



**TURUN
YLIOPISTO**

VORONIN DIAGRAMMIT JA NIIDEN SOVELTAMINEN
HYDROLOGIASSA

Mirka Mäkinen

Pro gradu-tutkielma
Toukokuu 2022

Tarkastajat:
Prof. H. H.
Dos. D.D.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

MIRKA MÄKINEN: Voronoin diagrammit ja niiden soveltaminen hydrologiassa

Pro gradu-tutkielma, 38 s.

Matematiikka

Toukokuu 2022

Tutkielmassa esitellään Voronoin diagrammit ja niihin liittyvät Delaunayn kolmiointit ja Thiessenin monikulmiomenetelmät. Voronoin diagrammeilla on tieteessä monenlaisia sovelluksia, ja tutkielmassa esitellään Thiessenin monikulmiomenetelmä, jota on hyödynnetty hydrologiassa sadannan mallintamisessa.

Voronoin diagrammit perustuvat äärelliseen pistejoukkoon ja pisteiden välisiin keskinormaaleihin, joiden avulla muodostetaan jokaiselle generaattoripisteelle oma solu. Voronoin diagrammeja voi toteuttaa \mathbb{R}^m -uloitteisessa avaruudessa, mutta tässä tutkielmassa keskitytään ainoastaan kaksiulotteiseen avaruuteen, sillä Delaunayn kolmiointia ja Thiessenin monikulmiomenetelmää voi käyttää ainoastaan tasossa.

Delaunayn kolmiointi pohjautuu samoihin generaattoripisteisiin kuin Voronoin diagrammit, mutta siinä keskinormaalien sijasta generaattoripisteet yhdistetään toisiinsa janoilla, jos niiden Voronoin solut jakavat särmän. Laatoitus ei aina tuota pelkästään kolmioita, jolloin kyseessä on Delaunayn esikolmiointi, jonka voi muuttaa kolmiointiksi lisäämällä tarvittavat janat kolmioiden tekemiseen.

Hydrologia on maantieteen osa-alue, jossa tutkimuskohteena on vesi. Tutkielman kannalta tärkeä hydrologian osa-alueet ovat sadanta, haihdunta ja niitä yhdistävä veden kiertoalue.

Thiessenin monikulmiomenetelmä perustuu Voronoin diagrammeihin, jolloin generaattoripisteet ovat erimerkiksi sääasemia, joissa tehdään sademittauksia. Generaattoripisteen ympärille muodostuvaa solua kutsutaan Thiessenin monikulmioksi, johon kyseisen sääaseman mittaukset yleistetään. Menetelmä on teknologisen kehityksen vuoksi kuitenkin vähentynyt, ja tilalle on tullut tarkempia mallinnusmenetelmiä.

Asiasanat: Voronoin diagrammi, Delaunayn kolmiointi, Thiessenin monikulmiomenetelmä, sadannan mallintaminen.

Sisällys

1 Johdanto	1
2 Matemaattinen viitekehys	1
2.1 Vektorit	1
2.2 Graafit	4
2.3 Muita tärkeitä määritelmiä	6
3 Voronoin diagrammi ja Delaunayn kolmiointi	7
3.1 Voronoin diagrammien määritelmä	7
3.2 Delaunayn kolmiointi	9
3.3 Voronoin diagrammien ominaisuuksia	11
3.4 Delaunayn kolmioinnin ominaisuuksia	20
4 Hydrologia	25
4.1 Sadanta ja haihdunta	26
4.2 Veden kiertokulku	30
5 Soveltaminen hydrologiassa	31
5.1 Thiessenin monikulmio	31
5.2 Sadannan mallintaminen Thiessenin monikulmiomenetelmän avulla .	34
5.3 Muita mallinnusmenetelmiä	35
6 Yhteenveto	36
Kirjallisuutta	37

1 Johdanto

Tutkielmassa esitellään Voronoin diagrammit ja niihin liittyvät Delaunayn kolmiointit ja Thiessenin monikulmiomenetelmä. Voronoin diagrammeilla on käytännöllisiä ja teoreettisia sovelluksia monilla aloilla, pääasiassa tieteessä ja teknologiassa mutta myös kuvataiteissa.

Voronoin diagrammi on saanut nimensä Georgy Voronoin mukaan. Ensimmäisenä Voronoin diagrammeja tutki Peter Dirichlet (1805-1859) ja Georgy Voronoy (1868-1908). Dirichlet tutki diagrammeja 2- ja 3-ulotteisessa avaruudessa ja Voronoi laajensi tämän m -ulotteiseen avaruuteen. Voronoin diagrammi perustuu annettuun äärelliseen pistejoukkoon ja pisteiden välisiin keskinormaaleihin. Keskinormaalien avulla muodostetaan jokaiselle generaattoripisteelle solu. Solun seiniä kutsutaan särmiksi. Voronoin diagrammeilla on monenlaisia ominaisuuksia, joista suurimman osan Voronoi laajensi m -ulotteiseen avaruuteen, mutta tässä tutkielmassa keskitytään vain kaksiulotteiseen avaruuteen. [11]

Delaunayn kolmiointi perustuu samoihin generaattoripisteihin. Laatoituksessa yhdistetään generaattoripisteet toisiinsa janoilla, jos niiden Voronoin solut jakavat särmän. Laatoitus ei aina tuota pelkästään kolmioita, jolloin sitä kutsutaan Delaunayn esikolmioinniksi, joka voidaan muuttaa Delaunayn kolmioinniksi lisäämällä janoja. [11]

Meteorologi Alfred Thiessen (1872-1956) hyödynsi kaksiulotteisia Voronoin diagrammeja sademäärien mallinnuksessa ja arvioinnissa. Tästä syntyi Thiessenin monikulmiomenetelmä, jota käytettiin erityisesti hydrologiassa sadannan alueellisessa mallintamisessa. [11] Thiessenin monikulmiomenetelmällä on ollut erittäin tärkeä rooli hydrologiassa ja meteorologiassa keskimääräisen sademäärän (ja muiden hydro-meteorologisten tekijöiden, kuten auringon säteilyn) arvioinnissa rajatulla alueella [4].

Tutkielman ensimmäinen luku sisältää matemaattisen viitekehyksen, jossa esitellään perustietoja, joita tarvitaan Voronoin diagrammeissa. Luvussa 3 esitellään sekä Voronoin diagrammit ja niiden ominaisuuksia että Delaunayn kolmiointi ja sen ominaisuuksia. Luvussa 4 esitellään hydrologian perusteita ja luvussa 5 Thiessenin monikulmiomenetelmän käyttöä hydrologiassa sadannan mallintamisessa.

2 Matemaattinen viitekehys

Voronoin diagrammit koostuvat pisteistä ja niiden välisistä keskinormaaleista. Jotta Voronoin diagrammit voidaan määrittää tarkasti tarvitaan mm. vektoreita ja graafeja. Nämä esitellään seuraavaksi lyhyesti.

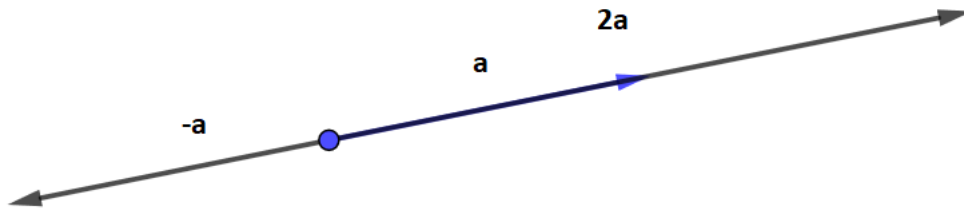
2.1 Vektorit

Tämä luku perustuu Koppisen lineaarialgebra osa 1 -luentomonisteeseen [8]. Geometriassa vektoreita käytetään kuvaamaan suureita, joihin suuruuden lisäksi liittyy määrätty suunta. Käytettyjen vektorien koordinaatit ovat reaalityypisiä lukuja. Geometrisesti vektoreita voidaan kuvata janoilla, joiden toiseen päähän on tapana merkitä

nuolenkärki. Tarkemman matemaattisen määritelmän mukaan vektori on matematiikassa vektoriavaruuden alkio. Tyypillisesti vektori on n :n luvun järjestetty joukko. Alkioiden lukumäärä n ilmaisee myös vektorin ulottuvuuden. Voronoin diagrammeja voi käsitellä n -ulotteisessa avaruudessa, mutta tässä pro gradu -tutkielmassa keskitytään 2-uloitteeseen avaruuteen. Seuraavaksi esitellään muutamia vektoreiden ominaisuuksia.

Määritelmä 2.1. Paikkavektori on vektori, joka alkaa origosta ja päättyy johonkin pisteeseen. Pisteeseen $P = (x, y)$ paikkavektori on vektori, jonka alkupiste on origo ja loppupiste on piste P .

Määritelmä 2.2. (Vektorin kertominen vakiolla) Vektorin \mathbf{a} kertominen vakiolla c (kuva 1). Jos kerroin c on positiivinen, tuloksena saatavaa vektoria esittävä jana on samansuuntainen alkuperäisen kanssa, mutta sen pituus on alkuperäiseen verrattuna c -kertainen. Vastaavasti jos kerroin c on negatiivinen, saatu vektori on alkuperäiseen nähden vastakkaisuuntainen, ja janan pituus on $-c$ -kertainen.



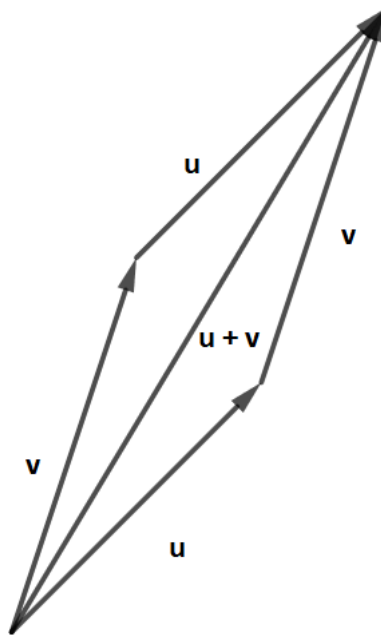
Kuva 1: Vektorin kertominen vakiolla. Vektori \mathbf{a} ja sen kertominen vakioilla $c_1 = -1$ ja $c_2 = 2$.

Määritelmä 2.3. (Vektorien yhteen- ja vähennyslasku) Kaksi reaaliavaruuden vektoria $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ ja $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ lasketaan yhteen laskemalla niiden vastaavat koordinaatit yhteen (kuva 2),

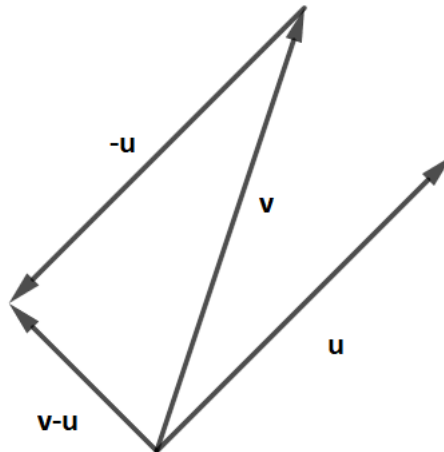
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

Vastaavasti vektorista $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ vähennetään vektori $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ vähentämällä ensimmäisen vektorin kustakin koordinaatista jälkimmäisen vektorin vastaava koordinaatti (kuva 3),

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - u_1 \\ v_2 - u_2 \end{bmatrix}$$



Kuva 2: Vektorien yhteenlasku.



Kuva 3: Vektorien vähennyslasku.

Määritelmä 2.4. Vektorien $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ ja $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ sisätulo (\mathbf{u}, \mathbf{v}) on reaaliluku, joka saadaan laskemalla

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2$$

Sisätulo merkitään myös $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$.

Määritelmä 2.5. Vektorit ovat ortogonaaliset, merkitään $\mathbf{u}, \perp \mathbf{v}$, jos ja vain jos sisätulo $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0$

Määritelmä 2.6. Kaksi vektoria \mathbf{u} ja \mathbf{v} ovat lineaarisesti riippuvaiset, jos toinen saadaan toisesta kertomalla vakiolla, muulloin vektorit ovat lineaarisesti riippumattomat.

Määritelmä 2.7. Kahden pisteen $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ ja $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ euklidinen etäisyys on

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v})^T(\mathbf{u} - \mathbf{v})} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$

2.2 Graafit

Tämä luku peustuu Honkalan kombinatoriikka-luentomonisteeseen [5] ja Okaben, Bootsien, Sugiharaandin ja NokChiun kirjaan Spatial tessellations [11]. Graafiteoria on matematiikan osa-alue, joka tutkii kohteiden välisten suhteiden esittämiseen käytettäviä matemaattisia malleja eli graafeja. Graafit koostuvat solmuista ja niitä yhdistävistä linkeistä, jotka voivat olla suunnattuja tai suuntaamattomia.

Määritelmä 2.8. Graafi G on pari (P, L) , missä P on äärellinen ei-tyhjä joukko ja $L \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in P, u \neq v\}$. Joukon P alkiota kutsutaan graafin pisteiksi ja joukon L alkiota kutsutaan graafin viivoiksi.

Määritelmä 2.9. Olkoon $P = \{p_{g1}, \dots, p_{gn_p}\}$ äärellinen joukko pisteitä 2- uloitteisessa Euklidisessa avaruudessa ja $L_g = \{L_{g1}, \dots, L_{gn_i}\}$ joukko viivoja joukon P pisteiden välillä. Viivat L_{gi} voivat olla suoria tai kaarevia, mutta niiden pitää toteuttaa seuraavat ehdot:

1. Jokainen viiva L_{gi} , joka muodostaa silmukan, saa sisältää vain yhden pisteen p_{gi} (kuvassa 4 piste p_{g1} ja viiva L_{g1}).
2. Viiva L_{gi} joka ei muodosta silmukkaa sisältää 2 pistettä joukosta P_g , jotka ovat viivan päätepisteet (kuvassa 4 viiva L_{g2} pisteille p_{g2} ja p_{g3}).
3. Kahdella viivalla L_{gi} ja L_{gj} ei saa olla yhteisiä pisteitä, elleivät molemmat pisteet kuulu joukkoon P_g (kuvassa 4 viivat L_{g2} ja L_{g3} jakavat pisteen p_{g3}).

Jos graafi toteuttaa nämä kaikki ehdot, on se geometrinen graafi.

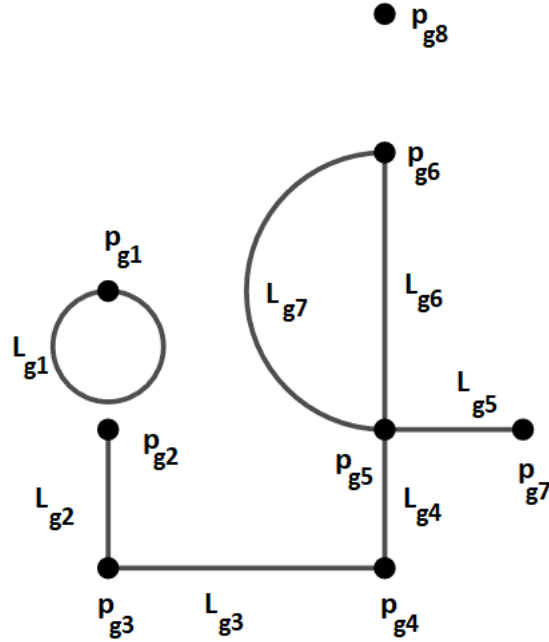
Määritelmä 2.10. (Yhdistetty graafi) Graafi $G(P, L)$ on yhdistetty jos $\forall u, v \in P \exists u_1, \dots, u_n : u = u_1, v = u_n$ ja $\forall i \{u_i, u_{i+1}\} \in L$.

Määritelmä 2.11. Graafia kutsutaan puuksi (tree), jos se ei sisällä yhtään silmukkaa.

Lause 1. Jos graafi on puu, niin

$$n_p - n_l = 1, \tag{1}$$

missä n_p on pisteiden lukumäärä ja n_l on viivojen lukumäärä.



Kuva 4: Graafi $G_g = G_g(\{p_{g1}, \dots, p_{g8}\}, \{L_{g1}, \dots, L_{g7}\})$.

Jos graafi ei ole puu niin yhtälö (1) ei välttämättä ole tosi. Tällöin tarvitaan Eulerin yhtälöä (lause 2). Geometrisen graafin viivat jakavat tason alueisiin, jotka voivat olla rajoitettuja tai rajoittamattomia. Olkoon n_r näiden alueiden eli solujen lukumäärä. Jos graafi on puu, niin puun viivat eivät jaa tasoa, joten on vain yksi rajoittamaton solu.

Lause 2. (Eulerin yhtälö) *Yhdistetylle geometriselle graafille pätee*

$$n_p - n_l + n_r = 2, \quad (2)$$

missä n_p on pisteiden lukumäärä, n_l on viivojen lukumäärä ja n_r on solujen lukumäärä.

Todistus. Lause todistuu iduktiolla. Jos $n_l = 1$, niin $n_p = 2$ ja $n_r = 1$, joten yhtälö pätee. Oletetaan, että yhtälö pätee, kun viivojen lukumäärä on n_l . Tarvitsee todistaa, että yhtälö pätee, kun viivojen lukumäärä on $n_l + 1$. Todistus jakautuu kahteen tapaukseen:

Tapaus 1: Grafiin lisätään sekä uusi piste että viiva joka yhdistää pisteen alkuperäiseen graafiin, jolloin viivojen lukumäärä on nyt $n_l + 1$ ja pisteiden lukumäärä on $n_p + 1$, jolloin yhtälö pätee edelleen.

Tapaus 2: Yhdistetään graafin kaksi pistettä toisiinsa viivalla (joka ei risteä muiden graafin viivojen kanssa). Tällöin viivojen lukumäärä on $n_l + 1$ ja solujen lukumäärä on $n_r + 1$, joten yhtälö on edelleen voimassa. \square

Todistuksessa näytetään vain sen pääpiirteet. Tarkempi todistus löytyy Okaben, Bootsien, Sugihararan ja Nok Chiun kirjasta Spatial tessellations [12].

2.3 Muita tärkeitä määritelmiä

Muita tärkeitä käsitteitä on kollineaarisuus, konvekssi verho ja rajoitettu solu. Nämä esitellään seuraavaksi. Luku perustuu Okaben, Bootsien, Sugiharán ja Nok Chiun kirjaan *Spatial tessellations* [12].

Määritelmä 2.12. Joukon E alkioden lukumäärää merkitään $|E|$.

Määritelmä 2.13. Merkitään $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Määritelmä 2.14. (Kollinaarisuus) Pistejoukko $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ on kollineaarinen, jos kaikki pisteet ovat samalla suoralla. Jos pisteitä ei voi yhdistää toisiinsa yhdellä suoralla ne eivät ole kollineaaisia.

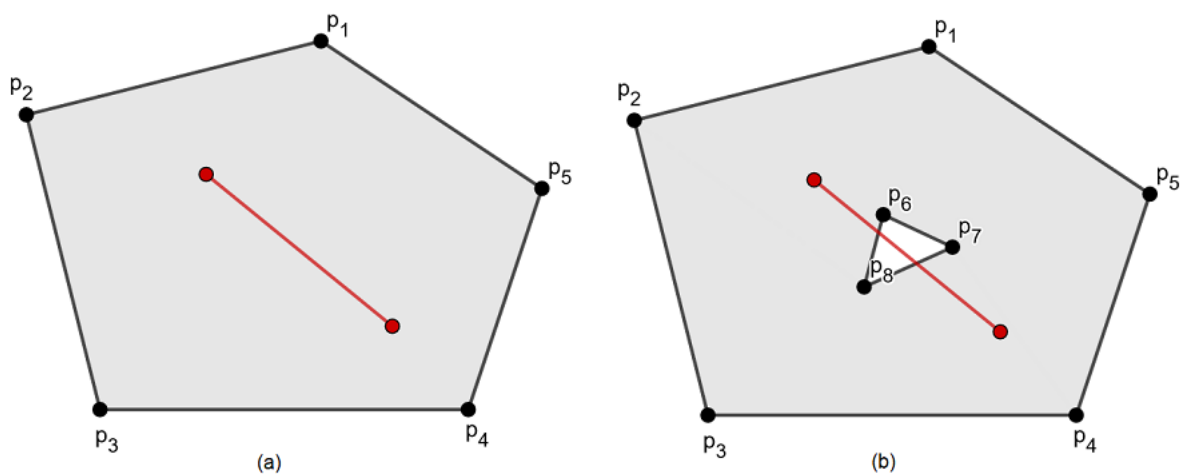
Usein lisäyksenä määritelmään 2.11 on, että $3 \leq n < \infty$, sillä 2 pistettä ovat aina samalla suoralla. Voronoin diagrammin voi kuitenkin muodostaa kahdesta pisteestä, mutta Delaunayn kolmiointiin vaaditaan, että pisteet eivät ole kollineaarisia, joten 2 pistettä ei riitä muodostamaan Delaunayn kolmiointia.

Voronoin diagrammeissa ja Delaunayn kolmioinnissa alueita, joihin taso jakautuu, kutsutaan soluiksi. Solu voi olla rajoitettu tai rajoittumaton, mikä määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 2.15. Tasossa solu on rajoitettu jos ja vain se sisältyy jonkun äärellis-läisäisen ympyrän sisään, muulloin solu on rajoittamaton.

Voronoin digrammeissa ja Delaunayn kolmioinnissa solut ovat konvekseja joukkoja, mikä määritellään seuraavasti.

Määritelmä 2.16. Joukko $V \subseteq \mathbb{R}^2$ on konvekssi, jos kahta mielivaltaista pistettä yhdistävä jana sisältyy aina joukkoon V .



Kuva 5: Konveksisuus: (a) kohdan solu on konvekssi ja (b) kohdan solu ei ole konvekssi.

Määritelmä 2.17. Joukon $A \subset \mathbb{R}^2$ konvekssi verho on

$$CH(A) = \bigcap \{V \subseteq \mathbb{R}^2 : A \subset V, V \text{ on konvekssi}\}. \quad (3)$$

Konvekssi verho $CH(A)$ peittää kaikki joukon A pisteet ja yhdistämällä konveksin verhon sisällä 2 mielivaltaista pistettä, kuuluu pisteiden välinen jana myös konvekssiin verhoon (kuva 5).

3 Voronoin diagrammi ja Delaunayn kolmiointi

Voronoin diagrammi koostuu äärellisestä joukosta generaattoripisteitä ja niiden välisiä keskinormaaleja. Taso (tai m -ulotteinen avaruus) jakautuu soluiksi, jossa solun sisällä on yksi generaattoripistejoukon piste ja kaikki tason pisteet, jotka ovat lähimpänä kyseistä pistettä. Keskinormaalit muodostavat solujen seinät eli särmit. Delaunayn kolmiointi toteutetaan samoista generaattoripisteistä kuin Voronoin diagrammi. Laatoituksessa generaattoripisteet yhdistetään toisiinsa janoilla, jos niiden Voronoin solut jakavat särmit. Laatoitus on Delaunayn kolmiointi, jos kaikki muodostuneet solut konveksin verhon sisällä on kolmioita, muulloin kyseessä on Delaunayn esikolmiointi, joka voidaan muuttaa Delaunayn kolmiointiksi lisäämällä janoja. [1]

Voronoin diagrammista käytetään myös nimityksiä Voronoin tessellaatio, Voronoin dekompositio, Voronoin partitio ja Dirichlet'n tessellaatio, riippuen kirjoittajasta. Soluja, joihin Voronoin diagrammi tason jakaa, sanotaan myös Thiessenin monikulmioiksi. Nimi on käytössä erityisesti hydrologiassa.

Tämä luku perustuu Okaben, Bootsien, Sugiharana ja Nok Chiun kirjaan Spatial tessellations [11].

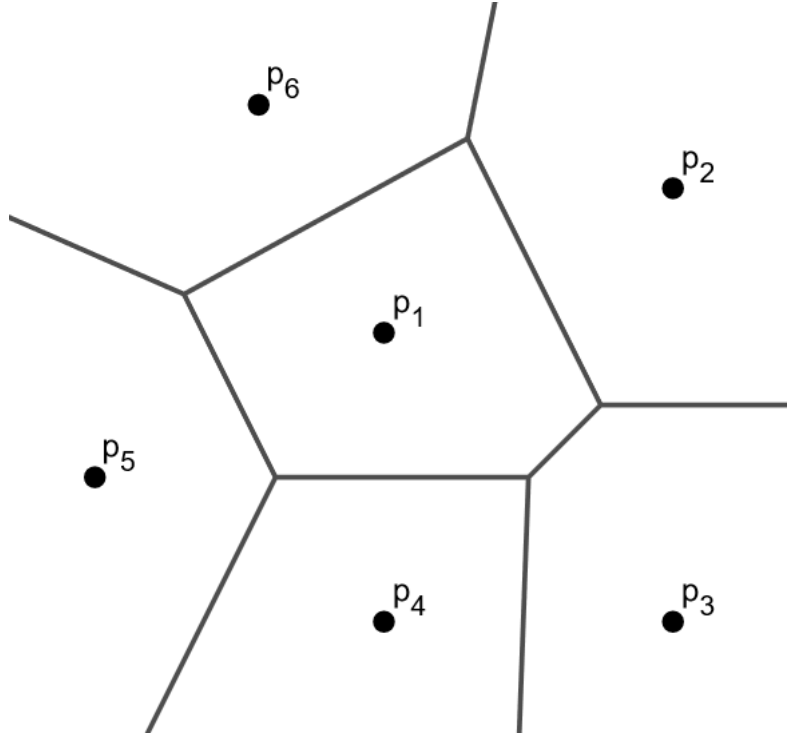
3.1 Voronoin diagrammien määritelmä

Kirjallisuudessa tason perinteiseen Voronoin diagrammiin viitataan vain Voronoin diagrammina, joten etuliite 'tason perinteinen' jätetään tästä eteenpäin pois käytöstä. Kontekstista käy ilmi, puhutaanko tason Voronoin diagrammeista vai Voronoin diagrammeista yleisemmin.

Määritelmä 3.1. (Euklidinen etäisyys) Olkoon $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ joukko Euklidisen tason pisteitä, joiden karteesiset koordinaatit ovat $(x_{11}, x_{12}), \dots, (x_{n1}, x_{n2})$ (tai paikkavektorit $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$). Kaikille pisteille pätee, että $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$, kun $i \neq j$ ja $i, j \in I_n = \{1, \dots, n\}$. Olkoon p mielivaltainen piste Euklidisessä tasossa ja olkoot sen koordinaatit (x_1, x_2) . Kuten Määritelmästä 2.7 nähtiin pisteiden p ja p_i euklidinen etäisyys on $d(p, p_i) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| = \sqrt{(x_1 - x_{i1})^2 + (x_2 - x_{i2})^2}$. Jos p_i on p :n lähin piste (eli lähin naapuri) tai yksi lähimmäistä naapuripisteistä, saadaan relatio $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$, kaikille $j \in I_n$. Tällöin piste p on pistettä p_i vastaavassa Voronoin solussa.

Määritelmä 3.2. Voronoin diagrammi muodostuu joukosta generattoripisteitä $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ ja generaattoripisteiden ympärillä olevista alueista eli soluista. Solun seiniä kutsutaan Voronoin särmitiksi ja merkitään pisteiden p_i ja p_j solujen välistä särmiä $e(p_i, p_j)$. Kahden tai useamman särmiten yhteistä pistettä kutsutaan kärjeksi.

Kuvassa 6 on esitetty Voronoin diagrammi joukolle $P = \{p_1, \dots, p_6\}$.



Kuva 6: Voronoin diagrammi.

Seuraava määritelmä täsmentää Määritelmän 3.2.

Määritelmä 3.3. Olkoon $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$, missä $3 \leq n < \infty$ ja $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$ kaikille i ja j , joille pätee $i \neq j$ ja $i, j \in I_n$. Kutsutaan saatua aluetta

$$V(p_i) = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| \text{ kaikille } i \neq j, j \in I_n\},$$

Voronoin soluksi muuttujalle p_i . Joukon $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ generoima Voronoin diagrammi on

$$\mathcal{V} = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}.$$

Avoin Voronoin solu määritellään vastaavasti

$$V^\circ(p_i) = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| \text{ kaikille } i \neq j, j \in I_n\},$$

Kun Voronoin diagrammi on suljettu, se sisältää myös sen rajat $\partial V(p_i)$. Raja on unioini janoista, puolisuorista ja suorista, jotka ovat Voronoin särmiä. Särmien leikkauspisteitä kutsutaan kärjiksi.

Määritelmä 3.4. (Degeneroitumattomuus) Jos jokaisen Voronoin kärjen jakaa tasan kolme särmää, kutsutaan Voronoin diagrammia degeneroitumattomaksi.

Määritelmässä 3.1 ja 3.3 Voronoin diagrammi on rajoittumaton, kuten kuvassa 6, mutta useissa käytännön sovelluksissa on kyse rajoitetusta alueesta. Sitä kutsutaan rajatuksi Voronoin diagrammiksi.

Voronoin diagrammi sisältää soluja, joita rajoittavat pisteiden keskinormaalien muodostamat suorat. Merkitään tätä keskinormaalia pisteiden p_i ja p_j välillä $b(p_i, p_j)$, kun $i \neq j$. Koska keskinormaali $b(p_i, p_j)$ on yhtä kaukana pisteistä p_i ja p_j , voidaan kirjoittaa, että

$$b(p_i, p_j) = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|\}.$$

Keskinormaali jakaa tason kahteen alueeseen, josta saadaan

$$H(p_i, p_j) = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|\},$$

jota kutsutaan p_i :n dominointialueeksi. Vastaavasti aluetta $H(p_j, p_i)$ kutsutaan pisteen p_j :n dominointialueeksi.

Määritelmän 3.3 voi esittää myös seuraavalla tavalla, sillä $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$ jos ja vain jos $\mathbf{x} \in H(p_i, p_j)$.

Määritelmä 3.5. Olkoon $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$, missä $3 \leq n < \infty$ ja $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$ kaikille i ja j , joille pätee $i \neq j$ ja $i, j \in I_n$. Kutsutaan aluetta

$$V(p_i) = \bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} H(p_i, p_j)$$

Voronoin soluksi ja joukkoa $V(P) = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$ generaatiopistejoukon P Voronoin diagrammiksi.

Jotta Voronoin diagrammeja olisi helppo käsitellä digitaalisesti, voidaan ne digitalisoida. Digitoidussa Voronoin diagrammissa muodostetaan Voronoin diagrammin päälle ruudukko $n_v \times n_h$ ja digitalisoidaan solujen särmät.

Määritelmä 3.6. Olkoon $c_{ij} = \{(x, y) \mid i \leq x \leq i+1, j \leq y \leq j+1\}$ ja $i, j \in \mathbb{Z}$, jolloin tason joukon $G \subseteq \mathbb{R}^2$ kuva määritellään seuraavasti; $\text{Im}(G) = \{c_{ij} \mid c_{ij} \cap G \neq \emptyset\}$.

Määritelmä 3.7. Olkoon $\mathcal{V} = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$ Voronoin diagrammi, joka toteuttaa määritelmät 3.1, 3.2 ja 3.3. Tällöin kutsutaan $\text{Im}\mathcal{V} = \{\text{Im}(V(p_1)), \dots, \text{Im}(V(p_n))\}$ digitalisoiduksi Voronoin diagrammiksi, $\text{Im}(V(p_i))$ digitalisoiduksi Voronoin soluksi ja $\text{Im}(\delta V(p_i))$ digitalisoidun Voronoin alueen reunaksi.

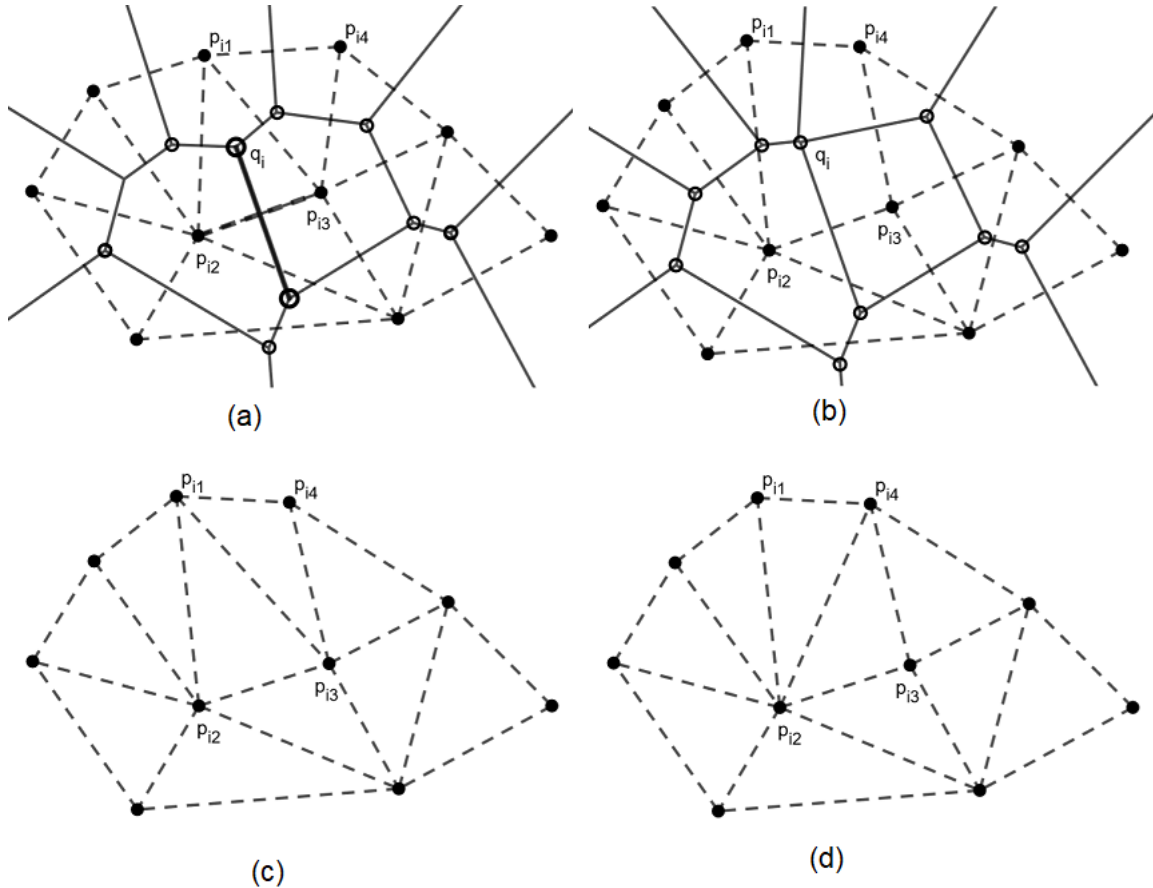
Digitaalista Voronoin diagrammia kutsutaan kirjallisuudessa myös nimellä diskreetti Voronoin diagrammi.

3.2 Delaunayn kolmiointi

Tässä kappaleessa määritellään Delaunayn kolmiointi, joka on osa Delaunayn laatoitusta. Delaunayn laatoitus on 'duaalilaatoitus' Voronoin digrammille. Delaunayn laatoituksessa käsitellään ainoastaan 2-ulotteista avaruutta.

Määritelmä 3.8. Olkoon $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ joukko ei-kollineaarisia pisteitä, jotka muodostavat Voronoin diagrammin ja $3 \leq n < \infty$. Yhdistetään pareittain generaatiopisteet, joiden Voronoin solut jakavat Voronoin särmän. Kutsutaan saatua kuviota laatoitukseksi. Jos laatoitus sisältää vain kolmioita kutsutaan sitä Delaunayn kolmioksi ja jos se sisältää yhden tai usemman muun monikulmion kutsutaan sitä Delaunayn esikolmioksi. Delaunayn esikolmiointi voidaan muuttaa Delaunayn kolmioksi lisäämällä janoja niihin soluihin, joissa solun muoto ei ole kolmio.

Kuvassa 7 esitetään Delaunayn kolmiointi ja esikolmiointi. Voronoin diagrammi (viivat) ja Delaunayn kolmiointi/esikolmiointi (katkoviivat) muodostuvat samasta pistejoukosta $P = \{p_1, \dots, p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4}, \dots, p_n\}$. Kuvassa 7(a) jokainen Delaunayn solu on kolmio, mutta kuvassa 7 (b) pisteet p_{i1}, p_{i2}, p_{i3} ja p_{i4} muodostavat nelikulmion ja on tällöin Delaunayn esikolmiointi. Kuvissa 7 (c) ja 7 (d) on esitetty 2 erilaista Delaunayn kolmiointia kuvan 7 (b) Delaunayn esikolmiointin pohjalta. Kuvassa 7 (c) on yhdistetty pisteet p_{i1} ja p_{i3} janalla ja vastaavasti kuvassa 7 (d) on yhdistetty pisteet p_{i2} ja p_{i4} janalla.



Kuva 7: Voronoin diagrammi (viivat) ja Delaunayn kolmiointi (katkoviivat): (a) Delaunayn kolmiointi, (b) Delaunayn esikolmiointi, (c) Delaunayn kolmiointi (b) kohdasta ja (d) toisenlainen Delaunayn kolmiointi (b) kohdasta.

Määritelmä 3.10 on ekvivalentti määritelmän 3.9 kanssa, mutta esittää määritelmän matemaattisemmin.

Määritelmä 3.9. Olkoon $\mathcal{V}(P)$ Voronoin diagrammi, joka saadaan pistejoukosta $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ ja $3 \leq n < \infty$. Oletetaan, että pisteet eivät ole kollineaarisia. Olkoon $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ Voronoin kärkien joukko. Olkoot $\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{ik_i}$ niiden Voronoin solujen generaatiopisteiden paikkavektorit, jotka jakavat kärjen q_i . Tällöin

määritellään kärkeä q_i vastaava Delaunayn solu

$$T_i = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j \mathbf{x}_{ij}, \text{ jossa } \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \right\}, \quad (4)$$

ja olkoon

$$\mathcal{D} = \{T_1, \dots, T_{n_v}\}. \quad (5)$$

Tällöin \mathcal{D} on konveksin verhon $CH(P)$ Delaunayn kolmiointi, jos $k_i = 3$ kaikille $i \in I_{n_v}$. Jos on olemassa vähintään yksi $k_i \geq 4$, kutsutaan sitä konveksin verhon Delaunayn esikolmioinniksi. Ne solut, joissa $k_i \geq 4$ jaetaan kolmioiksi $T_{i1}, \dots, T_{ik_i-2}$ sitten, että yhdistetään niiden vastakkaisien kulmien janoilla. Tällöin joukko

$$\mathcal{D} = \{T_{11}, \dots, T_{1k_1-2}, \dots, T_{n_v1}, \dots, T_{n_vk_{n_v}-2}\} \quad (6)$$

on Delaunayn kolmiointi.

Yhtälöstä (6) saadaan, että Delaunayn kolmiot ovat määritelty suljetuiksi joukoiksi, joihin kuuluu myös niiden reuna, joita kutsutaan Delaunayn sivuiksi.

3.3 Voronoin diagrammien ominaisuuksia

Tässä luvussa esitellään muutamia Voronoin diagrammien geometrisia ominaisuuksia. Luvussa käsitellään Voronoin diagrammeja ainoastaan tasossa, mutta monet ominaisuuksista voidaan laajentaa myös m -ulotteisiin Voronoin diagrammeihin.

Olkoon $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ ($2 \leq n < \infty$) joukko pisteitä, jossa $p_i \neq p_j$ kaikilla i ja j . Määritellään Voronoin solut kuten edellä

$$V(p_i) = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| \text{ } i \neq j, j \in I_n\}. \quad (7)$$

Tällöin $V(p_i)$ on epätyhjä konvekksi solu. Soluilla on seuraavat ominaisuudet:

$$\bigcup_{i=1}^n V(p_i) = \mathbb{R}^2 \quad (8)$$

ja

$$[V(p_i) \setminus \partial V(p_i)] \cap [V(p_j) \setminus \partial V(p_j)] = \emptyset, i \neq j, i, j \in I_n. \quad (9)$$

Voronoin diagrammi $\mathcal{V}(P)$ on siis joukon P määräämä tason \mathbb{R}^2 laatoitus.

Koska oletetaan, että $n \geq 2$, saadaan vähintään kaksi Voronoin solua.

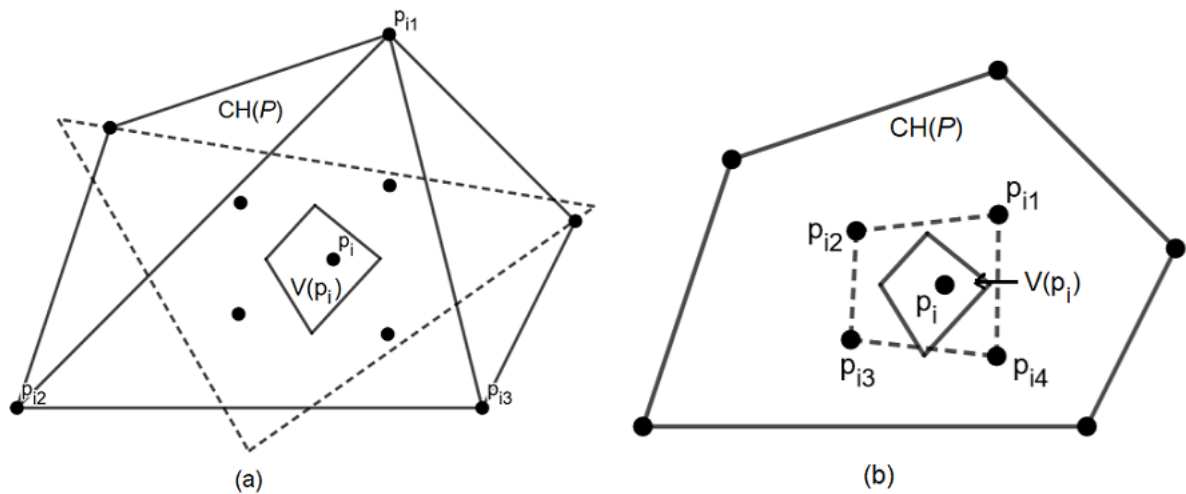
Lause 3. *Olkoon $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ äärellinen joukko, jonka Voronoin diagrammi on $\mathcal{V}(P)$. Voronoin solu $V(p_i)$ on rajoittamaton jos ja vain jos p_i on konveksin verhon reunalla eli $p_i \in \partial CH(P)$.*

Todistus. Osoitetaan, että Voronoin solu, jonka generaattoripiste p_i on konveksin verhon $CH(P)$ sisäpuolella, on rajoitettu (kuva 8). Jos konvekssi verho on nelikulmio ja piste p_i sattuu olemaan nelikulmion lävistäjien leikkauspiste, niin pisteen p_i ja nelikulmion (eli konveksin verhon) kärkien väliset keskinormaalit muodostavat suunnikkaan, johon pisteen p_i solu $V(p_i)$ sisältyy, eli solu on rajoitettu. Muutoin pisteelle p_i voidaan muodostaa kolmio niin, että sen kulmina toimii pisteet p_{i1}, p_{i2} ja $p_{i3} \in P$, jotka ovat generaattoripisteitä $CH(P)$:n reunalla (kuva 8) ja piste p_i on tämän kolmion sisäpuolella. Seuraavaksi konstruoidaan kolmio puolitasojen $H(p_i, p_{i1}), H(p_i, p_{i2})$ ja $H(p_i, p_{i3})$ leikkauspisteiden avulla (katkoviiva kuvassa 8 (a)). Koska p_i on kolmion $p_{i1}p_{i2}p_{i3}$ sisäpuolella, on kolmio $p_{i1}p_{i2}p_{i3}$ tällöin rajattu ja

$$\bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} H(p_i, p_j) = V(p_i) \subset H(p_i, p_{i1}) \cap H(p_i, p_{i2}) \cap H(p_i, p_{i3}).$$

Tällöin Voronoin solu $V(p_i)$ on rajoitettu.

Oletetaan sitten, että Voronoin solu $V(p_i)$ on rajoitettu. Olkoon solun $V(p_i)$ särmät $e(p_i, p_j)$, $j \in J_i \subseteq I_n$. Tällöin p_i on konveksin verhon $CH(\{p_j, j \in J_i\})$ sisäpuolella (kuva 8). Tämä kolmio on rajoitettu, koska $CH(\{p_j, j \in J_i\}) \subset CH(P)$, piste p_i ei ole joukon $CH(P)$ reunalla. □



Kuva 8: Kuva lauseen 2 todistukseen.

Kollinearisuudesta (määritelmä 2.14) seuraa suoraan seuraava lause.

Lause 4. *Kaikille Voronoin diagrammeille pätee seuraavat ehdot, kun Voronoin diagrammin generaattoripisteet ovat joukosta $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ ($2 \leq n < \infty$)*

1. *Voronoin särmät ovat äärettömiä suoria jos ja vain jos joukon P pisteet ovat kollineaariset.*

2. Voronoin särmä $e(p_i, p_j) (\neq \emptyset)$ on puolisuora jos ja vai jos joukon P pisteet eivät ole kollineaarisia ja p_i ja p_j ovat peräkkäiset generaatioipisteet konveksin verhon $CH(P)$ reunalla.
3. Voronoin särmä $e(p_i, p_j)$ on jana jos ja vain jos jana $\overline{p_i p_j}$ ei ole konveksin verhon $CH(P)$ reunalla.

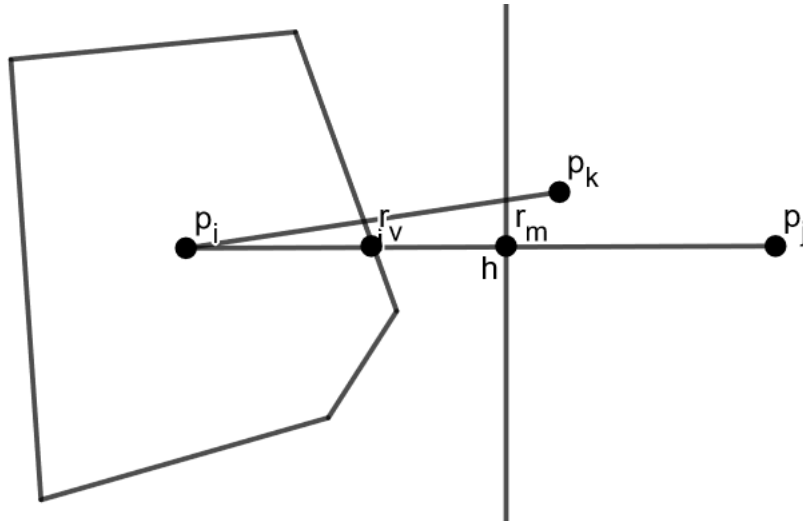
Määritelmästä 3.5 huomataan, että Voronoin särmät ovat osa keskinormaalia, mutta jokainen keskinormaali ei aina generoi Voronoin särmää. Seuraava lause ja sen todistus tuottavat yhden Voronoin särmän.

Lause 5. *Piste p_i ja sitä lähin generaattoripiste generoi solun $V(p_i)$ särmän.*

Todistus. Olkoon piste p_j lähin pisteen p_i generaattoripiste ja olkoon $b(p_i, p_j)$ keskinormaali, joka ei generoi Voronoin särmää. Olkoon r_m janan $\overline{p_i p_j}$ keskipiste, kuten kuvassa 9. Koska keskinormaali $b(p_i, p_j)$ ei generoi Voronoin särmää, niin piste r_m on solun $V(p_i)$ ulkopuolella. Jana $\overline{r_m p_i}$ leikkaa Voronoin solun $V(p_i)$ jonkin särmän $e(p_i, p_k)$ pisteessä r_v . Tällöin

$$\frac{\overline{p_i p_k}}{2} \leq \overline{p_i r_v} < \overline{p_i r_m} = \frac{\overline{p_i p_j}}{2}$$

ja päädytään ristiriitaan, sillä piste p_j on pisteen p_i lähin piste. Tällöin $b(p_i, p_j)$ generoi Voronoin särmän $e(p_i, p_j)$. \square



Kuva 9: Kuva lauseen 5 todistukseen.

Lauseesta 5 seuraa seuraava lause.

Lause 6. *Pistettä p_i lähinnä oleva generaattoripiste on niiden generaattoripisteiden joukossa, joiden Voronoin soluilla on yhteinen särmä solun $V(p_i)$ kanssa.*

Tämän lauseen avulla voidaan ratkaista seuraavat algoritmiset kysymykset, jotka ovat esittäneet Shamos ja Hoey 1975 ja Bentley 1980.

Kysymys 1: Etsi lähin pari annetusta joukosta P . Sanotaan, että pari $\{p_i, p_j\}$ on lähin pari, kun se toteuttaa seuraavan ehdon. Pisteiden p_i ja p_j välinen etäisyys on pienin kaikkien joukon P pisteparien joukossa.

Kysymys 2: Annetulle äärelliselle joukolle P , etsi p_i :n lähin naapuripiste kaikille $p_i \in P$.

Lause 7. *Generaattoripiste p_i on lähin generaattoripiste pisteelle p jos ja vain jos piste $p \in V(p_i)$.*

Kysymys 3: Annetulle joukolle P pisteitä, etsi lähin naapuripiste pisteelle p joukosta P . Piste p ei välttämättä kuulu joukkoon P .

Tätä ongelmaa kutsutaan myös postitoimisto-ongelmaksi. Ratkaisuun käytetään lausetta 7. Kun laatoitus on annettu, geometrian avulla voidaan etsiä Voronoin solu, joka sisältää annetun pisteen. Kun tämä solu $V(p_i)$ on tiedossa hyödynnetään lausetta 7. Siitä saadaan, että p_i on lähin generaattoripiste.

Kysymys 4: Etsi kaikki parit p_i ja p_j , jotka toteuttavat seuraavan ehdon $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \leq \delta$, kun pisteet kuuluvat annettuun joukkoon P ja etäisyys δ on annettu.

Ratkaisuun käytetään Delaunayn kolmiointia. Ensin muodostetaan Delaunayn kolmiointi annetusta pistejoukosta. Sitten valitaan Delaunayn sivut $\overline{p_i p_j}$, jotka toteuttavat annetun ehdon $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \leq \delta$. Valitut sivut ja niiden pisteet muodostavat graafin $G(P_g L_g)$, missä P_g on valittujen sivujen päätepisteet ja L_g valitut sivut. Tehdään syvyyshaku graafiin $G(P_g, L_g)$ jokaisesta pisteestä $p_i \in P_g$. Keskeytetään aina kun löydetään piste p_k , joka toteuttaa ehdon $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\| \geq \delta$, raportoidaan löydetty parit p_i, p_j , jotka toteuttavat ehdon $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \leq \delta$.

Voronoin kärjillä on myös kiinnostavia ominaisuuksia. Niiden yhteydessä tarvitaan käsitettä tyhjä ympyrä, joka määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 3.10. (Tyhjä ympyrä) Olkoon P joukko äärellisiä pisteitä tasossa. Kun ympyrän C sisäpuolella ei ole yhtään pistettä joukosta P , niin ympyrä on tyhjä.

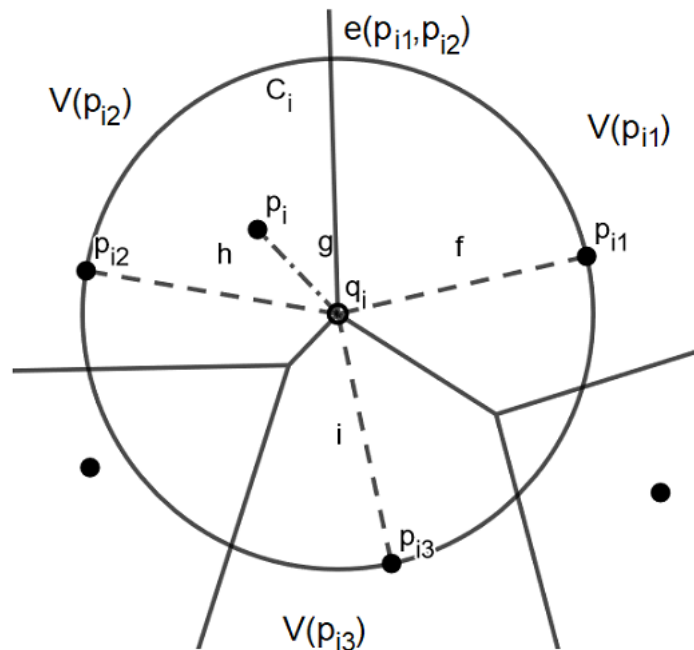
Tyhjän ympyrän kehällä saa olla pisteitä. Voronoin diagrammien tyhjien ympyröiden kehät kulkevat naapurigeneraattoripisteiden kautta.

Lause 8. *Olkoon $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ Voronoin diagrammin $\mathcal{V}(P)$ kärkien joukko. Kaikille Voronoin kärjille $q_i \in Q$, on olemassa yksikäsitteinen ympyrä C_i , jonka keskipisteenä on piste q_i ja joka toteuttaa seuraavan ehdon. Ympyrän kehä sisältää vähintään kolme generaattoripistettä, mutta ympyrä ei sisällä yhtään generaattoripistettä sen sisäpuolella. Jos oletetaan degeneroimattomuus (määritelmä 3.4) niin ympyrä C_i kulkee tarkalleen kolmen generaattoripisteen kautta.*

Todistus. Koska Voronoin kärki q_i kuuluu vähintään kolmeen Voronoin soluun $V(p_{i1}), \dots, V(p_{ik})$, $k \geq 3$, $p_{ij} \in P$, $j \in I_k$, jossa vähintään kolme Voronoin särmää $e(p_{i1}, p_{i2}), \dots, e(p_{ik}, p_{i1})$ kohtaavat pisteessä q_i kuvan 10 mukaisesti. Koska särmä $e(p_{ij}, p_{ij+1})$ on yhtä kaukana sen generaattoripisteistä, huomataan, että Voronoin

kärki q_i on yhtä kaukana kaikista sen generaattoripisteistä p_{ij}, p_{ij+1} jne. Koska tämä pätee kaikille $j \in I_k$ saadaan, että $d(q_i, p_{i1}) = \dots = d(q_i, p_{ik})$. Pisteet p_{i1}, \dots, p_{ik} ovat siis samalla ympyrällä C_i .

Vielä pitää osoittaa ettei ympyrän sisällä ole generaattoripistettä eli ympyrä C_i on tyhjä. Oletetaan että pistettä $p_i \in P \setminus \{p_{i1}, \dots, p_{ik}\}$ lähin generaattoripiste on ympyrän C_i sisäpuolella (kuva 10). Tällöin lauseen 7 mukaan q_i kuuluu Voronoin soluun $V(p_i)$, joka johtaa ristiriitaan, sillä vain $V(p_{i1}), \dots, V(p_{ik})$ jakoivat pisteen q_i . Ympyrä C_i on siis tyhjä. \square



Kuva 10: Kuva lauseen 8 todistukseen.

Lauseesta 8 seuraa suoraan seuraava lause.

Lause 9. *Kun ympyrä C_i toteuttaa lauseen 8, niin ympyrä C_i on suurin mahdollinen tyhjä ympyrä, jonka keskipiste on Voronoin kärki q_i .*

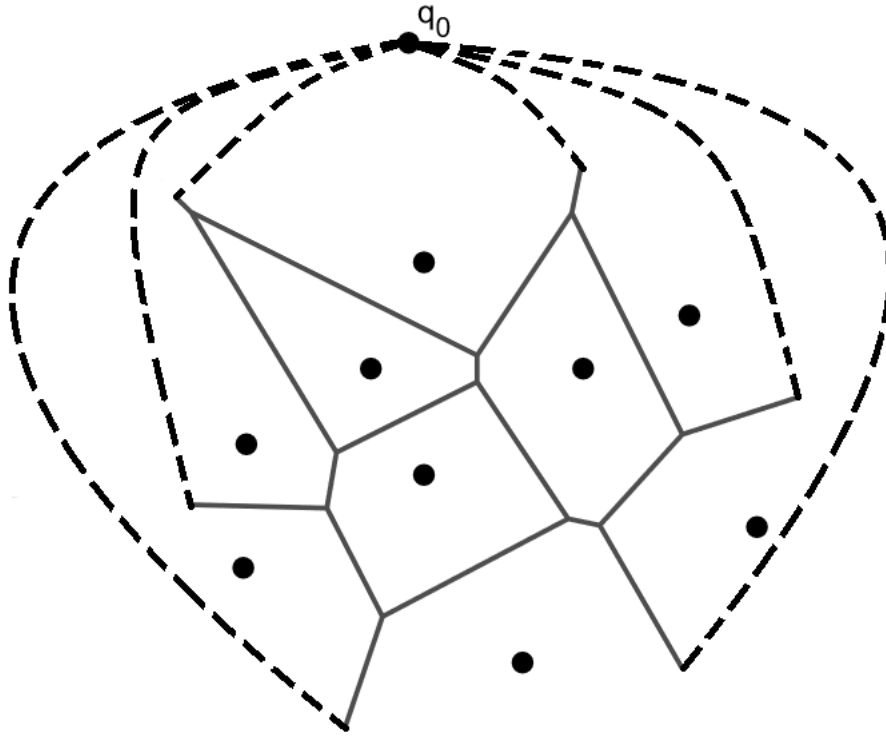
Kysymys 5: Etsi annetulle joukolle P mahdollisimman suuri tyhjä ympyrä, jonka keskipiste sisältyy konvekseen verhoon $CH(P)$.

Ympyrän avulla etsitään siis mahdollisimman suuri tyhjä paikka Voronoin diagrammissa. Sitä voidaan soveltaa esimerkiksi, kun halutaan rakentaa uusi paloasema mahdollisimman kauas jo olemassaolevista asemista.

Ympyrä voidaan etsiä seuraavalla tavalla. Olkoon Q Voronoin diagrammin \mathcal{V} niiden kärkien joukko, jotka sisältyvät konvekseen verhoon $CH(P)$ ja olkoon C_i suurin tyhjä ympyrä, jonka keskipiste on q_i . Tällöin suurin ympyrä $\{C_i | q_i \in Q\}$ antaa vastauksen kysymykseen 5.

Voronoin diagrammien särmillä, kärjillä ja soluilla on muutamia topologisia ominaisuuksia ja niihin tarvitaan tason Voronoin diagrammien graafeja. Olkoot \mathcal{V} Vo-

ronoin diagrammi, $Q = \{q_1, \dots, q_{n_v}\}$ Voronoin kärkien joukko ja $E = \{e_1, \dots, e_{n_e}\}$ Voronoin särmien joukko. Koska äärettömiä särmiä ei ole geometrisissa graafeissa, niin Voronoin diagrammia ei voi suoraan pitää geometrisena graafina, joten äärettömiä särmiä pitää ensin muokata. Muodostetaan kuvitteellinen piste q_0 kauas konveksista verhosta $CH(P)$. Katkaistaan jokainen ääretön särmä ja yhdistetään ne pisteeseen q_0 (kuva 11).



Kuva 11: Kuvitteellisen pisteen q_0 muodostus ja äärettömien särmien yhdistäminen siihen.

Määritelmä 3.11. (Voronoin graafi) Voronoin graafi on $G(Q_{+1}, E_b)$, missä $Q_{+1} = Q \cup \{q_0\}$ ja $E_b = [E \setminus \{e_1, \dots, e_{n_e}\}] \cup \{e_{b1}, \dots, e_{bn_c}\}$, missä e_1, \dots, e_{n_e} ovat äärettämät särmit ja e_{b1}, \dots, e_{bn_c} ovat Voronoin diagrammin muokatut särmit.

Voronoin graafeille pätee Eulerin yhtälö (lause 2), joka on kirjoitettu uuteen muotoon seuraavassa lauseessa.

Lause 10. *Olkkoon n generaattoripisteiden lukumäärä, n_v Voronoin kärkien lukumäärä ja n_e Voronoin diagrammin särmien lukumäärä Voronoin diagrammissa (\mathbb{R}^2 ja $2 \leq n < \infty$). Tällöin*

$$n_v - n_e + n = 1 \tag{10}$$

Todistus. Koska Voronoin diagrammi on rajoittamaton, joudutaan luomaan kuvitteellinen piste q_0 , jotta siitä saadaan rajoitettu. Tällöin kärkien lukumäärä kasvaa yhdellä. Tällöin Eulerin yhtälöstä $n - n_e + n_v = 2$, jossa n on generaattoripisteiden lukumäärä, n_e särmien lukumäärä ja n_v kärkien lukumäärä, saadaan $(n_v + 1) - n_e + n = 2$ eli $n_v - n_e + n = 1$. \square

Lause 11. *Kaikilla kärjillä Voronoin graafissa $G(Q_{+1}, E_b)$ on vähintään kolme särmää, kun $3 \leq n < \infty$ ja generaattoripisteet eivät ole kollineaariset. Särmien lukumäärälle n_e pätee tällöin*

$$n_e \geq \frac{3(n_v + 1)}{2}, \quad (11)$$

missä n_v on kärkien lukumäärä.

Todistus. Jokaisen kärjen jakaa vähintään kolme särmää. Laskemalla kärjissä kohtaavien särmien lukumäärät yhteen saadaan summaksi vähintään $3(n_v + 1)$. Jokainen särmä tulee lasketuksi kahteen kertaan, joten

$$n_e \geq \frac{3(n_v + 1)}{2}.$$

\square

Lauseiden 10 ja 11 avulla saadaan seuraava lause.

Lause 12. *Olkoon n generaattoripisteiden lukumäärä, n_v Voronoin kärkien lukumäärä ja n_e Voronoin diagrammin särmien lukumäärä Voronoin diagrammissa (\mathbb{R}^2 ja $3 \leq n < \infty$). Tällöin saadaan, että*

$$n_e \leq 3n - 6 \quad (12)$$

$$n_v \leq 2n - 5. \quad (13)$$

Todistus. Ratkaistaan yhtälöstä (10) ensin kärkien lukumäärä n_v ja sijoitetaan se yhtälöön (11). Tällöin

$$\begin{aligned} n_e &\geq \frac{3((n_e - n + 1) + 1)}{2} \\ n_e &\geq \frac{3n_e - 3n + 6}{2} \\ 2n_e &\geq 3n_e - 3n + 6 \\ -n_e &\geq -3n + 6 \\ n_e &\leq 3n - 6. \end{aligned}$$

Vastaavasti ratkaistaan yhtälöstä (10) särmien lukumäärä n_e , sijoitetaan yhtälöön (11) ja saadaan

$$\begin{aligned}
-1 + n + n_v &\geq \frac{3(n_v + 1)}{2} \\
2(-1 + n + n_v) &\geq 3n_v + 3 \\
-2 + 2n + 2n_v &\geq 3n_v + 3 \\
n_v &\leq 2n - 5.
\end{aligned}$$

□

Vaikka oletetaan etteivät pisteet ole kollineaarisia, niin se ei ole välttämättömyys, sillä jos generaattoripisteet ovat kollineaariset, niin $n_v = 0$ ja $n_e = n$.

Lause 13. *Olkoon $\mathcal{V}(P)$ Voronoin diagrammi ja $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ sen generaattoripisteiden joukko, jossa $3 \leq n < \infty$ ja pisteet eivät ole kollineaarisia. Jokaisessa rajoitetussa solussa on vähintään kolme särmää ja rajoittamattomassa solussa on vähintään 2 särmää.*

Todistus. Jotta solu on rajoitettu pitää sillä olla vähintään kolme särmää, sillä kahdella keskinormaalilla ei saa tehtyä rajoitettua solua. Rajoittamaton solu on konveksin verhon reunalla ja sillä on aina vähintään 2 naapuria, sillä $3 \leq n$, joten sillä on myös vähintään 2 särmää. □

Lause 14. *Olkoon joukko P äärellinen generaattoripisteiden joukko, jossa pisteet eivät ole kollineaarisia ja n on solujen lukumäärä ($3 \leq n < \infty$). Olkoon n_c rajoittamattomien solujen lukumäärä, joten rajoitettujen solujen lukumäärä on $n - n_c$. Tällöin särmien lukumäärä toteuttaa*

$$n_e \geq \frac{3(n - n_c) + 2n_c}{2}. \quad (14)$$

Todistus. Lauseesta 12 saadaan, että jokaista rajoitettua solua reunustaa vähintään kolme särmää ja jokaista rajoittamatonta solua reunustaa vähintään kaksi särmää. Soluja reunustaa siis kaikkiaan vähintään $3(n - n_c) + 2n_c$ särmää. Tällöin jokainen särmä tulee lasketuksi kahteen kertaan, koska särmä on kahden eri solun reunalla. Näin ollen särmien lukumäärä on vähintään

$$n_e \geq \frac{3(n - n_c) + 2n_c}{2}.$$

□

Lause 15. *Olkoon joukko P äärellinen generaattoripisteiden joukko, jossa pisteet eivät ole kollineaarisia. Olkoon n ($3 \leq n < \infty$) generaattoripisteiden lukumäärä, n_v Voronoin kärkien lukumäärä, n_e Voronoin diagrammin särmien lukumäärä ja n_c rajoittamattomien Voronoin solujen lukumäärä Voronoin diagrammissa $\mathcal{V}(P)$. Tällöin saadaan, että*

$$n_e \leq 3n_v + n_c - 3 \quad (15)$$

$$n_v \geq \frac{1}{2}(n - n_c) + 1. \quad (16)$$

Todistus. Yhtälö (15) saadaan, kun ratkaistaan yhtälöstä (10) Voronoin solujen lukumäärä n ja sijoitetaan se yhtälöön (14). Tällöin

$$\begin{aligned} n_e &\geq \frac{3((n_e - n_v + 1) - n_c) + 2n_c}{2} \\ n_e &\geq \frac{3n_e - 3n_v + 3 - 3n_c + 2n_c}{2} \\ 2n_e &\geq 3n_e - 3n_v - n_c + 3 \\ -n_e &\geq -3n_v - n_c + 3 \\ n_e &\leq 3n_v + n_c - 3. \end{aligned}$$

Yhtälö (16) saadaan, kun ratkaistaan yhtälöstä (10) Voronoin särmien lukumäärä n_e ja sijoitetaan se yhtälöön (14). Tällöin

$$\begin{aligned} n_v + n - 1 &\geq \frac{3(n - n_c) + 2n_c}{2} \\ n_v &\geq \frac{3(n - n_c) + 2n_c}{2} - n + 1 \\ n_v &\geq \frac{3(n - n_c) + 2n_c - 2n}{2} + 1 \\ n_v &\geq \frac{3(n - n_c) - 2(n - n_c)}{2} + 1 \\ n_v &\geq \frac{(n - n_c)}{2} + 1. \end{aligned}$$

□

Lause 16. *Olkoon $\mathcal{V}(P)$ Voronoin diagrammi ja $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ sen generaattoripisteiden joukko, jossa $3 \leq n < \infty$. Yksittäisessä solussa keskimääräinen särmien lukumäärä on alle kuusi.*

Todistus. Koska särmän jakaa aina kaksi Voronoin solua, yhtälöstä (12) saadaan, että särmien lukumäärä yksittäisessä solussa on keskimäärin korkeintaan $\frac{2(3n-6)}{n} < 6$. □

Kysymys 6: Etsi joukon P generaattoripisteiden sijainnit, kun degeneroitumattoman Voronoin diagrammin särmät tunnetaan.

Ratkaisu perustuu kuvaan 12. Olkoon q_i Voronoin kärki, p_{i1}, p_{i2}, p_{i3} generaattoripisteet, jotka jakavat tämän kärjen ja q_{i1}, q_{i2}, q_{i3} näiden generaattoripisteiden välillä

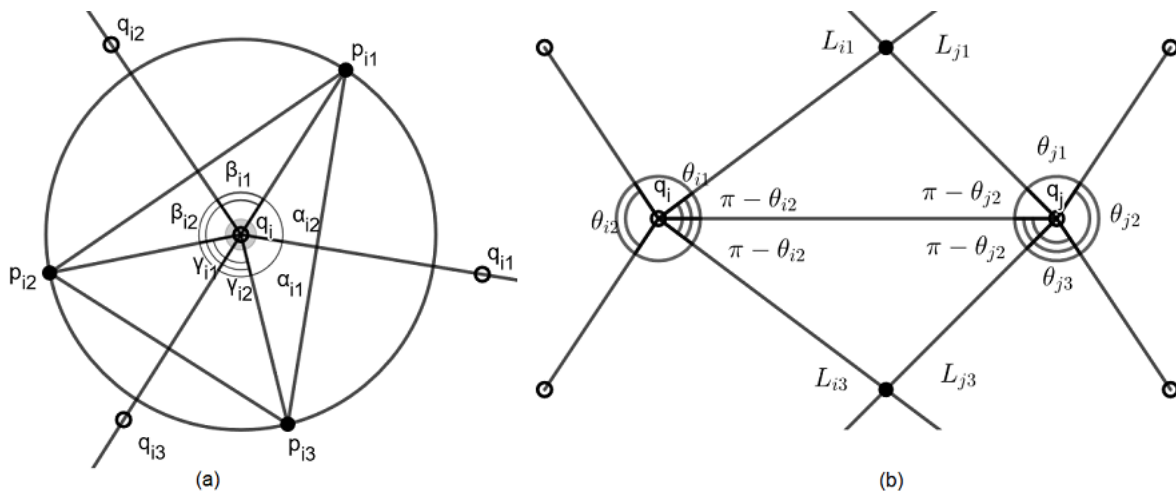
olevat Voronoin kärjet. Lauseen 7 mukaan q_i on ympyrän keskipiste, joka kulkee pisteiden p_{i1}, p_{i2}, p_{i3} kautta. Koska Voronoin särmät $e(p_{i1}, p_{i2}), e(p_{i2}, p_{i3})$ ja $e(p_{i3}, p_{i1})$ puolittavat kohtisuoraan janat $\overline{p_{i2}p_i}, \overline{p_{i3}p_i}$ ja $\overline{p_{i1}p_i}$, saadaan seuraavat yhtälöt

$$\angle p_{i1}q_iq_{i1} = \angle p_{i3}q_iq_{i1} = \alpha_i$$

$$\angle p_{i1}q_iq_{i2} = \angle p_{i2}q_iq_{i2} = \beta_i$$

$$\angle p_{i2}q_iq_{i3} = \angle p_{i3}q_iq_{i3} = \gamma_i.$$

Koska $2\alpha_i + 2\beta_i + 2\gamma_i = 2\pi$, saadaan, että $\alpha_i = \pi - \beta_i - \gamma_i = \pi - \angle q_{i2}q_iq_{i3}$. Tästä saadaan seuraava lause.



Kuva 12: Voronoin särmän generaattoripisteiden tunnistaminen.

Lause 17. *Olkoon $\overline{q_iq_j}$ Voronoin särmä ei-degeneroituneessa Voronoin diagrammissa ja olkoot θ_{ik} ja θ_{jk} ($k=1,2$ tai 3) q_i :n ja q_j :n vastaavat kulmat, jossa k :n indeksit ovat määritetty vastapäivään (kuva 12 b). Olkoon L_{i1} puolisuora pisteestä q_i , joka muodostaa kulman $\pi - \theta_{i2}$ janan $\overline{q_iq_j}$ kanssa. Ja vastaavasti puolisuora L_{j1} pisteestä q_j . Silloin L_{i1} :n ja L_{j1} :n (samoin symmetrisesti L_{i3} :n ja L_{j3} :n) leikkauspisteet muodostavat generaattoripisteet Voronoin diagrammille, joka jakaa $\overline{q_iq_j}$:n.*

Seuraava lause saadaan laajentamalla lausetta 17, jolloin voidaan tutkia, onko annettu tason laatoitus $\mathcal{T} = \{S_1, \dots, S_n\}$ Voronoin diagrammi. Oletetaan että laatoituksen \mathcal{T} sisältää vain konvekseja soluja ja jokaisesta kärjestä lähtee kolme särmää ja olkoon q_{i1}, \dots, q_{ik_i} solun S_i kärjet.

Lause 18. *Tason laatoitus, jossa on konvekseja soluja, on Voronoin diagrammi jos ja vai jos $p_{i1} = p_{i2} = \dots = p_{ik_i}$ pätee kaikille $i \in I_n$, kun p_{ij} toteuttaa lauseen 17 pisteille $q_{i,j}$ ja $q_{i,j+1} \pmod{k_i}$.*

3.4 Delaunayn kolmioinnin ominaisuuksia

Delaunayn kolmioinnille on samanlaisia ominaisuuksia kuin Voronoin diagrammeille.

Lause 19. Olkoon joukko T_i epätyhjiä soluja kuten määritelmän 3.10 yhtälössä (5) ja olkoon joukko $\mathcal{T}(P) = \{T_1, \dots, T_{n_v}\}$ kuten yhtälö (6) määritelmässä 3.10. Tällöin

$$\bigcup_{i=1}^{n_v} T_i = CH(P) \quad (17)$$

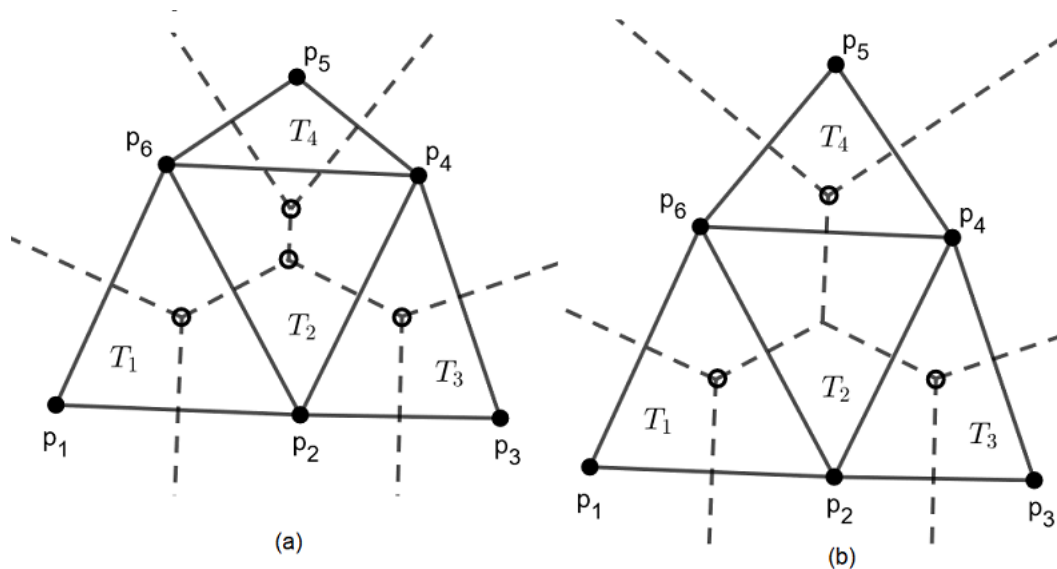
ja

$$[T_i \setminus \partial T_i] \cap [T_j \setminus \partial T_j] = \emptyset, \text{ kun } i \neq j, i, j \in I_{n_v}. \quad (18)$$

Joukko $\mathcal{T}(P)$ muodostaa joukon P konveksin verhon laatoituksen. Jos P :n pisteet eivät ole kollineaarisia, niin $\mathcal{T}(P)$ on Delaunayn kolmiointi tai Delaunayn esikolmiointi. Seuraava lause saadaan määritelmästä 3.3 ja lauseesta 3.

Lause 20. Delaunayn ulkoseinät kolmiointissa $\mathcal{T}(P)$ muodostavat P :n konveksin verhon $CH(P)$ reunan.

Koska $CH(P)$ on rajoitettu, niin kaikki Delaunayn kolmiot ja Delaunayn sivut ovat rajoitettuja. Tämä ominaisuus on eroaa Voronoin diagrammin lauseista 3 ja 4. Lauseissa 3-5 esitettiin lähimpään naapuripisteeseen liittyvät ominaisuudet Voronoin diagrammissa. Jotta saadaan samanlaiset ominaisuudet Delaunay-kolmiointille tarkastetaan Delaunayn kolmiointia kuvassa 13, jossa katkoviivat ovat Voronoin diagrammi ja kiinteät viivat Delaunayn kolmiointi.



Kuva 13: Delaunayn kolmiointi: (a) ei ole Pittewayn kolmiointi ja (b) on Pittewayn kolmiointi.

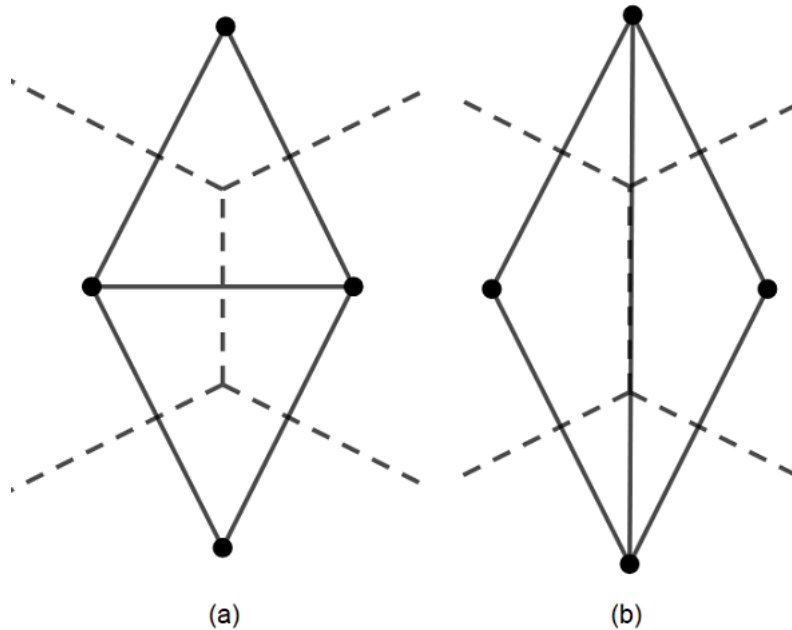
Tarkastellessamme Delaunayn kolmioita T_1, T_3, T_4 kuvassa 13 (a) huomataan, että lähin generaattoripiste mistä tahansa kolmion pisteestä on yksi kolmesta kolmion kärjestä, koska Voronoin diagrammin generaattoripisteet ovat kolmion kärjet.

Toisaalta lähin generaattoripiste jostain kolmion T_2 pisteestä on eri kuin kolmion T_2 kolme kärkeä, koska kolme solua ei peitä kolmiota T_2 . Jos kolmiointi koostuu vain edellisen tyyppisistä kolmioista, kuten kuvassa 13 (b), kutsumme kolmiota Pittewayn kolmiointiksi. Jos yksikin kolmion sivuista ei leikkaa vastaavaa Voronoin diagrammin särmää se ei ole Pittewayn kolmiointi (kuva 13 (a)).

Delaunayn kolmiointin ja Pittewayn kolmiointin välillä on seuraava yhteys.

Lause 21. *Joukon P Delaunayn kolmiointi on joukon P Pittewayn kolmiointi jos ja vain jos jokainen Delaunayn sisäseinä leikkaa vastaavan Voronoin särmän.*

Lause 19 antaa tarpeellisen ja riittävän ehdon $\mathcal{D}(P)$:lle olla Pittewayn kolmiointi. Seuraavaksi voi pohtia, jos pistejoukko P muodostaa Pittewayn kolmiointin, onko se väistämättä yhtäpitävä $\mathcal{D}(P)$:n kanssa? Vastaus on ei. Vastaesimerkki on esitetty kuvassa 14, jossa P koostuu neljästä pisteestä, jotka muodostavat rombin; (a) on $\mathcal{D}(P)$, kun taas (b) ei ole. Kuitenkin molemmat (a) ja (b) ovat Pittewayn kolmiointeja. Eli joukon P Pittewayn kolmiointi ei välttämättä ole yksikäsitteinen, eikä se välttämättä ole sama kuin Delaunayn kolmiointi $\mathcal{D}(P)$.



Kuva 14: Kaksi neljän pisteen Pittewayn kolmiointia (viivat) ja Voronoin diagrammi (katkoviivat): (a) on Delaunayn kolmiointi ja (b) ei ole Delaunayn kolmiointi.

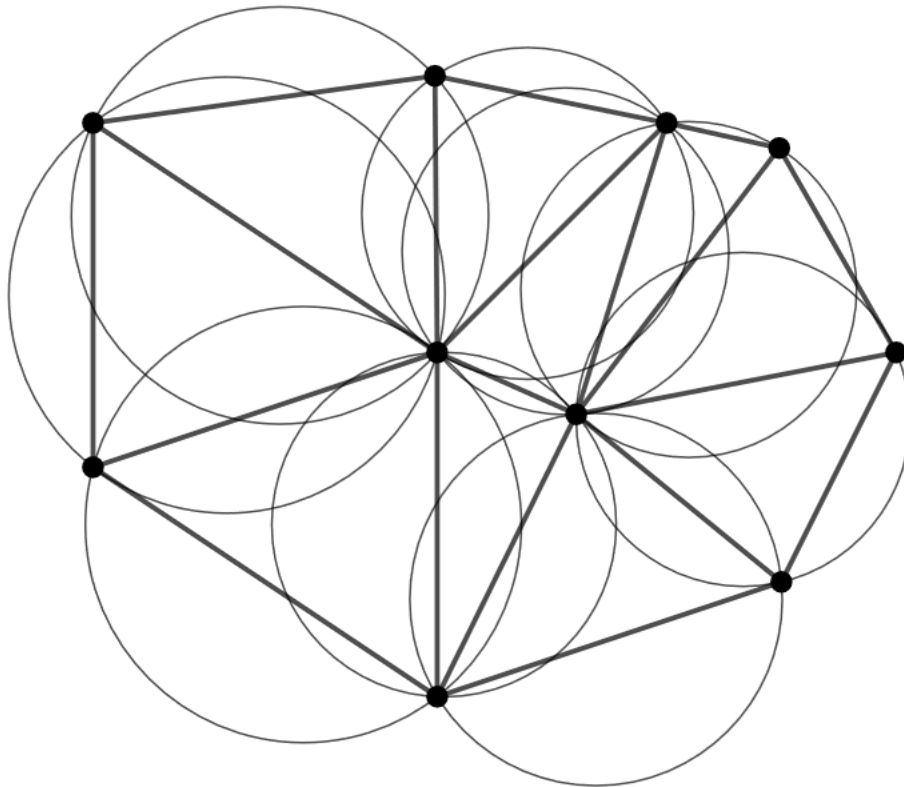
Voronoin diagrammeilla $\mathcal{V}(P)$ ja Delaunayn kolmiointilla $\mathcal{D}(P)$ on vahva yhteys, kun ne generoidaan samasta joukosta P . Ensinnäkin Delaunayn kärjet ovat Voronoin diagrammin generaattoripisteet ja toiseksi Voronoin diagrammin $\mathcal{V}(p)$ kärjet ovat Delaunayn ympyröiden keskipisteitä. Kolmanneksi Delaunayn sivujen lukumäärä on suurempi tai yhtäsuuri kuin Voronoin särmien lukumäärä. Jos joukon P pisteet ovat degeneroitumattomia, niin Delaunayn sivujen ja Voronoin särmien lukumäärät ovat yhtäsuuret. Nämä ominaisuudet on koottu seuraavaan lauseeseen.

Lause 22. *Olkoon P joukko pisteitä jotka muodostavat Voronoin diagrammin $\mathcal{V}(P)$ ja Delaunayn kolmiointin. Olkoon Q Voronoin diagrammin kärkien joukko ja Q_d De-*

launayn pisteiden joukko ja E Voronoin särmien joukko ja E_d Delaunayn sivujen joukot. Olkoon C_d kolmen generaattoripisteen kautta kulkevien ympyröiden keskipisteiden joukko. Tällöin

1. $Q_d = P$,
2. $C_d = Q$ ja
3. $|E_d| \geq |E|$; $|E_d| = |E|$ jos ja vain jos $\mathcal{V}(P)$ ei ole degeneroitu.

Kun jokaiseen Delaunayn kolmioon piirretään ympyrä, niin että ympyrän kehä kulkee yhden kolmion kaikkien kärkien kautta muodostuu Delaunayn ympyrä. Ympyrän ja kolmion yhteisiä pisteitä kutsutaan luonnolliseksi naapurustoksi. Kuvassa 15 on esitetty Delaunayn kolmioiden ympyröitä.



Kuva 15: Delaunayn kolmioiden tyhjät ympyrät.

Seuraava lause perustuu määritelmään 3.13.

Lause 23. *Ympyrä, jonka kehä kulkee Delaunayn kolmion kärkien kautta, on aina tyhjä.*

Määritelmä 3.12. (Tyhjän ympyrän kriteeri) Olkoon P äärellinen joukko pisteitä. Annetun konveksin verhon $CH(P)$:n kolmioiden kolmio toteuttaa tyhjän ympyrän kriteerin, jos sen jokaisen kolmion ympyrä on tyhjä eli ei sisällä joukon P alkioita ympyrän sisällä.

Lause 24. Olkoon P äärellinen joukko pisteitä. Joukon P kolmiointi toteuttaa tyhjän ympyrän kriteerin jos ja vain jos kolmiointi on Delaunayn kolmiointi joukosta P .

Todistus. Olkoon $p_i \in P$ piste kolmioinnissa \mathcal{T} . Olkoot p_{i1}, \dots, p_{ik} niiden kolmioiden kulmat, jotka jakavat pisteen p_i , indeksoituna vastapäivään ja olkoot q_{i1}, \dots, q_{ik} kolmioiden $\Delta p_i p_{i1}, p_{i2}, \dots, \Delta p_i p_{ik} p_{i1}$ ympyröiden C_{i1}, \dots, C_{ik} keskipisteet. Jana $\overline{p_i p_{ij}}$ on ortogonaalinen janalle $\overline{q_{ij} q_{ij-1}}, j = 1, \dots, k$ (kuva 16). Solu, jonka kärjet ovat q_{i1}, \dots, q_{ik} , saadaan laskemalla

$$\bigcap_{j=1}^k H(p_i, p_{ij}).$$

Oletuksesta kaikki joukon P muut pisteet paitsi $p_i, p_{ij}, j = 1, \dots, k$, ovat ympyröiden C_{i1}, \dots, C_{ik} ulkopuolella. Valitaan mielivaltainen piste $p_h \in P \setminus \{p_i, p_{ij}, \dots, p_{ik}\}$ ja piirretään jana $\overline{p_i p_h}$. Jana $\overline{p_i p_h}$ leikkaa ympyrän C_{ij} kaaren. Olkoon r_h kyseinen leikkauspiste. Piste q_{ij} on $H(p_i, r_h)$:n rajalla, koska r_h on ympyrän kehällä ja

$$\bigcap_{j=1}^k H(p_i, p_{ij}) \subset H(p_i, r_h) \subset H(p_i, p_h).$$

Tämä pätee kaikille pisteille $p_h \in P \setminus \{p_i, p_{ij}, \dots, p_{ik}\}$. Joten

$$\bigcap_{j=1}^k H(p_i, p_{ij}) = \bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} H(p_i, p_j) = V(p_i).$$

Tällöin solu, jonka kärjet ovat q_{i1}, \dots, q_{ik} on p_i :n Voronoin solu. Toistamalla saman prosessin kaikille pisteille $p_i \in P$, saadaan $\mathcal{V}(P)$. Koska \mathcal{T} on sama asia kuin $\mathcal{V}(P)$:n Delaunayn kolmiointi (Määritelmä 3.8.), niin kolmiointi on joukon P Delaunayn kolmiointi. \square

Voronoin diagrammeista poiketen Delaunayn kolmioinnissa sivut ovat aina pituudeltaan äärellisiä, joten Delaunayn kolmiointi (tai esikolmiointi) on helpompi muuttaa graafiksi.

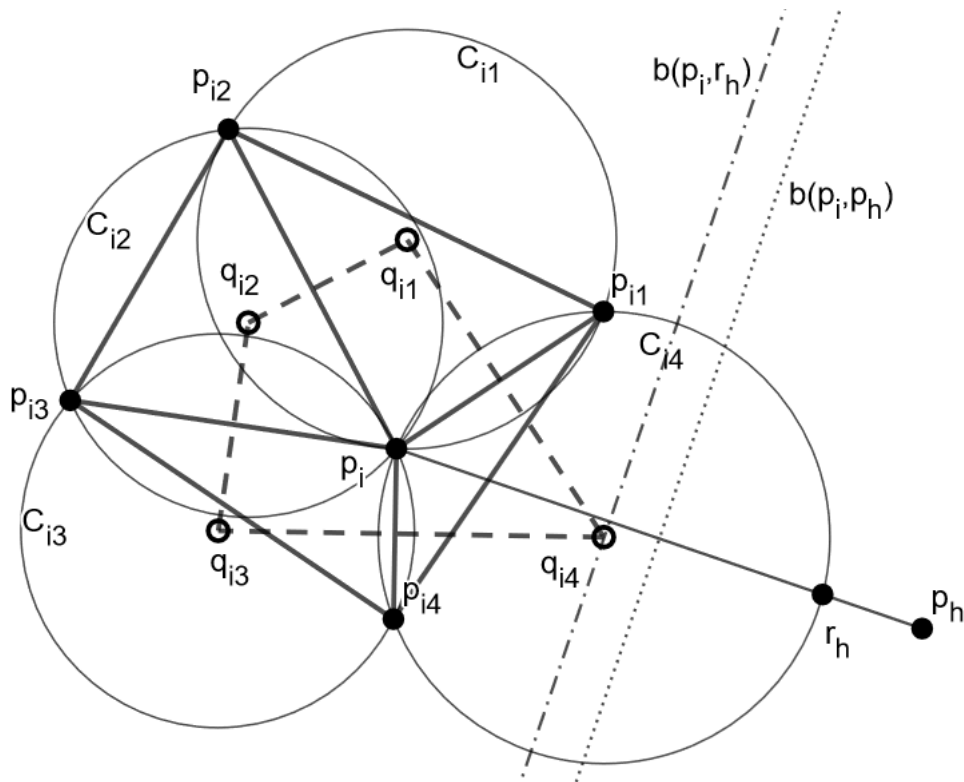
Määritelmä 3.13. (Delaunayn graafi) Olkoon P Delaunayn kärkien joukko ja E_d Delaunayn sivujen joukko. Delaunayn kolmioinnin \mathcal{D} Delaunayn graafi on $G(P, E_d)$.

Määritelmien 3.14. ja 3.15. ja lauseen 18 avulla saadaan seuraava lause.

Lause 25. Delaunayn graafi $G(P, E_d)$ on Voronoin graafin $G(Q_{+1}, E_d)$ duaali graafi.

Tämän lauseen takia kirjallisuudessa käytetään ilmaisua, että Delaunayn kolmiointi on Voronoin diagrammin duaali kolmiointi.

Lauseesta 20 ja 23 saadaan muutamia yhteyksiä Delaunayn kärkien n , Delaunayn sivujen n_e , Delaunayn ulkosivujen n_c ja Delaunayn kolmioiden n_v lukumäärien välille. Ensinnäkin koska Delaunayn graafi on tasossa, niin Eulerin yhtälö (lause 2) pätee eli $n - n_e + (n_v + 1) = 2$, joka on ekvivalentti lauseen 10 kanssa. Toiseksi



Kuva 16: Kuva lauseen 22 todistukseen, jossa jokainen Delaunayn kolmioinnin kolmio toteuttaa tyhjän ympyrän -kriteerin.

Delaunayn kolmioinnin sisäsivun jakaa kaksi Delaunayn kolmiota ja Delaunayn kolmioinnin ulkosivu kuuluu vain yhteen kolmioon, joten Delaunayn sivujen lukumäärä on

$$n_e = \frac{1}{2}(3n_v + n_c). \quad (19)$$

Yhdistämällä tämä ja lauseen 10 yhtälö (11) saadaan seuraava lause.

Lause 26. *Olkkoon Delaunayn kolmiointi $\mathcal{D}(P)$ äärelliselle degeneroitumattomalle joukolle P pisteitä. Olkkoon n_v Delaunayn kolmioiden lukumäärä, n_e Delaunayn sivujen lukumäärä ja n_c Delaunayn ulkosivujen lukumäärä. Tällöin seuraavat yhtälöt ovat tosia:*

$$n_v = 2n - n_c - 2$$

$$n_e = 3n - n_v - 3.$$

4 Hydrologia

Tässä luvussa esitellään Thiessenin monikulmiomenetelmän kannalta tärkeitä hydrologian osa-alueita. Hydrologia on hyvin laaja maantieteen osa-alue, joten on tärkeää ymmärtää muutamia käsitteitä, jotta mallintaminen olisi järkevää.

Hydrologia on sananmukaisesti oppi vedestä, ja se juontaa juurensa maanviljelyn kehittymisestä. Viljelyn tehostamiseksi on käytetty mm. kastelua, patoja ja

säännöstelyaltaita ja vesijohtoja jo varhaisimmissa kulttuureissa. [6] Se on puhututtanut monia suuria filosofeja, kuten Platonia, Aristotelesta ja Thalesia. Esimerkiksi Platonin mukaan *"laskeutuvat kaikki, sekä maanpinnalla, että sen sisässä olevat vedet mereen, josta ne suuren Tartaros nimisen aukon kautta tunkeutuu maan sisään ja alkavat sieltä kiertokulkunsa uudestaan"*. [2] Nykyinen hydrologian teoreettinen pohja muodostui vasta 1600-luvulla, kun Frenchman ja Perrault selvittivät hydrologisen kierron pääpiirteet. 1970-luvulta lähtien hydrologian kehitystä kuvaa matemaattisten menetelmien yhä laajempi käyttö ja mallintateknologian soveltaminen eri osa-alueilla. [6]

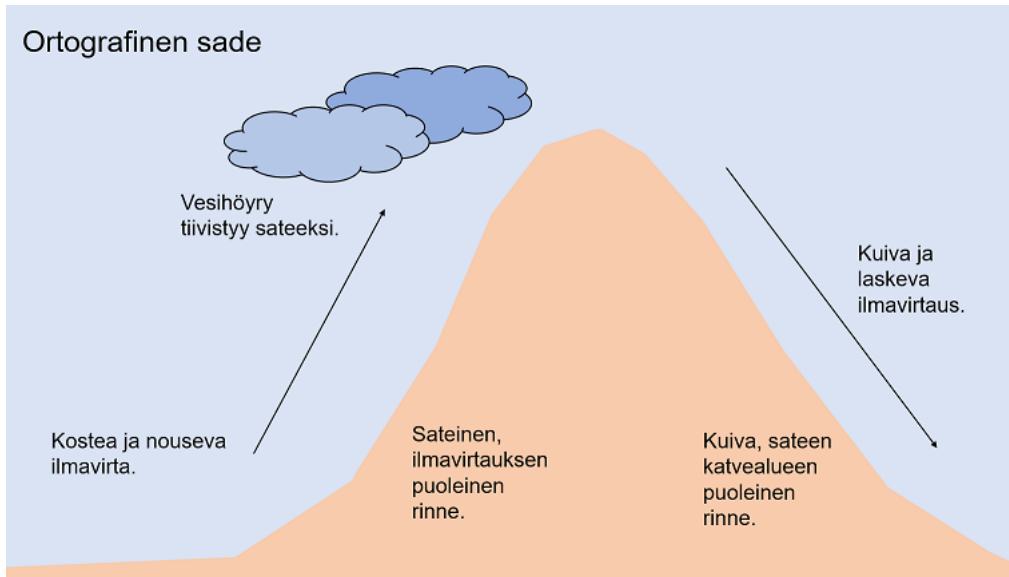
Hydrologia tutkii maapallon suolattoman veden varoja ja veden kiertokulkua. Sen lähtökohta on käytännönläheinen: talous-, kastelu- ja teollisuusveden saatavuus ihmisen käyttöön. Hydrologian tutkimuskohteita ovat sadanta ja haihdunta, valunta, järvet ja joet, maaperän vesi, jäätikköhydrologia sekä nämä yhdistävä veden kiertokulku. Pohjavesi muodostaa maapallon merkittävimmän nestemäisen suolattoman veden varaston, ja joet ovat tärkeitä veden ja aineiden kuljetusteitä sekä maiseman ja maaperän muokkaajia. Järvet ovat vesien väliaikaisia varastoaltaita, ja erityisesti Suomen oloissa järvihydrologian merkitys on ollut suuri. Jäätikötkin toimivat vesivarastoina, ja eräiden vuoristojäätiköiden sulamisvesiä käytetään vesitaloudessa. [9]

4.1 Sadanta ja haihdunta

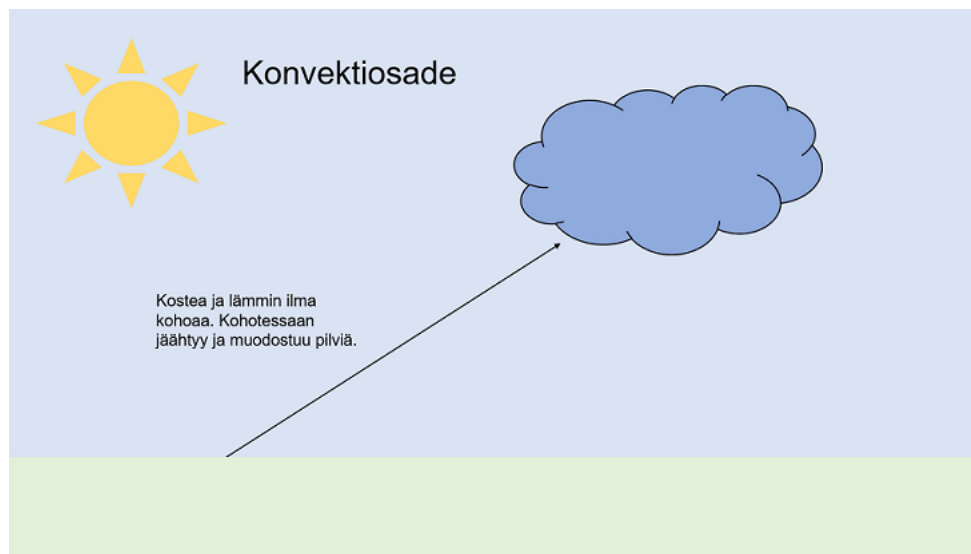
Hydrologiassa tärkeitä käsitteitä on sadanta ja haihdunta. Sadanta eli sademäärä mittaa alueelle tietyssä ajassa sateena pudonnutta vettä eri olomuodoissa. Sadantaan sisältyy vesi-, lumi-, räntä- ja raesade. [9] Sadetta syntyy, kun kosteutta sisältävä ilma kohoaa ja sen lämpötila laskee. Ilman kohoamisen syyn perusteella sateet jaetaan kolmeen perustyyppiin. Ortografinen sade, konvektiivinen sade ja rintamasade. [6]

Ortografinen sade muodostuu ilmavirtauksessa, jossa maastoesteen kuten vuoriston vuoksi ilma joutuu nousemaan ylöspäin (kuva 17). Pinnanmuodoilla on siis iso merkitys sadannan jakautumiselle. Ortografiset sateet ovat yleisiä esimerkiksi Norjan rannikolla, jossa vallitsevaa tuulen suuntaa vastaan on korkea vuoristo. Konvektiosade aiheutuu maanläheisen kerroksen paikallisesta lämpenemisestä ja siitä syntyvästä konvektiosta eli ilman kohoamisesta (kuva 18). Konvektiosateita ilmenee eniten mantereiden sisäosissa kesäaikaan. Rintamasateilla tarkoitetaan yleensä vain syklonisateita, vaikka syklonisateet syntyvät matalapaineiden yhteydessä ilman kohotessa ylöspäin. [6] Rintamatoimintaan liittyvä sade on yleensä laaja-alaista ja sen kesto on usein 6–12 tuntia. Suomessa suurin osa sateista liittyy rintamatoimintaan. Rintamasateet jaetaan usein lämmin-, kylmä- ja okluusiorintamasateisiin. [9]

Lämpimässä rintamassa lämmin ilma joutuu kylmää ilmaa vasten ja ajautuu tällöin kevyempänä kylmän ilman yläpuolelle ja aiheuttaa sadetta. Koska rajapinnan kaltevuus (kuva 19) on melko pieni, sadanta on melko vaikeaa, laaja-alaista ja pitkäkestoista. Kylmässä rintamassa kylmä ilma joutuu lämmintä ilmaa vasten törmätessään sen alle, jolloin tästä johtuva lämpimän ilman kohoaminen on äkillistä (kuva 20). Koska rintaman kaltevuus on jyrkempi, sen aiheuttama sade on rankempaa, alueellisesti suppeampaa ja lyhytkestoista. Okluusiorintama muodostuu syklonin kehityksen loppuvaiheessa matalapaineen keskuksen ympäri tapahtuvan kierto-



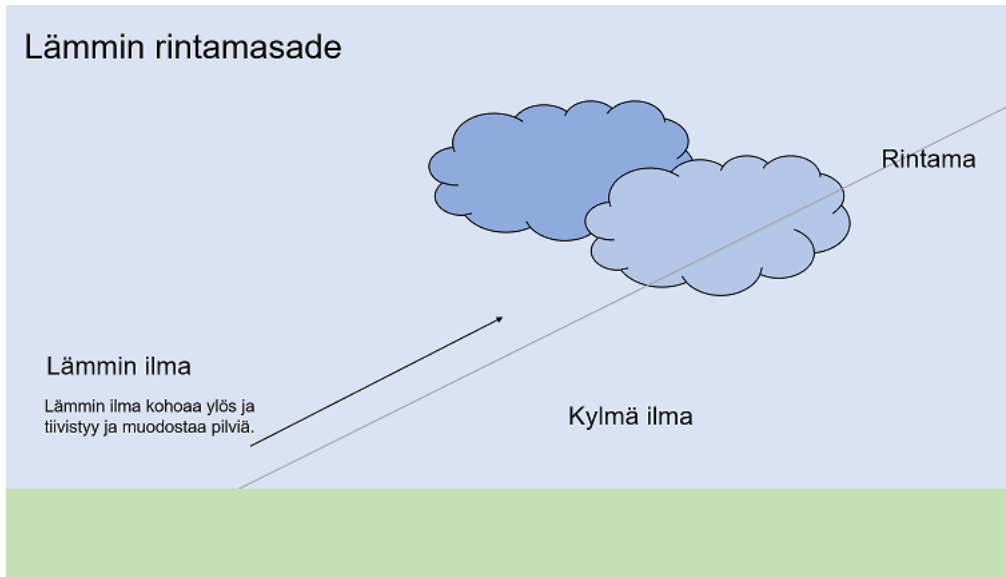
Kuva 17: Ortografinen sade.



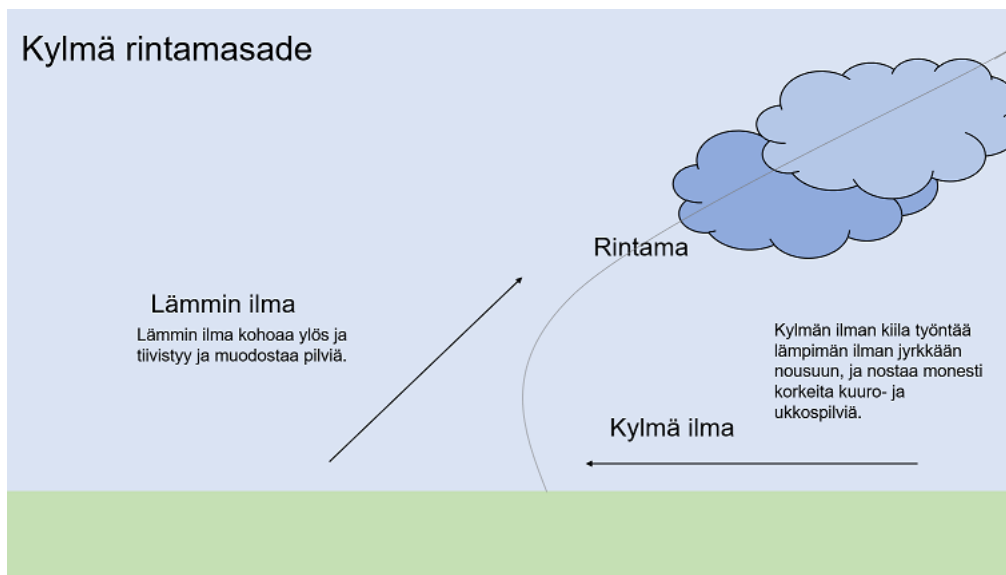
Kuva 18: Konvektiosade.

liikkeen ja erisuuruisten kiertonopeuksien aiheuttamasta rintamien yhdistymisestä (kuva 21). Muodostumisvaiheessa lämmin ilmassa liikkuu kahden kylmemmän rintaman kanssa samaan suuntaan, mutta eri nopeudella. [9]

Sadepisara koostuu suuresta määrästä pieniä pilvipisaroita. Sen putoamisnopeus vaihtelee pisaran koon mukaan vaihteluvälillä 1 – 80 m/s . Sateen yleisimmät muodot ovat Suomessa vesi- ja lumisade, mutta myös tihkusade, rakeet ja huurre luokitellaan hydrologiassa sateeksi. Sadantaa mitattaessa käytetään kuitenkin yleensä vain vesisadetta ja tihkusadetta ($mm/aika$), sillä pääsääntöisesti lumisadetta mitataan lumen syvyytenä (m), mutta vuotuisissa sademäärissä on otettu huomioon kaikki sadetyypit. [6] Sateet ovat jakautuneet alueellisesti hyvin epätasaisesti (kuva 22). Esimerkiksi Afrikan koillisosissa keskimääräinen sademäärä on 0 – 10 mm vuodes-



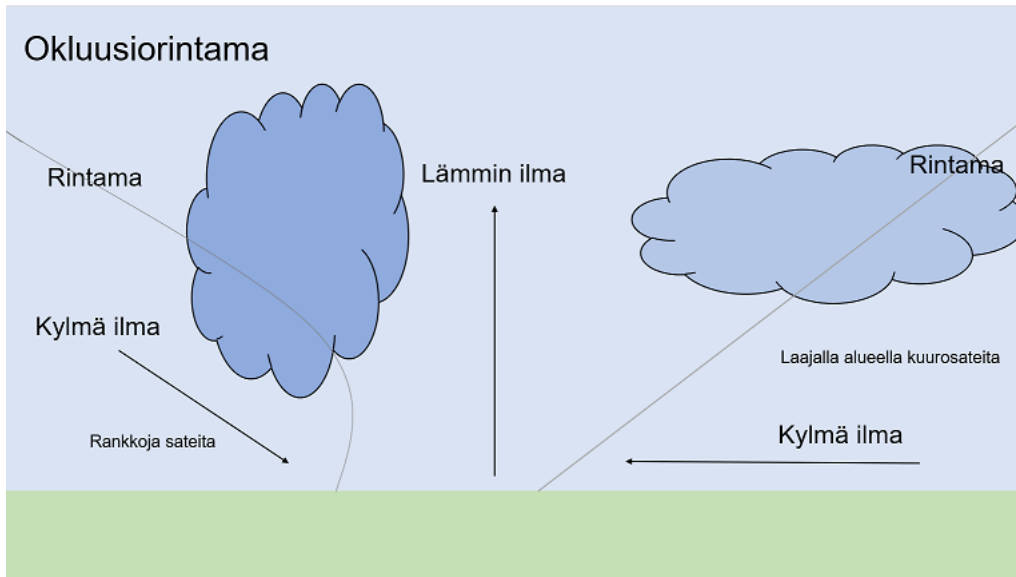
Kuva 19: Lämmin rintamasade.



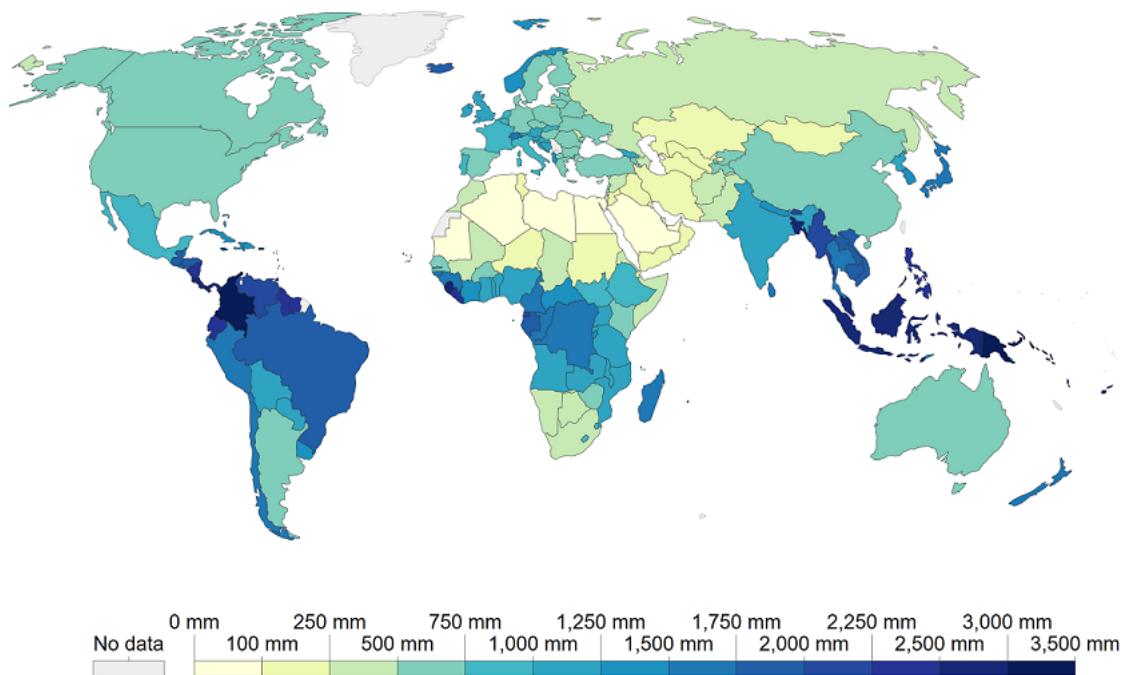
Kuva 20: Kylmä rintamasade.

sa ja pohjoisessa Etelä-Amerikassa taas yli 2500 mm vuodessa. Suomessa vuotuiset sademäärät vaihtelevat 400 – 750 mm välillä. Eniten sadetta on Länsi-Suomessa ja vähiten Pohjois-Lapissa. [9]

Sademittauksilla määritellään tasolle tietyssä ajassa tullut sadanta. Sadantaa mitataan mittauslaitteella. Mittalaitteen sijoittamisessa tulee ottaa huomioon muun muassa paikan tuulisuus, puusto ja muut esteet ja maaston muodot. [6] Erityisesti huomiota pitää kiinnittää haihduntaan, sillä sadantana kerätystä vedestä, jopa 50% voi haihtua. Sadantaa voidaan havaita myös säätutkan avulla. Mittaus perustuu siihen, että tutkasignaalin takaisinsirona riippuu kohteen vesipisaroiden konsentraatiosta, joka taas indikoi sateen intensiteettiä. Menetelmän etuna on se, että yksi ainoa säätutka pystyy kartoittamaan sadannan jakautumisen sekä kulkeutumisen



Kuva 21: Okluusiorintama.



Kuva 22: Sademäärät maapallolla [12].

suurella alueella. [9]

Haihtumisessa vesi muuttuu vesihöyryksi ja yksikkönä käytetään yleensä millimetrejä vuorokautta, kuukautta tai vuotta kohti, kuten sadannassa. Haihtumista voi tapahtua vapaan veden, maan ja kasvipeitteen pinnalta, mitä kutsutaan yleisesti evaporaatioksi.[9] Näihin vaikuttaa erilaiset tekijät. Esimerkiksi veden pinnasta tapahtuvaan haihduntaan vaikuttaa meteorologiset, morfologiset ja veden laadulliset tekijät. [6] Kasvien elintoimintaan kuuluvaa haihtumista, missä vesi kulkeutuu kasvien juuri–varsi–lehti -systemin lävitse, kutsutaan transpiraatioksi. Yhdessä trans-

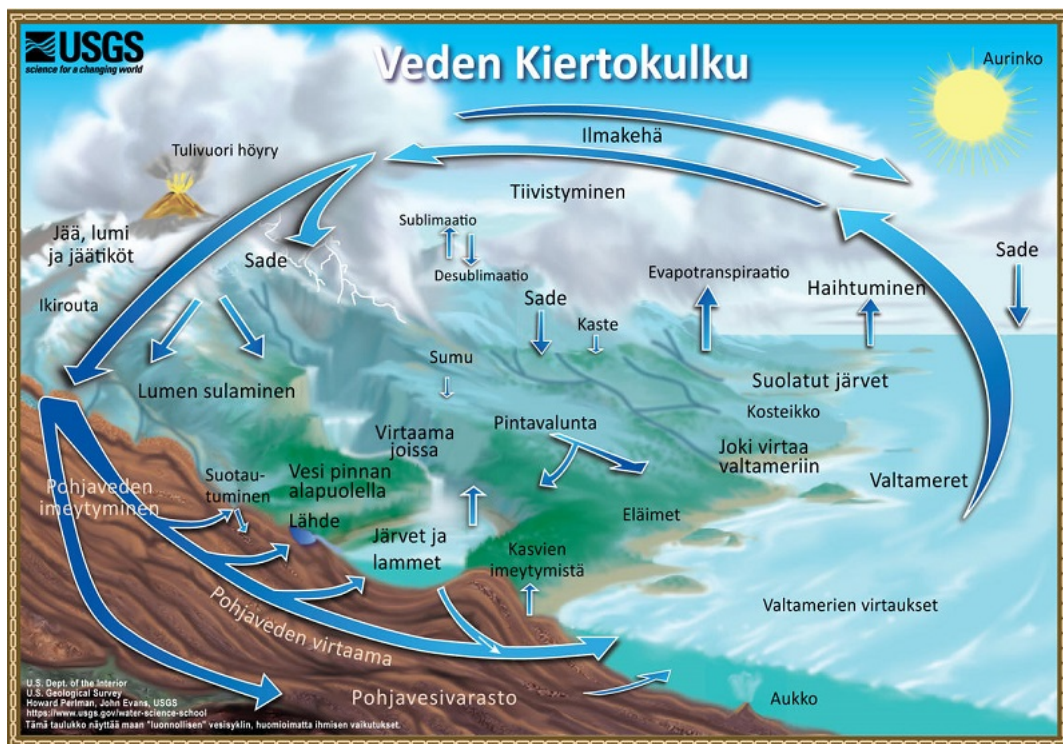
piraatio ja evaporaatio muodostavat evapotranspiraation. [9]

Haihduksen jakautuminen maapallon pinnalla riippuu toisaalta käytettävissä olevasta energiasta ja toisaalta käytettävissä olevasta vedestä. Tämän vuoksi haihdunta on vähäistä aavikoilla ja voimakasta päiväntasaajan ympäristön runsasteisilla alueilla sekä merissä erityisesti lämpimien merivirtojen alueilla. Napa-alueita lähestyttäessä haihdunta vähenee, sillä kylmän ilman absoluuttinen kosteus on aina alhainen. Haihdunnan arvioinnin tekee vaikeaksi se, ettei siitä ei saa visuaalista havaintoa toisin kuin sadannan tapauksessa. [9]

Haihdunnan määrittämisessä käytetään useita menetelmiä, jotka perustuvat joko vesitaseeseen, mittauksiin, energiataseeseen tai kosteudenvaihto-periaatteeseen. Suomessa vuotuinen haihdunta vaihtelee käsivarren 100 mm:stä Etelä-Suomen 500 mm:iin. [6]

4.2 Veden kiertokulku

Veden kiertokulku eli hydrologinen kierto toimii auringon säteilyenergian avulla (kuva 23). Vesi haihtuu meristä, järvistä, maasta ja kasveista ilmakehään, jossa se tiivistyy ja tulee sateena alas. [6] Maahan satanut vesi joko haihtuu takaisin, imeytyy maaperään tai kulkeutuu pintavesiin. Maaperässä on ylimpänä maavesivyöhyke, jossa maahiukkasten väleissä on sekä vettä että ilmaa, ja sen alla on pohjavesivyöhyke. Painovoiman ohjaamana maavesivyöhykkeessä vesi painuu suoraan alaspäin, ja pohjavesi virtaa kohti alemmaa painetta. Pintavesistä ja maaperästä vesi vähitellen kulkeutuu meriin tai haihtuu ilmakehään. [9]



Kuva 23: Veden kiertokulku [14].

Veden kiertokulun osat ovat toisiinsa kytkeytyviä [6]. Veden kiertokulku voi olla

paikallinen, jolloin haihtuva vesi palaa sateena melko pian takaisin, tai pitkä kierto, veden kulkiessa useiden varastojen lävitse. Pääosa ilmakehään siirtyvästä vedestä on peräisin meristä. [9]

5 Soveltaminen hydrologiassa

Matemaattisilla sovelluksilla on paljon käyttöä hydrologiassa. Erilaisten hydrologisten tapahtumien mallintaminen ja sitä kautta ennustaminen ovat tärkeä osa hydrologiaa ja yleisestikin tiedettä. On tärkeää ymmärtää erilaisia prosesseja ja miten ne tulevat vaikuttamaan maapalloon. Esimerkiksi ilmastonmuutoksen aiheuttamat sadannan muutokset ovat vielä hyvin tuntemattomia, mutta sadannan muutoksilla on suuria vaikutuksia muuhun eliöstöön.

Erityisesti sadannan mallintaminen on ollut erittäin tärkeää, sillä on haluttu maaperätutkimuksen lisäksi tietää alueiden sademääriä, jotta viljely olisi mahdollisimman kannattavaa. Thiessenin monikulmiomenetelmä oli ensimmäisiä sadannan mallintamiseen käytettäviä menetelmiä. Samaa menetelmää voisi käyttää myös haihdunnan mallintamisessa, mutta uudet menetelmät ovat syrjäyttäneet suhteellisen yksinkertainen Thiessenin monikulmiomenetelmän, ennen kuin haihduntaa on alettu mittaussuunnitelmilla tutkimaan.

5.1 Thiessenin monikulmio

Thiessenin hyödynsi Voronoin diagrammeja sadannan mittauksen yleistämisessä mittauspisteen ulkopuolelle, jonka takia hydrologiassa käytetään 2-uloitteisesta Voronoin diagrammista nimeä Thiessenin monikulmiomenetelmä. Tämä luku perustuu Rhynsburgerin artikkeliin (1972) [13] ja Aalto Yliopiston opetusmateriaaliin, jonka on kirjoittanut Kokkonen, Kuusisto ja Vakkilainen (2003) [7], joissa esitellään Thiessenin monikulmio ja sen käyttöä hydrologiassa. Alkujaan Thiessenin monikulmiot luotiin puhtaasti käyttäen harppia ja viivainta. Teknologian kehittyessä siirryttiin algoritmeihin, jotka pystyivät tuottamaan Thiessenin monikulmiot pelkistä mittauspisteistä.

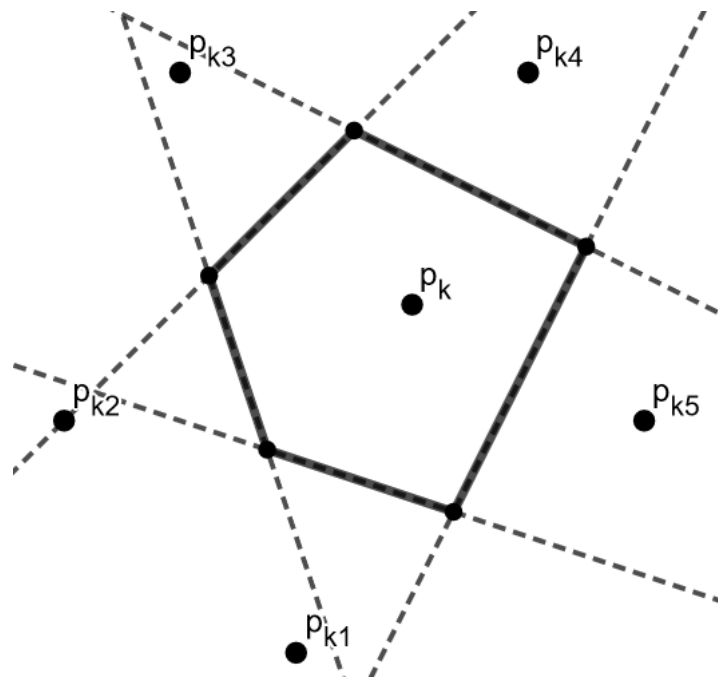
Thiessenin monikulmiomenetelmässä oletetaan kunkin sadannan mittauspisteen edustavan sen ympärille piirretyn solun sadantaa. Kunkin solun sisällä kyseinen mittauspiste on lähin mittauspiste ja solun särmällä 2 (tai useampi) sadeasema on yhtä lähellä. Solut muodostuvat sadeasemien yhdysjanojen keskinormaaleista ja tarkasteltavan alueen rajoista, joten kaikki solut ovat aina rajoitettuja. Aluesadanta lasketaan painotettuna keskiarvona, jossa painoina käytetään monikulmioiden pinta-aloja seuraavan kaavan mukaisesti

$$P = \frac{\sum P_i A_i}{A},$$

jossa P on aluesadanta, P_i on aseman i sadanta, A_i on aseman i monikulmion ala, ja A on koko alueen pinta-ala. Thiessenin menetelmän etuna on objektiivisuus ja yksinkertaisuus. Heikkoutena taas on, että menetelmä ei huomioi esimerkiksi topografian vaikutusta sadannan suuruuteen.

Seuraavaksi määritellään Thiessenin monikulmio. Thiessenin monikulmio vastaa Voronoin diagrammeja, jotka määriteltiin luvussa 3.1, joten esitetään kertauksena tärkein määritelmä ja lause liittyen suoraan Thiessenin monikulmioihin.

Määritelmä 5.1. Olkoon $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ joukko pisteistä tasossa ja olkoon $p_k \in P$ piste, joka ei ole joukon P konveksin verhon $CH(P)$ reunalla, vaan sillä on naapuri joka puolella, kuten kuvassa 24. Kun yhdistetään naapuripisteet keskenään janoilla ja muodostetaan näiden janojen keskinormaalit saadaan muodostettua Thiessenin monikulmio.



Kuva 24: Thiessenin monikulmio pisteelle p_k . Katkoviivat ovat pisteiden p_k ja p_{ki} keskinormaaleja.

Lauseen 5 voi muotoilla seuraavalla tavalla Thiessenin monikulmioille.

Lause 27. *Lähin naapuri annetulle pisteelle on aina Thiessenin naapuri ja keskipiste niitä yhdistävällä janalla kuuluu aina monikulmion särmään. Tämä pätee kaikille pisteille, jotka ovat saman etäisyyden päässä toisistaan.*

Thiessenin monikulmiomenetelmässä on hyödyllistä, että yhden monikulmion särmällä olevan pisteen avulla pystytään määrittämään kaikki monikulmion kärjet.

Kysymys 7: Etsi Thiessenin monikulmion kärjet kun tiedetään monikulmion naapurigeneraattoripisteet ja yksi piste kahden generaattoripisteen väliseltä särmältä.

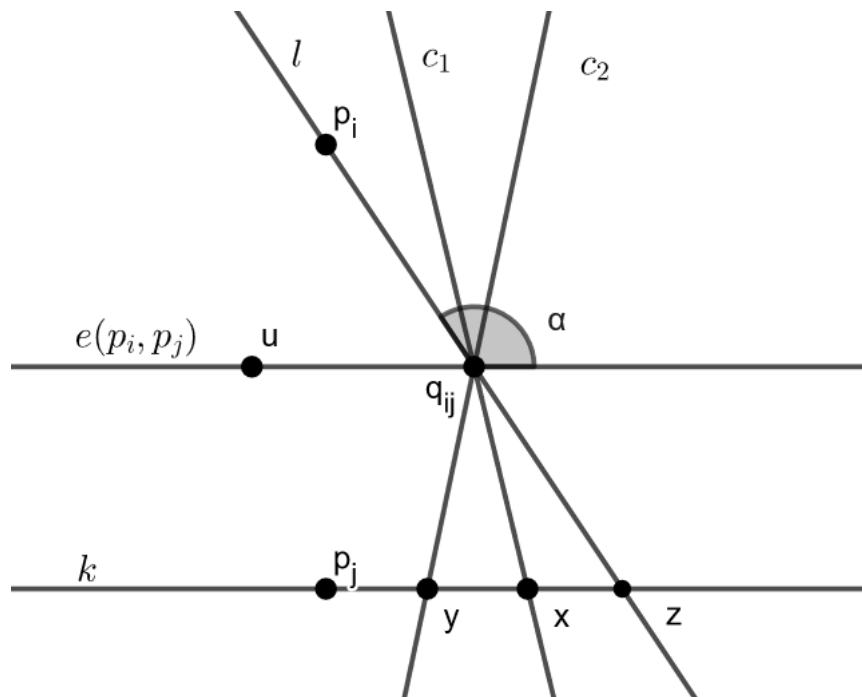
Lauseesta 5 saadaan, että naapuripisteiden p_k ja p_{k1} keskipiste m on yhdellä monikulmion särmistä. Pisteen p_{k1} ei tarvitse olla pisteen p_k lähin naapuri, mutta jokin naapuri kuitenkin. Yhdistämällä piste p_k janoilla kaikkiin sen naapureihin

p_{k_2}, \dots, p_{k_m} ja tekemällä näille janoille keskinormaalit saadaan suoria, jotka leikkaavat pisteiden p_k ja p_{k_1} välisen normaalin pisteen m molemmilta puolilta. Pistettä m lähimmät leikkauspisteet ovat monikulmion seuraavat kärjet. Kun löydetään kärjet tulee tunnistaa viereiset särmät. Täyä jatkamalla pystytään määrittelemään kaikki monikulmion kärjet ja sämät. Jos keskinormaalialia ei leikkaa mikään suora, niin solu on tällöin rajoittamaton.

Kysymys 8: Etsi Thiessenin monikulmion viereinen särmä kun tiedetään yksi kärki ja sen viereinen särmä.

Oletetaan, että generaattoripisteiden p_i ja p_j tiedetyllä särmällä $e(p_i, p_j)$ on piste u ja kärki q_{ij} . Piste u saattaa olla pisteiden p_i ja p_j keskipiste, se saattaa olla toinen kärki tai se on mielivaltainen piste, jonka tiedetään olevan särmällä.

Tapaus on triviaali, jos särmän $e(p_i, p_j)$ leikkaa vain yksi keskinormaali pisteessä q_{ij} . Oletetaan, että pisteessä q_{ij} särmän $e(p_i, p_j)$ leikkaa vähintään kaksi keskinormaalialia c_1 ja c_2 . Viereisen särmän löytäminen toiselta suoralta tehdään graafisesti (kuva 25).



Kuva 25: Kuva kysymyksen 8 ratkaisuun.

Piirretään suora k , niin että se kulkee pisteen p_j kautta ja on särmän $e(p_i, p_j)$ kanssa yhdensuuntainen. Merkitään suorien k ja c_1 leikkauspistettä kirjaimella x ja vastaavasti suorien k ja c_2 kirjaimella y . Piirretään myös suora l , niin että se kulkee pisteiden p_i ja q_{ij} kautta. Merkitään suorien k ja l leikkauspistettä kirjaimella z .

Viereinen särmä sijaitsee siis kulman α sisäpuolella. Se kumman suorien c_1 vai c_2 välinen kulma suorien k ja l kanssa on pienempi on suora, jolla särmä sijaitsee. Vastaavasti sitä vastaa lyhempi etäisyys pisteistä x ja y pisteeseen z . Nämä etäisyydet ovat äärellisiä, sillä solu on konvekssi ja etäisyydet ovat suurempia kuin nolla, sillä särmä

$e(p_i, p_j)$ ei kulje pisteen u kautta. Etäisyydet $d(x, z)$ ja $d(y, z)$ eivät voi olla yhtä suuret, sillä kaksi generaattoripistettä eivät voi olla samat.

Tällä yksinkertaisella tavalla eristetään viereinen särmä muista mahdollisista särmistä ja menetelmä määrittelee myös sen suunnan kärjestä q_{ij} .

5.2 Sadannan mallintaminen Thiessenin monikulmiomenetelmän avulla

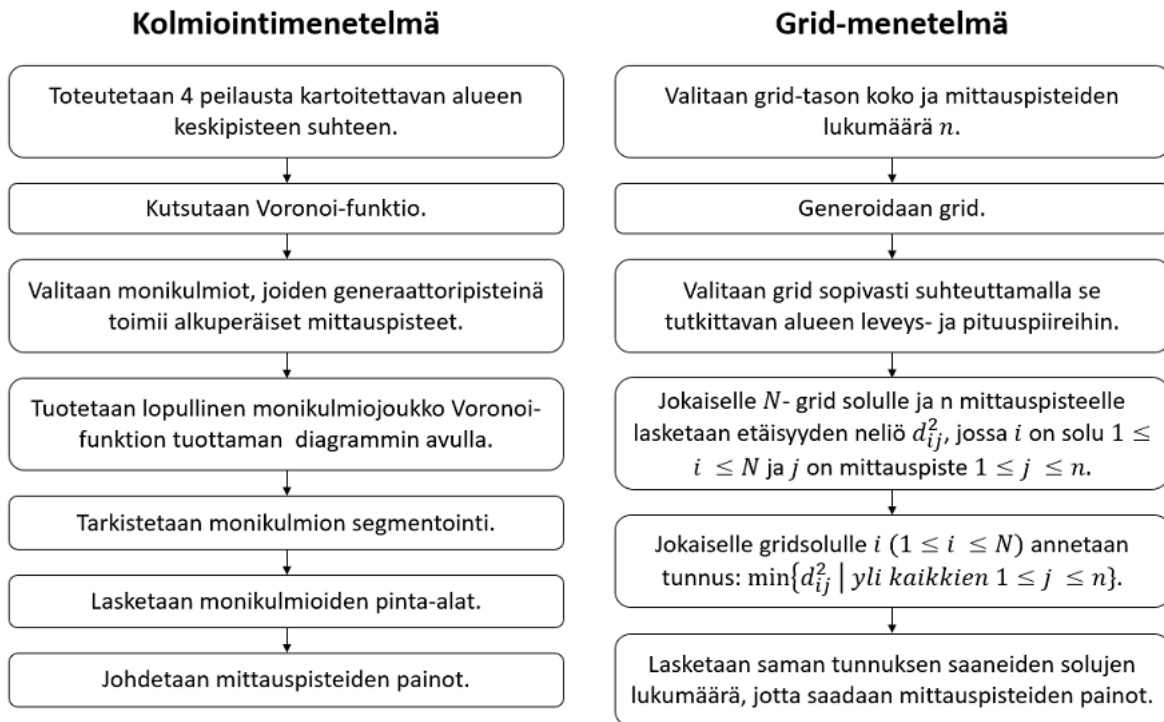
Vesistöjen hoito ja hydrologinen mallinnus edellyttävät erittäin tarkkoja sademäärää koskevia tietoja, jotka usein mitataan sademittareilla tai sääasemilla.[10] Menetelmiä on useita, kuten Thiessenin monikulmiomenetelmä, käänteisen etäisyyden painotus, ja kriging, joista Thiessenin monikulmiomenetelmä on ensimmäisiä tutkimuksissa käytettyjä menetelmiä, sillä se on menetelmistä yksinkertaisin. [3] Huolimatta sen merkityksestä hydrologiassa, laskennallisia tutkimuksia Thiessenin monikulmiomenetelmällä on tehty vain vähän [4]. Thiessenin monikulmiomenetelmässä hyödynnetään mittauspisteissä tehtyjä sademäärämittauksia ja yleistetään ne mittauspistettä ympäröivälle solulle. Solun tahkolla hyödynnetään kahden (tai useamman) mittauspisteen sademääriä, sillä sen etäisyys lähimpiin mittauspisteisiin on yhtä pitkä.

Kaksi automatisoitua lähestymistapaa Thiessenin monikulmioiden hyödyntämisessä hydrologiassa ovat kolmiomittausmenetelmä ja grid-menetelmä. Kolmiomittaus kärsii koodauksen hankaluudesta ja hitaasta laskentanopeudesta pienellä määrällä mittareita, mutta muuten on toimiva menetelmä. Grid-menetelmä on helppo toteuttaa, mutta laskennallisen ruudukon koon, tarkkuuden ja nopeuden välillä on tehtävä kompromissi. [4]

Matemaattisesti kolmiomittausmenetelmä perustuu Delaunayn kolmioihin, jossa on joukko pisteitä, jotka täyttävät tyhjän ympyrän kriteerin (määritelmä 3.15). Voronoin diagrammi voidaan tuottaa Delaunayn kolmioiden perusteella. Voronoin diagrammin mukana tulee kaksi ongelmaa sen muuntamisessa Thiessenin monikulmiokaavioksi (eli rajoitetuksi Voronoin diagrammiksi): (1) monet solut ovat rajoittamattomia eivätkä muodosta oikeita monikulmioita; (2) joitain särmä puuttuu rajoittamattomien Voronoin solujen välistä niiden rajoittamattomuuden vuoksi. Näiden ongelmien ratkaisemiseksi kaikki mittarit peilataan neljään suuntaan tutkittavan alueen keskipisteen suhteen. Kuvassa 26 on esitetty kolmiointimenetelmän pääpiirteet. [4]

Grid-menetelmä on numeerinen lähestymistapa ja tarkkuutta menetetään jonkin verran algoritmin yksinkertaisuuden ja nopeuden vuoksi. On tehtävä kompromissi ruudukon resoluutiosta ja numeerisesta tarkkuudesta. Hieno ruudukon koko tuottaisi korkealaatuisia Thiessenin monikulmioita, mutta vaatisi pidemmän suoritusajan ja päinvastoin. Käytännössä grid-menetelmä voidaan toteuttaa kahdella tavalla: (1) yhdistää grid-generointi ja -allokointi yhdeksi aliohjelmaksi ja (2) erottaa nämä kaksi toimintoa eri alirutiiniksi siten, että kopioitua grid-generointiosaa käytetään kerran ja vain gridallokaatiofunktio kutsutaan myöhemmissä simulaatioissa. Kuvassa 26 on esitelty grid-menetelmän pääpiirteet. [4]

Kahdella esitetyllä lähestymistavalla on sekä vahvuudet että heikkoudet nopeuden, koodauksen ja tarkkuuden suhteen. On tärkeää huomata, että laskentamenetelmän optimaalinen valinta tulee riippua projektin luonteesta, eikä ole olemassa yhtä



Kuva 26: Kolmiointi- ja grid-menetelmien pääpiirteet [4].

menetelmää, joka sopisi kaikkiin sovellustapauksiin. Jos esimerkiksi laskentanopeus on ratkaiseva tekijä projektissa, kolmiomittaus- tai ruudukkomenetelmän käyttöön-otto riippuisi mittareiden määrästä. [4]

Yleisesti Thiessenin monikulmio -menetelmän ongelmana on sen kaksiulotteisuus. Topografian huomioon ottaminen on tärkeä osa hydrologisia tutkimuksia. Mittauspisteen topografinen sijainti vaikuttaa sademääriin, jolloin yleistys koko soluun aiheuttaa virheitä. [2] Esimerkiksi, jos sademittari on sijoitettu vuoriston ilmapirtauksen puoleiselle rinteelle, on sademäärät huomattavasti korkeammat kuin sateen katvealueen puoleisella rinteellä.

5.3 Muita mallinnusmenetelmiä

Mallintaminen kehittyi jatkuvasti ja teknologian kehittyessä, myös mallintamisesta tulee koko ajan tarkempaa. Hydrologisessa tutkimuksessa ei tarvitse enää tyytyä karttaan ja kompassiin vaan ohjelmistot voivat tehdä laskelmat ja kartat tutkijan puolesta. Näitä menetelmiä esiteltiin Lyn, Charlesin ja Degrein artikkelissa Different methods for spatial interpolation of rainfall data for operational hydrology and hydrological modeling at watershed scale [10], johon tämä luku perustuu.

Tietokoneella tehtävät hydrologiset mallit, jotka simuloivat suurimman osan hydrologisesta kierrosta, ovat olennainen työkalu hydrologisen järjestelmän ymmärtämisessä ja kuvauksessa. Kun nämä mallit onnistuvat saamaan tarkkoja tuloksia, ne voivat ennustaa, mitä hydrologisessa järjestelmässä tapahtuu. Tästä voi olla hyötyä ilmastotutkimuksissa esimerkiksi sademäärän tai haihdunnan suhteen.

Jotta malli olisi mahdollisimman paikkaansa pitävä, sisältää se nykyään paljon

enemmän tietoa kuin Thiessenin monikulmiomenetelmään on mahdollista sisällyttää. Malleihin sisällytetään mm. digitaalinen korkeusmallin (DEM), maaperän ja ilmaston tärkeimmät avaruudellisesti hajautetut tietojoukot ja ilmastotiedot, kuten ilman lämpötila, auringon säteily ja sademäärä. Sademäärä, joka on perinteisesti kerätty sademittareilla tai sääasemilla, on erittäin tärkeä parametri, jolla on suora vaikutus valumaan tai valuma-alueeseen. Suurella vesistömittakaavalla sateiden alueellinen vaihtelevuus on otettava huomioon sen sijaan, että mallin syötteenä käytettäisiin alueellista keskimääräistä sademäärää. On olemassa useita erilaisia interpolointitekniikoita ja nämä menetelmät voidaan yleisesti luokitella kahteen pääryhmään: deterministiset menetelmät ja geostatistiset menetelmät.

Ensimmäisen ryhmän yleisimmin käytetyt deterministiset menetelmät ovat Thiessenin monikulmiomenetelmä (joka esiteltiin aiemmin luvussa 5), käänteisen etäisyyden painotus (Inverse Distance Weighting) ja polynomin interpolaatiomenetelmä (Polynomial Interpolation), jotka perustuvat mitattujen asemien sijaintiin ja mitattuihin arvoihin ja hyödynnetään painoteuttua keskiarvoa mallintamisessa ja ennustamisessa. Käänteisen etäisyyden painotus -menetelmä perustuu käänteisten etäisyyksien funktioihin, joissa painot määritellään etäisyyden vastalukuna ja normalisoidaan siten, että niiden summa on yksi. Painot pienenevät etäisyyden kasvaessa. Menetelmässä on mahdollista sisällyttää topografinen painotus, joka on vuoristoisilla aluilla erittäin tärkeää. Polynomin interpolaatiomenetelmässä yhtälö sovitetaan tutkittavalle alueelle joko algebrallisen tai trigonometrisen polynomifunktion avulla. Nämä menetelmät ovat monimutkaisempia kuin Thiessenin monikulmiomenetelmä.

Geostatistiset menetelmät, muodostavat matematiikan ja maatiiteen yhdistävän tieteenalan. Tämän ryhmän tunnetuin menetelmä on Kriging -menetelmä, joka perustuu tilastollisiin malleihin, joihin liitetään autokorrelaatio. Autokorrelaatiolla tarkoitetaan mitattujen pisteiden välisiä tilastollisia suhteita. Geostatistiset menetelmillä ei kuitenkaan ole omaa ennustuskykyä, vaan ne voivat tuottaa vain tilastollisia arvoja muiden mallien ennustuskyvystä.

6 Yhteenveto

Voronoin diagrammit ovat saaneet nimensä matemaatikon Georgy Voronoin mukaan, joka esitti diagrammin, jossa jokaisen generaattoripisteen ympärillä on solu. Solujen seinät eli särmit muodostetaan keskinormaalien avulla, jolloin särmit kaksiksi tai useampi generaattoripiste on yhtä kaukana siitä. Voronoin diagrammeilla on monenlaisia ominaisuuksia m -ulotteisessa avaruudessa, mutta tässä tutkielmassa keskityttiin vain kaksiulotteisen avaruuden Voronoin diagrammien ominaisuuksiin. Voronoin diagrammi on usein rajoittamaton, sillä sen särmit voivat olla suorina, puolisuorina tai janoja.

Delaunayn laatoitus on aina rajoitettu, sillä siinä generaattoripisteiden välille muodostetaan janoja niin, että jos generaattoripisteillä on yhteinen särmi Voronoin diagrammissa, niin ne yhdistetään toisiinsa janalla. Jos kaikki muodostuvat solut ovat kolmioita on kyseessä Delaunayn kolmiointi. Jos näin ei ole, puhutaan Delaunayn esikolmioinnista, joka voidaan muuttaa Delaunayn kolmioinniksi lisäämällä janoja niihin soluihin, jotka eivät ole kolmioita.

Hydrologiassa sadannan mallintaminen on erittäin tärkeä osa, ja Thiessenin mo-

nikulmiomenetelmä oli ensimmäisiä tieteellisiä menetelmiä tällä saralla. Sademittausasemat muodostavat generaatiopisteet, ja niiden suljettu Voronoi diagrammi luo monikulmion jokaisen mittauspisteen ympärille. Mittausaseman sademäärät yleistettiin kattamaan koko monikulmion, ja särmällä sovellettiin molempien asemien sademittauksia.

Teknologian kehittyminen on kuitenkin vähentänyt Thiessenin monikulmiomenetelmän käyttöä, sillä se on hyvin työläs, jos mittausasemia on paljon, ja se ei ota huomioon alueen topografiaa. Uusia menetelmiä kehitetään jatkuvasti, joissa algoritmi ottaa huomioon tarvittavat parametrit ja tuottaa tarkemman mallin sadannasta.

Kirjallisuutta

- [1] Fortune S. Voronoi diagrams and Delaunay triangulations. Handbook of Discrete and Computational Geometry, s. 377-388, CRC Press, New York, 1995.
- [2] Gagneur B. Hydrologia. Kuopio, 1929.
- [3] Goovaerts P. Geostatistical approaches for incorporating elevation into the spatial interpolation of rainfall. Journal of hydrology (Amsterdam), Vol.228 (1), s.113-129, 2000.
- [4] Han D. ja M. Bray. Automated Thiessen polygon generation. Water resources research, 2006-11-08, Vol.42 (11), 2006.
- [5] Honkala I. Kombinatoriikka. Luentomoniste. Turun Yliopisto. 2015.
- [6] Hooli J. Hydrologia: luentomoniste. Oulun yliopisto. Oulu 1996.
- [7] Kokkonen T., Kuusisto E. ja Vakkilainen P. Hydrologinen kierto: laskentamenetelmiä, sadannan mittaaminen. Aalto Yliopisto. 2003
- [8] Koppinen M. Lineaarialgebra osa 1. Luentomoniste. Turun Yliopisto. 2008.
- [9] Leppäranta M., Virta J. ja Huttula T. Hydrologian perusteet. Helsingin yliopisto, Fysiikan laitos, Helsinki, Suomen ympäristökeskus (SYKE). Helsinki 2017.
- [10] Ly S., C. Charles and A. Degre. Different methods for spatial interpolation of rainfall data for operational hydrology and hydrological modeling at watershed scale. Biotechnologie, agronomie, société et environnement, Vol.17 (2), s.392-406, 2013.
- [11] Okabe A., B. Boots, K. Sugihara and S. Nok Chiu. Spatial tessellations, second edition. Wiley. 2000.
- [12] Our World Data. Average annual precipitation. 2017 <https://ourworldindata.org/grapher/average-precipitation-per-year> viitattu 10.03.2022
- [13] Rhynsburger D. Analytic Delineation of Thiessen polygons. Geographical Analysis, s.133-144, 1972.

[14] USGS: U.S. Geological Survey. 2017. <https://www.usgs.gov/media/images/vedenkiertokulusta-water-cycle-finnish> viitattu 11.11.2021