INVERSIO YMPYRÄN SUHTEEN

Hoda Al Bermanei

Pro gradu -tutkielma
Helmikuu 2022

Tarkastajat:
Yliopistonlehtori Petteri Harjulehto
Yliopistonlehtori Ville Junnila

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityChech -järjestelmällä.

Tiivistelmä

Turun yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Al Bermanei Hoda, *Inversio ympyrän suhteen*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 31 sivua, Helmikuu 2022.

Tutkielman tavoitteena oli selvittää, mitä inversiolla tarkoitetaan ja miten se tapahtuu ympyrän suhteen, tutkia laajennettua tasoa ja tutustua inversiiviseen geometriaan. Inversio on siis auttanut luomaan uutta geometriaa.

Peilausta hyväksi käyttäen saatiin määritelmä inversiolle ympyrän suhteen (Määritelmä 1) ja todistettua, että inversio ympyrässä on itsensä käänteiskuvaus. Sitten lähdettiin tutkimaan tätä algebrallisesti. Kompleksisen tason muunnoksissa saatiin selville, että jokainen isometria voidaan esittää kompleksitasossa kahden funktion avulla sekä että kaikki tällaiset funktiot edustavat isometrioita. Laajennettujen tasojen yhteydessä saatiin määriteltyä laajennettuja käänteis- ja lineaarifunktioita. Sitten lopuksi päästiin siihen lopputulokseen, että inversiiviset muunnokset muodostavat ryhmän, mikä voidaan käyttää geometrian määrittämiseen.

Avainsanat: inversio, yksikköympyrä, isometria, äärettömyyspiste, laajennettu taso ja inversiivinen muunnos

Sisällysluettelo

1 Johdanto

Tämän tutkielman aiheena on inversio ympyrän suhteen. Inversio tarkoittaa peilausta suoran suhteen tai sitten inversiota ympyrän suhteen. Peilauksella tarkoitetaan esimerkiksi sitä, että jokin piste kuvautuu jonkun suoran suhteen ja inversio ympyrän suhteen on taas sitä, että tietyn säännön mukaan tason pisteet kuvautuvat ympyrään. Tutkielmassa on myös tutkittu inversion vaikutusta suoriin ja ympyröihin, eli inversiota algebrallisesti.

Jotta voidaan määritellä geometriaa, jossa voidaan ainakin tutkia ympyröiden ominaisuuksia, tarvitaan ryhmän muunnoksia. Euklidiset muunnokset ja esitellyt inversiot ovat näitä ryhmiä, jotka sitten säilyttävät niitä ominaisuuksia. Tässä tutkielmassa kuvataan, miten tällaiset muunnokset voidaan esittää kompleksilukuina.

Sitten on lähdetty käsittelemään laajennettua tasoa, joka tarkoittaa, että tasoa on laajennettu äärettömyyspisteitä hyödyntäen. Tämän avulla voidaan käsitellä inversiota laajemmin. Lopuksi tarkastellaan inversiivistä geometriaa. Inversiivinen geometria tutkii niitä $\mathbb{C}$ kuvioiden ominaisuuksia, jotka säilyvät inversiivisillä muunnoksilla, eli toisin sanoen sitä voidaan luoda käyttämällä inversiota.

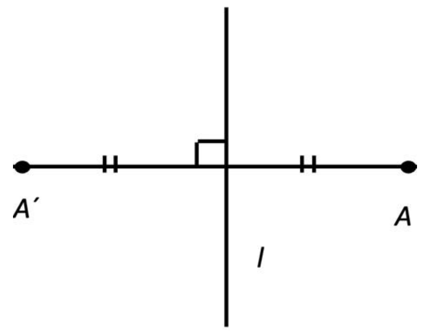
Tutkielmassa käytin vain David Brannanin Geometry- kirjaa [1]. Tekstissä on tarkemmin kerrottu, mistä tieto löytyy kirjasta.

2 Inversio

Kaikki käsitellyt asiat tässä luvussa ovat lähteen [1] kappaleista 5.1.1 ja 5.1.2.

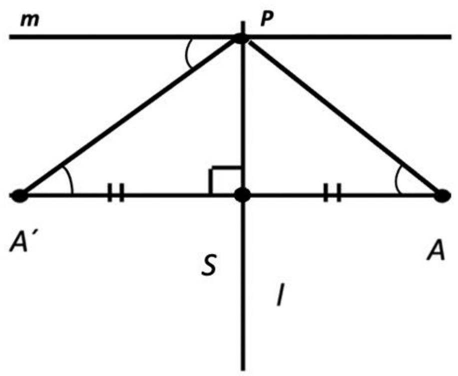
2.1 Peilaus suoran suhteen

Geometrisesti pisteen A peilaus suoran l suhteen tarkoittaa sitä, että suoran l toiselle puolelle saadaan piste A'. Tämä tarkoittaa, että jana AA´ leikkaa suoran l niin, että pisteen A' etäisyys suorasta l on sama kuin pisteen A etäisyys suorasta l. Suora l ja jana AA' muodostavat suoran kulman (Kuva 1).



Kuva 1. Pisteen peilaus suoran suhteen

Olkoon m suora, joka on yhdensuuntainen janan AA' kanssa. Eli nyt suora m ja suora l ovat kohtisuorassa toisiaan vasten (Kuva 2). Sitten olkoon piste P suorien m ja l leikkauspiste ja piste S suoran l ja janan AA' leikkauspiste. Kolmiot ΔPAS ja $\Delta PA'S$ ovat yhteneviä, koska sks-lause. Tästä seuraa, että kulmat $\angle PAS$ ja $\angle PA'S$ ovat yhtä suuret. Merkintä $\angle PAA'$ tarkoittaa kulmaa, jossa piste A on kulman kärjessä, piste P kulman oikealta kyljeltä ja piste A' vasemmalta kyljeltä.



Kuva 2. Peilaus suoran l suhteen

Tästä sitten johdetaan inversio ympyrän suhteen (luku 2.2).

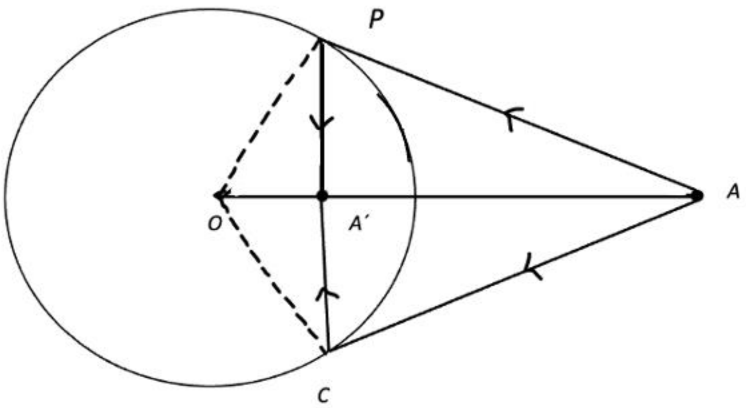
2.2 Inversio ympyrän suhteen

Otetaan suora *l* pois ja piirretään sen paikalle ympyrä *C*, jonka säde *r* on äärellinen. Tutkitaan siis Kuva 3. Piirretään pisteestä A tangentti ympyrälle *C*. Olkoon *P* tangentin ja ympyrän leikkauspiste. Piirretään myös pisteestä *P* korkeusjana janalla OA ja olkoon sitten A' korkeusjanan kantapiste. Piirrettäessä kaksi tangenttia muodostuu kaksi samanlaista kolmiota, $\Delta POA'$ ja ΔAOP, koska kulmat OPA' ja OAP ovat yhtä suuret. Tällöin saadaan, että

$$\frac{OA'}{OP} = \frac{OP}{OA}$$

eli

$$OA \cdot OA' = OP^2$$



Kuva 3. Inversio ympyrän *C* suhteen

Koska OP on ympyrän säde, niin

$$OA \cdot OA' = r^2 \qquad (1)$$

Pisteellä A on siis vain ja ainoastaan yksi piste A', jolle pätee yhtälö (1), ja piste P määrää sen yksikäsitteisesti. Peilaus voi tapahtua myös toisin päin, eli piste A' kuvautuu pisteeksi A. Lisäksi voidaan valita toisen tangentin ja ympyrän leikkauspiste, joka antaa saman pisteen A'.

Määritelmä 1: Olkoon *C* ympyrä, jonka keskipiste on *O* ja säde *r* ja olkoon piste *A* mikä tahansa piste lukuun ottamatta pistettä *O*. Jos piste *A´* on suoralla *OA* samalla puolella kuin piste *A* ja toteuttaa yhtälön

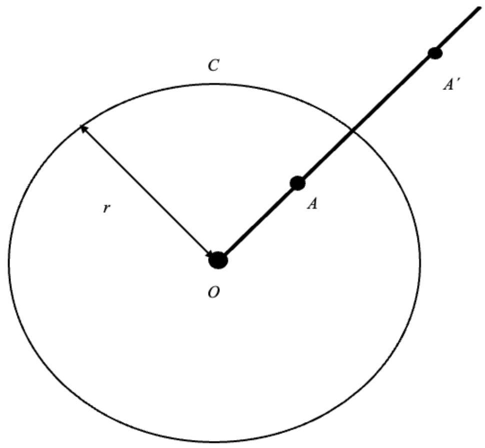
$$OA \cdot OA' = r^2,$$

niin silloin *A´* on pisteen *A* inversiopiste ympyrässä *C*. Tällöin keskipiste O on inversiokeskus ja *C* inversioympyrä.

Muutos määritellään näin:

$$t(A) = A' \ , \qquad t\colon \mathbb{R}^2 - \{O\} \to \mathbb{R}^2 - \{O\}, \qquad (A \in \mathbb{R}^2 - \{O\}).$$

Tätä tunnetaan nimellä inversio (Kuva 4).



Kuva 4. Inversio

Esimerkki 1: Olkoon *C* ympyrä, jonka keskipiste on origossa ja säde on 2. Olkoon lisäksi piste *A*= (1,0), joka on siis ympyrän *C* sisäpuolella. Nyt yhtälön (1) mukaan saadaan, että

$$OA' \cdot 1 = 2^2 \Leftrightarrow OA' = 4.$$

Piste *A´* on siis ympyrän *C* ulkopuolella.

Esimerkki 2: Olkoon *C* ympyrä, jonka keskipiste on origossa ja säde on 5. Olkoon lisäksi piste *A* mikä tahansa piste ympyrän kehällä, eli *OA*=5. Saadaan, että

$$OA' \cdot 5 = 5^2 \Leftrightarrow OA' = 5.$$

Koska A ja A' ovat samalla suoralla ja pisteen A' etäisyys origosta on myös 5, niin kehäpisteet kuvautuvat itselleen, eli $A = A'$.

Lause 1: Inversio ympyrässä on itsensä käänteiskuvaus.

TODISTUS

Voidaan käyttää merkintää $I(A) = A'$ näyttämään, että piste A´ on pisteen A inversio. Inversio on itsensä käänteiskuvaus, koska $I\big(I(A)\big) = A$ eli $I = I^{-1}$.

■

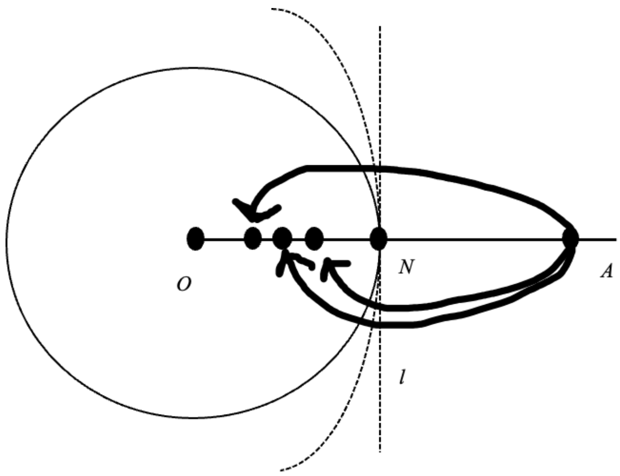
Tutkitaan, miten inversio on yleistys peilauksesta. Toisin sanoen tutkitaan, mitä pisteen A inversiopisteelle tapahtuu, kun ympyrän sädettä pienennetään.
Olkoon piste A ympyrän C, jonka keskipiste on O ja säde r, ulkopuolella. Olkoon myös piste A' inversiopiste ja jana AA' leikkaa ympyrää C pisteessä N. Tällöin $OA = r + AN$ ja $OA' = r - A'N$, joten yhtälöä $OA \cdot OA' = r^2$ saadaan muotoon

$$(r + AN)(r - A'N) = r^2.$$

Poistamalla sulut, sieventämällä lausekkeet ja ratkaisemalla $A'N$ termiä saadaan

$$A'N = \frac{AN \cdot r}{r + AN} = \frac{AN}{1 + \frac{AN}{r}}.$$

Kun päätetään pisteet A ja N sekä annetaan säteen r lähestyä äärettömyyttä, huomataan, että peilaus suoran suhteen voidaan pitää rajoitettavana tapauksena ympyrän inversiossa, kun säteitä suurennetaan (Kuva 5). Tästä sitten saadaan, että inversio -käsite tarkoittaa joko peilausta suoran suhteen tai inversiota ympyrän suhteen.



Kuva 5: Peilaus pisteen suhteen ja inversio ympyrän suhteen

2.3 Inversion vaikutus suoriin ja ympyröihin

2.3.1 Inversio algebrallisesti

Johdetaan kaava tapaukselle, jossa *C* on yksikköympyrä $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$. Merkataan ympyrää symbolilla $\wp$.

Olkoon A piste $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ja olkoon *A´* sen inversiopiste yksikköympyrässä $\wp$. Koska *A´* sijaitsee samalla puolisuoralla kuin piste *A*, siitä seuraa, että pisteellä *A´* täytyy olla koordinaatit (kx, ky), jollekin positiiviselle luvulle *k* (kuva 6).

Kun ympyrän $\wp$ säde on yksi, saadaan, että $OA \cdot OA' = 1$. Tällöin $OA^2 \cdot OA'^2 = 1$ ja tästä sitten

$$(x^2 + y^2)(k^2x^2 + k^2y^2) = 1.$$

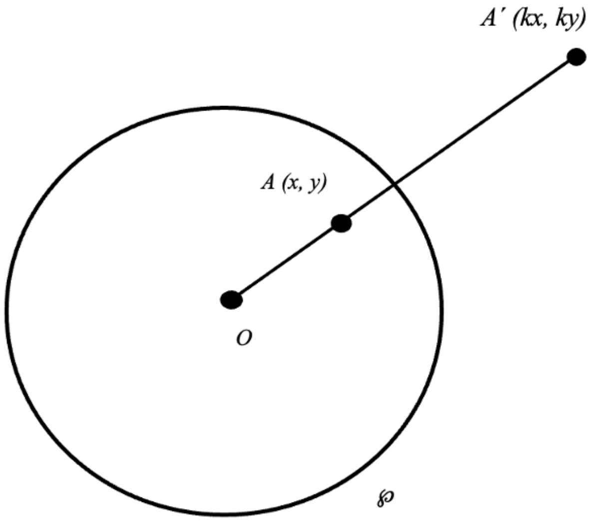
Saadaan, että

$$k^2 = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2},$$

eli

$$k = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Täten piste A´ on $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Tästä saadaan Lause 2.



Kuva 6: Yksikköympyrä ℘ ja pisteet *A* ja *A´*

Lause 2: Inversio yksikköympyrässä ℘ on funktio

$$t:(x,y)\longmapsto\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right) \qquad t\colon \mathbb{R}^2-\{0\}\to\mathbb{R}^2-\{0\},\quad (\,(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{0\}).$$

Lausetta voidaan käyttää löytääksemme inversiota mistä tahansa nollasta poikkeavasta rationaaliluvun neliöstä $\mathbb{R}^2$ yksikköympyrässä ℘.

Esimerkki 3: Inversio pisteelle $(3,-2)$ yksikköympyrässä on piste

$$\left(\frac{3}{3^2+(-2)^2},-\frac{2}{3^2+(-2)^2}\right)=\left(\frac{3}{13},-\frac{2}{13}\right).$$

Suoran kuva inversiossa on sen pisteiden kuvien joukko. Tutkitaan tätä seuraavan esimerkin avulla.

Esimerkki 4: Määritetään inversio yksikköympyrässä ℘ suoralle $2x+4y=1$.
Olkoon (x,y) mielivaltainen piste suoralla $2x+4y=1$ ja olkoon $(x\,´,y\,´)$ inversiopiste yksikköympyrässä ℘. Sitten

$$(x,y)=\left(\frac{x\,´}{(x\,´)^2+(y\,´)^2},\frac{y\,´}{(x´)^2+(y\,´)^2}\right).$$

Kun x ja y liittyvät yhtälöön $2x + 4y = 1$, niin myös kuvapiste liittyy. Saadaan

$$\frac{2x'}{(x')^2 + (y')^2} + \frac{4y'}{(x')^2 + (y')^2} = 1.$$

Kertomalla yhtälön molemmat lausekkeella $(x')^2 + (y')^2$ saadaan $2x' + 4y' = (x'\,)^2 + (y')^2$ ja tästä sitten seuraava muoto:

$$(x' - 1)^2 + (y' - 2)^2 = 5.$$

Poistetaan heittomerkit:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

Tästä sitten huomataan, että kyse on ympyrästä, jonka keskipiste on $(1,2)$ ja säde $\sqrt{5}$.
Eli siis jokaiselle $(x' - 1)^2 + (y' - 2)^2 = 5$ pisteelle on inversiopiste suoralla $2x + 4y = 1$. Piste $(0, 0)$ ei kuulu suoralle.

Esimerkissä 4 käytettiin heittomerkkejä erottamaan alkuperäinen piste (x, y) inversiopisteestä (x′, y′). Kun kyseisen esimerkin laskumenetelmää on ymmärtänyt, voi alkaa käyttämään seuraavaa laskustrategiaa, josta puuttuu heittomerkit.

Strategia 1: Yhtälön määrittäminen inversiokäyrälle yksikköympyrässä ℘:

1) Kirjoita yhtälö, joka liittyy käyrän x- ja y- koordinaattipisteisiin, eli
2) korvaa termi x termillä $\frac{x}{x^2+y^2}$ ja termi y termillä $\frac{y}{x^2+y^2}$ ja sievennä saatu yhtälö.

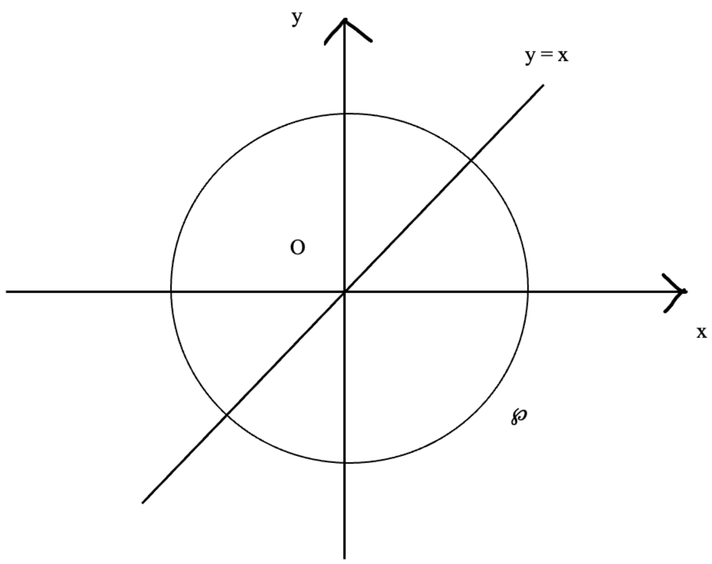
Esimerkki 5: Määritetään inversiokuvaus yksikköympyrässä ℘ suoralle $y = x$.
Kun termiä x korvataan termillä $\frac{x}{x^2+y^2}$ ja termiä y termillä $\frac{y}{x^2+y^2}$, saadaan

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Siten

$$y = x.$$

Päädyttiin samaan yhtälöön, kuin alussa. Eli suora $x = y$ kuvautuu itseensä inversiossa (kuva 7).



Kuva 7: Suoran y=x inversiokuvaus

Voidaan käyttää termiä punkteerattu, kun jostain suorasta tai ympyrästä on poistettu jokin piste. Esimerkiksi piste A on poistettu suorasta tai ympyrästä. Tällöin sanotaan, että se suora tai ympyrä on punkteerattu pisteessä A.

Lause 3: Suorien inversiokuvaus:

Inversio ympyrässä, jonka keskipiste on O:

i) Suora, joka ei kulje keskipisteen O läpi, kuvautuu ympyräksi, josta on poistettu ympyrän keskipiste O.

ii) Suora, joka on punkteerattu pisteessä O, kuvautuu itselleen.

TODISTUS

Olkoon piste O origossa ja pituusyksikkönä ympyrän säde. Inversio tapahtuu siis yksikköympyrän $\wp$ suhteen.

i) Jos l on suora, joka ei kulje origon läpi, se noudattaa yhtälöä

$$ax + by + c = 0,$$

missä c ei ole nolla. Käyttämällä yllä olevaa strategiaa, nähdään, että suoran l inversiokuvaus yksikköympyrässä on muotoa

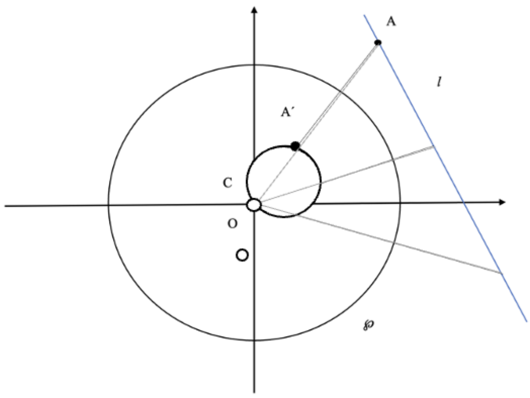
$$\frac{ax}{x^2+y^2}+\frac{by}{x^2+y^2}+c=0.$$

Kun c ei ole nolla, yhtälöä voidaan myös kirjoittaa muotoon

$$cx^2+cy^2+ax+by=0,$$

joka voidaan vielä kirjoittaa muodossa

$$x^2+y^2+\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}y=0.$$

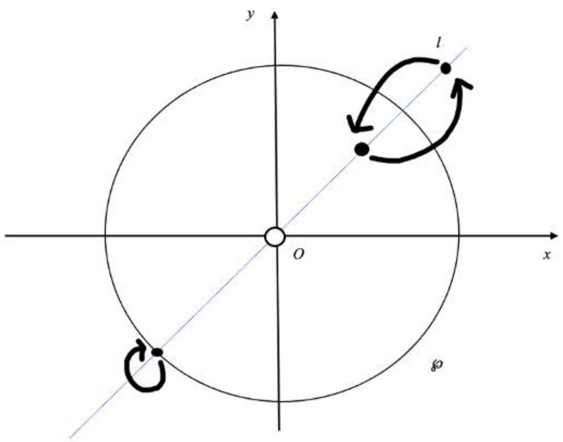


Kuva 8: Suoran *l* inversiokuvaus yksikköympyrässä ℘

Edellä mainittu yhtälö on siis ympyrälle *C*. Jos piste O poistetaan ympyrästä, jokainen jäljellä oleva piste *A´* on kuvaus pisteestä *A*, missä *OA´* leikkaa suoraa *l*. Tästä seuraa, että suoran *l* kuvaus on koko punkteerattu ympyrä $C-\{0\}$ (ks. kuva 9).

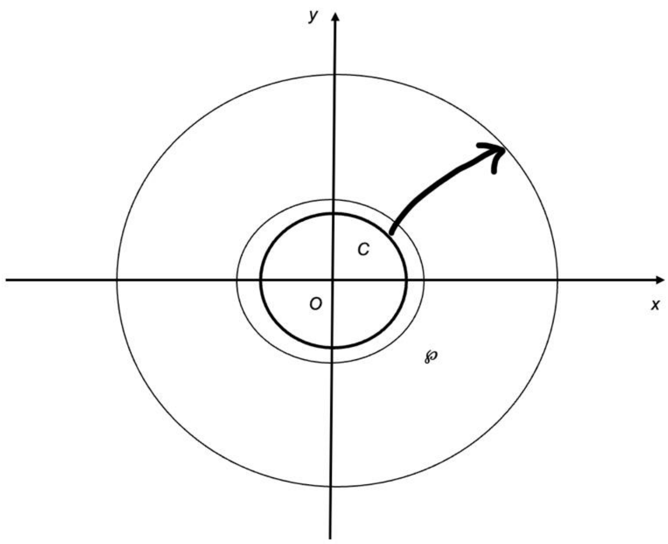
ii) Tämän osan todistamiseen voidaan myös käyttää strategia *1*, mutta on helpompi tutkia sitä suoraan inversion määritelmästä. Nyt, jos *l* on suora, joka on punkteerattu pisteessä *O*, niin jokainen suoran *l* piste yksikköympyrän ℘ sisällä on kuvaus yksi suoran *l* pisteellä yksikköympyrän ℘ ulkopuolella ja päinvastoin (ks. kuva 9).

■



Kuva 9: suoran *l* kuvaus

Seuraavaksi tarkastellaan ympyrän peilausta inversion suhteen. Koska inversioympyrän pisteet kuvaavat itseään, myös tuon ympyrän kuvaus on ympyrä. Lisäksi mikä tahansa ympyrä C, jonka keskipiste on inversion keskipiste O, kuvautuu toiseen ympyrään, jonka keskipiste on myös O. Syy tähän on se, että symmetrian perusteella jokaisen ympyrän C piste kuvautuu yhtä suurelle etäisyydellä pitkin sädettä (ks. kuva 10). Tässä kohtaan herää kysymys, kartoittaako inversio aina ympyrät ympyröiksi.



Kuva 10. Ympyrän peilaus

Esimerkki 6: Käytä strategia 1 määrittääksesi ympyrän C, jonka keskipiste on (2, 0) ja säde 1, inversiokuvaus yksikköympyrässä $\wp$.

RATKAISU

Ympyrän C yhtälö on $(x-2)^2+y^2=1,$ jota voidaan myös kirjoittaa muotoon

$$x^2+y^2-4x+3=0.$$

Yllä olevan strategian avulla voidaan päätellä, että ympyrän C inversiokuvauksen yhtälö yksikköympyrässä $\wp$ on muotoa

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2-\frac{4x}{x^2+y^2}+3=0.$$

Tässä kohtaan voidaan laskea yhteen yhtälön kaksi ensimmäistä termiä saadaksemme seuraavan yhtälön

$$\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{4x}{x^2+y^2}+3=0,$$

jota voidaan järjestää uudelleen muotoon

$$x^2+y^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0.$$

Lopuksi yhtälö saadaan muotoon

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

Tämä onkin yhtälö ympyrälle, jonka keskipiste on $(\frac{2}{3}, 0)$ ja säde $\frac{1}{3}$.

Esimerkissä 6 nähdään, että ympyrä C todellakin liittyy toiseen ympyrään. Huomataan kuitenkin, että ympyrän C keskipiste (2, 0) osuu pisteeseen $(\frac{1}{2}, 0)$, joka ei ole ympyrän C inversiokuvauksen keskipiste. Tästä seuraa, että vaikka inversio kuvaa yhden ympyrän toiseen, se ei välttämättä kohdista keskipisteitä toisiinsa.

Esimerkki 7: Olkoon C ympyrä, jonka keskipiste on (-2, 0) ja säde 2, punkteerattu origossa. Määritä ympyrän C inversiokuvaus yksikköympyrässä $\wp$.

RATKAISU

Ympyrän C yhtälö on $(x+2)^2 + y^2 = 2^2$, jota voidaan muuttaa muodoksi

$$x^2 + y^2 + 4x = 0.$$

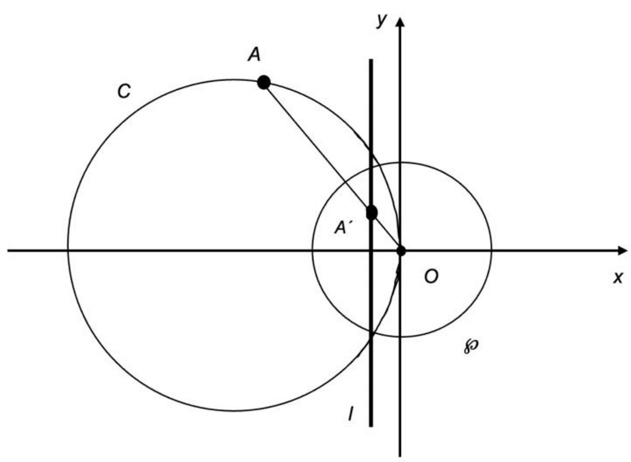
Käyttämällä sitä samaa strategiaa saadaan, että inversiokuvauksen yhtälö on muotoa

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 + \frac{4x}{x^2+y^2} = 0.$$

Sitten

$$\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{4x}{x^2+y^2} = 0$$

ja $1 + 4x = 0$.
Tästä seuraa, että pisteytetyn ympyrän *C* kuvaus on suora l, jonka yhtälö on $x = -\frac{1}{4}$. Kuvasta 11 käy selväksi, että jokaisen suoran *l* piste on kuvaus jollekin ympyrän *C* pisteelle, joten ei ole tarvetta punkteerata suoraa *l*.



Kuva 11. Esimerkki 7

Lause 4: Ympyröiden inversiokuvaus:

Inversio ympyrässä, jonka keskipiste on O:

i) Ympyrä, joka ei kulje keskipisteen O kautta, kuvautuu ympyräksi.

ii) Origon kautta kulkeva origossa punkteerattu ympyrä kuvautuu suoraksi, joka ei kulje origon kautta.

TODISTUS

Valitaan pari koordinaattiakseleita, jotka muodostavat sen ympyrän, jossa käännämme yksikköympyrän $\wp$.

Nyt olkoon C mielivaltainen ympyrä, jonka keskipiste on (a, b) ja säde r. Tämän ympyrän yhtälö on sitten

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

eli

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0,$$

jossa $c=a^2+b^2-r^2$.

Käyttämällä strategiaa 1 käyrien inversiokuvauksien määrittämiseen päätetään, että ympyrän C inversiokuvaukselle pätee yhtälö

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2-\frac{2ax}{x^2+y^2}-\frac{2by}{x^2+y^2}+c=0.$$

Yhdistämällä yhtälön kaksi ensimmäistä termiä saadaan

$$\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2ax}{x^2+y^2}-\frac{2by}{x^2+y^2}+c=0.$$

Sitten yhtälön molemmat puolet kerrotaan termillä (x^2+y^2), jolloin saadaan, että

$$1-2ax-2by+c(x^2+y^2)=0. \tag{1}$$

Tämä on joko suoran tai ympyrän yhtälö riippuen siitä, kulkeeko ympyrä C keskipisteen O kautta vai ei.

i) Jos ympyrä C ei kulje keskipisteen O kautta, c ei ole nolla. Eli nyt yhtälöä (1) voidaan jakaa termillä c, jolloin saadaan

$$x^2 + y^2 - 2\frac{a}{c}x - 2\frac{b}{c}y + \frac{1}{c} = 0.$$

Tämä on ympyrän yhtälö, joka sisältää alkuperäisen ympyrän kuvan.

ii) Jos ympyrä C kulkee keskipisteen O kautta, niin silloin c=0. Tällöin yhtälö (1) saa muodon

$$1 - 2ax - 2by = 0.$$

Tämä on suoran yhtälö, joka ei kulje keskipisteen O kautta. ■

Seuraavassa laatikossa on tiivistelmä lauseiden 3 ja 4 tuloksista.

Inversiokuvaus ympyrälle, jonka keskipiste on O:

1) Suora punkteerattu keskipisteessä O → sama suora punkteerattu keskipisteessä O
2) Suora, joka ei kulje keskipisteen O kautta → ympyrä punkteerattu keskipisteessä O
3) Ympyrä punkteerattu keskipisteessä O → suora, joka ei kulje keskipisteen O kautta
4) Ympyrä, joka ei kulje keskipisteen O kautta → ympyrä, joka ei kulje keskipisteen O kautta

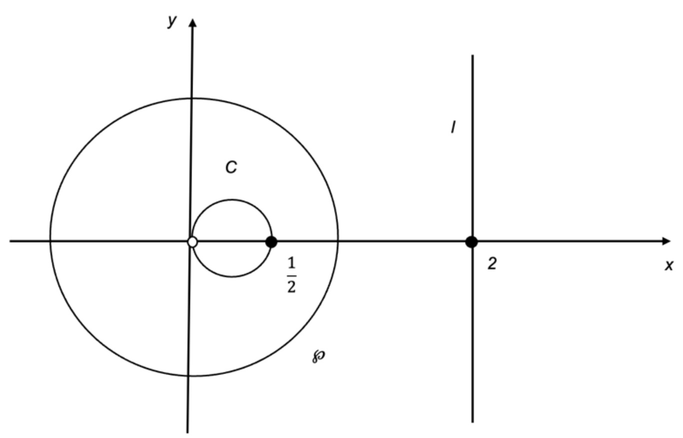
Tämän tiivistelmän yksityiskohtia ei tarvitse muistaa, koska sen ennusteet voidaan muistaa intuitiivisesti seuraavasti. Ensinnäkin pisteet origon läpi kulkevalla suoralla tai ympyrällä voidaan valita mielivaltaisesti lähellä origoa. Tällaisten pisteiden kuvaukset voidaan sen takia valita mielivaltaisesti kaukana origosta, ja siksi niiden on sijaittava suoralla. Toiseksi suoran pisteen voidaan valita mielivaltaisesti kaukana origosta. Näiden pisteiden kuvaukset voidaan valita mielivaltaisesti lähellä origoa, ja siksi niiden on sijaittava ympyrällä tai suoralla, joka on punkteerattu origossa.

Esimerkki 8: Määritä seuraavien inversiokuvaukset yksikköympyrässä $\wp$.

a) suora l, jonka yhtälö on $x = 2$
b) ympyrä C, jonka keskipiste on (0, 2) ja säde 1

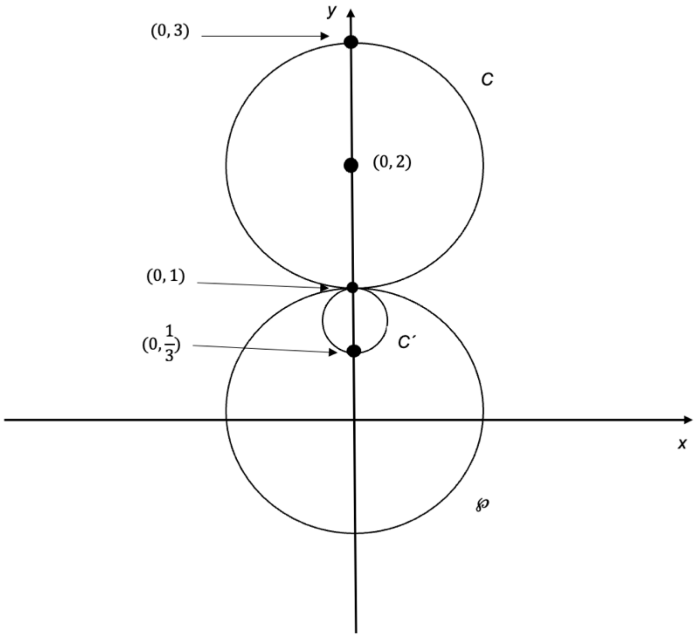
RATKAISU

a) Tiivistelmästä tiedetään, että suoraa *l* kartoitetaan ympyrään C, joka on punkteerattu origossa. Tämä ympyrä kulkee pisteen $(\frac{1}{2}, 0)$ läpi, koska $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ on pisteen (2, 0) kuvaus inversiossa. Koska suora l on symmetrinen x-akselin suhteen, niin ympyrän kuvaus pitää myös olla symmetrinen x-akselin suhteen. Ainoa ympyrä C, joka täyttää nämä kaikki ehdot, on ympyrä, jonka keskipiste $(\frac{1}{4}, 0)$ ja säde $\frac{1}{4}$ (ks. kuva 12).



Kuva 12. Esimerkki 8 a) -kohta

b) Tiivistelmän mukaan ympyrän C kuvaus on ympyrä C′, joka ei kulje origon läpi. Sen pitää olla symmetrinen y-akselin suhteen, koska ympyrä C on, ja sen pitäisi myös kulkea pisteiden $(0, \frac{1}{3})$ ja $(0, 1)$. Ympyrän C′ keskipisteen on tällöin pakko olla $(0, \frac{2}{3})$ ja säde $\frac{1}{3}$ (ks. kuva 13).



Kuva 13. Esimerkki 8 b) -kohta

3 Tasojen laajentaminen

Jotta voidaan määritellä geometriaa, jossa voidaan ainakin tutkia ympyröiden ominaisuuksia, tarvitaan ryhmän muunnoksia. Euklidiset muunnokset ja edellisessä osiossa esitellyt inversiot ovat näitä ryhmiä, jotka sitten säilyttävät niitä ominaisuuksia. Tässä osiossa kuvataan, miten tällaiset muunnokset voidaan esittää kompleksilukuina.

3.1 Kompleksisen tason muunnoksia

Tämä luku perustuu lähteen [1] kappaleeseen 5.2.1

Aloitetaan ensin kertaamalla muutama asia liittyen kompleksilukuihin. Ensinnäkin tason $\mathbb{R}^2$ pisteiden (x, y) ja kompleksitason $\mathbb{C}$ kompleksilukujen $z = x + iy$ välillä on yksi-yksi vastaavuus. Lukua x kutsutaan kompleksiluvun reaaliosaksi Re ja luku y vastaavasti sen imaginaariosaksi Im. Kaikki aritmeettiset operaatiot voidaan suorittaa kompleksitasossa $\mathbb{C}$ kuten reaaliluvuille, paitsi että korvaamme i^2 luvulla -1. Jos z on kompleksiluku $x = iy$, niin sen konjugaatti $\mathbf{z}$ määritellään seuraavaksi

$$\mathbf{z} = x - iy,$$

ja sen moduuli

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Muistetaan, että $|z|^2 = z\boldsymbol{z}$.

Lause 5: Jokainen tason isometria t voidaan esittää kompleksitasossa jollakin seuraavista funktioista

$$t\,(z) = az + b \qquad\qquad tai \qquad\qquad t\,(z) = a\boldsymbol{z} + b,$$

missä $a, b \in \mathbb{C}, |a| = 1$. Päinvastoin kaikki tällaiset funktiot edustavat isometrioita.

TODISTUS

Todistetaan lause ensin funktion $t(z) = az + b$ avulla. Valitaan kaksi pistettä z_1 ja z_2 ja lasketaan funktioiden $t(z_1)$ ja $t(z_2)$ välinen etäisyys:

$$\begin{aligned} |t(z_1) - t(z_2)| &= |(az_1 + b) - (az_2 + b)| = |az_1 - az_2| = |a(z_1 - z_2)| = |a||z_1 - z_2| \\ &= 1 \cdot |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

Saadaan, että pisteiden z_1 ja z_2 etäisyys on sama kuin funktioiden $t(z_1)$ ja $t(z_2)$.

Nyt tehdään samaa toiselle funktiolle.

$$\begin{aligned} |t(z_1) - t(z_2)| &= |(a\boldsymbol{z_1} + b) - (a\boldsymbol{z_2} + b)| = |a\boldsymbol{z_1} - a\boldsymbol{z_2}| = |a(\boldsymbol{z_1} - \boldsymbol{z_2})| = |a||\boldsymbol{z_1} - \boldsymbol{z_2}| \\ &= 1 \cdot |\boldsymbol{z_1} - \boldsymbol{z_2}| = |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

Päinvastoin on helppo todistaa, koska jokainen kuvatun tyyppinen funktio on yhdistelmä edellä kuvatuista perusisometrioista. Olkoon nyt *t* kompleksisen tason isometria ja olkoon

$$t\,(0) = b, t\,(1) = c.$$

Jos korvataan termi $(c - b)$ luvulla a, niin $|a|$ on se etäisyys lukujen $t(0)$ ja $t(1)$ välillä ja koska t on isometria, niin $|a| = 1$. Nyt olkoon s yhtäsuuruuden $s(z) = az + b$ määrittelemä isometria:

$$s(0) = b = t(0) \qquad ja \qquad s(1) = a + b = c = t(1).$$

Siis $(s^{-1} \circ t\ )$ on isometria, joka kiinnittää luvut 0 ja 1 ja koska sen on isometria, sen on kiinnitettävä jokaisen x-akselin piste.

Koska $(s^{-1} \circ t\ )$ on isometria, joka jättää kaikki x-akselin pisteet muuttumattomana, voidaan päätellä, että $(s^{-1} \circ t\ )$ on joko identtinen kuvaus tai heijastus x-akselilla. Jos se on identiteetti, niin $(s^{-1} \circ t\ (z)) = z$, jossa $t(z) = s(z) = az + b$. Jos se taas on heijastus, niin $\left(s^{-1} \circ t(z)\right) = \bar{z}$, jossa $t(z) = s(\bar{z}) = a\bar{z} + b$.

■

Lause 6: Jokainen isometria voidaan ilmaista heijastusten yhdistelmänä.

TODISTUS

Todistus löytyy lähteen [1] sivulta 279.

Esimerkki 9: Olkoon luvun t määrittelemä isometria

$$t(z) = i\bar{z} + 4 + 2i \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

a) Osoita, että funktio on isometria
b) Tulkitse funktio t heijastuksen, kierron ja translaation yhdistelmänä
c) Tulkitse funktio t heijastusten yhdistelmänä

RATKAISU

a) Vektorin $\bar{z}$ kerroin on i, jonka moduuli on $|i| = 1$. Näin lauseen 1 mukaan funktio t on isometria.
b) Siinä kaavassa, jossa määritellään funktio t, konjugaatio vastaa heijastusta x-akselilla, kertominen kertoimella i vastaa kiertoa vastapäivään luvun $\frac{\pi}{2}$ kautta ja $4 + 2i$ yhteenlasku taas vastaa translaatiota vektorin $(4, 2)$ läpi.
c) Ensinnäkin olkoon r x-akselin heijastus, joka vastaa konjugaatiota. Seuraavaksi huomataan, että vastapäivään pyöriminen luvun $\frac{\pi}{2}$ kautta voidaan tulkita yhdistelmäksi $r_1 \circ r$, jossa r on jälleen heijastus x-akselilla ja r_1 on heijastus suoralla $y = x$ origosta, joka muodostaa kulman

$\frac{\pi}{4}$ kanssa. Lopuksi nähdään, että translaatio vektorin $(4, 2)$ kautta voidaan tulkita yhdistelmäksi $r_3 \circ r_2$, jossa r_2 on heijastus suoralla $4x + 2y = 0$ origosta ja joka on kohtisuorassa vektorin $(4, 2)$ kanssa. r_3 taas on heijastus yhdensuuntaisella suoralla $4x + 2y = 10$, joka kulkee $\frac{1}{2}(4, 2) = (2, 1)$ kautta. Kaiken kaikkiaan meillä on nyt $t = r_3 \circ r_2 \circ r_1 \circ r \circ r$ tai koska r on oma käänteensä niin $t = r_3 \circ r_2 \circ r_1$.

Lause 7: Inversio ympyrässä C, jonka säde on r ja keskipiste (a, b), voidaan esittää kompleksitasossa muunnolla

$$t(z) = \frac{r^2}{z - c} + c \qquad (z \in \mathbb{C} - \{c\}),$$

missä $c = a + ib$.

TODISTUS

Tarkastellaan ensin tapausta, missä ympyrä C on yksikköympyrä $\wp$. Pisteen (x, y) inversiokuvaus yksikköympyrässä $\wp$ on piste $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Tätä voidaan muotoilla uudelleen kompleksilukuina käyttämällä sitä tosiasiaa, että kompleksiluvun $z = x + iy$ moduuli $|z|$ täyttää identiteetin

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = z\boldsymbol{z}.$$

Siten pisteen $z = x + iy$ inversiokuvaus on piste

$$\frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{z}{z\boldsymbol{z}} = \frac{1}{\boldsymbol{z}}.$$

Seuraavaksi tarkastellaan sitä yleisempää tapausta, jossa C on ympyrä, jonka säde on r ja keskuspiste (a, b). Tässä tapauksessa ympyrän C inversio voidaan ilmaista yhdistelmänä $t = t_3 \circ t_2 \circ t_1$, jossa $t_1(z) = \frac{z-c}{r}$ on translaatio ja skaalaus, joka lähettää ympyrän C yksikköympyrään; $t_2(z) = \frac{1}{\boldsymbol{z}}$ on yksikköympyrän inversio;

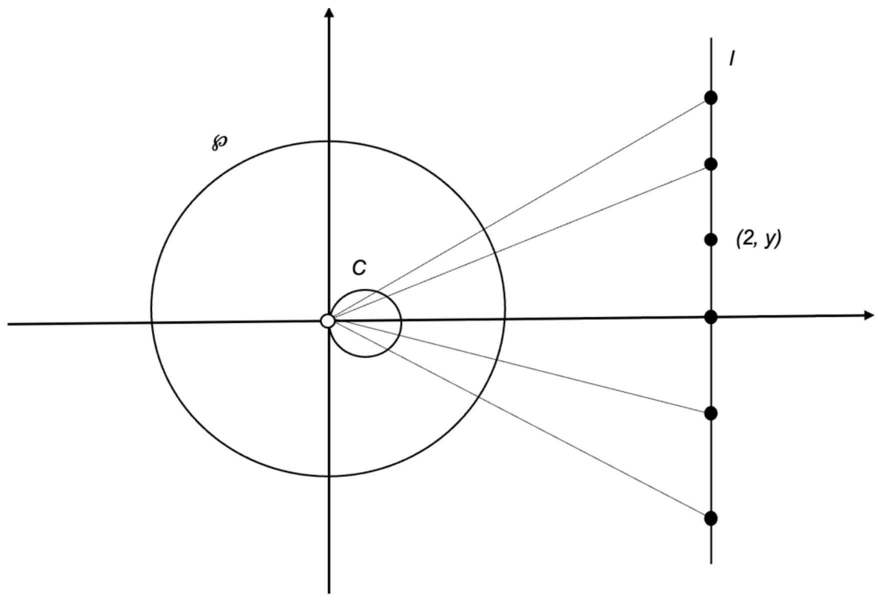
■

$t_3(z) = rz + c$ on luvun t_1 inversio ja se lähettää yksikköympyrän takaisin ympyrään C.

3.2 Laajennettu taso

Seuraavat asiat ovat lähteen [1] kappaleesta 5.2.3.

Inversio ympyrän suhteen ei ole määritelty ympyrän keskipisteessä. Tarkastellaan se tilanne, jossa meillä on suora l, jonka yhtälö on $x = 2$, ja ympyrä C, jonka keskipiste on $(\frac{1}{4}, 0)$ ja säde $\frac{1}{4}$. Ympyrä C kulkee origon eli yksikköympyrän $\wp$ keskipisteen kautta, jota on poistettu ympyrästä C. Koska inversio on itsensä käänteiskuvaus, ympyrä C kuvautuu suoraksi.
Nyt piste $(2, 0)$ kuvautuu pisteeksi $(\frac{1}{2}, 0)$, piste $(2, 1)$ kuvautuu pisteeksi $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$, piste $(2, 2)$ pisteeksi $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ja yleisesti jokin suoran $x = 2$ piste kuvautuu pisteeksi $\left(\frac{2}{4+y^2}, \frac{y}{4+y^2}\right)$ (ks. kuva 14). Kun y koordinaatti kasvaa, piste ympyrällä C lähestyy origoa vastapäivään ja kun taas y koordinaatti pienenee, piste lähestyy origoa myötäpäivään. Koska ei ole sellaista pistettä, joka olisi suoraan inversiokuvauksena origo, niin lähdetään käyttämään niin sanottua äärettömyyspistettä täyttämään aukkoa.



Kuva 14: Suoran $x = 2$ peilaaminen ympyrän C suhteen

Seuraavaksi laajennetun tason määritelmä, jossa on otettu tuo äärettömyyspiste otettu mukaan.

Määritelmä 2: Laajennettu taso on Euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ ja äärettömyyspisteen ∞ yhdiste ($\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$). Laajennettu kompleksinen taso taas on kompleksitason ja äärettömyyspisteen yhdiste ($\mathbb{C} \cup \{\infty\}$).

Määritelmä 3: Olkoon C yleistetty ympyrä laajennetussa kompleksitasossa. Tällöin laajennetun tason inversio suhteessa ympyrään C on funktio t, joka määritellään jollakin seuraavista säännöistä:

i) Jos C on ympyrä, jonka säde on r ja keskipiste O, niin

$$t(A) = \begin{cases} Pisteen\ A\ inversio\ ympyrän\ C\ suhteen. & jos\ A\ \in \mathbb{C} - \{O\}, \\ \infty, & jos\ A = O, \\ O, & jos\ A = \infty; \end{cases}$$

ii) Jos C on laajennettu suora $l\ \cup\ \{\infty\}$, niin

$$t(A) = \begin{cases} Pisteen\ A\ peilaus\ suoran\ C\ suhteen, & jos\ A \in \mathbb{C}, \\ \infty, & jos\ A = \infty. \end{cases}$$

Lause 8: Laajennetun tason inversiot kuvaavat yleiset ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi.

Määritelmä 4: Funktio t, jota määrittelee

$$t(z) = \begin{cases} \mathbf{z}, & jos\ z \in \mathbb{C}, \\ \infty, & jos\ z = \infty, \end{cases}$$

kutsutaan laajennetuksi konjugaatiofunktioksi.

Määritelmä 5:

a) Funktio t, jota määrittelee

$$t(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}, & jos\ z \in \mathbb{C} - \{O\}, \\ \infty, & jos\ z = 0, \\ 0, & jos\ z = \infty, \end{cases}$$

kutsutaan laajennetuksi käänteisfunktioksi.

b) Funktio t on muotoa

$$t(z) = \begin{cases} az + b, & jos\ z \in \mathbb{C} \\ \infty, & jos\ z = \infty, \end{cases}$$

missä $a, b \in \mathbb{C}$ ja $a \neq 0$, kutsutaan laajennetuksi lineaarifunktioksi.

Seuraavan esimerkin ratkaisu osoittaa, että laajennettu käänteisfunktio voidaan ilmaista kahden inversion yhdistelmänä.

Esimerkki 10: Etsi se yhdistelmä $t = t_2 \circ t_1$, missä

t_1 on inversio yksikköympyrässä $\wp$,

t_2 on laajennettu konjugaatiofunktio

RATKAISU

Kun

$$t_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & jos\ z \in \mathbb{C} - \{O\}, \\ \infty, & jos\ z = O \\ 0, & jos\ z = \infty \end{cases} \quad \text{ja} \quad t_2(z) = \begin{cases} z, & jos\ z \in \mathbb{C}, \\ \infty, & jos\ z = \infty, \end{cases}$$

niin

$$t(\infty) = t_2 \circ t_1(\infty) = t_2(0) = 0,$$

$$t(0) = t_2 \circ t_1(0) = t_2(\infty) = \infty.$$

Jäljellä oleville $z \in \mathbb{C} - \{O\}$ arvoille meillä on

$$t(z) = t_2 \circ t_1(z) = t_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \frac{1}{z}.$$

Tästä seuraa, että $t = t_2 \circ t_1$ on laajennettu käänteisfunktio.

Aiemmin huomautimme, että jokainen lineaarinen funktio on $t \circ s$ yhdistelmä, jota seuraa isometria t. Koska jokainen isometria t on heijastusten yhdistelmä, niin jokainen lineaarinen funktio on skaalauksen s yhdistelmä $r_n \circ \dots \circ r_2 \circ r_1 \circ s,$ jota seuraa joukko heijastuksia $r_1, r_2, \dots, r_n$.
Nyt ainoa ero lineaarifunktion ja laajennetun lineaarifunktion välillä on se, että jälkimmäinen sisältää lisäpisteen äärettömyydessä toimialueellaan. Koska tämä lisäpiste kuvataan itseensä, niin laajennettu lineaarinen funktio on skaalaus, joka myös kuvaa äärettömyyden äärettömään. Tätä myös seuraa joukko heijastuksia, jotka myös kuvaavat äärettömyyden ∞ itselleen. Mutta tämä heijastus on vain käännös pidennetyssä rivissä. Skaalaus, joka myös kuvaa äärettömyyden ∞ itselleen, on kahden inversion yhdistelmä. Tästä seuraa, että jokainen laajennettu lineaarinen funktio on inversioiden yhdistelmä. Kun tämä yhdistetään yllä olevaan esimerkin tulokseen, saadaan todistus seuraavalle lauseelle (lause 9).

Lause 9: Laajennettu käänteisfunktio ja laajennetut lineaarifunktiot voidaan hajottaa inversioiden yhdistelmiksi.

Koska laajennetun tason inversiot kuvaavat yleistettyjä ympyröitä yleistetyiksi ympyröiksi, meillä on seuraava seuraus lauseelle 9.

Seuraus: Laajennetut lineaarifunktiot ja laajennettu käänteisfunktio kuvaavat yleistetyt ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi.

Esimerkki 11: Olkoon isometrian t määrittelemä laajennettu lineaarinen funktio

$$t(z) = \begin{cases} 2\left(-1 + \sqrt{3}\, i\right)z + (4 - 2i), & jos\ z \in \mathbb{C}, \\ \infty, & jos\ z = \infty. \end{cases}$$

Ilmaise t laajennetun kompleksitason inversioiden yhdistelmänä.

RATKAISU

Muunnos t skaalaa kompleksitasoa kertoimella $|2(-1+\sqrt{3}i)| = 4$, kiertää sen kulman $Arg\left(2(-1+\sqrt{3}\,i)\right) = \frac{2\pi}{3}$ ja siirtää vektorin $(4,-2)$ verran.

Skaalaus kertoimella 4 voidaan jakaa yhdistelmäksi $t_2 \circ t_1$, jossa
t_1 on inversio yksikköympyrässä $\wp$ ja
t_2 on inversio ympyrässä, jonka säde on $\sqrt{4} = 2$ ja keskuspiste origo.

Kierto kulman $\frac{2\pi}{3}$ voidaan hajottaa yhdistelmäksi $t_4 \circ t_3$, jossa
t_3 on inversio laajennetulla reaaliakselilla ja
t_4 on inversio laajennetulla suoralla $l_4 \cup \{\infty\}$, jossa l_4 on suora $y = \sqrt{3}x$.

Vektorin $(4,2)$ kautta tapahtuva translaatio voidaan hajottaa $t_6 \circ t_5$, jossa
t_5 on inversio laajennetulla suoralla $l_5 \cup \{\infty\}$, jossa l_5 on suora $4x - 2y = 0$ ja
t_6 on inversio laajennetulla suoralla $l_6 \cup \{\infty\}$, jossa l_6 on suora $4x - 2y = 10$.

Koska t_6, t_5, t_4, t_3 ja $t_2 \circ t_1$ kuvaavat ∞ itseensä, niin

$$t = t_6 \circ t_5 \circ t_4 \circ t_3 \circ t_2 \circ t_1.$$

4 Inversiivinen geometria

Käsitellyt asiat ovat lähteen [1] kappaleesta 5.3.1.

Jokaista geometriaa käytetään tutkimaan avaruudessa olevien kuvioiden ominaisuuksia, jotka säilyvät sen muunnoksilla. Esimerkiksi Euklidean geometriaa käytetään tutkimaan tason $\mathbb{R}^2$ kuvioiden ominaisuuksia, kuten kulmaa ja etäisyyttä, jotka tason $\mathbb{R}^2$ isometriat säilyttävät.
Koska jokaisen tason $\mathbb{R}^2$ isometria voidaan hajottaa heijastusten yhdistelmäksi, voidaan ajatella, että Euklidean geometriaan liittyvä ryhmä on kaikkien mahdollisten heijastusten yhdistelmä.
Tämä kertoo, että meidän pitää määrittää uudet geometrian muunnokset. Nyt sen sijaan, että tarkastellaan heijastusten yhdistelmää, harkitaan inversioiden yhdistelmät.

Määritelmä 6: Muunnos $t : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ on inversiivinen muutos, jos se voidaan ilmaista inversioiden yhdistelmänä.

Esimerkiksi laajennettu käänteisfunktio on inversiivinen muunnos, koska se voidaan ilmaista yhdistelmänä $t_2 \circ t_1$, jossa t_1 on inversio yksikköympyrässä ja t_2 inversio reaaliaksellilla. Samoin kaikki laajennettu lineaarifunktio voidaan ilmaista inversioiden yhdistelmänä, joten ne ovat myös inversiivisiä muunnoksia.

Lause 10: Laajennettu käänteisfunktio ja laajennettu lineaarifunktio ovat inversiivisiä muunnoksia.

Jokainen inversio esimerkiksi säilyttää kulmien suuruudet. Sen takia saman täytyy päteä kaikkiin inversioiden yhdistelmiin. Tästä saadaan lause 11.

Lause 11: Inversiiviset muunnokset säilyttävät kulmien suuruudet ja yhdistävät yleiset ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi.

Ennen kuin voidaan käyttää inversiivisiä muunnoksia geometrian määrittämiseen, pitää ensin tarkastella ryhmän muodostumista.

Lause 12: Inversiivisten muunnosten joukko muodostaa ryhmän funktioiden yhdistelmän operaatiossa.

TODISTUS

Todistetaan, että seuraavat aksioomat pitävät paikkansa.

1. Päättäminen

Olkoot r ja s inversiivisiä muunnoksia. Voidaan kirjoittaa, että

$$r = t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_k$$

ja

$$s = t_{k+1} \circ t_{k+2} \circ \ldots \circ t_n ,$$

missä $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ovat inversioita. Täten

$$r \circ s = (t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_k) \circ (t_{k+1} \circ t_{k+2} \circ \ldots \circ t_n)$$

on inversioiden yhdistelmä ja näin myös inversiivinen muunnos.

2. Identiteetti

Funktioiden yhdistelmien identiteetti on identiteettimuunnos, joka antaa

$$t(z) = z \qquad (z \in \hat{\mathbb{C}}).$$

Tämä on inversiivinen muunnos, koska $t = s \circ s$, missä s on inversio yksikköympyrässä.

3. Inversio

Jos t on inversiivinen muunnos, niin

$$t = t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_n,$$

missä $t_1, t_2, \ldots t_n$ ovat inversioita. Tästä seuraa, että

$$t^{-1} = t_n^{-1} \circ t_{n-1}^{-1} \circ \ldots \circ t_1^{-1} = t_n \circ t_{n-1} \circ \ldots \circ t_1,$$

joka on inversiivinen muunnos.

4. Assosiatiivisuus

Funktioiden yhdistelmä on aina assosiatiivinen.

Koska kaikki yllä mainitut ehdot ovat voimassa, niin inversiivisten muunnosten joukko muodostaa ryhmän funktioiden yhdistelmissä.

■

Nyt kun on osoitettu, että inversiiviset muunnokset muodostavat ryhmän, voidaan käyttää tätä geometrian määrittämiseen.

Määritelmä 7: Inversiivinen geometria tutkii niitä $\hat{\mathbb{C}}$ kuvioiden ominaisuuksia, jotka säilyvät inversiivisilla muunnoksilla.

Kirjallisuus

[1] Brannan, David.; Esplen, Mattew F.; Gray, Jeremy J., Geometry, 2nd edition, Cambridge University press, 2012.