TURUN YLIOPISTO

Johdatus matriisilaskentaan

Tiia Sauvonsaari

Pro gradu -tutkielma
Marraskuu 2021

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

SAUVONSAARI, TIIA: Johdatus matriisilaskentaan
Pro gradu -tutkielma, 31 s.
Matematiikka
Marraskuu 2021

Tässä matematiikan opettajalinjan Pro gradu -tutkielmassa tutustutaan matriiseihin ja niiden perusominaisuuksiin. Tutkielmaa voidaan käytttää esimerkiksi oppimateriaalina lukion matematiikan kursseilla. Lukijalta odotetaan peruskoulun matematiikan oppimäärän hallintaa.

Tutkielmassa esitellään matriisien perusteet sekä niihin liittyvät laskusäännöt. Näiden ymmärtäminen jatkon kannalta on välttämätöntä. Lisäksi tutustutaan kuinka ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä matriisien avulla ja esitellään vektoreiden ristitulon ja suunnikkaan pinta-alan vastaavuus. Tutkielmaan on koottu havainnollistavia esimerkkejä tukemaan ymmärtämistä.

Asiasanat: matriisi, matriisilaskenta, vektori, lineaarinen yhtälö ja lineaarinen yhtälöryhmä

Sisällys

1 Johdanto

Matriisit ovat yleisesti matematiikassa käytetty tapa ilmaista joukko lukuja kaavion muodossa. Erityisesti matriiseja käytetään lineaaristen kuvausten, eli tietynlaisten funktioiden kirjoittamisessa. Matriiseihin voi törmätä monilla eri aloilla. Esimerkiksi fysiikassa matriiseilla kuvataan kvanttimekaanisia operaattoreita eli toisin sanoen systeemien mittaamia ominaisuuksia. Vastaavasti kemiassa matriisien sovelluksia voidaan hyödyntää esimerkiksi molekyylien symmetrian tarkasteluun.

Tämä tutkielma on kirjoitettu matriiseihin tutustuville. Tutkielmaa voisi esimerkiksi hyödyntää lukion matematiikan kurssina. Tutkielma pysyy lähellä käytönnön sovelluksia, jonka vuoksi kurssi voisi sisältyä jopa ensimmäisen vuoden opintoihin, sillä pohjatiedoiksi riittää peruskoulun matematiikka sekä mekaaninen laskutaito. Toki analyyttisen geometrian ja vektoreiden tunteminen edesauttaa ymmärrystä. Tutkielman tavoitteena on esittää matriisien perusteet sekä esitellä joitakin sovelluksia.

Lukiokurssina matriisilaskenta ei ole uusi tuttavuus, sillä moni koulu tarjoaa kyseistä kurssi koulukohtaisena ylimääräisenä kurssina. Mutta koska kurssi ei kuulu opetussuunnitelmaan on aiheeseen lähes mahdotonta löytää sopivaa kurssikirjaa. Matriisilaskennan perusteet olisi hyvä lisä lukion matematiikan opetussuunnitelmaan, sillä aiheessa tulee kerrattua hyvin mekaanista laskutaitoa. Samalla se valmistaisi lukiolaisia jatkokoulutukseen, sillä etenkin matemaattisilla sekä teknillisillä aloilla matriiseihin törmää varmasti. Lukion vuoden 2019 opetussuunitelman yleisten tavoitteiden mukaan lukion matematiikan tulisi esimerkiksi rakentaa pohjaa jatkokoulutusta varten sekä osoittaa matematiikan tärkeys opiskelijalle eri aloilla [9].

Tutkielman sisältö sekä käsitteistö on valittu niin, että se tukee matriisilaskennan laajempaa opiskeluakin ja helpottaa matriiseihin syventymistä mahdollisissa jatkokoulutuksissa. Käytetty termistö on samaa kuin esimerkiksi Turun yliopistossa käytetään.

Tutkielmassa tutustutaan aluksi erilaisiin matriiseja koskeviin käsitteisiin sekä laskusääntöihin. Näiden läpikäyminen on välttämätöntä jatkon ymmärtämisen kannalta. Tutkielman pääaiheena on tutustua kuinka matriisilaskentaa voidaan hyödyntää lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemisessa, ja tätä varten tarvitsemme riittävät pohjatiedot ja -taidot matriisien käyttäytymisestä.

2 Matriisit ja vektorit

Matematiikassa matriisilla tarkoitetaan alkioiden joukkoa, joka on järjestetty riveihin ja sarakkeisiin niin, että ne muodostavat suorakulmaisen taulukon. Matriisin alkiot voivat olla niin lukuja kuin lausekkeitakin. Matriiseilla on monia sovelluksia tekniikan, fysiikan, taloustieteen ja tilastotieteen sekä matematiikan eri aloilla. Tässä monisteessa matriiseja käytetään lineaaristen yhtälörymien käsittelyyn sekä ratkaisemiseen.

Ennen kuin voimme siirtyä lineaarisiin yhtälöryhmiin, on syytä käydä matriiseihin ja vektoreihin liittyviä käsitteitä sekä määritelmiä ja lauseita läpi. Tärkeimmistä määritelmistä on annettu esimerkkejä asian ymmärtämistä tukemaan. Luku pohjautuu lähteisiin [2] ja [3].

2.1 Nimityksiä

Määritelmä 2.1. Taulukkoa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m \times n},$$

jossa alkiot a_{ij} ovat joitakin reaalilukuja, kutsutaan $(m \times n)$-*matriisiksi*, eli toiselta nimeltään *tyyppiä* $m \times n$ *olevaksi matriisiksi*. Matriisien pystyrivejä kutsutaan sarakkeiksi ja vaakarivejä riveiksi. *Matriisin koko* määräytyy näiden rivien ja sarakkeiden perusteella. Jos matriisissa on m riviä ja n saraketta, sen koko on $m \times n$. Tämä luetaan "m kertaa n". Merkintä a_{ij} tarkoittaa matriisin A alkiota, joka on rivillä i ja sarakkeessa j.

Esimerkki 2.2. Matriiseja ovat esimerkiksi

$$(2 \times 2)\text{-matriisi } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$(5 \times 1)\text{-matriisi } \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ ja}$$

$$(1 \times 4) \text{ matriisi } \begin{bmatrix} \pi & -21 & 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

Joissakin lähteissä saatetaan käyttää myös esimerkiksi kaarisulkeita.

Esimerkki 2.3. Esimerkkinä (2×4)-matriisista on

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 & 0 \\ 9 & 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tämän (2×4)-matriisin alkioita ovat $a_{11} = 5$, $a_{12} = 8$,$a_{13} = 1$, $a_{14} = 0$, $a_{21} = 9$, $a_{22} = 10$, $a_{23} = 2$ ja $a_{24} = 4$.

Määritelmä 2.4. Matriisi $A = (a_{ij})_{m\times n}$ on *neliömatriisi*, jos siinä on yhtä monta riviä ja saraketta eli jos $m = n$.

Esimerkki 2.5. Esimerkkinä (2×2)-neliömatriisista on

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matriisit $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ja $B = (b_{ij})_{a\times b}$ ovat keskenään *samankokoiset*, jos ja vain jos niissä on keskenään sama määrä rivejä ja sarakkeita, eli toisin sanoen jos ja vain jos $m = a$ ja $n = b$. Esimerkiksi matriisit $A = (a_{ij})_{4\times 2}$ ja $B = (b_{ij})_{3\times 2}$ ovat keskenään erikokoisia.

Määritelmä 2.6. Matriiseja, joissa on vain yksi sarake tai rivi, kutsutuaan *vektoreiksi*. Pystyvektoreissa sarakkeita on yksi, kun taas vaakavektoreissa rivejä on yksi.

Esimerkki 2.7. Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ on pystyvektori ja}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ on vaakavektori.}$$

Esimerkki 2.8. Matriiseja merkitään yleisesti isoilla kirjaimilla, kun taas vektoreita pienillä kirjaimilla, joiden päälle on piirretty viiva. Myös muita merkintätapoja näkee eri lähteissä. Esimerkiksi matriisi A ja vektori $\bar{v}$ merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 2 & 10 & -5 \\ 9 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja}$$

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 2.9. *Nollamatriisissa* kaikki alkiot ovat nollia.

Määritelmä 2.10. *Identiteettimatriisi* on neliömatriisi, jonka alkiot ovat nollia lukuun ottamatta diagonaalilla esiintyviä alkioita, jotka ovat ykkösiä. Identiteettimatriisia merkitään kirjaimella I. Myös merkintää I_n, jossa n ilmaisee matriisin koon, eli rivien ja sarakkeiden lukumäärän, voidaan käyttää mikäli halutaan korostaa identiteettimatriisin kokoa.

Esimerkki 2.11. Esimerkkeinä nollamatriisista ja identiteettimatriisista ovat

$$\text{nollamatriisi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja}$$

$$\text{identiteettimatriisi } I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2 Peruslaskutoimitukset matriiseille

Matriiseilla voidaan suorittaa myös joitakin peruslaskutoimituksia; niitä voidaan laskea yhteen tai vähentää toisistaan. Niitä voidaan myös kertoa luvuilla tai jopa toisilla matriiseilla. Näitä menetelmiä hyödynnämme myöhemmin lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemisessa, mutta käydään niiden perusteet ensin esimerkkien avulla läpi. Luku perustuu lähteisiin [4] ja [8].

2.2.1 Yhteen- ja vähennyslasku

Matriisien yhteen- ja vähennyslasku on mahdollista vain kun matriisit ovat keskenään samankokoiset. Erikokoisten matriisien yhteen- ja vähennyslaskua ei ole määritelty. Yhteenlaskeminen suoritetaan laskemalla yhteen niin kutsutut matriisien vastinalkiot.

Määritelmä 2.12. Samankokoisten matriisien $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ja $B = (b_{ij})_{m\times n}$ *summa* on

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Esimerkki 2.13. Kun $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, niin

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 3+1 \\ 0+(-2) & 2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Esimerkki 2.14. Esimerkiksi summaa

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 1 & -9 & 2 \end{bmatrix}$$

ei ole määritelty, sillä matriisit ovat erikokoiset.

Määritelmä 2.15. Samankokoisten matriisien $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ja $B = (b_{ij})_{m\times n}$ *erotus* on

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$$

Esimerkki 2.16. Matriisien vähennyslasku toimii vastaavalla tavalla kuin yhteenlasku. Myös perinteiset merkkisäännöt ovat käytössä matriilaskuissa. Esimerkiksi kun $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$, niin

$$\begin{aligned} A - B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -7 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2-(-3) & 6-(-4) \\ 1-(-7) & 0-(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+3 & 6+4 \\ 1+7 & 0+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esimerkki 2.17. Kun $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, niin

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 3-1 \\ 0-(-2) & 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Matriisien yhteenlaskut toteuttavat ominaisuudet

$$\begin{gathered} A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C \ , \\ A + B = B + A \ , \end{gathered}$$

mikäli matriisit A, B, C ovat keskenään samankokoiset.

2.2.2 Matriisin skalaarikertolasku

Mikä tahansa matriisi voidaan kertoa jollakin reaaliluvulla c ja tätä toimitusta kutsutaan skalaarikertolaskuksi. Reaaliluvun c ja matriisin A tulo saadaan kertomalla jokainen matriisin alkio erikseen.

Määritelmä 2.18. Reaaliluvun c ja matriisin $A = (a_{ij})_{m \times n}$ *tulo* on

$$cA = (ca_{ij})_{m \times n}$$

Esimerkki 2.19. Kun $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ja $c = 2$, niin

$$cA = 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

2.2.3 Matriisitulo

Matriiseja voidaan myös kertoa keskenään. Aloitetaan vaaka- ja pystyvektorin kertolaskulla. Siinä summataan yhteen vektorien ensimmäisten alkioiden tulo, toisten alkioiden tulo ja niin edelleen. Näin ollen tulokseksi saadaan uuden matriisin sijaan jokin luku.

Määritelmä 2.20. Vektorin $\overline{v} = (v_i)_{1\times n}$ ja vektorin $\overline{u} = (u_i)_{n\times 1}$ *tulo* on

$$\overline{v}\cdot\overline{u} = v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n = \textstyle\sum_{i=1}^{n} v_iu_i$$

Jotta vektoreiden välinen tulo voidaan laskea, on niissä oltava keskenään yhtä monta alkiota.

Esimerkki 2.21. Lasketaan vektoreiden $\overline{u} = \begin{bmatrix}3 & 9 & 1 & 5\end{bmatrix}$ ja $\overline{u} = \begin{bmatrix}1\\2\\10\\0\end{bmatrix}$ tulo.

$$\overline{u}\cdot\overline{v} = \begin{bmatrix}3 & 9 & 1 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\10\\0\end{bmatrix} = 3\cdot 1 + 9\cdot 2 + 1\cdot 10 + 5\cdot 0 = 31$$

Esimerkki 2.22. Vektoreiden $\overline{u} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ ja $\overline{v} = \begin{bmatrix}-1\\4\\9\\-4\end{bmatrix}$ tuloa ei ole määritelty, sillä niissä on erimäärä alkioita.

Laajennetaan nyt vektoreiden välinen kertolasku kahden matriisin väliseksi kertolaskuksi. Toisin kuin vektoreiden välisessä kertolaskussa, nyt tulo on jokin uusi matriisi.

Määritelmä 2.23. Jos A on $(m\times n)$-matriisi ja B on $(n\times k)$-matriisi, tulomatriisi AB on $(m\times k)$-matriisi, jonka alkioille pätee

$$(AB)_{ij} = \textstyle\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}$$

Matriisien välinen kertolasku voidaan laskea vain mikäli vasemman puoleisen matriisin riveillä on sama määrä alkioita kuin oikean puoleisen sarakkeissa. Toisinsanoen jos matriisi A on $(m\times n)$-matriisi ja B on $(l\times k)$-matriisi, näiden välinen tulo voidaan laskea vain, mikäli $n = l$.

Esimerkki 2.24. Esimerkkinä matriisien välisestä kertolaskusta lasketaan

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\0 & 1 & 3\\2 & 4 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 2\\1 & 3\\9 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 5+4\cdot 1+2\cdot 9 & 1\cdot 2+4\cdot 3+2\cdot 1\\0\cdot 5+1\cdot 1+3\cdot 9 & 0\cdot 2+1\cdot 3+3\cdot 1\\2\cdot 5+4\cdot 1+2\cdot 9 & 2\cdot 2+4\cdot 3+2\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}27 & 16\\28 & 6\\32 & 18\end{bmatrix}.$$

Esimerkki 2.25. Matriisien

$$A = \begin{bmatrix}3 & 4\\9 & 19\\1 & 7\end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix}-2 & 3\\7 & -8\\9 & 5\end{bmatrix}$$

tuloa AB ei ole määritelty, sillä A on (3×2)-matriisi ja B on (3×2)-matriisi, ja $2\neq 3$.

Neliömatriisin tuloa itsensä kanssa voidaan merkitä tuttuun tapaan potensseilla. Esimerkiksi $A^3 = A \cdot A \cdot A$. Huomaa kuitenkin, että vaikka matriisien A ja B tulot AB ja BA olisivat määritelty ja samankokoiset, useimmiten $AB \neq BA$. Matriisitulo ei siis ole vaihdannainen.

Esimerkki 2.26. Esimerkkilaskuista

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ ja}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 17 & 3 \end{bmatrix}$$

nähdään, että matriisien kertolasku ei ole vaihdannainen.

Koska mariisien kertolasku ei ole vaihdannainen, puhutaan vasemmalta ja oikealta kertomisesta.

Esimerkki 2.27. Olkoot matriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ja matriisi $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Kerrotaan matriisi A matriisilla B vasemmalta ja saadaan

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Kerrotaan matriisi A matriisilla B oikealta ja saadaan

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Huomataan siis, että sillä kummalta puolelta matriisia A kerrotaan matriisilla B on merkitystä.

Tulon nollasääntö ei myöskään toimi matriiseille. Voi siis olla, että $AB = 0$, mutta $A \neq 0$ ja $B \neq 0$.

Esimerkki 2.28. Tulon nollasääntö ei ole voimassa matriiseille, kuten esimerkkilaskusta

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nähdään.

2.2.4 Muita matriisitulon ominaisuuksia

Lause 2.29. *Matriisitulo toteuttaa seuraavat laskulait, kun kyseiset matriisitulot ovat määriteltyjä:*

- *Kertolasku luvun kanssa:*

$$A \cdot (cB) = (cA) \cdot B = cAB,$$

  missä c on jokin reaaliluku.

- *Osittelulaki:*

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= AB + AC \\ (B + C) \cdot A &= BA + CA \end{aligned}$$

- *Liitännäisyys:*

$$A(BC) = (AB)C = ABC$$

Todistus. Todistetaan näistä liitännäisyys laki. Merkitään todistusta varten matriisien koot seuraavasti $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times k}$ ja $C = (c_{ij})_{k\times l}$. Matriisitulon määritelmän perusteella saadaan, että tulon BC alkioille pätee

$$\begin{aligned} (BC)_{ij} &= \sum_{t=1}^{k} b_{it}c_{tj} \\ &= (d_{ij})_{n\times l}. \end{aligned}$$

Kerrotaan tämä vielä matriisilla A ja saadaan

$$\begin{aligned} (A(BC)) &= \sum_{s=1}^{n} a_{is}d_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^{n} a_{is}\left(\sum_{t=1}^{k} b_{st}c_{tj}\right). \end{aligned}$$

Ryhmitellään saatua summaa uudelleen ja saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n} a_{is}\left(\sum_{t=1}^{k} b_{st}c_{tj}\right) &= \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{k} a_{is}b_{st}c_{tj} \\ &= \sum_{t=1}^{k}(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{st})c_{tj} \\ &= ((AB)C) \end{aligned}$$

Tästä saadaan että

$$(A(BC))_{m\times l} = ((AB)C)_{m\times l}$$

eli $A(BC) = (AB)C$. Osittelulaki sekä kertolasku luvun kanssa voitaisiin todistaa vastaavalla tavalla. □

2.2.5 Identiteettimatriisi

Identiteettimatriisi määriteltiin jo aikaisemmin. Se on siis neliömatriisi, jonka diagonaalilla (vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan) olevat alkiot ovat ykkösiä ja muut alkiot ovat nollia. Identiteettimatriisi käyttäytyy hyvin pitkälti kuin reaalilukujen ykkönen, koska sillä kertominen ei muuta toista matriisia.

Lemma 2.30. *Identiteettimatriiseille siis on voimassa*

$$I \cdot A = A \cdot I = A,$$

kunhan matriisit ovat sen kokoisia, että tulo on määritelty.

Todistus. Todistus on kohtuullisen helppo ja ohitetaan sen vuoksi. □

Havainnollistetaan tätä juuri esitettyä lemmaa seuraavalla esimerkillä.

Esimerkki 2.31. Identiteettimatriisilla kertominen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

ei muuttanut matriisia, niinkuin lemmassakin jo todettiin.

2.2.6 Käänteismatriisi

Määritelmä 2.32. Oletetaan, että matriisi A on $(n \times n)$-matriisi. Jos matriisi B toteuttaa ehdot

$$AB = BA = I,$$

niin B on matriisin A *käänteismatriisi* ja merkitään $B = A^{-1}$. Jos matriisilla A on käänteismatriisi, niin A on *säännöllinen* (toisin sanoen *kääntyvä*). Jos käänteismatriisia ei ole olemassa, on matriisi *singulaarinen.*

Lause 2.33. *Jokaiselle $n \times n$-matriisille on olemassa korkeintaan yksi käänteismatriisi.*

Todistus. Jos matriiseista B ja C kumpikin olisivat matriisin A käänteismatriiseja, niin $AB = I = BA$ ja $AC = I = CA$. Tällöin laskusääntöjen nojalla

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

□

Esimerkki 2.34. Matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ovat toistensa käänteismatriiseja, sillä

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja}$$
$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Voidaan siis merkitä $A = B^{-1}$ ja $B = A^{-1}$. Jatkossa riittää todeta vain toinen ehdoista $AB = I$ tai $BA = I$, sillä voidaan näyttää, että mikäli toinen toteutuu, toteutuu myös toinen.

Kaikilla neliömatriiseilla ei kuitenkaan ole käänteismatriisia.

Esimerkki 2.35. Matriisilla

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ei ole käänteismatriisia, sillä

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2.7 Matriisin transpoosi

Määritelmä 2.36. Jos matriisin

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

vaakarivit vaihdetaan pystyriveiksi ja päinvastoin, alkioiden järjestys muuten säilyttäen, saadaan A:n *transponoitu matriisi*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ji})_{n \times m}.$$

Transponointi ei siis muuta matriisin diagonaalia.

Esimerkki 2.37. Esimerkkejä matriisien transpooseista ovat

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Transpoosi siis tekee $(m \times n)$-matriisista $(n \times m)$-matriisin.

Lause 2.38. *Transpoosin muita ominaisuuksia ovat:*

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(rA)^T = rA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- *jos lisäksi A on neliömatriisi ja kääntyvä, myös A^T on kääntyvä ja $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Todistetaan seuraavaksi näistä kaksi viimeisimpää.

Todistus. Olkoon matriisi $A = (a_{ij})_{n\times m}$ sekä $B = (b_{ij})_{m\times k}$. Silloin näiden tulomatriisi $AB = C$ on määritelty ja sen koko on $n \times k$ sekä sen alkio c_{ij} voidaan kirjoittaa muodossa

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}.$$

Matriisi B^T on $(k\times m)$-matriisi ja A^T on vastaavasti $(m\times n)$ matriisi. Näiden välinen tulomatriisi $B^T A^T = D$ on siis määritelty ja tyyppiä $k \times n$. Tulomatriisin alkio d_{ji} voidaan kirjoittaa muodossa

$$(B^T)_{j1}(A^T)_{1i} + (B^T)_{j2}(A^T)_{2i} + \cdots + (B^T)_{jm}(A^T)_{mi}.$$

Tämä voidaan vielä sieventää muotoon

$$b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{mj}a_{im}.$$

Se on siis sama kuin matriisin AB alkio c_{ij}. Näin ollen $(AB)^T = B^T A^T$.
Viimeinen kohta saadaan hyödyntämällä äsken todistettua kohtaa. Edellisen kohdan perusteella siis

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$

$\square$

3 Lineaariset yhtälöryhmät

Koulussa lineaarisia yhtälöryhmiä on käsitelty jo peruskoulusta saakka, niitä ei vain ole nimitetty lineaarisiksi yhtälöiksi. Tässä luvussa tutustumme lineaarisiin yhtälöihin ja yhtälöryhmiin, esitellään uusi tapa niiden ratkaisemiseen sekä tutustutaan lineaaristen yhtälöryhmien esittämiseen matriisimuodossa. Luku perustuu lähteeseen [?].

3.1 Lineaarinen yhtälö ja yhtälöryhmä

Lineaarinen yhtälö on toiselta, ehkä tutummalta nimeltään ensimmäisen asteen yhtälö. Siinä siis jokainen termi on joko vakio tai jokin muuttuja kerrottuna vakiolla. Lineaarisissa yhtälöissä ei siis esinny muuttujaa potensseihin korotettuina tai kerrottuna toisella muuttujalla.

Määritelmä 3.1. Yhtälö on *lineaarinen* mikäli se voidaan kirjoittaa muodossa

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

missä $a_1, a_2 \dots a_n$ ja b ovat tunnettuja reaalilukuja eli vakioita ja $x_1, x_2, \dots, x_n$ muuttujia.

Esimerkki 3.2. Esimerkiksi seuraavat yhtälöt

$$\begin{gathered} 5x + 10y = 12 \text{ ja} \\ \tfrac{7}{10}x + 9 = 6y - z \end{gathered}$$

ovat lineaarisia, mutta yhtälöt

$$\begin{gathered} 6x^2 = y, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \text{ ja} \\ y + 4xy = 7 \end{gathered}$$

eivät ole.

Lineaarisessa yhtälöryhmässä on vähintään kaksi lineaarista yhtälöä.

Määritelmä 3.3. *Lineaarinen yhtälöryhmä* on muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases},$$

missä $a_{11}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m$ ovat vakioita ja $x_1, x_2 \dots x_n$ ovat muuttujia.

Lukuja $a_{11}, \dots, a_{mn}$ kutsutaan yhtälöryhmän kertoimiksi ja lukuja $b_1, b_2, \dots b_m$ vakioiksi. Monesti tuntemattomia merkitään kirjaimilla x, y ja z.

Esimerkki 3.4. Esimerkiksi yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ -x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

on lineaarinen.

Mikäli yhtälöryhmä koostuu vain kahdesta yhtälöstä, on kyseessä *yhtälöpari.*

Esimerkki 3.5. Esimerkiksi

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x = 6 \end{cases}$$

on lineaarinen yhtälöpari.

3.2 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen

Yhtälöryhmän ratkaisu koostuu niistä muuttujien arvoista, jotka toteuttavat kyseessä olevat yhtälöt. Ratkaisuja voi olla nolla, yksi tai useampia.

Peruskoulussa on jo opittu ratkaisemaan lineaarisia yhtälöpareja. Lineaaristen yhtälöryhmien ratkaiseminen perustuu siihen, että yhtälöitä voidaan laskea puolittain yhteen (tai vähentää toisistaan) tai kertoa jollakin nollasta poikkeavalla luvulla ilman että ratkaisu muuttuu.

Esimerkki 3.6. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

kahdella eri tavalla.

Tapa 1: Sijoitus. Ratkaistaan ylempi yhtälö muuttujan y suhteen, jolloin saadaan $y = 1 + x$. Tämä voidaan sijoittaa alempaan yhtälöön, jolloin saamme yhtälön $2x - (1 + x) = 0$ ja tästä saadaan ratkaistuksi muuttujan x arvoksi 1. Sijoitetaan saatu $x = 1$ ylempään yhtälöön ja saadaan yhtälö $-1+y = 1$. Tämän ratkaistuamme saadaan, että $y = 2$. Saimme siis yhtälöparin ratkaisuksi $x = 1$ ja $y = 2$.

Tapa 2: Yhtälöiden yhteenlasku. Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen.

$$\begin{array}{c} \begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \\ \hline x + 0y = 1 \end{array}$$

Sijoitetaan saatu $x = 1$ ylempään yhtälöön ja saadaan

$$-1 + y = 1.$$

Tästä vielä muokkaamalla saadaan, että $y = 2$, jolloin ratkaisuksi saatiin siis $x = 1$ ja $y = 2$, joka on siis sama ratkaisu kuin ensimmäisellä tavalla.

Yhtälöparista tai -ryhmästä riippuen valitaan yleensä jompikumpi ratkaisu tapa. Molemmat tuottavat oikean ratkaisun, mutta monesti toinen on selkeästi lyhyempi ja nopeampi tapa.

3.3 Gaussin eliminaatiomenetelmä

Lineaarisille yhtälöryhmille on kuitenkin muitakin ratkaisutapoja, joista yksi on nimeltään Gaussin eliminaatiomenetelmä. Gaussin eliminaatiomenetelmässä ideana on muokata yhtälöryhmää tiettyjä rivioperaatioita käyttämällä niin, että se on helpompi ratkaista. Rivioperaatiot eivät muuta yhtälöryhmän ratkaisua, vaan sekä alkuperäisellä että muokatulla yhtälöryhmällä on sama ratkaisu.

Tarkemmin sanottuna Gaussin eliminaatiomenetelmässä on tarkoituksena saada muokattua yhtälöryhmä muotoon, jossa ensimmäinen yhtälö sisältää kaikki muuttujat. Seuraava sisältää kaikki paitsi ensimmäisen muuttujan ja niin edelleen, kunnes viimeinen yhtälö sisältää vain yhden muuttujan. Tällöin viimeinen muuttuja on helppo ratkaista ja sen avulla lähteä laskemaan muita muuttujia.

Lause 3.7. *Rivioperaatiot*

- *yhtälöiden vaihto keskenään,*
- *yhtälön kertominen nollasta poikkeavalla luvulla sekä*
- *yhtälön kertominen jollakin reaaliluvulla ja sen lisääminen toiseen yhtälöön*

eivät muuta yhtälön ratkaisuja.

Esimerkki 3.8. Ratkaistaan seuraava lineearinen yhtälöpari soveltamalla Gaussin eliminaatiomenetelmää

$$\cdot(-1)\downarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Lisätään ensimmäinen yhtälö toiseen luvulla -1 kerrottuna ja saadaan

$$\cdot(-1)\uparrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 0 = -1 \end{cases}$$

Edelleen lisäämällä toinen yhtälö ensimmäiseen luvulla -1 kerrottuna saadaan

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

3.4 Lineaaristen yhtälöryhmien ominaisuuksia

Yhtälöryhmän ratkaisuja ovat ne muuttujien arvot, joilla jokainen ryhmän yhtälöistä on tosi saman aikaisesti. Mikäli yhtälöt eivät ole tosia saman aikaisesti millään muuttujien arvoilla, yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Lause 3.9. *Lineaarisella yhtälöryhmällä on ratkaisuja joko*

- *tasan yksi,*
- *ei lainkaan tai*
- *äärettömän monta.*

Käydään jokaisesta kohdasta esimerkki läpi.

Esimerkki 3.10. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x \qquad = 4 \end{cases}$$

Alemmasta yhtälöstä saadaan ratkaistua $x = 2$. Sijoittamalla tämä ylempään yhtälöön saadaan $2 + y = 2$ ja tästä voidaan ratkaista $y = 0$. Näin saatiin yhtälöparille ainoaksi ratkaisuksi $x = 2$ ja $y = 0$.

Esimerkki 3.11. Tarkastellaan lineaarista yhtälöparia

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

On selvää ettemme voi löytää sellaisia lukuja x ja y, että molemmat yhtälöt toteutuisivat saman aikaisesti. Yhtälöparin mukaan $2 = 0$, luvuista x ja y riippumatta. Yhtälöparilla ei siis ole ratkaisua.

Esimerkki 3.12. Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Huomataan nopeasti, että alempi rivi on sama kuin ylempi, mutta kerrottuna luvulla kaksi. Toinen yhtälö ei siis anna lisätietoa x:n ja y:n arvoista. Yhtälöpari voidaan siis kirjoittaa lyhyemmin yhtenä yhtälönä $x + y = 2$, jolle tiedämme olevan olemassa äärettömän monta ratkaisua. Ratkaistaan tämä vielä havainnollistamisen vuoksi Gaussin eliminaatiomenetelmällä.

$$\cdot(-2) \downarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Lisätään ensimmäinen yhtälö toiseen luvulla -2 kerrottuna ja saadaan

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}.$$

Nyt alempi yhtälö toteutuu kaikilla x ja y arvoilla. Yhtälöpari voidaan siis kirjoittaa lyhyemmin yhtenä yhtälönä

$$x + y = 2,$$

jolle on olemassa äärettömän monta ratkaisua.

3.5 Lineaarisen yhtälöryhmän matriisimuoto

Määritelmä 3.13. Olkoot lineaarisessa yhtälöryhmässä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

m yhtälöä ja n tuntematonta, missä kertoimet a_{ij} ja termit b_j ovat vakioita sekä symbolit x_i muuttujia. Kaikki yhtälöryhmän yhtälöt voidaan esittää kahden $m \times 1$-vektorin yhtäsuuruutena seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Jokaisella rivillä esiintyvät samat muuttujat x_i, joten ne voidaan kirjoittaa erilliseen vektoriin ja esittää yhtälön vasen puoli matriisien tulona seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Otetaan vielä käyttöön lyhyemmät merkinnät

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ ja } \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Nyt koko yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa matriisimuotoon

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b}$$

Esimerkki 3.14. Lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ -x + y - 2z = 2 \\ 3x - 5y + 3z = 7 \end{cases}$$

voidaan esittää matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Lauseen 3.7. mukaan lineaariselle yhtälöryhmälle voidaan suorittaa tiettyjä rivioperaatioita ilman, että yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu. Vastaavia operaatioita voidaan tehdä myös matriiseille:

- matriisin kahden rivivektorin vaihtaminen keskenään,
- rivivektorin kertominen nollasta poikkeavalla luvulla ja
- rivivektorin kertominen reaaliluvulla ja lisääminen toiseen rivivektoriin.

Näin saatua uutta matriisia vastaavalla lineaarisella yhtälöryhmällä on samat ratkaisut kuin alkuperäistäkin matriisia vastaavalla.

Määritelmä 3.15. Matriisi A on *riviekvivalentti* matriisin B kanssa, jos B saadaan suorittamalla matriisille A rivioperaatioita.

Esimerkki 3.16. Esimerkiksi matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ovat keskenään riviekvivalentteja, sillä matriisista A voidaan muokata matriisi B suorittamalla rivioperaatioita seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Lisätään ensimmäinen rivi toiseen riviin kerrottuna luvulla -1, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seuraavaksi kerrotaan alempi rivi luvulla -1 ja lisätään se ylempään riviin ja saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lopuksi vielä lisätään ensimmäinen rivi toiseen riviin kerrottuna luvulla -1, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

4 Matriisit

Tässä luvussa opitaan ratkaisemaan lineaarinen yhtälöryhmä matriisimuodon avulla. Ratkaisu perustuu käänteismatriisin löytämiseen ja sillä kertomiseen. Tätä varten tarvitsemme vielä muutaman käsitteen matriiseille. Luku perustuu läheitiin [3] ja [7].

4.1 Determinantti

Determinantti on neliömatriisista laskettava luku, jonka avulla voidaan tarkistaa onko yhtälöryhmällä yksikäsitteistä ratkaisua. Determinantilla on myös monia muita ominaisuuksia. Determinantti kertoo onko matriisilla A käänteismatriisi A^{-1} eli onko matriisi A säännöllinen.

Määritelmä 4.1. Neliömatriisin $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *determinantti* on

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \text{ kun } i = 1, \dots, n,$$

missä matriisi A_{ij} saadaan poistamalla matriisista A i:nnes rivi ja j:nnes sarake. Determinantti voidaan siis laskea niin sanotusti kehittämällä se i:nen vaakarivin mukaan. Kaavaa toistetaan kunnes matriisi A_{ij} on 2×2 -matriisi, jolloin sen determinantti voidaan laskea kaavalla

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Esimerkki 4.2. Lasketaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

determinantti kehittämällä se ensimmäisen rivin mukaan.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) - 3 \cdot (0 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1)) + 2 \cdot (0 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) \\ &= 1 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Samaan tulokseen päädyttäisiin kehittämällä matriisi jonkin muun rivin suhteen.

Määritelmä 4.3. Neliömatriisia kutsutaan *alakolmiomatriisiksi*, kun sen päälävistäjän yläpuolella olevat alkiot ovat nolla, eli toisin sanoen jos $a_{ij} = 0$, kun $i < j$. Vastaavasti neliömatriisia kutsutaan *yläkolmiomatriisiksi*, jos $a_{ij} = 0$, kun $i > j$.

Esimerkki 4.4. Esimerkiksi matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

on alakolmiomatriisi ja matriisi

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

on yläkolmiomatriisi.

Seuraus 4.5. *Alakolmiomatriisin A determinantti lasketaan määritelmän 4.1 mukaan seuraavasti:*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \dots = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}. \end{aligned}$$

Vastaavasti yläkolmiomatriisin determinantti on diagonaalin alkioiden tulo.

Esimerkki 4.6. Lasketaan edellisen esimerkin matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

determinantti muokkaamalla matriisi A vaakarivimuunnoksilla yläkolmiomatriisiksi. Aloitetaan lisäämällä ensimmäinen rivi alimpaan riviin, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kerrotaan seuraavaksi toinen rivi luvulla $\frac{-5}{3}$ ja lisätään se kolmanteen riviin. Näin saadaan yläkolmiomatriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} \end{bmatrix}.$$

Nyt voidaan laskea detereminantti soveltaen yläkomiomatriisin determinantin kaavaa, jonka mukaan determinantti on

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot \tfrac{14}{3} = 14.$$

Huomataan, että tulos on sama kuin edellisessä esimerkissä.

Muita hyödyllisiä determinantin perusominaisuuksia ovat seuraavat:

- Vaaka- tai pystyrivin yhteinen tekijä voidaan siirtää koko determinantin tekijäksi seuraavasti

  $$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ cA_k \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}, \text{ missä } A_i\text{:t ovat matriisin } A \text{ vaakarivejä.}$$

  Vastaava on voimassa myös pystyriveille.

- Jos jokin pystyrivi on kahden pystyvektorin summa, determinantti voidaan hajoittaa myös vastaavaksi summaksi seuraavasti

  $$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k + B_k \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B_k \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}, \text{ missä } A_i\text{:t ovat matriisin } A \text{ vaakarivejä.}$$

- Jos determinantissa jokin pystyrivi tai vaakarivi koostuu pelkistä nollista, niin $\det(A) = 0$.

- Jos matriisin kaksi vaakariviä tai pystyriviä vaihdetaan keskenään, niin determinantin merkki vaihtuu.

- Mikäli determinantissa on kaksi samaa pysty- tai vaakariviä, niin $\det(A) = 0$.

- Determinantti pysyy samana, mikäli jokin vaakarivi lisätään toiseen kerrottuna jollakin vakiolla.

Determinantin perusominaisuuksien todistukset löytyvät lähteestä [6].

4.2 Käänteismatriisin löytäminen

Matriisin A sanottiin olevan säännöllinen, eli kääntyvä, jos ja vain jos sillä on olemassa käänteismatriisi A^{-1}. Nyt opimme löytämään tämän käänteismatriisin.

Lause 4.7. *Matriisi A on säännöllinen, jos ja vain jos sen determinantti on erisuuri kuin nolla eli $det(A) \neq 0$.*

Todistus. Todistus sivuutetaan. □

Neliömatriisin A käänteismatriisi voidaan laskea esimerkiksi Gaussin ja Jordanin menetelmällä, kuten lähteessä [7] on todistettu. Vastaavaa menetelmää (Gaussin eliminaatiomenetelmää) käytettiin lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseen. Gaussin eliminaatiomenetelmässä tavoite oli saada yhtälöryhmä muotoon, jossa ensimmäinen yhtälö sisältää kaikki muuttujat, seuraava yhtälö sisältää kaikki paitsi ensimmäisen muuttujan ja niin edelleen.

Gaussin ja Jordanin menetelmässä idea on sama, mutta käsitellään yhtälöryhmien sijaista matriiseja. Siinä alkuperäisen matriisin rinnalle asetetaan saman kokoinen identiteettimatriisi seuraavasti

$$(A \mid I) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & | & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Tämän jälkeen Gaussin eliminaatiomenetelmää soveltaen muokataan matriisista A indentiteettimatriisi. Samalla alkuperäisestä identiteettimatriisista muokkautuu käänteismatriisi A^{-1}.

Esimerkki 4.8. Etsitään matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi A^{-1} soveltaen Gaussin ja Jordanin menetelmää. Aluksi asetetaan matriisi A ja saman kokoinen identiteettimatriisi I_3 vierekkäin seuraavasti

$$(A \mid I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aloitetaan matriisin A muokkaaminen identiteettimatriisiksi lisäämällä ensimmäinen rivi toiseen riviin kerrottuna luvulla 1 ja kolmanteen riviin kerrottuna luvulla -1, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seuraavaksi kerrotaan toinen rivi luvulla -2 ja lisätään se ensimmäiseen riviin, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & | & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lopuksi vielä lisätään kolmas rivi ensimmäiseen riviin kerrottuna luvulla -3, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tästä nähdään, että käänteismatsiisi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lause 4.9. *Olkoon A säännöllinen matriisi. Silloin*

$$AB = AC \iff B = C$$

ja

$$DA = EA \iff D = E,$$

kun kyseessä olevat matriisitulot ovat määriteltyjä.

Todistus. Oikealta vasemmalle väitteet ovat selkeät. Riittää siis että todistetaan väitteet vasemmalta oikealle. Kerrotaan käänteismatriisilla A^{-1} vasemmalta ja saadaan

$$\begin{aligned} AB = AC &\Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \\ &\Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \\ &\Rightarrow IB = IC \\ &\Rightarrow B = C \end{aligned}$$

Implikaatio $DA = EA \Rightarrow D = A$ todistetaan samalla tavalla, mutta kertomalla käänteismatriisilla A^{-1} oikealta. □

4.3 Cramerin sääntö

Cramerin säännön avulla voidaan ratkaista lineaarisia yhtälöryhmiä.

Lause 4.10. *Olkoon A tyyppiä $n \times n$ oleva säännöllinen neliömatriisi. Käytetään merkintää A_{ij} matriisista, joka on saatu poistamalla matriisista A rivi i ja sarake j. Käänteismatriisin alkiot saadaan kahden determinantin osamääränä seuraavasti*

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} det(A_{ji})}{det(A)}.$$

Käänteismatriisiksi saadaan siis

$$A^{-1} = \tfrac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} +det(A_{11}) & -det(A_{12}) & +det(A_{13}) & \dots & \pm det(A_{1n}) \\ -det(A_{21}) & +det(A_{22}) & -det(A_{23}) & \dots & \pm det(A_{2n}) \\ +det(A_{31}) & -det(A_{32}) & +det(A_{33}) & \dots & \pm det(A_{3n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm det(A_{n1}) & \pm(A_{n2}) & \pm(A_{n3}) & \dots & \pm det(A_{nn}) \end{bmatrix}^T.$$

Jos lausetta 4.10. käytetään matriisiin $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alimatriiseiksi saadaan seuraavat (1×1)-matriisit

$$A_{11} = d, A_{12} = c, A_{21} = b \text{ ja } A_{22} = a.$$

Näiden alimatriisien determinantit ovat kyseiset luvut itsessään, jolloin käänteismatriisiksi saadaan

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} det(A_{11}) & -det(A_{12}) \\ -det(A_{12}) & det(A_{22}) \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esimerkki 4.11. Todistetaan, että säännöllisen (2×2)-matriisin $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ käänteismatriisi on $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Huomataan että,

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & 0 \\ 0 & ad-cb \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Näin ollen säännöllisen (2×2)-matriisin A käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \tfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 4.12. Lasketaan matriisin $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ käänteismatriisi soveltaen Cramerin sääntöä, kun tiedetään että $\det(A) = -2$. Lauseen 4.7. mukaan matriisi on säännöllinen, sillä $\det(A) = -2 \neq 0$, joten sen käänteismatriiksi saadaan lauseen 4.10. mukaan

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{12}) & \det(A_{13}) \\ -\det(A_{21}) & \det(A_{22}) & \det(A_{23}) \\ \det(A_{31}) & \det(A_{32}) & \det(A_{33}) \end{bmatrix}^T \\
&= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\
&= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -7 \end{bmatrix}^T \\
&= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 3 & -8 & -7 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ -3 & 8 & 7 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Lause 4.13. *(Cramerin sääntö). Jos yhtälöryhmän*

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = c_1 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = c_n \end{cases}
$$

kerroinmatriisi $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *on kääntyvä, niin ryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu*

$$x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)},$$

jossa A_j *on matriisi, joka saadaan kun matriisista* A *korvataan pystyrivi* j *pystyrivillä* $(c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$

Todistus. Todistus on esitetty lähteessä [1]. □

Esimerkki 4.14. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -4x + y = -9 \end{cases}$$

käyttämällä edellistä lausetta. Nyt siis kerroinmatriisi on

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

ja sen determinantti

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-4) = 14.$$

Kerroinmatriisi on siis kääntyvä ($\det(A) = 14 \neq 0$). Nyt ryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu

$$\begin{cases} x = \frac{det(A_1)}{\det(A)} \\ y = \frac{det(A_2)}{\det(A)} \end{cases}.$$

Matriisit A_1 ja A_2 saadaan, kun sijoitetaan pystyrivien 1 ja 2 paikalle $(1, -9)^T$. Lasketaan matriisien $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$ ja $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}$ determinantit ja saadaan $\det(A_1) = 28$ ja $\det(A_2) = -14$. Sijoitetaan nämä ratkaisun kaavaan, ja saadaan ratkaisuksi

$$\begin{cases} x = \frac{28}{14} = 2 \\ y = \frac{-14}{14} = -1 \end{cases}.$$

4.4 Yhtälöryhmän ratkaisu matriisimuodossa

Seuraus 4.15. *Jos yhtälöryhmän*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = c_1 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = c_n \end{cases}$$

kerroinmatriisi $A = (a_{ij})_{n \times n}$ on säännöllinen, niin yhtälöryhmällä $A\bar{x} = \bar{c}$ on yksikäsitteinen ratkaisu, missä $\bar{x}$ on muuttujista x_i muodostettu vektori ja $\bar{c}$ on vakioista c_i muodostettu vektori. Tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Todistus. Kertomalla alkuperäinen lineaarinen yhtälöryhmä matriisimuodossa vasemmalta käänteismatriisilla A^{-1} saadaan $Ax = c \iff x = A^{-1}c$. □

Esimerkki 4.16. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

käyttämällä käänteismatriisia. Nyt kerroinmatriisi on $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Aikaisemmin esimerkissä 2.34 totesimme, että A on säännöllinen ja sen käänteismatriisi $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Yhtälöpari voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Seurauksen 4.15 mukaan yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 12 + 5 \cdot 5 \\ 1 \cdot 12 + (-2) \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Eli siis $x = 1$ ja $y = 2$.

Käydään vielä selvyyden vuoksi yksi esimerkki lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisesta läpi alusta loppuun.

Esimerkki 4.17. Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0. \\ -x \qquad - z = 1 \end{cases}$$

Aloitetaan muodostamalla yhtälöryhmästä kerroinmatriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ja etsitään sen käänteismatriisi A^{-1} soveltaen Gaussin ja Jordanin menetelmää. Aloitetaan asettamalla vierekkäin matriisi A ja saman kokoinen identiteettimatriisi I_3 seuraavasti

$$(A \mid I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aloitetaan lisäämällä ensimmäinen rivi toiseen riviin kerrottuna luvulla -2 ja kolmanteen riviin kerrottuna luvulla 1, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seuraavaksi lisätään toinen rivi ensimmäiseen ja kolmanteen kerrotuna luvulla 1, jolloin saadaan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Lisätään vielä kolmas rivi ensimmäiseen riviin kerrottuna luvulla -2 ja toiseen riviin kerrottuna luvulla -3, jolloin saadaan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Kerrotaan vielä toinen rivi luvulla -1 ja saadaan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Tästä nähdään että käänteismatriisi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyt siis tiedämme, että kerroinmatriisi A on säännöllinen, joten yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sijoitetaan käänteismatriisi ja ratkaistaan yhtälöryhmä seuraavasti

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \\ -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ -1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eli siis yhtälöryhmän ratkaisu on $x = -2$, $y = 3$ ja $z = 1$.

5 Vektorien ristitulo

Tässä luvussa opitaan mitä yhteistä on vektorien ristitulolla sekä suunnikkaan pinta-alalla. Luku perustuu lähteisiin [4] ja [5].

Vektoreille on määritelty avaruudessa operaatio, jota kutsutaan ristituloksi tai vektorituloksi. Määritellään ristitulo avaruudessa $\mathbb{R}^3$ eräänä determinanttien sovelluksena. Tarkastellaan seuraavaa tulosta

$$\det \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = 0 = \det \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix},$$

missä $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ja $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Tuloksen ensimmäinen matriisi on siis tyyppiä 3×3 oleva matriisi, joka vaakarivejä ovat vektorit $\bar{u}$, $\bar{u}$ ja $\bar{v}$. Determinantti on nolla determinanttien perusominaisuuksien perusteella, sillä matriisissa on kaksi samaa vaakariviä. Kehitetään nämä determinantit niiden ensimmäisten vaakarivien suhteen ja saadaan

$$\det \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = u_1 C_{11} + u_2 C_{12} + u_3 C_{13}$$

ja

$$\det \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = v_1 C_{11} + v_2 C_{12} + v_3 C_{13}.$$

Näissä komplementit C_{ij} ovat molemmissa matriiseissa samat

$$C_{11} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \; C_{12} = -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \text{ ja } C_{13} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Summia $u_1 C_{11} + u_2 C_{12} + u_3 C_{13}$ ja $v_1 C_{11} + v_2 C_{12} + v_3 C_{13}$ kutsutaan vektoreiden u ja v sisätuloiksi vektorin (C_{11}, C_{12}, C_{13}) kanssa. Vektoreiden sisätulo määritellään vastaavasti yleisemminkin, kuten seuraavassa määritelmässä nähdään.

Määritelmä 5.1. Vektoreiden $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ja $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *sisätulo* eli *pistetulo* on

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Lause 5.2. *Vektoreiden sisätulot toteuttavat seuraavat ominaisuudet, kun $\bar{v}$, $\bar{u}$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$:*

- *Jos $\bar{u} = 0$, niin $(\bar{u}, \bar{u}) = 0$, muulloin $(\bar{u}, \bar{u}) > 0$,*
- $(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v}, \bar{u})$,
- $(\bar{u} + \bar{v}, \bar{w}) = (\bar{u}, \bar{w}) + (\bar{v}, \bar{w})$ *ja*
- $(a\bar{u}, \bar{v}) = a(\bar{u}, \bar{v})$, *kun a on jokin reaaliluku.*

Todistus. Todistetaan sisätulon ensimmäinen ominaisuus. Olkoon $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Kun vektorin $\bar{u}$ jokin termi u_i on erisuuri kuin nolla, niin sisätulon $(\bar{u}, \bar{u}) = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$, jokin termi $u_i^2 \neq 0$ ja lisäksi $u_i^2 > 0$. Sisätulo on siis aina ei-negatiivinen ja nolla vain kun $\bar{u} = 0$.

Muiden kohtien todistukset onnistuisi helposti käyttäen reaalilukujen ominaisuuksia sekä sisätulon määritelmää. □

Määritelmä 5.3. Vektoreiden $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ ja $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ *ristitulo* eli *vektoritulo* on vektori

$$\begin{aligned}\bar{u} \times \bar{v} &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)\end{aligned}$$

Esimerkki 5.4. Lasketaan vektoreiden $\bar{u} = (3, 1, 2)$ ja $\bar{v} = (1, 2, 3)$ ristitulo ja saadaan

$$\begin{aligned}\bar{u} \times \bar{v} &= (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2, 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3, 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1) \\ &= (-1, -7, 5).\end{aligned}$$

Ristitulon sovelluksia voidaan hyödyntää esimerkiksi kohtisuoria vektoreita etsiessä.

Määritelmä 5.5. Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{u}$ ovat *ortogonaaliset* eli *kohtisuorassa toisiaan vasten*, jos $\bar{v} \cdot \bar{u} = 0$. Tälllöin voidaan merkitä $\bar{v} \perp \bar{u}$.

Lause 5.6. *Vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ ovat kohtisuorassa ristituloaan $\bar{u} \times \bar{v}$ vastaan. Eli*

$$(\bar{u} \times \bar{v}) \perp \bar{u} \textit{ ja } (\bar{u} \times \bar{v}) \perp \bar{v}.$$

Todistus. Huomataan, että

$$\begin{aligned}(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{u} &= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \cdot (u_1, u_2, u_3) \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2) \cdot u_1 + (u_3v_1 - u_1v_3) \cdot u_2 + (u_1v_2 - u_2v_1) \cdot u_3 \\ &= u_2v_3u_1 - u_3v_2u_1 + u_3v_1u_2 - u_1v_3u_2 + u_1v_2u_3 - u_2v_1u_3 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Vektorit $(\bar{u} \times \bar{u})$ ja $\bar{u}$ ovat siis kohtisuorassa toisiaan vastaan. Väitteen toinen osa osoitetaan samalla tavalla. □

Lause 5.7. *Vektoreille $\bar{u}$, $\bar{v}$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ pätee seuraavat laskusäännöt:*

- $\bar{v} \times \bar{w} = -(\bar{w} \times \bar{v})$,
- $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}$,
- $c(\bar{v} \times \bar{w}) = (c\bar{v}) \times \bar{w} = \bar{v} \times (c\bar{w})$, *kun c on jokin reaaliluku,*
- $\bar{v} \times \bar{v} = \bar{0}$,
- $\bar{0} \times \bar{v} = \bar{0}$ *ja* $\bar{v} \times \bar{0} = \bar{0}$ *ja*

- $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$.

Todistus. Todistukset seuraavat ristitulon määritelmästä. □

Ristitulolla on myös olemassa pistetuloon liittyviä sääntöjä. Niitä varten tarvitsemme määritelmän vektorin pituudelle.

Lause 5.8. *Vektorin $\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ pituudelle $|\bar{v}|$ saadaan sisätulon avulla seuraava kaava:*

$$|\bar{v}| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Todistus. Tämä voidaan todistaa helposti pythagoraan lauseen avulla. □

Lause 5.9. *Olkoot $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$, tällöin pätee*

- $(\bar{u} \times \bar{c}) \times \bar{w} = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{u}$,
- $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{w}$ *ja*
- $|\bar{v} \times \bar{w}|^2 = |\bar{v}|^2 |\bar{w}|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2$ *(Lagrangen identiteetti).*

Todistus. Todistetaan Lagrangen identiteetti käyttämällä lauseen 5.5. viimeistä kohtaa ja lauseen 5.7. ensimmäistä kohtaa ja saadaan

$$\begin{aligned}
|\bar{v} \times \bar{w}|^2 &= (\bar{v} \times \bar{w}) \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) \\
&= ((\bar{v} \times \bar{w}) \times \bar{v}) \cdot \bar{w} \\
&= ((\bar{v} \cdot \bar{v})\bar{w} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{v}) \cdot \bar{w} \\
&= (|\bar{v}|^2 \bar{w} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{v}) \cdot \bar{w} \\
&= |\bar{v}|^2 (\bar{w} \cdot \bar{w}) - (\bar{v} \cdot \bar{w})(\bar{v} \cdot \bar{w}) \\
&= |\bar{v}|^2 |\bar{w}|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2.
\end{aligned}$$

Täten siis Lagrangen identiteetti pätee. □

Määritelmä 5.10. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{u}$ väliselle kulmalle α pätee $0° \leq \alpha \leq 180°$ ja

$$\cos\alpha = \tfrac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{|\bar{v}||\bar{u}|}.$$

Lause 5.11. *Jos $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$, niin*

$$|\bar{v} \times \bar{w}| = |\bar{v}||\bar{w}| \sin\alpha,$$

missä α on vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma.

Todistus. Todistukseen käytetään Lagrangen identiteettiä, vektoreiden välisen kulman määritelmää $\cos\alpha = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{|\bar{v}||\bar{w}|}$ ja tulosta $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Lagrangen identiteetistä saadaan

$$\begin{aligned}
|\bar{v} \times \bar{w}|^2 &= |\bar{v}|^2 |\bar{w}|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2 \\
&= |\bar{v}|^2 |\bar{w}|^2 - (\cos\alpha |\bar{v}||\bar{w}|)^2 \\
&= |\bar{v}|^2 |\bar{w}|^2 - \cos^2\alpha |\bar{v}|^2 |\bar{w}|^2 \\
&= |\bar{v}|^2 |\bar{w}|^2 (1 - \cos^2\alpha) \\
&= |\bar{v}|^2 |\bar{w}|^2 \sin^2\alpha \\
&= (|\bar{v}||\bar{w}| \sin\alpha)^2.
\end{aligned}$$

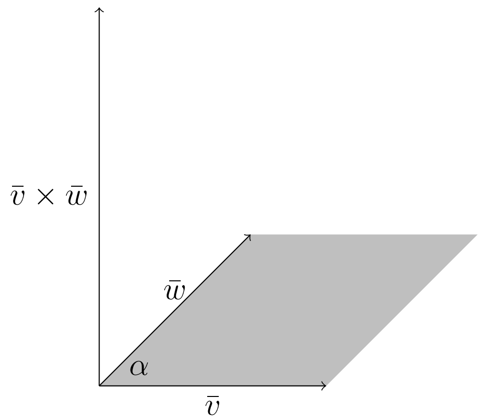
Vektoreiden välisen kulman määritelmästä $0° \leq \alpha \leq 180°$ seuraa, että $\sin\alpha \geq 0$. Vektoreiden pituudet ovat aina positiivisia, joten $|\bar{v} \times \bar{w}| \geq 0$ ja $|\bar{v}||\bar{w}|\sin\alpha \geq 0$. Saadusta yhtälöstä saadaa siis, että

$$|\bar{v} \times \bar{w}| = |\bar{v}||\bar{w}|\sin\alpha$$

joka todistaa lauseen. $\square$

Seuraus 5.12. *Edellisestä lauseesta seuraa, että vektorin $\bar{v} \times \bar{w}$ pituus on yhtä suuri kuin vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ rajaaman suunnikkaan pinta-ala, kuten kuvassa 1 on esitetty.*

Todistus. Olkoon vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma α. Nyt suunnikkaan korkeus on $|\bar{w}| \cdot \sin\alpha$. Suunnikkaan pinta-ala lasketaan siis $|\bar{w}| \cdot \sin\alpha \cdot |\bar{v}|$. Edellisessä lauseessa totesimme, että $|\bar{v} \times \bar{w}| = |\bar{v}||\bar{w}|\sin\alpha$, joten suunnikkaan pinta-ala on yhtä suuri kuin ristitulovektorin $\bar{v} \times \bar{w}$ pituus. $\square$



Kuva 1: Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ rajaaman suunnikkaan pinta-ala on yhtä suuri kuin ristitulovektorin $\bar{v} \times \bar{w}$ pituus.

Esimerkki 5.13. Lasketaan vektoreiden $\bar{v} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ ja $\bar{w} = 5\bar{j} + 3\bar{k}$ rajaaman suunnikkaan pinta-ala. Aloitetaan laskemalla ristitulovektori

$$\bar{v} \times \bar{w} = (2, 1, -2) \times (0, 5, 3) = (13, -6, 10).$$

Tämä vastaa siis vektoria $\bar{v} \times \bar{w} = 13\bar{i} - 6\bar{j} + 10\bar{k}$. Lasketaan tämän vektorin pituus ja saadaan

$$|\bar{v} \times \bar{w}| = \sqrt{13^2 + (-6)^2 + 10^2} = \sqrt{305} = 17,4642... \approx 17.$$

Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ rajaaman suunnikkaan pinta-ala on siis noin 17.

Viitteet

[1] Allaire, Gregoire ja Kaber, Sidi Mahmoud: *Numerical Linear Algebra*, Ranska 2002

[2] Ford, William: *Numerical Linear Algebra With Applications*, Lontoo, 2015

[3] Koppinen, Markku: *Lineaarialgebra Osa 1*, luentomoniste, Turun yliopisto, 2008

[4] Koppinen, Markku: *Matriisilaskenta*, luentomoniste, Turun yliopisto, 2012

[5] Pitkäranta, Juhani: *Calculus Fennicus*, Helsinki, 2015

[6] Ranto, Sanna: *Lukuteoria ja algebra*, oppimateriaali Turun Yliopisto, 2003

[7] Strang, Gilbert: *Introduction to Linear Algebra, Fourth Edition*, Cambridge, 2009

[8] Tilvis, Ville ja Kairema, Anna: *Matriisilaskenta*, Helsinki, 2017

[9] Opetushallitus: *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*, Haettu 1.11.2021: https://www.oph.fi/fi/koulutus-ja-tutkinnot/lukion-opetussuunnitelmien-perusteet