TURUN YLIOPISTO

Differentiaaliyhtälöiden alkeet

Meri Mattila

Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2021

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

MATTILA, MERI: Differentiaaliyhtälöiden alkeet
Pro gradu -tutkielma, 33 s.
Matematiikka
Toukokuu 2021

Tässä matematiikan opettajalinjan Pro gradu -tutkielmassa käsitellään differentiaaliyhtälöitä. Tutkielmaa voidaan hyödyntää oppimateriaalina esimerkiksi lukion pitkän matematiikan valinnaisella kurssilla. Lukijalta odotetaan lukion pitkän matematiikan oppimäärän hallintaa.

Tutkielmassa tutustutaan differentiaaliyhtälön käsitteeseen ja opetellaan ratkaisemaan separoituva differentiaaliyhtälö erottamalla muuttujat. Lisäksi esitellään 1. ja 2. kertaluvun lineaarinen ja vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö sekä ratkaisumenetelmät näille. Tutkielmassa tutustutaan myös vakion variointiin, joka on ratkaisumenetelmä lineaarisille 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöille, jotka eivät ole vakiokertoimisia. Lukuihin on koottu mekaanisia ja soveltavia esimerkkejä sekä tehtäviä aihealueittain.

Asiasanat: differentiaaliyhtälö, separoituva differentiaaliyhtälö, vakiokertoiminen ja lineaarinen differentiaaliyhtälö

Sisältö

1 Johdanto

Differentiaaliyhtälöt kuvaavat, miten yhden asian muuttuminen vaikuttaa toisen asian muuttumiseen. Kun havainnoimme ympärillämme olevaa luontoa, havainnoimme erilaisia muutoksia ja niiden vaikutuksia toisiinsa. Differentiaaliyhtälöt ovat keskeinen matematiikan tarjoama työkalu, jonka avulla voimme luoda matemaattisen mallin näille erilaisille muutoksille. Mallien avulla voimme ennustaa erilaisia ilmiöitä tietyillä ajanhetkillä, kuten vaikka hiukkasen paikkaa hiukkaskiihdyttimessä. Luonnon ilmiöt ovat monimutkaisia ja riippuvaisia monesta muuttujasta, joten ei ehkä ole yllättävää, että differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun ei aina ole valmista ratkaisumallia. Esimerkiksi sääennusteet perustuvat sellaisiin monta muuttujaa huomioiviin differentiaaliyhtälöihin, joiden ratkaisemiseen tarvitaan supertietokoneiden tehoa. Kuitenkin jo yksinkertaisetkin differentiaaliyhtälöt ovat tärkeässä roolissa monella alalla käytännön sovelluksissa. Lääketieteessä niiden avulla voidaan ennustaa kasvaimen tilavuutta eri ajanhetkillä ja toisaalta arvioida viruksen leviämistä väestössä. Monet fysiikan lait, joita insinöörit tarvitsevat jatkuvasti esimerkiksi rakennustekniikassa, voidaan johtaa differentiaaliyhtälöiden avulla.

Tämä tutkielma on kirjoitettu differentiaaliyhtälöihin tutustuvalle. Sisältö ja rakenne on suunniteltu niin, että se sopisi esimerkiksi lukion syventävän kurssin materiaaliksi. Lukiokurssina kyseinen aihe ei ole uusi ajatus, sillä differentiaaliyhtälöt kuuluivat lukion pitkän matematiikan oppimäärään vuoteen 2003, jonka jälkeen kurssin pitämistä on jatkettu koulukohtaisena esimerkiksi monissa matematiikkapainotteisissa lukioissa. Koska kurssi ei kuulu enää opetussuunnitelmaan, ei tarkoitukseen sopivia lukion oppikirjoja myöskään tehdä.

Differentiaaliyhtälöt ovat oiva lisä lukioiden kurssivalikoimaan, sillä uuden aiheen nojalla tulee kerrattua laajasti matematiikan pitkän oppimäärän aiheita, kuten derivointia ja integrointia, trigonometrisiä funktioita, imaginaarilukuja sekä esimerkiksi logaritmien ja potenssien laskusääntöjen soveltamista. Lisäksi aihe valmistaa opiskelijoita monipuolisesti erilaisiin jatkokoulutuksiin, sillä esimerkiksi yliopistossa luonnontieteiden parissa ja ammattikorkeakoulussa erityisesti insinöörilinjoilla aihe tulee vastaan. Jopa taloustieteessä ja lääketieteessä differentiaaliyhtälöt ovat merkittävä työkalu. Vuoden 2019 lukion opetussuunnitelmassa matematiikan opetuksen yleisiä tavoitteita ovat esimerkiksi matemaattisen pohjan rakentuminen opiskelijan jatko-opinnoille, sekä matematiikan välttämättömyyden eri aloilla välittyminen opiskelijalle [8].

Sisältö on valittu vastaamaan sellaisia aiheita, jotka toimivat differentiaaliyhtälöiden laajemmankin opiskelun pohjana ja näin helpottavat differentiaaliyhtälöihin syventymistä mahdollisesti jatkokoulutuksessa. Tätä tutkielmaa on kirjoitusvaiheessa hyödynnetty opetuksen tukena Turun ammattikorkeakoulussa ja muokkauksia on tehty myös opiskelijoiden kokemusten pohjalta.

Tutkielmassa tutustutaan aluksi yksinkertaisiin differentiaaliyhtälöihin, jotka ratkeavat käytännössä integroimalla. Tämä aihealue sopii hyvin integraalilaskennan kertaamiseen ja vahvistaa samalla ymmärrystä differentiaaliyhtälön käsitteestä. Pääpaino tutkielmassa on 1. ja 2. kertaluvun vakiokertoimisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmissä. Lisäksi luvussa 3 esitellään vakion variointi eli eräs ratkaisumalli sellaisille 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöille, jotka eivät ole vakiokertoimisia.

Jos esimerkiksi lukiokurssilla aikataulu käy liian kiireiseksi, on tämän aiheen pienempi painottaminen yksi luonteva tapa karsia kurssin sisältöä. Tehtävät on valittu erityisesti niin, että lukio-opiskelija saisi monipuolisesti vahvistettua matematiikan taitojaan esimerkiksi trigonometristen funktioiden parissa.

2 Differentiaaliyhtälöt

Koulumaailmassa on yläkoulusta saakka syvennytty sellaisiin algebrallisiin yhtälöihin, joiden ratkaisulla tarkoitetaan kaikkia niitä arvoja (yleensä lukuja), jotka sijoitettuna tuntemattoman paikalle toteuttavat annetun yhtälön. Esimerkiksi yhtälön

$$2x^2 = 8$$

ratkaisut ovat 2 ja -2, sillä yhtälön oikea ja vasen puoli saavat saman arvon, kun 2 tai -2 sijoitetaan muuttujan x paikalle. Joskus yhtälöille on olemassa yksi tai enemmän ratkaisuja, mutta on myös mahdollista, että ratkaisuja ei ole lainkaan olemassa.

Differentiaaliyhtälöt ovat perusajatukseltaan hyvin vastaavia kuin edellä esitellyt yhtälöt, mutta muuttujan arvon sijaan differentiaaliyhtälöissä etsitään *funktiota*, joka toteuttaisi yhtälön. Ratkaisujen lukumäärä differentiaaliyhtälöllekin voi olla yksi, enemmän tai ei lainkaan, riippuen siitä kuinka monta sellaista funktiota $y = y(x)$ on olemassa, jotka toteuttavat annetun differentiaaliyhtälön. Differentiaaliyhtälöillä onkin usein ääretön määrä ratkaisuja.

Usein funktiota $y(x)$ merkitään yksinkertaisemmin merkinnällä y ja sen derivaattaa merkitään pilkkunotaatiolla y'. Pilkkunotaatiota voidaan käyttää kolmanteen derivaattaan asti (y', y'', y'''), jonka jälkeen käytetään merkintätapana numeroa. Esimerkiksi $y^{(4)}$ merkitsee siis neljä kertaa derivoitua funktiota y. Tätä lukua tai pilkkujen lukumäärää kutsutaan myös derivaatan asteeksi. Differentiaaliyhtälön *kertaluvun* määrää funktion y korkeimman derivaatan aste. Differentiaaliyhtälöissä esiintyy aina tuntemattoman funktion y jonkin asteinen derivaatta tai derivaattoja. Esimerkiksi

$$2y' + y'' = 3y$$

on differentiaaliyhtälö, jossa esiintyy funktio $y(x)$ sekä sen derivaattoja ja jonka ratkaisuja ovat sen toteuttavat funktiot $y(x)$. Kyseessä on 2. kertaluvun differentiaaliyhtälö, sillä funktion y korkein derivaatta on asteluvultaan kaksi.

Toisin kuin yhtälönratkaisussa johon olemme tottuneet, differentiaaliyhtälöjen ratkaisemiseksi ei ole yleispätevää menetelmää, vaan ratkaisu perustuu usein yhtälöiden muodon tunnistamiseen ja tietynlaisille yhtälöille ominaisten ratkaisumenetelmien tuntemiseen. Tässä tutkielmassa perehdytään erityisesti tietynmuotoisiin 1. ja 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöihin ja jo nämä differentiaaliyhtälöt ovat erittäin käyttökelpoisia sekä suuressa roolissa, kun halutaan mallintaa ympäröivän maailman ja yhteiskuntamme erilaisia ilmiöitä.

Tässä luvussa on erityisesti käytetty lähteitä [1], [2], [3], [5] sekä [9].

Pohdinta. Kokeile sijoittaa $y = e^x$ yllä annettuun differentiaaliyhtälöön. Mitä huomaat?
Pohdinta. Kokeile, keksitkö esimerkin differentiaaliyhtälöstä, jolla ei ole lainkaan ratkaisua.

2.1 Yksinkertaisia differentiaaliyhtälöitä

Tarkastellaan aluksi sellaisia *yksinkertaisia differentiaaliyhtälöitä*, jotka saadaan ratkaistua suoraan integroimalla. Nämä differentiaaliyhtälöt ovat muotoa

$$y' = u(x), y'' = u(x), y''' = u(x), ...,$$

eli funktion $y(x)$ jotakin kertalukua oleva derivaatta voidaan esittää muuttujan x lausekkeena $u(x)$. Tässä differentiaaliyhtälössä ei esiinny funktiota muodossa $y(x)$, minkä vuoksi tapausta kutsutaan yksinkertaiseksi.

Esimerkki 2.1 Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' + 2x - 1 = 0.$$

Ratkaisu. Kyseessä on yksinkertainen differentiaaliyhtälö, joka saadaan termejä siirtämällä muotoon $y' = u(x)$ eli

$$y' = -2x + 1.$$

Tästä nähdään, että käytännössä tehtävänä on etsiä sellaiset funktiot y, joiden derivaatta on $-2x + 1$. Differentiaaliyhtälö saadaan nyt ratkaistua derivaatan vastaoperaatiolla eli integroimalla yhtälön molemmat puolet:

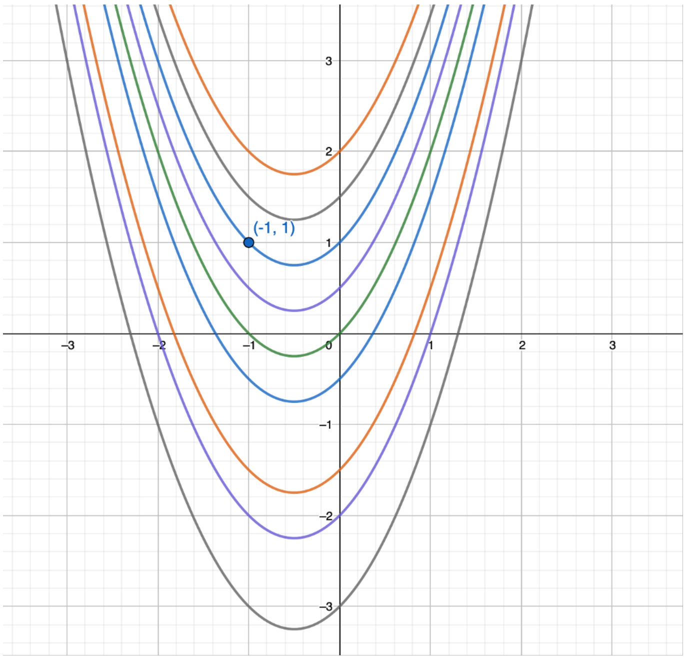
$$\begin{aligned} \int y' \; dx &= \int -2x + 1 \; dx \\ y &= -x^2 + x + C. \end{aligned}$$

Tarkistetaan ratkaisu vielä sijoittamalla (eli derivoimalla ratkaistu y):

$$\begin{aligned} y' &= -2x + 1 \\ D(-x^2 + x + C) &= -2x + 1. \end{aligned}$$

Koska integroimisvakio C voi saada mitä tahansa reaalilukuarvoja, on tällä differentiaaliyhtälöllä ääretön määrä ratkaisuja.

Kaikki mahdolliset funktiot $y = -x^2 + x + C$ muodostavat *ratkaisuparven*, joka on tämän differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu. Ratkaisuparvi muodostuu siis äärettömästä määrästä paraabeleja, joista osaa on havainnollistettu kuvassa 1.



Kuva 1. Ratkaisuparvi koostuu äärettömästä määrästä samanmuotoisia paraabeleja, joiden sijainnin y-akselin suunnassa määrittää integroimisvakio C.

Välillä differentiaaliyhtälötehtävissä on myös mukana alkuehto, joka määrää yksittäisratkaisuksi ratkaisuparvesta jonkin tietyn funktion (tässä tapauksessa paraabelin). Esimerkiksi alkuehdolla

$$y(-1) = 1 \text{ eli } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

saadaan erään ratkaisufunktion integroimisvakio C sijoittamalla:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + x + C \\ 4 &= -(-1)^2 + (-1) + C \\ C &= 6, \end{aligned}$$

jolloin $y = -x^2+x+6$ on tämän differentiaaliyhtälön alkuehdon mukainen yksittäisratkaisu. Alkuehdon mukainen piste on merkitty kuvaan 1, jolloin kuvasta nähdään mikä paraabeli tässä yksittäisratkaisussa on kyseessä.

Tällöin siis yleinen ratkaisu on $y = -x^2 + x + C$ ja alkuehdon mukainen yksittäisratkaisu on $y = -x^2 + x + 6$.

Tehtävä 2.2 Ratkaise differentiaaliyhtälö ja määritä alkuehdon mukainen yksittäisratkaisu.

a) $3xy' = 1$, kun $y(2) = -1$

b) $3y' + 18x = 9x^2 + 3$, kun $y(-2) = 0$

c) $y'' = 0$, kun $y(7) = 2$ ja $y'(4) = \frac{1}{2}$

d) $y'' = \cos(x)$, kun $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = 0$

Tehtävä 2.3 Liikennevaloihin ajavan Teslan nopeus $v(t)$ noudattaa yhtälöä $v(t) = t^2 + 2t + 1$. Hetkellä $t = 1$ Tesla on kohdassa $s = 2$.

a) Määritä matkan lauseke $s(t)$

b) Laske Teslan kulkema matka ajanhetkien $t = 2$ ja $t = 5$ välillä.

Muista, että nopeus voidaan ilmaista matkan $s(t)$ derivaattana.

2.2 Separoituva differentiaaliyhtälö

Muuttujien erottaminen eli *separoiminen* on yksi menetelmä, jolla saadaan tietynmuotoisia 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöjä ratkaistua. Esimerkiksi differentiaaliyhtälölle

$$y' = 2xy$$

ei ole mahdollista löytää ratkaisuja suoraan integroimalla, sillä derivaattafunktiota y' ei voida ilmoittaa ainoastaan muuttujan x lausekkeena. Tämän kaltainen yhtälö saadaan kuitenkin ratkaistua separoimalla. Separoiminen muodostaa osaltaan pohjan 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöiden ratkaisulle.

Differentiaaliyhtälö on *separoituva*, jos se voidaan esittää muodossa

$$y' = u(x)v(y).$$

Tässä funktio $u(x)$ riippuu vain muuttujasta x ja funktio $v(y)$ puolestaan muuttujasta y. Tämä yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{d}{dx}V(y(x)) = \frac{d}{dx}U(x),$$

kun funktion $u(x)$ integraalifunktio on $U(x) = \int u(x)dx$ ja funktiolle $v(y)$ on voimassa $V(y) = \int \frac{1}{v(y)}dy$. Koska funktioiden $V(y(x))$ ja $U(x)$ derivaatat ovat yhtäsuuret, niin on voimassa

$$V(y(x)) = U(x) + C,$$

jossa C on vakio.

Käytännössä separoituvat differentiaaliyhtälöt ratkaistaan käyttämällä derivaattafunktiolle *Leibnizin merkintää* eli

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Yhtälön muuttujaa y sisältävät termit sekä muuttujaa x sisältävät termit erotellaan omille puolilleen. Tämän jälkeen voidaan integroida yhtälö puolittain muuttujiensa suhteen.

Esimerkki 2.4 Ratkaise erottamalla muuttujat

$$y' = \frac{x^2}{y}.$$

Ratkaisu. Merkitään $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}.$$

Erotetaan muuttujia x ja muuttujia y sisältävät termit eri puolille yhtälöä.

$$y \cdot dy = x^2 \cdot dx.$$

Nyt voidaan integroida yhtälön molemmat puolet:

$$\int y \; dy = \int x^2 \; dx.$$

Tässä esimerkissä näytetään yksityiskohtaisesti, miten molempien puolien integroimisvakiot C_1 ja C_2 saadaan lopulta yhdistettyä yhdeksi vakioksi C. Yleensä integroinnin jälkeen merkitään suoraan yhteinen integroimisvakio yhtälön oikealle puolelle ja jatkossa käytetään tätä tapaa.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}y^2 + C_1 &= \frac{1}{3}x^3 + C_2 \\
\frac{1}{2}y^2 &= \frac{1}{3}x^3 + C_2 - C_1 \qquad\qquad | \cdot 2 \\
y^2 &= \frac{2}{3}x^3 + 2 \cdot (C_2 - C_1)
\end{aligned}$$

Termi $2 \cdot (C_2 - C_1)$ sisältää pelkkiä vakioita, joten voidaan merkitä sitä yleisemmin vakiolla C. Lopullinen ratkaisu saadaan ottamalla neliöjuuri yhtälöstä puolittain, jolloin:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + C}.$$

Esimerkki 2.5 Ratkaise erottamalla muuttujat

$$y' - \cos(x)y = 0.$$

Ratkaisu. Merkitään $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x)y.$$

Erottamalla muuttujat saadaan

$$\frac{dy}{y} = \cos(x) \cdot dx,$$

jolloin voidaan integroida puolittain

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \cos(x)\ dx \\ \int \frac{1}{y}\ dy &= \int \cos(x)\ dx \\ \ln|y| &= \sin(x) + C_1. \end{aligned}$$

Tällöin saadaan logaritmien laskusääntöjen nojalla

$$y = \pm e^{\sin(x)+C_1}$$

ja potenssien laskusääntöjen mukaisesti voidaan merkitä:

$$y = \pm e^{\sin(x)} \cdot e^{C_1}.$$

Merkitään vakiota $\pm e^{C_1} = C$:

$$y = \pm e^{C_1} \cdot e^{\sin(x)} = Ce^{\sin(x)}.$$

Muuttujien erottamista eli separointia voidaan käyttää 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi silloin, kun differentiaaliyhtälö on mahdollista muuttaa tulo- tai osamäärämuotoon, esimerkiksi $u(x)y' = v(y)$ tai $y' = \dfrac{u(x)}{v(y)}$. Toisin sanoen jos muuttujia ei pystytä erottamaan yhtälöön omille puolilleen, ei menetelmän käyttö onnistu.

Tehtävä 2.6 Mitkä seuraavista yhtälöistä voidaan ratkaista separoimalla?

a) $\dfrac{dy}{dx} = y + x$

b) $3x = y'y$

c) $5x - x^3 = y'$

d) $y' = \dfrac{3}{x}$

e) $8x^2y = 3y' + 2y$

f) $y' = -y(\dfrac{1}{2} - y)$

Tehtävä 2.7 Ratkaise seuraavat yhtälöt separoimalla.

a) $y' = \dfrac{x}{y}$

b) $y' + 4xy^2 = 0$

c) $\sin(y)y' = 1$

d) $y' = y(3 - y)$

3 Lineaarinen 1. kertaluvun differentiaaliyhtälö

Tässä luvussa perehdytään 1. kertaluvun lineaarisiin differentiaaliyhtälöihin ja niiden ratkaisemiseen kolmivaiheisen mallin kautta. Tämä luku pohjautuu lähteisiin [2], [3], [6], [7] sekä [10].

Lineaarisen 1. kertaluvun differentiaaliyhtälön yleinen muoto on

$$y' + u(x)y = v(x).$$

Lineaarisuuden ehtona on, että funktiot y' ja y ovat ensimmäistä astetta, jolloin esimerkiksi termejä $y'y$ tai y^6 ei voi esiintyä. Kertaluku puolestaan määräytyy funktion y korkeimman derivaatan asteen mukaan, joten 1. kertaluvun tapauksessa funktio y on derivoitu kerran. Esimerkiksi differentiaaliyhtälöt

$$y' + 3xy = \frac{x^2}{2}, \quad xy' - x^3y = \cos(2x) \text{ ja } y' - \frac{y}{x^3} = 2x$$

ovat lineaarisia. Differentiaaliyhtälöt

$$y'y = \cos x, \quad y' - 3y^3 = 5x \text{ ja } y' = \frac{2x}{y}$$

puolestaan eivät ole lineaarisia. Jos 1. kertaluvun lineaarisen differentiaaliyhtälön termi $v(x) = 0$, sanotaan yhtälön olevan *homogeeninen.*

Tehtävä 3.1 Mitkä seuraavista ovat lineaarisia 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöitä?

a) $7y' + \sin(3x)y = 5x$

b) $y' = 3y^2 + e^x$

c) $y' - 2y = \dfrac{5}{y}$

d) $8y = 5y' - x^8$

e) $\dfrac{y'}{y^3} = 2x + 5$

f) $\dfrac{y'}{y} = 3$

Lineaarinen 1. kertaluvun differentiaaliyhtälö ratkaistaan seuraavien kolmen vaiheen kautta:

1) Ratkaistaan vastaava homogeeninen differentiaaliyhtälö $y_h(x)$.

2) Etsitään yksittäisratkaisu $y_0(x)$ esimerkiksi *yritteellä.*

3) Koko differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu saadaan summaamalla kaksi edellistä kohtaa, jolloin $y = y_h(x) + y_0(x)$.

Jotta tätä ratkaisumallia päästään hyödyntämään, syvennytään ensin tarkemmin vaiheisiin 1) ja 2). Lineaariselle ja homogeeniselle 1. kertaluvun yhtälölle voidaan johtaa separoimalla ratkaisukaava, jota käyttämällä vaiheen 1) suorittaminen helpottuu ja nopeutuu. Vaiheessa 2) pyritään yleensä yritteen avulla löytämään sellainen funktio $y_0(x)$, joka toteuttaisi annetun differentiaaliyhtälön. Yritteen muodostamiselle on eri keinoja riippuen alkuperäisen differentiaaliyhtälön muodosta. Näihin kahteen vaiheeseen syvennytään seuraavaksi omissa alaluvuissa ja luvussa 3.3 käydään läpi vielä yleisen ratkaisun malli kokonaisuudessaan.

3.1 Homogeeninen muoto ja ratkaisukaava

Kun halutaan ratkaista 1. kertaluvun lineaarisia differentiaaliyhtälöitä, aloitetaan aina ratkaisemalla ensin vastaava *homogeeninen* differentiaaliyhtälö. Näille differentiaaliyhtälöille voidaan myös separoimalla johtaa *ratkaisukaava*, jota hyödyntämällä ratkaiseminen usein nopeutuu huomattavasti.

1. kertaluvun lineaarinen homogeeninen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y' + u(x)y = 0.$$

Yhtälö on homogeeninen, sillä yleiseen muotoon verrattuna $v(x) = 0$, jolloin yhtälössä ei esiinny sellaista muuttujan x lauseketta, jota ei ole kerrottu funktiolla y.

Esimerkissä 2.5 ratkaistiin vastaavaa homogeenista muotoa oleva lineaarinen differentiaaliyhtälö separoimalla. Seuraavaksi johdetaan samaa menetelmää hyödyntäen *ratkaisukaava* muotoa $y' + u(x)y = 0$ oleville differentiaaliyhtälöille ja harjoitellaan näiden yhtälöiden ratkaisemista johdetun ratkaisukaavan avulla.

Ratkaisukaavan johtaminen separoimalla.

$$y' + u(x)y = 0$$

Sijoitetaan $y' = \dfrac{dy}{dx}$ ja erotetaan muuttujat:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -u(x)y \\ \frac{dy}{y} &= -u(x)dx. \end{aligned}$$

Integroidaan puolittain:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -u(x)dx.$$

Käytetään funktion $-u(x)$ integraalifunktiosta merkintää $-U(x)$:

$$\ln|y| = -U(x) + C_1.$$

Logaritmin määritelmän nojalla $|y| = e^{-U(x)+C_1}$, joten

$$y = \pm e^{-U(x)+C_1} = \pm e^{C_1} \cdot e^{-U(x)} = Ce^{-U(x)}.$$

Huomaa, että saadussa tuloksessa integraalifunktion $U(x) = \int u(x)dx$ integrointivakio C_1 on jo valmiiksi huomioitu ratkaisukaavan vakiossa C. Tällöin kaavaa käytettäessa funktion $U(x)$ paikalle sijoitetaan funktion $u(x)$ integraali **ilman** integroimisvakiota.

Lause 3.2 Lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön $y' + u(x)y = 0$ yleinen ratkaisukaava on

$$y = Ce^{-U(x)},$$

jossa $U(x)$ on funktion $u(x)$ integraalifunktio ilman integroimisvakiota.

Esimerkki 3.3 Ratkaise ratkaisukaavalla differentiaaliyhtälö

$$xy' - 3y = 0.$$

Ratkaisu. Jaetaan aluksi yhtälö muuttujalla x, jolloin huomataan kyseessä olevan 1. kertaluvun lineaarinen ja homogeeninen differentiaaliyhtälö eli muotoa $y' + u(x)y = 0$:

$$y' - \frac{3}{x}y = 0$$

Nyt voidaan hyödyntää ratkaisukaavaa $y = Ce^{-\int u(x)dx}$, jossa $u(x)$ on nyt $-\dfrac{3}{x}$. Tällöin

$$y = Ce^{-\int -\frac{3}{x}dx} = Ce^{3\int \frac{1}{x}dx} = Ce^{3\ln|x|} = Ce^{\ln|x^3|} = C|x^3| = Cx^3.$$

Tehtävä 3.4 Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt käyttäen ratkaisukaavaa.

a) $y' + 3y = 0$

b) $y' + 5xy = 0$

c) $2xy' = 4y$

d) $-\sin(5x)y = 2y'$

3.2 Vakiokertoiminen muoto

Lineaarinen 1. kertaluvun differentiaaliyhtälö on *vakiokertoiminen*, jos

$$y' + ay = v(x),$$

jossa a on jokin vakio. Tällaiselle yhtälölle homogeeninen ratkaisu y_h saadaan muodostettua luvussa 3.1 johdetun ratkaisukaavan avulla, mutta yleiseen ratkaisuun $y = y_h + y_0$ tarvitsemme vielä yksittäisratkaisun y_0. Yksittäisratkaisu voidaan vakiokertoimisessa tapauksessa etsiä usein *yritteen* avulla.

3.2.1 Yksittäisratkaisun etsiminen yritteellä

Kun yksittäisratkaisua etsitään yritteellä, pyritään aluksi päättelemään yksittäisratkaisun y_0 muoto termin $v(x)$ perusteella. Kun yritteen muoto on valittu, kokeillaan löydetäänkö sille sellaiset kertoimet, joiden kanssa yrite toteuttaisi annetun differentiaaliyhtälön. Koska tutkitaan differentiaaliyhtälöitä, jotka ovat muotoa

$$y' + ay = v(x),$$

jossa a on vakio, voidaan funktion $v(x)$ avulla päätellä yrite y_0 funktion $y(x)$ arvoksi. Tarkastellaan seuraavaksi eri tapauksia riippuen funktiosta $v(x)$:

- Oletetaan, että $v(x)$ polynomi, jonka aste on n. Tällöin funktion $y(x)$ tulee olla myös astetta n oleva polynomi. Muussa tapauksessa differentiaaliyhtälö ei voi toteutua, sillä derivoidessa polynomin aste pienenee. Kun muodostetaan yritettä y_0, on otettava huomioon myös kaikki sellaiset termit, joissa muuttujan x asteluku on alle n, vaikka ne eivät esiintyisi funktiossa $v(x)$.

- Oletetaan, että $v(x)$ on muotoa $A\sin(kx) + B\cos(kx)$, jossa A, B ja k ovat joitain vakioita. Jälleen differentiaaliyhtälön yhtäsuuruuden toteutumiseksi on funktion $y(x)$ oltava vastaavaa muotoa, joten valitaan yrite y_0 sen mukaisesti. Huomaa, että yritteessä y_0 on aina otettava molemmat trigonometriset termit huomioon, vaikka funktiossa $v(x)$ toisen termin kerroin olisi 0.

- Oletetaan, että $v(x)$ on muotoa Ae^{kx}. Tällöin yritteen y_0 on oltava jälleen vastaavaa muotoa. Joissain tapauksissa yrite on kerrottava muuttujalla x, jotta saadaan homogeenisen muodon ratkaisusta poikkeava yksittäisratkaisu.

Näistä tapauksista ja yritefunktion y_0 muodostamisesta on koottu esimerkkejä taulukkoon 1. Lisäksi yritteitä voidaan yhdistellä taulukon viimeisen rivin mukaisesti.

$v(x)$	Yrite $y_0 = y_0(x)$
7	A
$3x+1$	$Ax+B$
$-x^2+2x-1$	Ax^2+Bx+C
$4x^3$	Ax^3+Bx^2+Cx+D
$\cos(5x)$	$A\sin(5x)+B\cos(5x)$
$2\sin x - 3\cos x$	$A\sin x + B\cos x$
$2e^{3x}$	Ae^{3x} **tai** Axe^{3x}
$5x-3e^{-2x}$	$Ax+B+Ce^{-2x}$ **tai** $Ax^2+Bx+Cxe^{-2x}$

Taulukko 1. Esimerkkejä sopivista yritefunktioista, kun ratkaistaan vakiokertoimista differentiaaliyhtälöä $y' + ay = v(x)$, jossa a on jokin vakio.

Esimerkki 3.5 Etsi jokin yksittäisratkaisu funktiolle

$$y' - 2y = 2\cos(3x).$$

Ratkaisu. Kyseessä on vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö, sillä $u(x) = a = -2$. Funktio $v(x) = 2\cos(3x)$, joten valitaan yritteeksi $y_0 = A\sin(3x) + B\cos(3x)$.

Sijoitetaan yrite $y_0 = A\sin(3x) + B\cos(3x)$ ja yritteen derivaattafunktio $y_0' = 3A\cos(3x) - 3B\sin(3x)$ tehtävänannon mukaiseen yhtälöön, jolloin saadaan

$$3A\cos(3x) - 3B\sin(3x) - 2\cdot(A\sin(3x) + B\cos(3x)) = 2\cos(3x)$$
$$3A\cos(3x) - 3B\sin(3x) - 2A\sin(3x) - 2B\cos(3x) = 2\cos(3x).$$

Täten

$$(-2A-3B)\sin(3x) + (-2B+3A)\cos(3x) = 2\cos(3x),$$

jolloin voidaan muodostaa yhtälöpari:

$$\begin{cases} -2A-3B=0 \\ -2B+3A=2, \end{cases}$$

jonka ratkaisut ovat

$$\begin{cases} A = \dfrac{6}{13} \\ B = -\dfrac{4}{13}. \end{cases}$$

Sijoittamalla vakioiden A ja B ratkaisut yritteeseen, löydetään yksittäisratkaisu y_0, joka toteuttaa tehtävänannon:

$$y_0 = \frac{6}{13}\sin(3x) - \frac{4}{13}\cos(3x).$$

Tehtävä 3.6 Kokeile sijoittamalla esimerkin 3.5 alkuperäiseen differentiaaliyhtälöön, että

$$y_0 = \frac{6}{13}\sin(3x) - \frac{4}{13}\cos(3x)$$

todella on yksittäisratkaisu eli toteuttaa annetun differentiaaliyhtälön.

Joskus taulukon 1. mukaisesti valittu yrite ei toimi ja yksittäisratkaisua ei löydetä. Tällöin keinona on kertoa alkuperäinen yrite muuttujalla x ja kokeilla näin saatua uutta yritettä. Käydään seuraavaksi esimerkissä 3.7 läpi tällainen tapaus.

Esimerkki 3.7 Etsi yksittäisratkaisu yritteen avulla vakiokertoimiselle differentiaaliyhtälölle

$$y' + 5y = 3e^{-5x}.$$

Ratkaisu. Yhtälön oikea puoli eli $v(x) = 3e^{-5x}$, joten valitaan yritteeksi $y_0 = Ae^{-5x}$, jolloin $y_0' = -5Ae^{-5x}$.

Sijoitetaan yrite tehtävänannon yhtälöön.

$$\begin{aligned} -5Ae^{-5x} + 5Ae^{-5x} &= 3e^{-5x} \\ 0 &= 3e^{-5x} \end{aligned}$$

Huomataan, että yrite y_0 ei toiminut ja yksittäisratkaisua ei löydetty. Yrite on itse asiassa vastaavan homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisu, minkä voi huomata laskun viimeisestä vaiheesta. Valitaan seuraavaksi muuttujalla x kerrottu yrite $y_1 = x \cdot y_0$ ja kokeillaan uudestaan.

Tällöin $y_1 = Axe^{-5x}$ ja ratkaistaan seuraavaksi yritteen derivaatta y_1' käyttäen tulon derivoimissääntöä:

$$y_1' = D(Ax \cdot e^{-5x}) = Ae^{-5x} - 5Axe^{-5x}.$$

Sijoitetaan yrite y_1 ja sen derivaattafunktio y_1' tehtävänantoon, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} Ae^{-5x} - 5Axe^{-5x} + 5Axe^{-5x} &= 3e^{-5x} \\ Ae^{-5x} &= 3e^{-5x}. \end{aligned}$$

Yhtälö toteutuu, kun vakio $A = 3$. Ollaan siis löydetty yksittäisratkaisu, joka on

$$y_1 = 3xe^{-5x}.$$

Tehtävä 3.8 Etsi yksittäisratkaisu yritteen avulla.

a) $y' + 3y = e^{6x}$

b) $y' + 5y = 10$

c) $y' + y = \dfrac{x}{2}$

d) $y' + 3y = 6\sin(2x)$

e) $y' + \dfrac{y}{2} = x + 2$

f) $2y' + \cos x = \dfrac{y}{2}$

3.2.2 Yleinen ratkaisu ja sovelluksia

Muodostetaan seuraavaksi yleinen ratkaisu vakiokertoimiselle ja lineaariselle 1. kertaluvun differentiaaliyhtälölle. Tähän lukuun on koottu tehtäviä, joissa harjoitellaan yleisen ratkaisun muodostamista pääosin vakiokertoimisessa tilanteessa. Lisäksi esimerkissä 3.11 käydään läpi myös käytännön sovellus, jonka jälkeiset tehtävät ovat myös soveltavia.

Lineaarisia 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöitä tulee vastaan usein myös käytännön sovelluksissa. Esimerkkejä tällaisista sovelluksista ovat populaatiomallit, joilla voidaan mallintaa yksinkertaisen populaation lisääntymistä ja sekoitusmallit, joiden avulla voidaan ratkaista konsentraatio tietyllä ajanhetkellä. Tällöin astiaan lisätään samanaikasesti nestettä, jonka konsentraatio on eri, kuin astiasta pois virtaavan nesteen. Luvussa 3.3 käydään läpi ratkaisumenetelmä *vakion variointi* sellaisille 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöille, jotka eivät ole vakiokertoimisia.

Esimerkki 3.9 Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' + 5y = -10x^2 + \frac{9}{5}.$$

Ratkaisu.
1) Aloitetaan ratkaisemalla vastaava homogeeninen yhtälö eli

$$y' + 5y = 0.$$

Ratkaisukaavan mukaisesti ratkaisuksi saadaan

$$y_h = Ce^{-5x}.$$

2) Seuraavaksi etsitään yritteen avulla yksittäisratkaisua y_0. Valitaan yritteeksi $Ax^2 + Bx + C$, sillä $v(x)$ on vastaavaa muotoa. Tällöin

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax^2 + Bx + C \\ y_0' &= 2Ax + B. \end{aligned}$$

Sijoitetaan yrite ja sen derivaattafunktio tehtävänantoon ja saadaan

$$2Ax + B + 5 \cdot (Ax^2 + Bx + C) = -10x^2 + \frac{9}{5}$$

Avataan sulkeet ja muokataan yhtälö muotoon, josta nähdään toisen asteen yhtälön termien kertoimet:

$$\begin{aligned} 2Ax + B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C &= -10x^2 + \frac{9}{5} \\ 5Ax^2 + (2A + 5B)x + B + 5C &= -10x^2 + \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

Kun verrataan yhtälön vasenta ja oikeaa puolta, voidaan muodostaa yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 5A = -10 \\ 2A + 5B = 0 \\ B + 5C = \frac{9}{5}. \end{cases}$$

Yhtälöryhmä saadaan ratkaistuksi, kun selvitetään ensin ylimmän yhtälön avulla A, jonka jälkeen sijoittamalla saadaan ratkaistua myös vakioiden B ja C arvot. Tällöin

$$\begin{cases} A = -2 \\ B = \dfrac{4}{5} \\ C = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Ollaan siis löydetty yksittäisratkaisu $y_0 = -2x^2 + \dfrac{4}{5}x + 1$.

3) Yleinen ratkaisu on $y = y_h + y_0$ eli $y = Ce^{-5x} - 2x^2 + \dfrac{4}{5}x + \dfrac{1}{5}$.

Tehtävä 3.10 Etsi yleinen ratkaisu seuraaville differentiaaliyhtälöille.

a) $y' - \dfrac{1}{2}y = (x-3)^2$

b) $y' + 2y = 4t$

c) $2y' - y = \sin(2x) + 2\cos(2x)$

d) $y' + y = 4\sin(3x)$

e) $y' + 3y = e^{-3x}$, kun $y(0) = 1$.

f) $y' - y = 3e^{x+1} + 4\sin x$.

Esimerkki 3.11 Toimit FBI:n murhatutkijana ja työtehtävänäsi on ratkaista uhrin kuolinaika murhapaikalta lähetetyn raportin avulla. Ruumis on löydetty $27,1$ asteisena kello 13:05 huoneesta, jossa lämpömittari osoitti $20,6$ astetta. Oletat, että huoneenlämpö on pysynyt koko ajan samana. Ihmiskehon lämpötilaksi oletat 36,6 astetta (HS Tiede 20.1.2020). Lyhyellä aikavälillä ruumiin lämpötilan muutos on suoraan verrannollinen aikavälin pituuteen sekä ruumiin ja ympäristön väliseen lämpötilaeroon verrannollisuuskertoimen ollessa $k = \frac{\ln\frac{3}{4}}{4}\frac{1}{\mathrm{h}}$. *(Vakio on saatu hyödyntämällä tietoa, että normaaliolosuhteissa ruumiin lämpötila laskee ensimmäisen tunnin aikana kaksi astetta ja tämän jälkeen noin asteen tunnissa.)*

Ratkaisu. Ilmoitetaan lämpötilan muutos suoraan verrannollisena annettuihin tietoihin, jolloin

$$\Delta T = k_1 \cdot \Delta t \cdot k_2 \cdot (T - T_y), \text{missä}$$

Yhtälössä T_y on ympäröivän huoneen lämpötila ja T on ruumiin lämpötila, joten ΔT merkitsee ruumiin lämpötilan muutosta. Ajan muutosta kuvaa Δt sekä k_1 ja k_2 ovat tehtävänannon mukaisia verrannollisuuskertoimia.

Merkitään verrannollisuuskertoimien tulo $k_1 \cdot k_2 = k$, jolloin saadaan

$$\Delta T = k \cdot \Delta t \cdot (T - T_y).$$

Kun ajan muutos lähestyy nollaa eli $\Delta t \to 0$, voidaan käyttää merkintää dt:

$$dT = k \cdot dt \cdot (T - T_y).$$

Täten

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{dT}{dt} = T - T_y.$$

Sijoitetaan $\dfrac{dT}{dt} = T'$, jolloin

$$T - \frac{1}{k}T' = T_y.$$

Yhtälö saadaan negatiivisella verrannollisuuskertoimella $-k$ kerrottuna ja termejä järjestelemällä lineaarisen ja vakiokertoimisen 1. kertaluvun differentiaaliyhtälön muotoon

$$T' - kT = -kT_y.$$

Ratkaistaan seuraavaksi tämä yhtälö.

1) Ratkaistaan vastaava homogeeninen differentiaaliyhtälö ratkaisukaavalla, jolloin

$$T_h = Ce^{-\int -k dt} = Ce^{k \cdot t}.$$

2) Koska $v(x)$ on vakio, valitaan yritteeksi $T_0 = A$, jossa A on jokin vakio.

$$\begin{cases} T_0 = A \\ T_0' = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 - kA = -kT_y$$

jolloin homogeenisen muodon ratkaisuksi saadaan $T_0 = T_y$.

3) Yleinen ratkaisu saadaan edellisten summana

$$T = T_h + T_0 = Ce^{kt} + T_y.$$

Huoneen lämpötila T_y on 20,6 astetta ja ihmisen kehonlämpötilaksi T murhan tapahtuessa oletetaan 36,6 astetta. Tällöin

$$\begin{aligned} 36,6 &= Ce^{k \cdot 0} + 20,6 \\ C &= 36,6 - 20,6 = 16, \end{aligned}$$

josta saadaan ruumiin lämpötilan T matemaattiseksi malliksi

$$T = 16e^{kt} + 20,6.$$

Verrannollisuuskertoimen ollessa $k = \frac{\ln \frac{3}{4}}{4} \dfrac{1}{\mathrm{h}}$ malli saadaan muotoon

$$T = 16e^{\frac{\ln \frac{3}{4}}{4} t} + 20,6.$$

Uhrin lämpötila oli löydettäessä 27,1 astetta, joten

$$\begin{aligned}
27,1 &= 16e^{\frac{\ln\frac{3}{4}}{4}t} + 20,6 \\
\frac{6,5}{16} &= e^{\frac{\ln\frac{3}{4}}{4}t} \\
t &= \frac{\ln\frac{6,5}{16}}{\frac{\ln\frac{3}{4}}{4}} \\
&\approx 12,5 \text{ h}
\end{aligned}$$

Kuolinaika on siis ollut noin 12 h 30 min ennen ruumiin löytymistä, joten murha on tapahtunut 00:35 yöllä.

Tehtävä 3.12 Purjeveneen massa on 800 kg ja nopeus 5,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, kun moottori sammutetaan. Kuinka pitkän matkan vene ehtii liukua, ennen kuin sen nopeus on 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$? Veden vastus on 900 N moottorin sammuttamishetkellä ja se on suoraan verrannollinen nopeuteen.

Vihje. Tehtävän 3.12 tilannetta voidaan mallintaa Newtonin II lain mukaisesti yhtälöllä $-kv = ma$, *jossa* k = *verrannollisuuskerroin,* v = *veneen nopeus,* m = *veneen massa ja* a = *veneen kiihtyvyys. Huomaa, että kiihtyvyys voidaan ilmaista nopeuden derivaattana, jolloin päädytään differentiaaliyhtälöön.*

Tehtävä 3.13 Tutkit bakteerikantaa, jonka kasvu on lyhyellä aikavälillä suoraan verrannollinen bakteerien lukumäärään ja aikavälin pituuteen. Aloitat tutkimuksen kello 10:00 ja kello 12:30 huomaat bakteerimäärän lisääntyneen 60 %.

Vihje. Tilannetta voidaan mallintaa yhtälöllä $\frac{ds}{dt} = ks$, *jossa* k = *verrannollisuuskerroin ja* s *kuvaa bakteerien lukumäärää.*

a) Montako prosenttia bakteerien määrä on lisääntynyt tutkimuksen alkamisesta kello 12:00 mennessä?

b) Milloin bakteerien lukumäärä kolminkertaistuu verrattuna alkutilanteeseen?

c) Montako prosenttia bakteerikanta kasvaa kello 15:00 ja kello 15:45 välillä?

3.3 Vakion variointi

Jos 1. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö ei ole vakiokertoiminen, sen yksittäisratkaisua ei löydetä yleensä vastaaville vakiokertoimisille differentiaaliyhtälöille sopivien yritteiden avulla. Tässä tapauksessa eräs sopiva menetelmä yhtälön ratkaisemiseksi on *vakion variointi*. Menetelmä perustuu vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisun y_h muuntamiseen eli variointiin, jonka avulla etsitään yhtälön yleinen ratkaisu $y = y_h + y_0$.

Tässä menetelmässä päädytään lähes poikkeuksetta murtolausekkeen integroimiseen, joiden ratkaiseminen on joskus hyvinkin haastavaa. Tähän lukuun on valittu tehtäviä, joissa päädytään lukion pitkän matematiikan oppimäärän mukaisiin murtolausekkeiden integraaleihin.

Menetelmää hyödynnetään tapauksessa, jossa 1. kertaluvun differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y' + u(x)y = v(x),$$

jossa $u(x)$ ei ole vakio. Luvun 3.1 nojalla tiedetään, että homogeenisen muodon ratkaisu on

$$y_h(x) = Ce^{-U(x)}.$$

Kun pyritään löytämään tämän ratkaisun avulla yleistä ratkaisua, joka sisältää yksittäisratkaisun y_0 ja homogeenisen ratkaisun y_h, voidaan valita vakioksi $C = 1$. Tällöin laskujen välivaiheet pysyvät huomattavasti selkeämpinä. Homogeenisen yhtälön ratkaisu on tällöin siis muotoa

$$y_h(x) = e^{-U(x)}.$$

Vakion varioinnissa tätä ratkaisua $y_h(x)$ varioidaan kertomalla se jollakin funktiolla $r(x)$, jolloin saadaan muodostettua ratkaistavan yhtälön yleiselle ratkaisulle $y(x)$ yrite. Merkitään jatkossa funktioita lyhyemmillä merkinnöillä, kuten $r(x) = r$. Tällöin yritteeksi saadaan siis

$$y = r \cdot y_h$$

ja yritteen derivaattafunktio on tulon derivoimissäännön mukaisesti

$$y' = r'y_h + ry_h'.$$

Kun sijoitetaan nämä ratkaistavaan 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöön, saadaan

$$r'y_h + ry_h' + ury_h = v.$$

Otetaan yhteiseksi tekijäksi funktio r kahdesta jälkimmäisestä termistä.

$$r'y_h + r(y_h' + uy_h) = v$$

Homogeenisesta ratkaisusta $y_h = e^{-U(x)}$ seuraa suoraan $y_h' + uy_h = 0$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
r'y_h + r \cdot 0 &= v \\
r'y_h &= v \\
r' &= \frac{v}{y_h} \\
r &= \int \frac{v}{y_h} dx.
\end{aligned}
$$

Täten ollaan löydetty keino funktion r löytämiseksi, kun $r \cdot y_h$ on yleinen ratkaisu y sellaiselle lineaariselle 1. kertaluvun differentiaaliyhtälölle, joka ei ole vakiokertoiminen. Yleinen ratkaisu y on siis:

$$
y = \int \frac{v}{y_h} dx \cdot y_h = \int \frac{v(x)}{e^{-U(x)}} dx \cdot e^{-U(x)} = \int v(x) e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)}.
$$

Esimerkki 3.14 Etsi yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle

$$
y' - \frac{4}{x} y = x^4 \sin(2x).
$$

Ratkaisu. Aloitetaan etsimällä ratkaisu $y_0(x)$ vastaavalle homogeeniselle muodolle

$$
y' - \frac{4}{x} y = 0.
$$

Ratkaisukaavan nojalla homogeenisen muodon ratkaisu on:

$$
y_h = e^{-\int -\frac{4}{x} dx} = e^{4 \ln x} = e^{\ln x^4} = x^4.
$$

Yleinen ratkaisu löydetään varioimalla eli kertomalla homogeeninen ratkaisu y_h sellaisella funktiolla r, joka toteuttaa yhtälön

$$
r = \int \frac{v}{y_h} dx.
$$

Ratkaistaan seuraavaksi funktio r sijoittamalla funktiot v ja y_h:

$$
r = \int \frac{x^4 \sin(2x)}{x^4} dx = \int \sin(2x)\ dx.
$$

Kirjoitetaan integroitava funktio muodossa, josta nähdään funktio $\sin 2x$ ja sen sisäfunktion derivaatta 2, jolloin

$$
r = \int \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin(2x)\ dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \sin(2x)\ dx.
$$

Tällöin ratkaisuksi saadaan sinifunktion integroimissäännön mukaisesti:

$$r = \frac{-1}{2}\cos(2x) + C.$$

Kun funktio r ja homogeeninen ratkaisu y_h tiedetään, saadaan sijoittamalla differentiaaliyhtälön $y' - \frac{4}{x}y = x^4 \sin(2x)$ yleinen ratkaisu:

$$y = r \cdot y_h = \left(-\frac{1}{2}\cos(2x) + C\right) \cdot x^4 = -\frac{1}{2}x^4\cos(2x) + Cx^4.$$

Yksittäisratkaisu $y_0 = -\frac{1}{2}x^4\cos(2x)$ voidaan halutessa tarkistaa sijoittamalla y_0 ja y_0' tehtävänannon yhtälöön.

Tehtävä 3.15 Ratkaise differentiaaliyhtälöt.

a) $xy' + 2y = x^4$

b) $y' + 2y\tan x = \sin^2 x$

4 Vakiokertoiminen ja lineaarinen 2. kertaluvun differentiaaliyhtälö

Tässä luvussa keskitytään vakiokertoimisiin ja lineaarisiin 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöihin, sillä niiden ratkaisemiseksi on olemassa ylipäätään olemassa ratkaisumenetelmä ja lisäksi se on samankaltainen kuin jo opittu kolmivaiheinen ratkaisumenetelmä vastaaville 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöille. Kaikille 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöille ei ole olemassa tunnettua ratkaisumenetelmää, joten ratkaisun löytäminen yleisimmissä tapauksissa on usein haastavaa, eikä ratkaisun löytyminen ylipäätään ole taattua. On olemassa kuitenkin monia löydettyjä erityistapauksia, kuten Besselin, hypergeometrinen ja Legendren yhtälö, joiden muodon perusteella tiedetään myös ratkaisujen muoto. Luku perustuu lähteisiin [1], [2], [3], [4] ja [10].

Vakiokertoiminen ja lineaarinen 2. kertaluvun differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y'' + ay' + by = v(x),$$

jossa a ja b ovat vakioita. Lineaarisuus tarkoittaa tässäkin, ettei funktiota y tai sen derivaattoja y' ole korotettu potenssiin. Näille differentiaaliyhtälöille on olemassa kolmivaiheinen ratkaisumalli, mutta vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaiseminen on nyt erilaista kuin 1. kertaluvun tapauksessa.

4.1 Homogeeninen muoto

Vakiokertoimisen ja lineaarisen 2. kertaluvun differentiaaliyhtälön homogeeninen muoto on

$$y'' + ay' + by = 0,$$

jossa a ja b ovat vakioita ja $v(x) = 0$. Näiden yhtälöiden ratkaiseminen perustuu *karakteristisiin yhtälöihin.*

Lause 4.1 Homogeenisen muodon yleinen ratkaisu on muotoa

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

jos löydetään sellaiset kaksi yksityisratkaisua y_1 ja y_2, joiden suhde ei ole vakio.

Homogeenisen muodon ratkaisu.
Etsitään yritteen avulla ratkaisut y_1 ja y_2 yhtälölle

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Yritteeksi valitaan e^{rx}, joka on samankaltainen kuin vastaavan 1. kertaluvun homogeenisen yhtälön ratkaisu Ce^{-ax}. Kun sijoitetaan yrite e^{rx} yhtälöön, saadaan

$$r^2 e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0$$

Otetaan yhteiseksi tekijäksi e^{rx}, jolloin

$$e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0.$$

Koska $e^{rx} > 0$, toteutuu yhtälö tulon nollasäännön nojalla tarkalleen silloin, kun

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Tätä yhtälöä kutsutaan *karakteriseksi yhtälöksi.* Tämän toisen asteen yhtälön diskriminantin $D = a^2 - 4b$ arvosta riippuen saadaan karakterisen yhtälön ratkaisuille r_1 ja r_2 ja täten myös homogeenisen yhtälön $y'' + ay' + by = 0$ yleiseksi ratkaisuksi 3 erilaista tapausta:

1) Jos $D > 0$, niin karakteristisella yhtälöllä on kaksi erisuurta reaalijuurta r_1 ja r_2. Tällöin yritteellä $y = e^{rx}$ saadaan ratkaisuiksi $y_1 = e^{r_1 x}$ ja $y_1 = e^{r_2 x}$. Näiden ratkaisujen suhde

$$\frac{e^{r_1 x}}{e^{r_2 x}}$$

voidaan kirjoittaa potenssien laskusääntöjen nojalla muotoon

$$e^{(r_1 - r_2)x},$$

joka ei ole vakio, joten lauseen 4.1 nojalla tällaisen homogeenisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$\underline{y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}}.$$

2) Jos $D = 0$, niin karakteerisella yhtälöllä on kaksoisjuuri. Tällöin yritteellä e^{rx} saadaan ainoastaan yksi ratkaisu $y = e^{r_1 x}$. Tässä tapauksessa toinen ratkaisu y_2 löydetään aina kertomalla jo löydetty ratkaisu muuttujalla x. Tämä voidaan osoittaa sijoittamalla ratkaisu xe^{rx} yhtälöön $y'' + ay' + by = 0$, jolloin

$$\begin{aligned} y &= xe^{rx} \\ y' &= xre^{rx} + e^{rx} \\ y'' &= xr^2 e^{rx} + re^{rx} + re^{rx}. \end{aligned}$$

Kun nämä sijoitetaan vakiokertoimisen ja lineaarisen 2. kertaluvun differentiaaliyhtälön homogeeniseen muotoon, saadaan

$$xr^2 er^x + re^{rx} + re^{rx} + axre^{rx} + aer^x + bxe^{rx} = 0,$$

joka saadaan järjestämällä termejä muotoon

$$(r^2 + ar + b)xe^{rx} + (2r + a)e^{rx} = 0.$$

Koska r on karakteristisen yhtälön juuri, niin

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Lisäksi kerroin

$$2r + a = 0,$$

sillä se on karakteristisen yhtälön derivaatta.Tällöin yhtälö toteutuu ja xe^{rx} toteuttaa differentiaaliyhtälön. Ratkaisujen y_1 ja y_2 suhde on x, joka ei ole vakio, joten saadaan yleinen ratkaisu lauseen 4.1 mukaisesti:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x},$$

joka saadaan ottamalla yhteinen tekijä $e^{r_1 x}$ muotoon

$$\underline{y = e^{r_1 x}(C_1 + C_2 x).}$$

3) Jos $D < 0$, niin karakterisella yhtälöllä on *imaginaariset* juuret $r = a \pm bi$, missä $a, b \in \mathbf{R}$. On todistettu, että tällaisessa tapauksessa ratkaisut $y = e^{ax}\sin(bx)$ ja $y = e^{ax}\cos(bx)$ toteuttavat differentiaaliyhtälön. Näiden ratkaisujen suhde on

$$\frac{e^{ax}\sin(bx)}{e^{ax}\cos(bx)} = \tan(bx),$$

jolloin yleinen ratkaisu lauseen 4.1 nojalla on

$$\underline{y = e^{ax}(C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx)).}$$

Esimerkki 4.2 Ratkaise

$$y'' + 16y' + 60y = 0.$$

Ratkaisu. Kyseessä on homogeeninen ja vakiokertoiminen 2. kertaluvun differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisut saadaan vastaavan karakteristisen yhtälön nollakohtien avulla. Muodostetaan ensin karakteristinen yhtälö, joka on nyt tehtävänannon differentiaaliyhtälön kertoimien mukaisesti

$$r^2 + 16r + 60 = 0.$$

Lasketaan kyseisen toisen asteen yhtälön diskriminantti

$$D = 16^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 16,$$

$D > 0$, jolloin karakteristisella yhtälöllä on kaksi juurta eli nollakohtaa. Ratkaistaan karakteristisen yhtälön nollakohdat r_1 ja r_2 toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60}}{2 \cdot 1},$$

jolloin ratkaisut ovat $r_1 = -10$ ja $r_2 = -6$. Kohdan 1) mukaisesti yleinen ratkaisu saadaan sijoittamalla ratkaisut r_1 ja r_2 yhtälöön

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2} x, \quad \text{jolloin}$$
$$y = C_1 e^{-10x} + C_2 e^{-6x}.$$

Esimerkki 4.3 Ratkaise

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Ratkaisu. Aluksi muodostetaan differentiaaliyhtälöä vastaava karakteristinen yhtälö, joka on nyt

$$r^2 - 4r + 4 = 0.$$

Lasketaan diskriminantin arvo

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0.$$

Koska $D = 0$, löydetään karakteristiselle yhtälölle kaksoisjuuri eli vain yksi ratkaisu r_1. Nollakohdaksi saadaa toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Sijoitetaan saatu r_1 kohdan 2) mukaisesti yhtälöön

$$y = e^{r_1 x}(C_1 + C_2 x),$$

jolloin yleinen ratkaisu y on

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

Esimerkki 4.4 Ratkaise

$$y'' + 8y' + 20y = 0.$$

Ratkaisu. Muodostetaan ensin yhtälöä vastaava karakteristinen yhtälö, joka on nyt

$$r^2 + 8r + 20 = 0.$$

Ratkaistaan karakteristisen yhtälön nollakohdat toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1}.$$

Diskriminantin D arvo on -16 eli negatiivinen, jolloin yhtälön juuret ovat imaginaariset.

$$r = \frac{-8 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Muokataan yhtälö neliöjuuren laskusääntöjen mukaisesti muotoon, josta nähdään imaginaariosa $i = \sqrt{-1}$:

$$r = \frac{-8 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-8 \pm 4i}{2},$$

jolloin nollakohdat eli ratkaisut ovat $r_1 = \dfrac{-8 + 4i}{2} = -4 + 2i$ ja $r_2 = \dfrac{-8 - 4i}{2} = -4 - 2i$, eli muotoa $r = a \pm bi$. Nyt kohdan 3) mukaisesti yleinen ratkaisu tälle saadaan sijoittamalla yhtälöön

$$y = e^{ax}(C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx)),$$

eli yleinen ratkaisu on

$$y = e^{-4x}(C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)).$$

Tehtävä 4.5 Ratkaise homogeeniset ja vakiokertoimiset 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöt.

a) $8y'' + 4y' + 2y = 0$

b) $y'' - 3y' - 2y = 0$

c) $5y'' - 10y' + 5y = 0$

4.2 Yleinen ratkaisu ja sovelluksia

Yleinen ratkaisu vakiokertoimiselle ja lineaariselle 2. kertaluvun differentiaaliyhtälölle

$$y'' + ay' + by = v(x)$$

saadaan jälleen homogeenisen ratkaisun ja yritteen avulla etsityn ratkaisun summana. Edellisessä luvussa käytiin homogeenisen tapauksen, eli tapauksen, jossa $v(x) = 0$ ratkaisu.

Yksittäisratkaisun etsiminen yritteellä tapahtuu samoin kuin vastaavassa vakiokertoimisen 1. kertaluvun tapauksessa. Yritteen muoto määräytyy siis termin $v(x)$ muodon mukaisesti, kuten luvussa 3.2.1 käytiin läpi. Jos yrite ei onnistu, kerrotaan se muuttujalla x ja yritetään uudestaan. Toisen kertaluvun tapauksessa tämä saatetaan joutua tekemään kaksi kertaa, eli toimiva yrite on joskus vasta muuttujalla x^2 kerrottu.

Esimerkki 4.6 Ratkaise

$$y'' + 4y = 1 - 8x, \text{ kun } y(0) = 2 \text{ ja } y'(0) = -1.$$

Ratkaisu.
1) Ratkaistaan ensin homogeeninen muoto $y'' + 4y = 0$ muodostamalla karakteristinen yhtälö. Huomaa, että termi by' puuttuu, jolloin karakteristinen yhtälö on muotoa

$$r^2 + 4 = 0.$$

Ratkaistaan seuraavaksi karakteristisen yhtälön juuret:.

$$r^2 = -4 = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i.$$

Imaginaariset ratkaisut ovat imaginaariset eli muotoa $a \pm bi$, jolloin homogeenisen muodon ratkaisu on muotoa $y_h = e^{ax}(C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx))$. Huomaa, että tässä tapauksessa $a = 0$, jolloin

$$y_h = e^{0x}(C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)) = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x).$$

2) Etsitään yksittäisratkaisu y_0 yritteen avulla. Termi $v(x) = 1 - 8x$, jolloin yritteen y_0 on oltava vastaavaa muotoa, eli $Ax + B$. Tällöin

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax + B \\ y_0' &= A \\ y_0'' &= 0. \end{aligned}$$

Kun nämä sijoitetaan tehtävänantoon, saadaan

$$\begin{aligned} 4 \cdot 0 + 4(Ax + B) &= 1 - 8x \\ 4Ax + 4B &= -8x + 1 \end{aligned}$$

Jotta kertoimien arvot täsmäisivät, on oltava:

$$\begin{cases} 4A = -8 \\ 4B = 1. \end{cases}$$

Tällöin siis $A = -2$ ja $B = \frac{1}{4}$, joten yksittäisratkaisuksi saadaan

$$y_0 = -2x + \frac{1}{4}.$$

3) Yleinen ratkaisu on nyt $y = y_0 + y_h = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) - 2x + \frac{1}{4}$.

Ratkaistaan vielä alkuehtojen mukainen ratkaisu, kun $y(0) = 2$ ja $y'(0) = -1$. Yhtälö y ja sen derivaattafunktio y ovat nyt

$$\begin{aligned} y &= C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) - 2x + \frac{1}{4} \quad \text{ja} \\ y' &= 2 \cdot C_1 \cos(2x) - 2 \cdot \sin(2x) - 2. \end{aligned}$$

Huomaa, että $\sin(0) = 0$ ja $\cos(0) = 1$. Jotta alkuehdot toteutuisivat, saadaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} C_2 + \frac{1}{4} = 2 \\ 2 \cdot C_1 - 2 = -1. \end{cases}$$

Tällöin $C_1 = \frac{7}{4}$ ja $C_2 = \frac{1}{2}$, joten alkuehdon mukainen ratkaisu on

$$y = \frac{7}{4} \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) - 2x + \frac{1}{4}.$$

Esimerkki 4.7 Ratkaise

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

1) Yhtälön homogeeninen muoto

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

ratkaistiin aiemmin esimerkissä 4.3, jolloin ratkaisuksi saatiin

$$y_h = e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

2) Etsitään yksittäisratkaisu ja valitaan yritteeksi $y_0 = Ae^{2x}$, sillä funktio $v(x)$ on vastaavaa muotoa. Tällöin

$$\begin{aligned} y_0 &= Ae^{2x} \\ y_0' &= 2Ae^{2x} \\ y_0'' &= 4Ae^{2x}. \end{aligned}$$

Kun nämä sijoitetaan tehtävänantoon, saadaan

$$\begin{aligned}4Ae^{2x}-4\cdot 2Ae^{2x}+4\cdot Ae^{2x}&=e^{2x}\\ 0&=e^{2x}.\end{aligned}$$

Yksittäisratkaisua ei löydetty, sillä yrite antaa yhtälön homogeeniselle muodolle ratkaisun, kuten tuloksesta huomataan. Koska yrite y_0 ei toiminut, valitaan uusi yrite y_1, joka on edellinen yrite muuttujalla x kerrottu. Huomaa, että nyt yritteen derivaattafunktiot saadaan hyödyntämällä tulon derivaatan laskusääntöä

$$(f\cdot g)'=f\cdot g'+f'\cdot g.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}y_1&=Axe^{2x}\\ y_1'&=2Axe^{2x}+Ae^{2x}\\ y_1''&=4Axe^{2x}+4Ae^{2x}.\end{aligned}$$

Sijoitetaan tehtävänantoon, jolloin

$$\begin{aligned}4Axe^{2x}+4Ae^{2x}-4\cdot(2Axe^{2x}+Ae^{2x})+4\cdot Axe^{2x}&=e^{2x}\\ 0&=e^{2x}.\end{aligned}$$

Ei siis löydetty vieläkään yksittäisratkaisua, sillä tämäkin valittu yrite on homogeenisen muodon ratkaisu. Kerrotaan jälleen yrite y_1 muuttujalla x ja kokeillaan näin saatua yritettä y_2. Derivoidessa on jälleen hyödynnetty tulon derivaatan laskusääntöä. Nyt

$$\begin{aligned}y_2&=Ax^2e^{2x}\\ y_2'&=2Ax^2e^{2x}+2Axe^{2x}\\ y_2''&=4Ax^2e^{2x}+8Axe^{2x}+2Ae^{2x}.\end{aligned}$$

Sijoitetaan tehtävänantoon ja saadaan

$$\begin{aligned}4Ax^2e^{2x}+8Axe^{2x}+2Ae^{2x}-4\cdot(2Ax^2e^{2x}+2Axe^{2x})+4\cdot Ax^2e^{2x}&=e^{2x}\\ 2Ae^{2x}&=e^{2x}\end{aligned}$$

Jotta termin e^{2x} kerroin olisi vastaava yhtälön molemmilla puolilla, on oltava

$$\begin{aligned}2A&=1\\ A&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ollaan siis löydetty yksittäisratkaisu $y_2=\frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

3) Yleinen ratkaisu y saadaan homogeenisen muodon ratkaisun y_h ja yksittäisratkaisun y_2 summana, jolloin $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

Tehtävä 4.8 Ratkaise differentiaaliyhtälöt.

a) $y'' + 2y' + 4y = \sin(2x)$

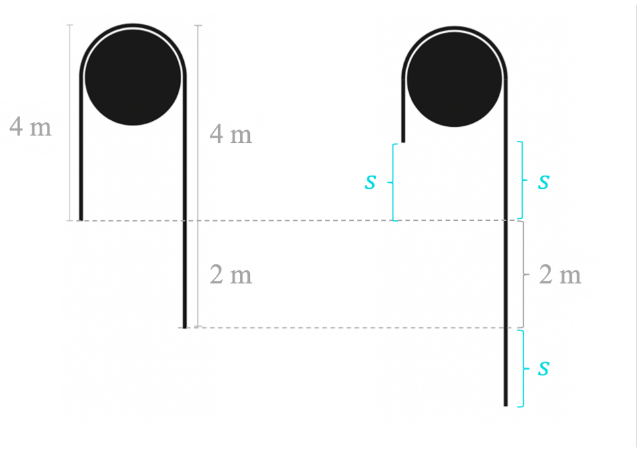
b) $\dfrac{1}{2}y'' + 4y + 8y = 0$, kun $y(0) = 2$ ja $y'(0) = -2$

c) $y'' + 8y - 20y = 1$, kun $y(0) = 2$ ja $y'(0) = 0$

d) $y'' - y - 6y = 3e^{-2x}$

Esimerkki 4.9 Homogeenisen, 10 m pitkän taipuisan ketjun annetaan sen päästä kiinni pitäen roikkua ohuen ja sileäpintaisen metallitangon päällä siten, että toisella puolella on 6 m mittainen pätkä. Kun ketjusta päästetään irti, se liukuu painonsa vaikutuksesta pois tangon päältä. Kuinka pitkän ajan kuluttua ketju on kokonaan liukunut pois tangon päältä, kun kitkaa ei huomioida? Putoamiskiihtyvyydelle g käytetään likiarvoa 10 $\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Ratkaisu. Hahmotellaan aluksi kuva alkutilanteesta sekä tilanteesta hetkellä t, kun vaijeri on liikkunut matkan s:



Kuva 3. Vasemmalla alkutilanne ja oikealla tilanne ajanhetkellä t.

Oikeanpuolisesta mallista nähdään, että vaijeria alaspäin vetävä voima aiheutuu maan vetovoiman kohdistumisesta tarkalleen $2s + 2$ mittaiseeen osuuteen vaijerista.

Dynamiikan peruslain eli Newtonin 2. lain mukaan

$$\sum_i F_i = ma$$

johon sijoitettuna saadaan

$$\frac{2s+2}{10} \cdot mg = ma.$$

Huomataan, että massa m supistuu yhtälöstä kokonaan pois. Kun sijoitetaan lisäksi $g = 10$, jää jäljelle

$$2s + 2 = a$$

Koska kiihtyvyys a saadaan ratkaistua matkasta s kaksi kertaa derivoimalla, voidaan se merkitä $a = s''$, jolloin päädymme toisen asteen differentiaaliyhtälöön:

$$\begin{aligned} 2s + 2 &= s'' \\ \Rightarrow s'' - 2s &= 2. \end{aligned}$$

Ratkaistaan aluksi vastaava homogeeninen differentiaaliyhtälö muodostaen karakteristinen yhtälö:

$$\begin{aligned} r^2 - 0r - 2 &= 0 \\ r^2 &= 2 \\ r &= \pm\sqrt{2}, \end{aligned}$$

jolloin homogeeniseksi ratkaisuksi s_h saadaan

$$s_h = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}.$$

Seuraavaksi etsitään yksittäisratkaisu s_0 yritteen avulla. Koska $v(x)$ on vakio, valitaan yritteeksi $s_0 = A$. Sijoitetaan yrite $s_0 = A$ yhtälöön $s'' - 2s = 2$, jolloin

$$\begin{aligned} 0 - 2 \cdot A &= 2 \\ A &= -1. \end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu on siis

$$s = s_h + s_0 = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t} - 1.$$

Hetkellä $t = 0$, ketjun pään kulkema matka $s = 0$ ja lisäksi ketjun pään nopeus $v = 0$. Tarkastellaan aluksi ensimmäinen alkuehto $s(0) = 0$:

$$\begin{aligned} C_1 e^{\sqrt{2} \cdot 0} + C_2 e^{-\sqrt{2} \cdot 0} - 1 &= 0 \\ C_1 + C_2 &= 1. \end{aligned}$$

Toista alkuehtoa varten tarvitsemme ketjun pään nopeutta $v = s'$ eli

$$s' = \sqrt{2} C_1 e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2} C_2 e^{-\sqrt{2}t},$$

johon sijoitetaan $v(0) = 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} C_1 - \sqrt{2} C_2 &= 0 \\ C_1 &= C_2. \end{aligned}$$

Näistä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ \qquad C_1 = C_2, \end{cases}$$

jolloin ratkaisuiksi saadaan

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}.$$

Nyt matkan yhtälö $s(t)$ on

$$s(t) = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}\right) - 1.$$

Termi $\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}\right)$ on *hyperbolinen kosini*, sillä se on muotoa $\frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$. Täten se voidaan lyhentää merkinnällä $\cosh(\sqrt{2}t)$, jolloin

$$s(t) = \cosh(\sqrt{2}t) - 1.$$

Ketju on liukunut kokonaan pois tangon päältä, kun ketjun pään kulkema matka $s = 4$. Sijoitetaan tämä yllä olevaan yhtälöön, jolloin saadaan ratkaistua matkaan kulunut aika:

$$\begin{aligned}
\cosh(\sqrt{2}t) - 1 &= 4 \\
\cosh(\sqrt{2}t) &= 5 \\
\sqrt{2}t &= \mathrm{arcosh} 5 \\
t &= \frac{\mathrm{arcosh} 5}{\sqrt{2}} = 1,620... \approx 1,6.
\end{aligned}$$

Vaijeri putoaa tangolta siis 1,6 sekunnissa.

Viitteet

[1] A.L Rabenstein: *Introduction to Ordinary Differential Equations*, Academic Press, Inc., 1972

[2] Y. Juve, V. Lyytikäinen: *Differentiaaliyhtälöiden alkeet*, Kirjayhtymä, 1965

[3] A. Majaniemi: *Matematiikka II: Differentiaali- ja integraalilaskentaa sekä differentiaaliyhtälöitä*, Tietokotka, 2008

[4] A. Tuomenlehto, E. Holmlund, M. Huuskonen, H. Makkonen, J. Surakka: *Insinöörin matematiikka*, Edita, 2014

[5] M. Gyllenberg, P. Piiroinen, P. Ola: *Tavalliset differentiaaliyhtälöt*, Helsingin yliopisto, 2006

[6] F. Ayres: *Schaum's outline of Theory and problems of Differential Equations in SI metric units*, McGraw-Hill Inc., 1972

[7] R. A. Adams: *A Complete Course: Calculus 4th edition*, Addison Wesley Ltd, 1999

[8] Opetushallitus: *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*, Haettu 1.2.2021: https://www.oph.fi/fi/koulutus-ja-tutkinnot/lukion-opetussuunnitelmien-perusteet

[9] M. Hirvensalo: *Insinöörimatematiikka D*, Turun yliopisto, 2019

[10] K. A. Stroud, D. J. Booth: *Engineering Mathematics 5th edition*, Palgrave, 2001