  vastaavien solujen kuuluminen samaa jonoa vastaaviin polyominoihin olisi erilainen, mutta näiden solujen kuuluminen kyseisiin polyominoihin tiedettäisiin jo menetelmän edellisten vaiheiden perusteella. Niinpä siis samaan jonoon johtavien polyominojen on oltava samoja polyominoja.  $\square$

**Esimerkki 15.** Kuvassa 14 on esitetty katkoviivoin eräs normaalikohdassa oleva 9-omino. Kuvassa olevien solujen keskipisteet on nimetty ja solujen kontekstit on asetettu suorittamalla lauseen 23 todistuksen menetelmää kuvassa olevalle 9-ominoille. Todistuksen menetelmä liittyy kuvan 9-ominoon joukon  $L$  polyominoista muodostetun jonon  $(L_2, L_2, L_1, L_5, L_5, L_5, L_1, L_5, L_5)$ .



Kuva 14: Eräs 9-omino, jonka solujen keskipisteet on nimetty ja  $L$ -kontekstit asetettu lauseen 23 todistuksen menetelmän avulla.

**Seuraus 5.** *Klarnerin vakio*  $\lambda < 4,83$ .

Paras tähän mennessä osoitettu yläraja Klarnerin vakiolle on  $\lambda < 4,5252$ , jonka Barequet ja Shalah osoittivat artikkelissa [18]. Heidän menetelmänsä ylärajan parantamiseksi pohjautuu Klarnerin ja Rivestin artikkelissa [17] esittämään menetelmään, jossa polyominojen joukkoa  $L$  laajennetaan niin, että seurauksen 5 ylärajaa saadaan algoritmisesti tietokoneen laskentavoimaa hyödyntäen edelleen parannettua.

## 6 Polyominojen lukumääriä generoivat funktiot

Joillekin normaalikohdassa olevien polyominojen osajoukoille voidaan antaa generoiva funktio, jonka muuttujien potenssien kertoimet kertovat tietyntyyppisten osajoukossa olevien polyominojen lukumäärän. Yksi tällainen generoiva funktio voidaan antaa esimerkiksi rivikonvekseille polyominoille.

Tiedämme jo nimittäin lauseen 17 perusteella, että lukujonon  $(b(n))_{n=0}^{\infty}$  jäsenet toteuttavat rekursioyhtälön (13) kaikilla  $n \geq 5$ . Koska tunnemme myös lukujonon  $(b(n))_{n=0}^{\infty}$  ensimmäisten viiden jäsenen arvot, lause 2 antaa suoraan generoivalle funktiolle  $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)x^n$  esityksen kahden polynomin osamääränä.

**Seuraus 6.** *Generoiva funktio*

$$B(x) = \frac{x(1-x)^3}{1-5x+7x^2-4x^3}.$$

Ensimmäinen askel rivikonveksien polyominojen generoivan funktion suljetun esityksen muodostamisessa oli se, kun rivikonveksit polyominot hajotettiin soluista koostuviksi riveiksi. Tämän hajotelman avulla voitiin muodostaa ryhmä yhtälöitä, joiden käsittely johti lopulta edellisen seurauksen tulokseen.

Yleistikin polyominojen hajottaminen pienempiin osiin on hyvä lähestymistapa generoivan funktion suljetun esityksen muodostamiseksi. Sopivan hajotelman avulla saadaan muodostettua ryhmä yhtälöitä, jotka ratkaisemalla generoiva funktio voidaan antaa suljetussa muodossa funktiona.

Tarkastellaan tätä menetelmää tarkemmin suunnatuille polyominoille, joille generoivan funktion suljettuun esitykseen johtava hajotelma pienemmistä kappaleista koostuvina osina tunnetaan. Esitettävä hajotelma ja suunnattuihin polyominoihin liittyvät tulokset perustuvat artikkeliin [19]. Muodostetaan ensin bijektiivinen kuvaus suunnattujen polyominojen joukolta eräälle toiselle joukolle, joiden hajotelma pienempinä osina on helpompi kuvailla.

**Määritelmä 24.** Olkoon  $A$  epätyhjä ja äärellinen joukko suorakulmioita, joiden sivut ovat koordinaatiston akselien suuntaiset ja joissa  $x$ -akselin suuntaisten sivujen pituus on  $a$  yksikköä ja  $y$ -akselin suuntaisten sivujen pituus on  $b$  yksikköä. Joukko  $A$  on *pino*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

- i. Jokaisen joukkoon  $A$  kuuluvan suorakulmion keskipisteen koordinaatit ovat muotoa  $(a(x + x_y), by)$ , jossa  $x$  ja  $y$  ovat kokonaislukuja ja

$$x_y = \begin{cases} 0, & \text{jos } y \equiv 0 \pmod{2} \text{ ja} \\ \frac{1}{2}, & \text{jos } y \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

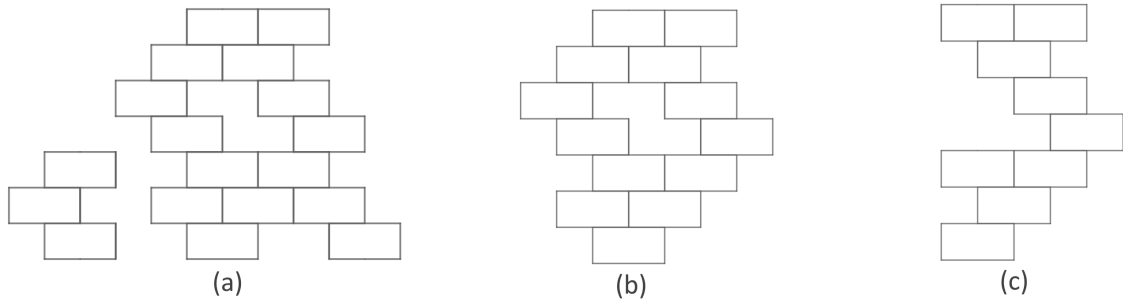
- ii. Olkoon piste  $C$  jonkin joukkoon  $A$  kuuluvan suorakulmion keskipiste. Jos joukossa  $A$  on suorakulmio, jonka keskipisteen  $y$ -koordinaatti on pienempi kuin pisteen  $C$   $y$ -koordinaatti, niin joukossa  $A$  on myös suorakulmio, jonka keskipisteelle  $C'$  on voimassa  $C - C' = (\pm \frac{a}{2}, b)$ .

Pino on siis tason kuvio, joka koostuu päällekkäin olevista tietyin kokoisista suorakulmioista. Pino voidaan muodostaa pudottamalla suorakulmioita päällekkäin tietylle sovitulle perustasolle, jota alemmas suorakulmiot eivät voi enää pudota. Jokainen suorakulmio on pudotettava niin, että se putoaa joko perustasolle tai puolittain jonkin jo pudotetun suorakulmion päälle.

Pinossa olevaa suorakulmiota sanotaan *minimaaliseksi*, jos sen alapuolella ei ole yhtään pinoon kuuluvaa suorakulmiota. Minimaalet suorakulmiot lepäävät siis pinon perustasolla. Koska pinot ovat epätyhjiä ja äärellisiä joukkoja, jokaisessa pinossa on aina vähintään yksi minimaalinen suorakulmio.

Pinoa, jossa on tarkalleen yksi minimaalinen suorakulmio, kutsutaan *pyramidiksi* ja pyramidia, jonka minimaalisen suorakulmion vasemmalla puolella ei ole yhtään pinoon kuuluvaa suorakulmiota, kutsutaan *puolipyramidiksi*. Lisäksi pinon sanotaan olevan *normaalikohdassa*, jos yksi sen minimaalisten suorakulmioiden keskipisteistä on origossa ja muiden pinossa olevien minimaalisten suorakulmioiden keskipisteiden  $x$ -koordinaatti on positiivinen.

**Esimerkki 16.** Kuvassa 15 on esitetty kolme erilaista pinoa. Kuvio (a) on kolme minimaalista suorakulmiota sisältävä pino, kuvio (b) on 13 suorakulmiosta koostuva pyramidi ja kuvio (c) on 9 suorakulmiosta koostuva puolipyramidi.



Kuva 15: Kolme erilaista pinoa.

Osoitetaan seuraavaksi, että suunnattujen  $n$ -ominojen joukolta on bijektio normaalikohdassa olevien tietyinkokoisista suorakulmioista koostuvien ja  $n$  suorakulmiota sisältävien pyramidien joukolle. Tällöin voimme ekvivalentisti tutkia suunnattujen  $n$ -ominojen lukumäärän sijaan normaalikohdassa olevien  $n$  suorakulmiota sisältävien pyramidien lukumäärää.

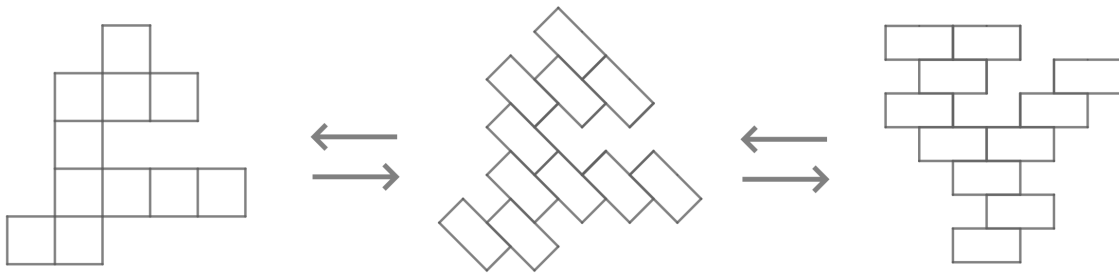
**Lause 24.** *Suunnattuja  $n$ -ominoja on yhtä monta kuin normaalikohdassa olevia  $\sqrt{2}$  levyisistä ja  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  korkuisista suorakulmioista koostuvia ja  $n$  suorakulmiota sisältäviä pyramideja.*

*Todistus.* Olkoon  $P_n$  jokin suunnattu  $n$ -omino. Skaalataan polyominon  $P_n$  jokaisen solun  $x$ -akselin suuntaisia sivuja kertoimella  $\sqrt{2}$  ja  $y$ -akselin suuntaisia sivuja kertoimella  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Lisäksi kierretään jokaista solua oman keskipisteensä ympäri  $45^\circ$  myötäpäivään. Kierretään tämän jälkeen koko polyominoa  $P_n$  origon suhteen  $45^\circ$  vastapäivään. Näin saatu kuvio on  $\sqrt{2}$  levyisistä ja  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  korkuisista suorakulmioista koostuva normaalikohdassa oleva pyramidi.



Koska edellä tehdyt kierrot ja skaalaukset ovat kääntyviä kuvauksia, jokainen normaalikohdassa oleva  $n$  suorakulmiota sisältävä pyramidi voidaan myös muuttaa kierroilla ja skaalauksilla suunnatuksi  $n$ -ominoksi. Suunnattujen  $n$ -ominon joukosta on siis bijektio  $\sqrt{2}$  levyisistä ja  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  korkuisista suorakulmioista koostuvien ja  $n$  suorakulmiota sisältävien normaalikohdassa olevien pyramidien joukolle, ja näin ollen väite seuraa.  $\square$

**Esimerkki 17.** Kuvassa 16 on esitetty lauseen 24 vaiheet, jolla eräs suunnattu 11-omino voidaan muuttaa 11 suorakulmiota sisältäväksi pyramidiksi. Ensin solut skaalataan oikeankokoisiksi ja kierretään oikeaan asentoon suhteessa toisiinsa ja sitten koko polyomino kierretään oikeaan asentoon origon suhteen.



Kuva 16: Suunnatun  $n$ -ominon esittäminen pyramidina ja päinvastoin.

Edellisen lauseen perusteella generoiva funktio  $D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n$  generoi suunnattujen  $n$ -ominon lukumäärän  $d(n)$  lisäksi myös  $n$  suorakulmiota sisältävien ja tietynkokoisista suorakulmioista koostuvien normaalikohdassa olevien pyramidien lukumäärät. Tutkitaan nyt suunnattujen polyominojen sijaan, miten pyramidit voidaan hajottaa pienemmiksi osiksi.

Pyramidi voidaan hajottaa kahdeksi pyramidiksi nostamalla jotakin siinä olevaa suorakulmiota ylöspäin alkuperäistä pyramidia korkeammalle. Nostettaessa suorakulmiota, se ei voi läpäistä mitään kohtaamaansa toista suorakulmiota. Näin ollen nostettava suorakulmio alkaa keräämään mukaansa muita alkuperäisen pyramidin suorakulmioita ja pyramidi saadaan ositettua kahdeksi pienemmäksi pyramidiksi. Kahdesta pyramidista voidaan muodostaa myös yksi isompi pyramidi, pudottamalla toinen pyramidi toisen päälle niin, että pudotettavan pyramidin suorakulmiot jäävät lepäämään aina ensimmäisen kohtaamansa suorakulmion päälle.

Sovitaan, että jatkossa pyramideilla tarkoitetaan ainoastaan kaikkia  $\sqrt{2}$  levyisistä ja  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  korkuisista suorakulmioista koostuvia normaalikohdassa olevia pyramideja. Kun pyramidit hajotetaan nyt tietyllä tavalla pienimmiksi pyramideiksi, saadaan muodostettua yhtälöitä, jotka johtavat generoivan funktion  $D(x)$  suljettuun esitykseen funktiona.

Tutkitaan ensin, miten pyramidit voidaan hajottaa pienemmäksi pyramidiksi ja puolipyramidiksi. Olkoon sitä varten  $h(n)$  normaalikohdassa olevien  $n$  suorakulmiota sisältävien puolipyramidien lukumäärä ja  $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)x^n$  lukujonon  $(h(n))_{n=0}^{\infty}$  generoiva funktio.

**Lemma 11.** *Generoiville funktioille  $H(x)$  ja  $D(x)$  on voimassa*

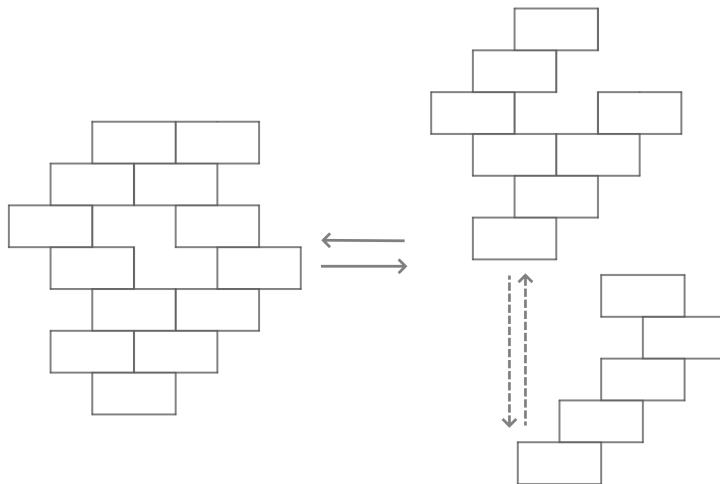
$$D(x) = H(x)(1 + D(x)). \quad (15)$$

*Todistus.* Olkoon  $P$  jokin normaalikohdassa oleva pyramidi.  $P$  on nyt joko puolipyramidi tai sitten  $P$  on pyramidi, joka voidaan osittaa puolipyramidiksi ja pyramidiksi nostamalla sen alinta  $y$ -akselin vasemmalla puolella olevaa suorakulmiota ylöspäin alkuperäistä pyramidia korkeammalle. Toisaalta, pudottamalla mikä tahansa pyramidi  $y$ -akselin vasenta reunaa pitkin minkä tahansa puolipyramidin päälle saadaan jokin normaalikohdassa oleva pyramidi. Edellisen havainnon perusteella generoiville funktioille  $D(x)$  ja  $H(x)$  on siis voimassa yhtälö

$$D(x) = H(x) + H(x)D(x),$$

josta ottamalla  $H(x)$  yhteiseksi tekijäksi saadaan väite. □

**Esimerkki 18.** Kuvassa 17 on hajotettu eräs normaalikohdassa oleva pyramidi puolipyramidiksi ja pienemmäksi pyramidiksi nostamalla alinta  $y$ -akselin vasemmalla puolella olevaa suorakulmiota ylöspäin. Alkuperäinen pyramidi saadaan takaisin, kun erotettu pyramidi pudotetaan takaisin erotetun puolipyramidin päälle.



Kuva 17: Pyramidin hajotelma puolipyramidiksi ja pyramidiksi.

Tutkitaan sitten, kuinka jokainen puolipyramidi saadaan edelleen hajotettu pienemmiksi puolipyramideiksi. Näin generoivalle funktiolle  $H(x)$  saadaan yhtälö, joka edellistä lemmaa hyödyntäen johtaa generoivan funktion  $D(x)$  suljettuun esitykseen funktiona.

**Lause 25.** *Generoiva funktio*

$$D(x) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1+x}{1-3x}} - 1 \right).$$

*Todistus.* Olkoon  $P$  jokin normaalikohdassa oleva puolipyramidi.  $P$  on nyt joko yhdestä suorakulmiosta koostuva puolipyramidi tai puolipyramidi, joka voidaan osittaa yhdeksi suorakulmioksi ja yhdeksi pyramidiksi. Jos puolipyramidi  $P$  on jälkimmäistä muotoa, niin puolipyramidista  $P$  ositettu pyramidi on edelleen joko puolipyramidi tai sitten se voidaan osittaa kahdeksi puolipyramidiksi nostamalla sen alinta  $y$ -akselilla olevaa suorakulmiota alkuperäisen pyramidin yläpuolelle.

Toisaalta, kun mikä tahansa puolipyramidi pudotetaan  $y$ -akselin oikeaa reunaa pitkin yhdestä suorakulmiosta koostuvan puolipyramidin päälle, saadaan aina jokin isompi puolipyramidi. Jos näin saadun puolipyramidin päälle pudotetaan vielä mikä tahansa puolipyramidi  $y$ -akselia pitkin, saadaan taas jokin isompi puolipyramidi.

Edellisten havaintojen perusteella generoivalle funktiolle  $H(x)$  on siis voimassa yhtälö

$$H(x) = x + xH(x) + xH^2(x).$$

Kun edellinen yhtälö kerrotaan puolittain lausekkeella  $(1 + D(x))^2$  ja käytetään yhtälöä (15), saadaan yhtälö

$$D(x)(1 + D(x)) = x(1 + D(x))^2 + xD(x)(1 + D(x)) + xD^2(x).$$

Avaamalla edellisen yhtälön sulut ja siirtämällä kaikki termit yhtälön oikealle puolelle saadaan toisen asteen yhtälö

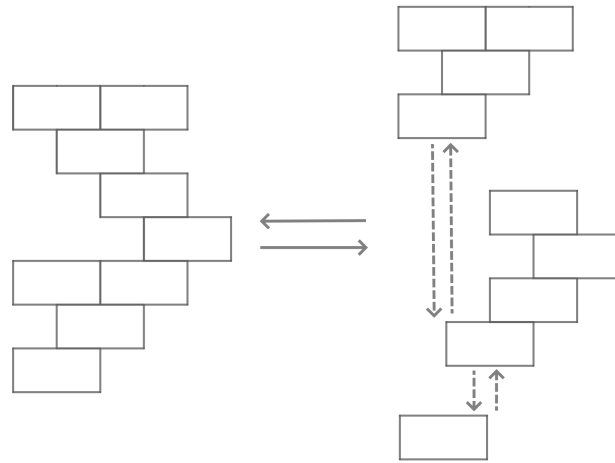
$$(3x - 1)D^2(x) + (3x - 1)D(x) + x = 0.$$

Väite saadaan ratkaisemalla tästä yhtälöstä toisen asteen ratkaisukaavalla generoiva funktio  $D(x)$ . □

**Esimerkki 19.** Kuvassa 18 on hajotettu eräs normaalikohdassa oleva puolipyramidi yhdeksi suorakulmioksi ja kahdeksi puolipyramidiksi nostamalla ensin alinta  $y$ -akselin oikealla puolella olevaa suorakulmiota ylöspäin ja sen jälkeen nostamalla näin saadun pyramidin alinta  $y$ -akselilla olevaa suorakulmiota ylöspäin. Alkuperäinen puolipyramidi saadaan takaisin, kun erotetut puolipyramidit pudotetaan samoista kohdista takaisin yhden suorakulmion päälle.

Suunnattujen  $n$ -ominojen lukumäärä saadaan nyt siis kehittämällä generoivalle funktiolle  $D(x)$  edellisessä seurauksessa johdettu funktio sarjaksi. Seurauksen funktio voitaisiin muuttaa sarjaksi myös reaalityyppisille yleistetyin binomikertoimen ja binomikaavan avulla. Näin saataisiin solujen lukumäärästä riippuva kaava suunnattujen  $n$ -ominojen lukumäärälle.

Myös konvekseille polyominoille, jotka ovat siis samanaikaisesti sekä rivi- että sarakekonvekseja, voitaisiin johtaa sopivan hajotelman avulla generoivan funktion suljettu esitys. Prosessi on samantapainen kuin suunnatuille polyominoille, mutta pidempi. Konveksien polyominojen tapauksessa nimittäin hajotelma jakautuu useampaan eri tapaukseen riippuen siitä, minkälaisia konvekseja polyominoja tarkastellaan. Konveksien polyominojen generoivan funktion suljettu esitys on johdettu artikkelissa [19].



Kuva 18: Puolipyramidin hajotelma suorakulmioksi ja kahdeksi puolipyramidiksi.

## Viitteet

- [1] S. W. Golomb, *Polyominoes (2nd edition)*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.
- [2] R. A. Brualdi, *Introductory Combinatorics, Fifth edition*. Pearson, Upper Saddle River, New Jersey, 2009.
- [3] G. Barequet, S. W. Golomb ja D. A. Klarner, *Polyominoes*. Kirjassa J. E. Goodman, J. O'Rourke, ja C. D. Tóth (eds.), *Handbook of Discrete and Computational Geometry (3rd edition)*. CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, 2017, 359-380.
- [4] D.A. Klarner, *Cell growth problems*. Canadian Journal of Mathematics, 1967, 19:851–863.
- [5] D. Dhar, *Equivalence of the two-dimensional directed-site animal problem to Baxter's hard square lattice gas model*. Physical Review Letters, 1982, 49:959–962.
- [6] P. A. MacMahon, *XVII. Memoir on the theory of the compositions of numbers*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1893, 184:835–901.
- [7] D.H. Redelmeier, *Counting polyominoes: Yet another attack*. Discrete Mathematics, 1981, 36:191–203.
- [8] I. Jensen, *Enumerations of lattice animals and trees*. Journal of Statistical Physics, 2001, 102:865–881.
- [9] I. Jensen, *Counting polyominoes: A parallel implementation for cluster computing*. Kirjassa P. M. A. Sloot, D. Abramson, A. V. Bogdanov, J. J. Dongarra, A. Y. Zomaya ja Y. E. Gorbachev (eds.), *Computational Science - ICCS 2003, Part III*. Springer, Berlin, 2003, LNCS2659:203–212.
- [10] M. Eden, *A two-dimensional growth process*. Kirjassa J. Neyman (ed.), *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume IV: Biology and Problems of Health*. University Of California Press, Berkeley, 1961, 223–239.
- [11] R. Herbert, *A Remark on Stirling's Formula*. The American Mathematical Monthly, 1955, 62:26–29.
- [12] M. Fekete, *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten*. Mathematische Zeitschrift, 1923, 17:228–249.
- [13] G. Pólya, ja G. Szegő: *Problems and theorems in analysis, volume 1*. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [14] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.

- [15] D. A. Klarner, *Some results concerning polyominoes*. The Fibonacci Quarterly, 1965, 3:9-20.
- [16] G. Barequet, G. Rote ja M. Shalah,  $\lambda > 4$ : *An improved lower bound on the growth constant of polyominoes*. Communications of the ACM, 2016, 59:88–95.
- [17] D.A. Klarner ja R.L. Rivest, *A procedure for improving the upper bound for the number of  $n$ -ominoes*. Canadian Journal of Mathematics, 1973, 25:585–602.
- [18] G. Barequet ja M. Shalah, *Improved upper bounds on the growth constants of polyominoes and polycubes*. Kirjassa Y. Kohayakawa, F.K. Miyazawa (eds.), *LATIN 2020: Theoretical Informatics*. Springer, Cham, 2021, LNCS12118:532-545.
- [19] M. Bousquet-Mélou, *Polyominoes and polygons*. Contemporary Mathematics, 1994, 178:55–70.