



GRAAFIN VIRITTÄVIEN PUIDEN LUKUMÄÄRÄN LASKEMINEN  
MATRIISEJA KÄYTTÄEN

Venla Laaksonen

Pro gradu -tutkielma  
Toukokuu 2022

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS



Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

VENLA LAAKSONEN: Graafin virittävien puiden lukumäärän laskeminen matriiseja käyttäen

Pro gradu -tutkielma, 41 s.

Matematiikka

Toukokuu 2022

---

Tämän Pro gradu -tutkielman tarkoituksena on tutustuttaa lukija graafien peruskäsitteisiin, graafien virittäviin puihin ja graafien virittävien puiden lukumäärän laskemiseen. Graafi koostuu äärellisestä joukosta solmuja ja niitä yhdistävistä särmistä. Puu on syklitön ja yhtenäinen graafi ja graafin virittävä puu on puu, joka sisältää kaikki alkuperäisen graafin solmut. Graafilla voi olla lukuisia virittäviä puita.

Kirchhoffin matriisipuulauseen avulla voidaan selvittää graafien virittävien puiden lukumäärä pelkistetystä Laplacen matriisista. Tutkielmassa hyödynnetään lineaarialgebrasta tunnettuja tuloksia graafin virittävien puiden lukumäärän laskemiseen, kun kyseessä on täydellinen graafi, täydellinen kaksijakoinen graafi tai täydellinen  $k$ -jakoinen graafi.

Lukijalta vaaditaan lineaarialgebran perusteiden tuntemusta. Tutkielma pohjautuu vahvasti kirjallisuuteen. Tutkielman päälähteinä ovat Pertti Koiviston ja Riitta Niemistön luentomoniste [1], David P. Williamsonin luentomateriaali [2] ja Steven Kleen ja Matthew T. Stampsin julkaisu [3].

Avainsanat: Graafiteoria, graafi, puu, virittävä puu, Laplacen matriisi

# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Pohjatietoa</b>	<b>7</b>
2.1	Graafi . . . . .	7
2.2	Puut . . . . .	12
2.3	Liittomatriisi . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Lineaarialgebran työkaluja graafin virittävien puiden lukumäärän laskemiseen</b>	<b>17</b>
3.1	Graafin esittäminen matriisin avulla . . . . .	17
3.2	Laplacen matriisi . . . . .	20
3.3	Kirchhoffin matriisipuulause . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Täydellisten graafien virittävien puiden lukumäärät</b>	<b>31</b>
4.1	Matriisin determinanttilemma . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Yhteenveto</b>	<b>39</b>
<b>6</b>	<b>Kirjallisuutta</b>	<b>41</b>

# 1 Johdanto

Tämä Pro gradu -tutkielma käsittelee graafin virittäviä puita ja niiden laskemista algebrallisin keinoin. Graafiteoriaa voidaan soveltaa monen eri alan ongelmiin, kuten tietojenkäsittelytieteisiin. Graafi koostuu äärellisestä joukosta solmuja ja niitä yhdistävistä särmistä. Graafeilla on monia käyttötarkoituksia ja ovat erinomaisia työkaluja erilaisten matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen, joita modernin teknologian ripeä kehitys on lisännyt [6]. Niiden avulla esimerkiksi demonstroidaan, tutkitaan ja analysoidaan erilaisia tietoverkkoja.

Tutkielma on jaettu neljään lukuun. Esimmäisessä luvussa ensin perehdytään graafeihin ja niiden peruskäsitteisiin, joita havainnollistetaan kuvin ja esimerkein. Graafiteoria on laaja aihe, joten käsitellään graafeihin liittyviä peruskäsitteitä vain graafin virittävien puiden laskemiselle tarpeellisin käsittein. Tämän jälkeen luku käsittelee puita ja niihin liittyviä käsitteitä. Puu on syklitön ja yhtenäinen graafi. Puilla voidaan havainnollistaa monia eri ilmiöitä, kuten molekyylien rakenteita. Graafin virittävä puu on puu, joka sisältää kaikki alkuperäisen graafin solmut. Ne ovat tärkeitä erilaisten verkkojen, kuten sähkö-, liikenne- tai dataverkko, suunnittelussa. Ensimmäisen luvun lopussa esitellään matriisilanskentaa tutkielman tulevia todistuksia varten.

Kolmannessa ja neljännessä luvussa lasketaan eri algebrallisin keinoin, kuinka monella eri tavalla on mahdollista yhdistää annetut pisteet toisiinsa puuksi eli kuinka monta virittävää puuta graafissa on. Kolmannessa luvussa tutustutaan ensin oleellisiin määritelmiin, joita tarvitaan graafin virittävien puiden lukumäärän selvittämiseksi, kuten Laplacen matriisin käsitteeseen. Tästä päästään Kirchhoffin matriisipuulauseeseen, jonka mukaan äärellisen graafin virittävien puiden lukumäärä voidaan laskea sen pelkistetyn Laplacen matriisin determinantin avulla.

Neljännessä luvussa näytetään, miten lineaarialgebran tunnetut tulokset, kuten matriisin determinanttilause, helpottavat työtä. Täten saadaan nopeampi tapa laskea erilaisten täydellisten graafien virittävien puiden lukumäärät.

## 2 Pohjatietoa

Tässä luvussa ensin perehdytään graafeihin ja puihin sekä niiden peruskäsitteisiin, kuten mitä tarkoitetaan virittävällä graafilla tai täydellisellä graafilla. Käsitteitä on havainnollistettu kuvin ja esimerkein. Sen jälkeen määritellään liittomatriisi ja siihen liittyvä lause, jota käytetään myöhemmin todistuksissa. Tämä luku on samalla tutkielman pohjatieto. Tämä luku pohjautuu lähteisiin [1], [3] ja [4]. Aihe on käsitelty myös lähteessä [6].

### 2.1 Graafi

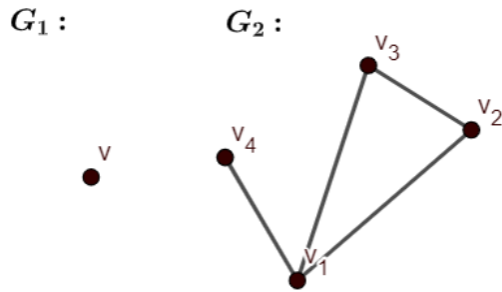
**Määritelmä 2.1.** Graafi  $G = (V, E)$  koostuu äärellisestä joukosta  $V \neq \emptyset$ , jonka alkioita kutsutaan **solmuiksi** tai **pisteiksi**, ja äärellisestä joukosta  $E$ , jossa on järjestämättömiä pareja  $\{u, v\}$ , missä  $u, v \in V, u \neq v$ . Joukon  $E$  alkioita kutsutaan **särmiksi**, ja ne yhdistävät osan graafin  $G$  solmuista. **Yksinkertaisessa graafissa** kahden eri solmun välillä voi olla korkeintaan yksi särmä, eli kahden solmun välillä ei voi olla useita särmiä, ja solmusta ei voi olla särmää solmuun itseensä.

**Triviaali graafi** on yksinkertainen graafi, jossa on vain yksi solmu eikä yhtään särmää. Kuvassa 1 on esimerkki triviaalista graafista  $G_1$  ja yksinkertaisesta graafista  $G_2$ .

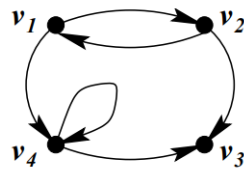
**Suunnattu graafi** koostuu solmuista ja niiden välisistä kaarista. Sen kahden eri solmun välillä voi olla korkeintaan kaksi kaarta, jotka menevät eri suuntiin. Toisin kuin yksinkertaisessa graafissa, suunnatun graafin solmusta voi olla kaari solmuun itseensä. Kuvassa 2 on esimerkki suunnatusta graafista.

**Määritelmä 2.2.** Graafia  $G$  kutsutaan **multigraafiksi**, kun siinä voi olla enemmän kuin yksi särmä kahden eri solmun välissä. Särmit ovat keskenään **rinnakkaisia**, kun ne ovat samojen kahden eri solmun välissä.

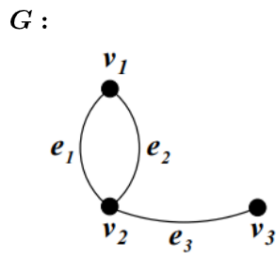
Kuvassa 3 on esimerkki multigraafista  $G$ . Tässä tutkielmassa oletetaan, että graafi on multigraafi, ellei toisin mainita.



Kuva 1: Triviaali graafi  $G_1 = (\{v\}, 0)$  ja yksinkertainen graafi  $G_2 = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}\})$ .



Kuva 2: Suunnattu graafi  $(V, E) = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_4, v_3), (v_4, v_4)\})$ . Lähde: [1].



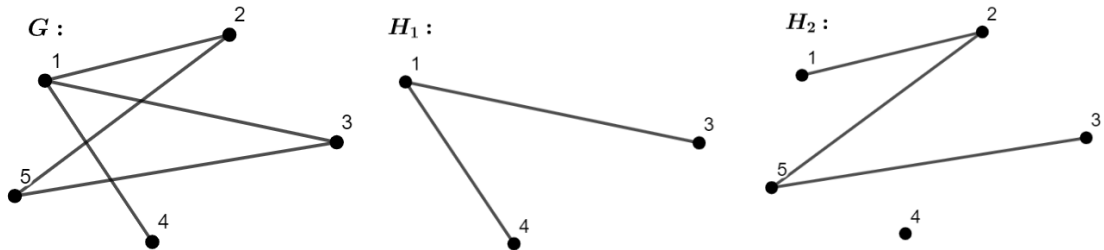
Kuva 3: Multigraafi  $G = (V, E)$ , jossa  $V = \{v_1, v_2, v_3\}$  ja  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ . Särmät  $e_1$  ja  $e_2$  ovat rinnakkaisia. Lähde: [1].

**Määritelmä 2.3.** Olkoon graafi  $G = (V, E)$  ja graafi  $H = (W, F)$ . Graafi  $H$  on graafin  $G$  **aligraafi**, kun joukko  $W \subseteq V$  ja joukko  $F \subseteq E$ . Jos tämän



lisäksi joukko  $W \subset V$  tai joukko  $F \subset E$  niin kyseessä on **aito aligraafi**.

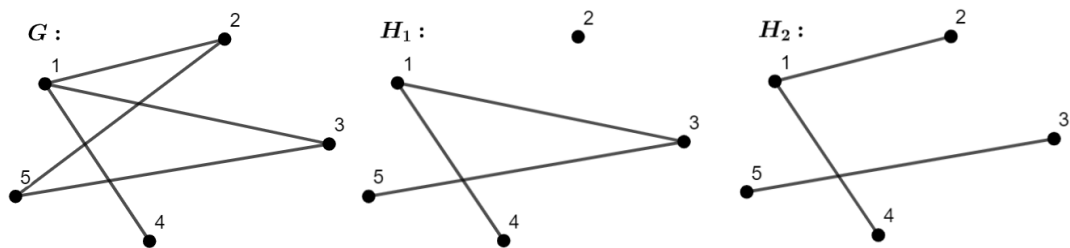
Kuvassa 4 on esimerkki graafista  $G$  ja kahdesta sen aligraafista  $H_1$  ja  $H_2$ .



Kuva 4: Graafi  $G$  ja sen aligraafit  $H_1$  ja  $H_2$ .

**Määritelmä 2.4.** Olkoon graafi  $G = (V, E)$  ja sen aligraafi  $H = (V, F)$ . Koska niillä on sama solmujoukko  $V$  eli graafin  $G$  aligraafissa  $H$  on kaikki graafin  $G$  solmut, graafi  $H$  on graafin  $G$  **virittävä aligraafi**.

Kuvassa 5 on esimerkki graafista  $G$  ja kahdesta sen virittävästä aligraafista  $H_1$  ja  $H_2$ .

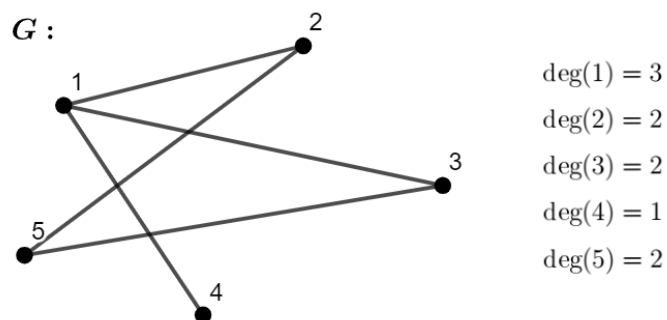


Kuva 5: Graafi  $G$  ja sen virittävät aligraafit  $H_1$  ja  $H_2$ .

**Määritelmä 2.5.** Solmun **aste**  $\deg(\cdot)$  ilmaisee graafissa, kuinka monen särmän päätesolmu solmu on.

Havannoillistetaan solmujen asteet graafissa esimerkin avulla.

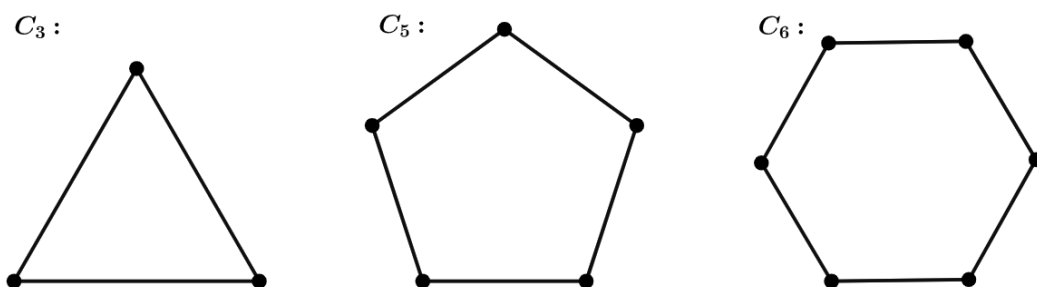
**Esimerkki 2.6.** Kuvassa 6 graafin  $G$  solmujen asteet on merkitty solmujen viereen. Solmun 1 aste on kolme, koska se on särmien  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$  ja  $\{1, 4\}$  päätesolmu.



Kuva 6: Graafi  $G$  ja sen solmujen asteet.

**Määritelmä 2.7.** Graafi  $C_n = (V, E)$  on **silmukka**, kun sen solmut ja särmät voidaan ilmaista joukkoina  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  ja  $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$ , kun  $n \in \mathbb{Z}$ . Toisin sanoen graafin  $C$  solmujen aste on kaksi ja ne muodostavat särmien avulla suljetun piirin.

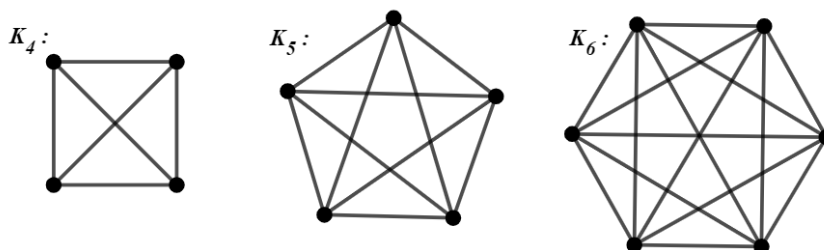
Kuvassa 7 on esimerkki silmukoista  $C_3$ ,  $C_5$  ja  $C_6$ .



Kuva 7: Silmukat  $C_3$ ,  $C_5$  ja  $C_6$ .

**Määritelmä 2.8.** Graafi on **täydellinen**, jos jokaisen kahden eri solmun välissä on särmä. Täydellistä graafia, jossa on  $n$ -solmua, merkitään  $K_n$ .

Kuvassa 8 on esimerkki täydellisistä graafeista  $K_4, K_5$  ja  $K_6$ .



Kuva 8: Täydelliset graafit  $K_4, K_5$  ja  $K_6$ .

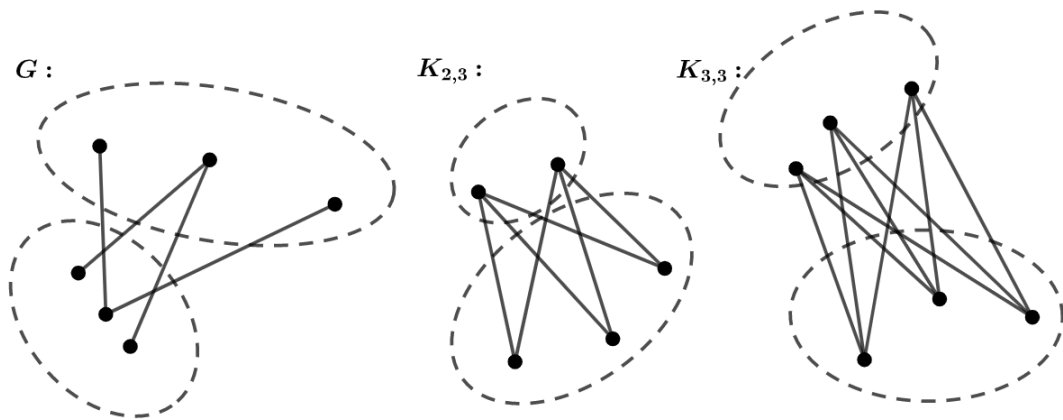
**Määritelmä 2.9.** Graafi  $G = (V, E)$  on **kaksijakoinen graafi**, jos sen solmujoukko  $V$  voidaan jakaa kahteen sellaiseen epätyhjään joukkoon  $V_1$  ja  $V_2$ , että jokaisen särmän toinen päätesolmu kuuluu joukkoon  $V_1$  ja toinen joukkoon  $V_2$ .

**Määritelmä 2.10.** Graafi  $K_{m,n}$  on **täydellinen kaksijakoinen graafi**, jos sen solmut voidaan jakaa kahteen  $m$ - ja  $n$ -alkioiseen osajoukkoon ja kahden solmun välillä on särmä aina, kun solmut kuuluvat eri osajoukkoihin.

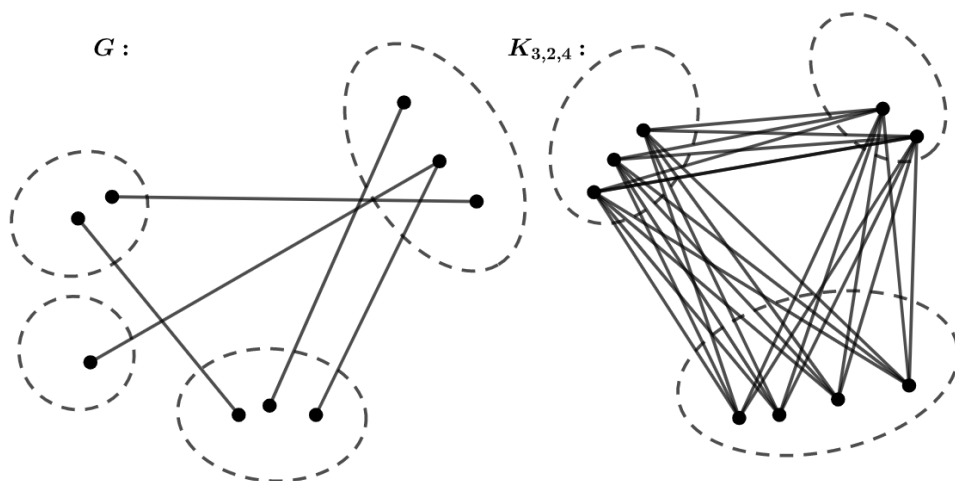
Kuvassa 9 on esimerkki kaksijakoisesta graafista  $G$  ja täydellisistä kaksijakoisista graafeista  $K_{2,3}$  ja  $K_{3,3}$ .

**Määritelmä 2.11.** Graafi  $G = (V, E)$  on **k-jakoinen**, jos sen solmujoukko on muotoa  $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ , missä joukot  $V_i$  ovat erillisiä, ja joukossa  $E$  ei ole yhtäkään särmää, jonka molemmat päätesolmut kuuluvat samaan joukkoon  $V_i$ , kun  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Sanotaan, että  $k$ -jakoinen graafi on **täydellinen k-jakoinen graafi**, jos kahden solmun välissä on särmä aina, kun solmut kuuluvat eri osajoukkoihin.

Kuvassa 10 on esimerkki 4-jakoisesta graafista  $G$  ja täydellisestä 3-jakoisesta graafista  $K_{3,2,4}$ .



Kuva 9: Kaksijakoinen graafi  $G$  ja täydelliset kaksijakoiset graafit  $K_{2,3}$  ja  $K_{3,3}$ .



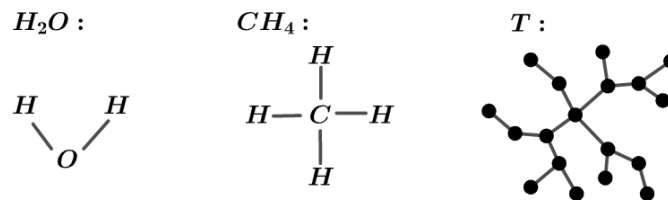
Kuva 10: 4-jakoinen graafi  $G$  ja täydellinen 3-jakoinen graafi  $K_{3,2,4}$ .

## 2.2 Puut

Edellisessä luvussa huomattiin, että on olemassa yksinkertaisia graafeja, joilla on ominaisuus päästä särkeä pitkin mistä tahansa solmusta mihin tahansa solmuun. Tällaista graafia kutsutaan yhtenäiseksi. Jos tämän ominaisuuden lisäksi graafi ei sisällä silmukoita, on kyseessä puu. Tässä alaluvussa pereh-

dytään puihin ja niiden peruskäsitteisiin. Käsitellään myös virittäviä puita, jotka ovat suurena osana tätä tutkielmaa.

1870-luvulla englantilainen matemaatikko Arthur Cayley (1821–1885) kehitti puun käsitettä tutkiessaan molekyyliarakenteita [8]. Puiden avulla voidaan havainnollistaa molekyyliarakenteiden lisäksi monia ilmiöitä kuten ihmisten sukupuuta ja lajien sukulaisuutta. Puiden avulla voidaan myös mallintaa tieto- ja sähköverkoja. Tämä luku pohjautuu lähteisiin [1] ja [3]. Aihe on käsitelty myös lähteissä [5], [7] ja [10]. Kuvassa 11 on esimerkkejä puugraafeista.



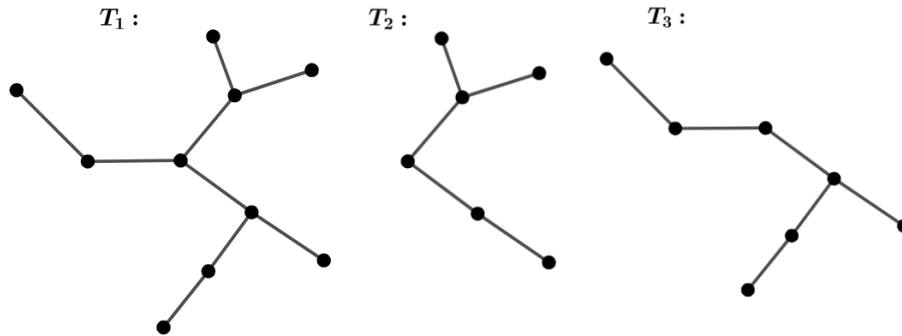
Kuva 11: Vesi- ja metaanimolekyylien rakennekaavat sekä tietoliikenneverkko  $T$ , jotka ovat esimerkkejä puugraafeista.

**Määritelmä 2.12.** Graafi  $T$  on **puu**, jos se on silmukaton ja yhtenäinen graafi eli on mahdollista kulkea graafin  $T$  solmujen välillä käyttäen vain graafin  $T$  särmiä. Puun  $T$  aligraafia kutsutaan **alipuuksi**. Koska puu on silmukaton, puun kahden solmun välillä on polku eli jono särmiä. Puussa olevaa solmua, jonka aste on yksi, kutsutaan puun lehdeksi. Jos puussa on  $n$  solmua ja  $m$  särmää, niin  $m = n - 1$ .

Kuvassa 12 on esimerkki puusta  $T_1$  ja kahdesta sen alipuusta  $T_2$  ja  $T_3$ .

**Määritelmä 2.13.** Graafin  $G$  aligraafi  $T$  on graafin  $G$  **virittävä puu**, jos graafin  $G$  jokainen solmu on myös aligraafissa  $T$  sekä aligraafi  $T$  on yhtenäinen ja silmukaton. Toisin sanoen graafin  $G$  virittävä puu  $T$  on graafin  $G$  alipuu, joka sisältää kaikki graafin  $G$  solmut.

Havainnollistetaan virittävän puun ehtoja esimerkin avulla.



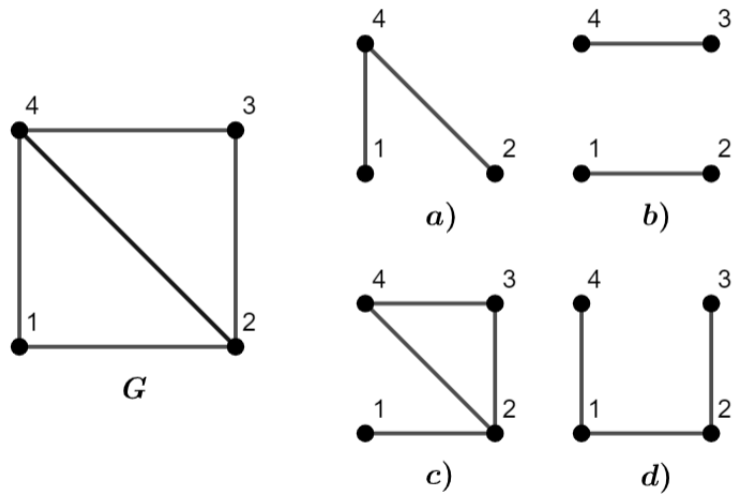
Kuva 12: Puu  $T_1$  ja sen alipuut  $T_2$  ja  $T_3$ .

**Esimerkki 2.14.** Kuvassa 13 on graafi  $G$  ja neljä sen aligraafia. Määritetään yllä olevien ehtojen avulla, onko jokin aligraafeista virittävä puu. Aligraafi  $a$ ) ei ole virittävä puu, koska siinä ei ole kaikkia graafin  $G$  solmuja. Aligraafi  $b$ ) ei ole graafin  $G$  virittävä puu, koska se ei ole yhtenäinen. Aligraafi  $c$ ) ei ole graafin  $G$  virittävä puu, koska siinä on silmukka solmujen 1, 3 ja 4 välillä. Aligraafi  $d$ ) on graafin  $G$  virittävä puu, koska se täyttää kaikki yllä olevat ehdot eli se sisältää kaikki graafin  $G$  solmut ja se on silmukaton sekä yhtenäinen. Graafilla voi olla useita virittäviä puita. Kuvassa 14 on saman graafin  $G$  kaikki mahdolliset virittävät puut.

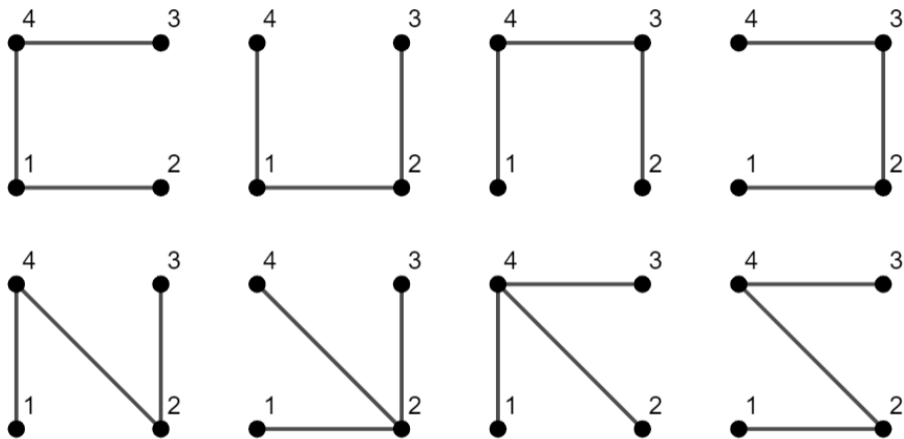
Graafilla voi olla lukuisia virittäviä puita ja niiden kaikkien listaaminen on usein hyvin työlästä. Sen takia on keksitty erilaisia lineaarisen algebran keinoja, miten graafin virittävien puiden lukumäärän saa kätevämmiin selvitettyä. Tässä tutkielmassa käytetään merkintää  $\tau(G)$  graafin  $G$  virittävien puiden lukumäärälle. Graafin  $G$  virittävien puiden lukumäärän laskeminen voidaan tehdä monella eri tavalla ja tässä tutkielmassa keskitytään Laplacen matriisin avulla tapahtuvaan laskentaan, joka esitellään myöhemmin.

## 2.3 Liittomatriisi

Tutkielman tulevia todistuksia varten määritellään säännöllinen matriisi, kofaktorimatriisi ja adjunkoitumatriisi.



Kuva 13: Graafi  $G$  ja neljä sen aligraafia.



Kuva 14: Kaikki graafin  $G$  virittävät puut.

**Määritelmä 2.15.** Olkoon  $A$  matriisi muotoa  $n \times n$ . Matriisi  $A$  on **säännöllinen** tai **kääntyvä**, jos on olemassa sellainen muotoa  $n \times n$  oleva matriisi  $K$ , että

$$AK = KA = I,$$

missä  $I$  on identiteettimatriisi.

**Määritelmä 2.16.** Olkoon  $A$  säännöllinen matriisi muotoa  $n \times n$ . Matriisin  $A$  **kofaktorimatriisi** toteuttaa

$$\text{cof}(A) = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

missä  $D_{ij}$  on matriisin  $A$  alkioita  $a_{ij}$  vastaava  $(n-1)$ -rivinen alideterminantti. Toisin sanoen matriisin alkio  $(\text{cof}A)_{ij}$  on  $(-1)^{i+j}$  kerrottuna matriisin  $A$  determinantilla, kun on poistettu rivi  $i$  ja sarake  $j$ . Liittomatriisi on tämän matriisin transpoosi.

**Määritelmä 2.17.** Olkoon  $A$  säännöllinen matriisi muotoa  $n \times n$ . Matriisin  $A$  adjunkoitu matriisi eli **liittomatriisi** on

$$\text{adj}(A) = [\text{cof}(A)]^T,$$

missä  $\text{cof}(A)$  on matriisin  $A$  kofaktorimatriisi. Toisin sanoen matriisin  $A$  liittomatriisi muodostetaan muuttamalla ensin alkuperäisen matriisin  $A$  alkioit niiden alideterminanteiksi, vaihtamalla niistä joka toinen vastaluvukseen ja sitten ottamalla transpoosi saadusta matriisista.

**Lause 2.18.** Olkoon  $A$  matriisi muotoa  $n \times n$ . Tällöin

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det(A)I,$$

missä  $\text{adj}(A)$  on matriisin  $A$  liittomatriisi ja  $I$  on identiteettimatriisi.

*Todistus.* Tarkastellaan kertolaskua

$$A \cdot \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T$$



missä  $C_{ij} = (\text{cof}A)_{ij}$ . Tulomatriisin alkio rivillä  $i$  ja sarakkeella  $j$  on

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}.$$

Jos  $i = j$ , niin edellämainittu alkio on matriisin  $A$  rivin  $i$  suhteen tehty determinantti, ja 0 muulloin. Täten

$$A \cdot \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \det A & \end{pmatrix} = \det(A)I.$$

□

### 3 Lineaarialgebran työkaluja graafin virittävien puiden lukumäärän laskemiseen

Tässä luvussa ensin perehdytään graafin esittämiseen matriisin avulla ja sitten tutustutaan Laplacen matriisiin ja pelkistettyyn Laplacen matriisiin. Niitä havainnollistetaan esimerkein. Esitellään myös Kirchhoffin matriisipuu-lause, jonka avulla voidaan selvittää graafien virittävien puiden lukumäärä pelkistetyn Laplacen matriisista. Tämä luku pohjautuu lähteisiin [1], [2], [3] ja [7].

#### 3.1 Graafin esittäminen matriisin avulla

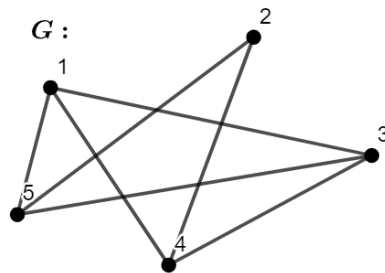
Graafi voidaan esittää muun muassa vierusmatriisin tai tapausmatriisin avulla. Kun graafi on matriisimuodossa, siihen voidaan helpommin soveltaa lineaarialgebraa. Keskitytään yksinkertaisiin graafeihin.

**Määritelmä 3.1.** Olkoon graafi  $G = (V, E)$ , jonka solmujoukko on  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , missä  $n \in \mathbb{Z}$ . Silloin graafin  $G$  vierusmatriisi  $A$  on muotoa  $n \times n$ , jossa

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun } v_i \text{ ja } v_j \text{ ovat vierussolmuja eli niiden välillä on särmä.} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Graafin  $G$  vierusmatriisi  $A$  on symmetrinen ja sen lävistäjäalkiot ovat nollia. Muut vierusmatriisin alkioit ovat joko nollia tai ykkösiä. Havainnollistetaan vierusmatriisin muodostamista esimerkin avulla.

**Esimerkki 3.2.** Kuvassa 15 on graafi  $G$ . Muodostetaan graafin  $G$  vierusmatriisi  $A$ .



Kuva 15: Graafi  $G$ .

Graafin  $G$  solmujoukko on  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Graafin  $G$  vierusmatriisin ensimmäisen rivin alkioit  $0, 0, 1, 1$  ja  $1$  saadaan siitä, että lävistäjäalkioit ovat nollia sekä solmu 1 on vierussolmu solmujen 3, 4 ja 5 kanssa, mutta solmu 1 ei ole vierussolmu solmun 2 kanssa. Graafin  $G$  vierusmatriisi on muotoa

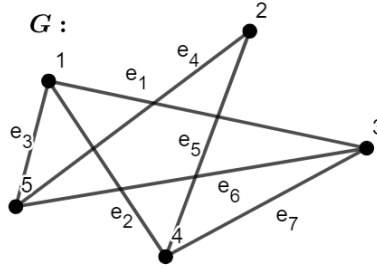
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Määritelmä 3.3.** Olkoon graafi  $G = (V, E)$ , sen solmujoukko muotoa  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$  ja särmäjoukko muotoa  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ , missä  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Silloin graafin  $G$  tapausmatriisi  $C$  on muotoa  $m \times n$ , jossa

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos särmä } e_j \text{ kulkee solmun } v_i \text{ kautta,} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Havainnollistetaan tapausmatriisin muodostamista esimerkin avulla.

**Esimerkki 3.4.** Kuvassa 16 on graafi  $G$ . Muodostetaan graafin  $G$  tapausmatriisi  $C$ .



Kuva 16: Graafi  $G$ .

Graafin  $G$  solmujoukko on  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ja särmäjoukko on  $E = \{e_1 = \{1, 3\}, e_2 = \{1, 4\}, \dots, e_7 = \{3, 4\}\}$ . Tässä esimerkissä on valittu särmät kyseisessä järjestyksessä, mutta jos olisi valittu esimerkiksi  $e_1 = \{1, 5\}$ , niin tapausmatriisi olisi erilainen. Toisin sanoen järjestys, jossa graafin  $G$  särmät  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  nimetään vaikuttaa tapausmatriisin muotoon. Graafin  $G$  tapausmatriisin ensimmäisen rivin alkiot  $1, 1, 1, 0, 0, 0$  ja  $0$  saadaan siitä, että särmät  $e_1, e_2$  ja  $e_3$  kulkevat solmun 1 kautta, mutta solmut  $e_4, e_5, e_6$  ja  $e_7$  eivät kulje solmun 1 kautta. Graafin  $G$  tapausmatriisi on siis muotoa

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & c_{57} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Voidaan huomata, että samasta graafista vierusmatriisi ja tapausmatriisi voivat olla hyvin erilaisia. Seuraavaksi esitellään Laplacen matriisi, jota tarvitaan määrittämään graafin virittävien puiden lukumäärä.

### 3.2 Laplacen matriisi

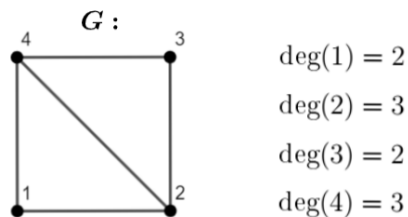
Olkoon  $G = (V, E)$  yksinkertainen graafi, jonka solmujoukko on  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , missä  $n \in \mathbb{N}$ . Graafin  $G$  **Laplacen matriisi**  $L(G)$  on muotoa  $n \times n$ , jossa

$$L(G)(i, j) = \begin{cases} \deg(i), & \text{kun } v_i = v_j. \\ -1, & \text{kun } v_i \text{ ja } v_j \text{ ovat vierussolmuja.} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tässä tutkimuksessa käytetään Laplacen matriisista  $L(G)$  myös merkintää  $L_G$ . Laplacen matriisissa  $L(G)$  lävistäjääalkioiden paikalle tulee graafin  $G$  solmujen asteet  $\deg(i)$  ja muiden alkioiden paikalle  $-1$ , jos solmut  $i$  ja  $j$  ovat vierussolmuja eli niiden välillä on särmä, tai 0 muulloin.

Kun matriisista  $L(G)$  poistetaan rivi  $l$  ja sarake  $m$ , saadaan **pelkistetty Laplacen matriisi**  $L(G)_{l,m}$ . Havainnollistetaan Laplacen matriisiin ja pelkistetyn Laplacen matriisin muodostamista esimerkin avulla.

**Esimerkki 3.5.** Muodostetaan esimerkin 2.14 graafin  $G$  Laplacen matriisi  $L(G)$  sekä pelkistetty Laplacen matriisi  $L(G)_{2,3}$ . Kuvassa 17 on graafi  $G$  ja sen solmujen asteet.



Kuva 17: Graafi  $G$  ja sen solmujen asteet.

Graafin  $G$  Laplacen matriisin  $L(G)$  ensimmäisen rivin alkioit  $2, -1, 0$  ja  $-1$  saadaan siitä, että solmun 1 aste on 2 ja solmu 1 on vierussolmu solmujen 2 ja 4 kanssa, mutta ei solmun 3 kanssa. Tällöin graafin  $G$  Laplacen matriisi

$L(G)$  on

$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tästä huomataan, että  $\det(L(G)) = 0$ . Kun Laplacen matriisista  $L(G)$  poistetaan rivi 2 ja sarake 3, saadaan pelkistetty Laplacen matriisi

$$L(G)_{2,3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Laplacen matriisia voidaan soveltaa myös multigraafeille, mikä on tämän tutkielman kannalta olennaista.

Olkoon multigraafi  $G = (V, E)$ , jonka solmujoukko on  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , missä  $n \in \mathbb{N}$ . **Multigraafin  $G$  Laplacen matriisi**  $L(G)$  on muotoa  $n \times n$ , jossa

$$L(G)(i, j) = \begin{cases} \deg(i), & \text{kun } i = j. \\ -k, & \text{kun } v_i \text{ ja } v_j \text{ ovat vierussolmuja,} \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

missä  $k$  on solmujen  $i$  ja  $j$  välisten särmien lukumäärä. Yksinkertaisessa graafissa  $k$  on yksi, koska solmujen välillä on enintään yksi särmä. Havainnollistetaan Laplacen matriisin ja pelkistetyn Laplacen matriisin muodostamista multigraafille esimerkin avulla.

**Esimerkki 3.6.** Kuvassa 18 on multigraafi  $G$ . Muodostetaan multigraafin  $G$  Laplacen matriisi  $L(G)$  sekä pelkistetty Laplacen matriisi  $L(G)_{1,3}$ .

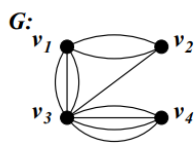
Multigraafin  $G$  solmujen asteet ovat

$$\deg(v_1) = 5$$

$$\deg(v_2) = 3$$

$$\deg(v_3) = 8$$

$$\deg(v_4) = 4.$$



Kuva 18: Multigraafi  $G$ . Lähde [1].

Laplacen matriisissa  $L(G)$  lävistjäalkioiden paikalle tulee graafin  $G$  solmujen asteet  $\deg(i)$ . Muiden alkioden paikalle tulee  $-k$ , jos solmut  $i$  ja  $j$  ovat vierussolmuja eli niiden välillä on särmä tai useita särmiä, ja 0 muulloin. Multigraafin  $G$  Laplacen matriisin  $L(G)$  ensimmäisen rivin alkiot 5,  $-2$ ,  $-3$  ja 0 saadaan siitä, että solmun  $v_1$  aste on 5 ja solmu  $v_1$  on vierussolmu solmujen  $v_2$  ja  $v_3$  kanssa, mutta ei solmun  $v_4$  kanssa. Solmujen  $v_1$  ja  $v_2$  välissä on kaksi särmiä, jotka ovat rinnakkaisia, joten  $-k = -2$ . Solmujen  $v_1$  ja  $v_3$  välissä on kolme särmiä, joten  $-k = -3$ . Tällöin multigraafin  $G$  Laplacen matriisi  $L(G)$  on

$$L(G) = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tästä huomataan, että  $\det(L(G)) = 0$ . Kun Laplacen matriisista  $L(G)$  poistetaan rivi 1 ja sarake 3, saadaan pelkistetty Laplacen matriisi

$$L(G)_{1,3} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Laplacen matriisin  $L(G)$  määritelmästä seuraa, että sen rivien ja sarakkeiden summa on nolla. Tämä tarkoittaa, että matriisi  $L(G)$  on aina singulaarinen eli sen determinantti on nolla ja se ei ole kääntyvä. Jos poistetaan mikä tahansa rivi tai sarake matriisista  $L(G)$ , laskemalla kyseisen matriisin determinantti saadaan tietää graafin  $G$  virittävien puiden lukumäärä  $\tau(G)$ . Tämä on Kirchhoffin matriisipuulauseen idea, joka esitellään seuraavaksi.

### 3.3 Kirchhoffin matriisipuulause

**Lause 3.7. (Kirchhoffin matriisipuulause)** Olkoon yhtenäinen multi-graafi  $G = (V, E)$ , jonka solmujoukko on  $V = \{1, \dots, n\}$ . Graafin  $G$  viritävien puiden lukumäärä  $\tau(G)$  voidaan laskea kaavalla

$$\tau(G) = (-1)^{l+m} \cdot \det(L(G)_{l,m}),$$

kaikilla  $l, m \in V$ .

*Todistus.* Todistetaan mukailleen David P. Williamsonin esitystapaa [2]. Merkinnöillä  $L(G)$  ja  $L_G$  tarkoitetaan Laplacen matriisia graafista  $G$  ja merkinnöillä  $A[i, j]$  ja  $A_{i,j}$  tarkoitetaan pelkistettyä matriisia  $A$ , josta on poistettu rivi  $i$  ja sarake  $j$ . Todistetaan ensin, että Kirchhoffin matriisi-puulause toteutuu, kun pelkistetystä Laplacen matriisista on poistettu samanumeroinen rivi ja sarake eli kun  $l = m$ . Todistusta varten tarvitaan seuraava tieto.

Olkoon  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matriisi ja olkoon  $A[i]$  matriisi, jossa matriisista  $A$  on poistettu rivi ja sarake  $i$ . Olkoon myös  $E_{ii}$  matriisi, jossa on alkio 1 lävistäjäälkioissa  $(i, i)$  ja alkio 0 muulloin. Silloin

$$\det(A + E_{ii}) = \det(A) + \det(A[i]).$$

Tämä on ilmeistä, kun ottaa huomioon determinantin permutaatiosumman määritelmän

$$\det(A = a_{ij}) = \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Matriisissa  $A + E_{ii}$  lävistäjäälkiona kohdassa  $i$  on  $a_{ii} + 1$ , mutta muuten se on sama kuin matriisi  $A$ . Determinantti matriisista  $A[i]$  voidaan esittää summana permutaatioita  $n \setminus \{i\}$ . Saadaan, että determinantti matriisista  $A + E_{ii}$  voidaan esittää alkuperäisen matriisin  $A$  determinantti yhteenlaskettuna determinantin matriisista  $A[i]$  kanssa.

Todistetaan Kirchhoffin matriisi-puu lause induktioperiaatteella hyödyntäen graafin  $G$  solmujen ja särmien lukumäärää. Tässä todistuksessa graafi  $G$  voi olla mikä tahansa graafi.

**Perusaskel:**

Jos triviaali graafi  $G = (V, \emptyset)$  sisältää kaksi solmua, tällöin sen Laplacen matriisi on muotoa

$$L_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

jolloin graafin  $G$  pelkistetty Laplacen matriisi on muotoa  $L_G[i] = [0]$  ja sen determinantti  $\det(L_G[i]) = 0$ . Graafilla ei siis ole Kirchhoffin matriisi-puu lauseen mukaan yhtäkään virittävää puuta, mikä on haluttu tulos, sillä graafilla  $G$  ei ole yhtäkään virittävää puuta.

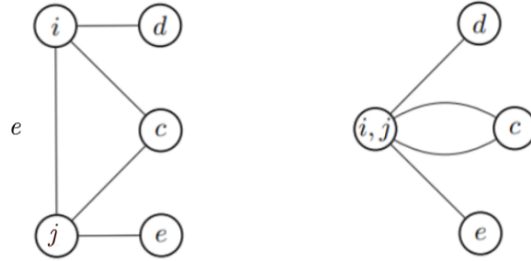
**Induktioaskel:**

Olkoon  $\tau(G)$  graafin  $G$  virittävien puiden lukumäärä. Oletetaan, että graafi  $G$  voi olla multigraafi eli siinä voi olla useampia särmiä kahden eri solmun välissä. Olkoon  $G - e$  graafi, jossa graafista  $G$  on poitettu särmä  $e$ , ja olkoon  $G/e$  graafi, jossa särmä  $e$  kutistettu pois. Tämä tarkoittaa, että särmä ensin poistetaan ja sitten sen päätesolmut yhdistetään. Graafi  $G/e$  voi olla multigraafi, joten särmällä  $e$  voi olla päätesolmuina  $i$  ja  $j$ , joilla on yhteinen solmu  $k$ . Graafissa  $G/e$  on siis kaksi särmää yhdistetystä solmusta solmuun  $k$ , koska särmät  $\{i, k\}$  ja  $\{j, k\}$  tuottavat molemmat särmän graafiin  $G/e$ . Kuvassa 19 havainnoillistetaan, miten särmän supistaminen tapahtuu. Kutistamisessa mahdollisesti muodostuvat särmät pisteestä itseensä voidaan poistaa, sillä ne eivät esiinny missään puussa.

Graafilla  $G$  ei ole yhtäkään virittävää puuta, jos graafin  $G$  solmu  $i$  ei ole minkään särmän päätepiste, koska silloin graafi  $G$  ei ole yhtenäinen. Tällöin matriisin  $G$  Laplacen matriisilla  $L(G)$  on nolliä rivillä  $i$  ja sarakkeella  $i$ . Siten  $\det(L_G[j]) = \det(L_{G-j}) = 0$ , kaikilla  $j \in V$ , kuten on haluttu.

Muussa tapauksessa voidaan olettaa, että kaikilla  $i \in V$  on olemassa särmä  $e = (i, j)$ . Mille tahansa virittävälle puulle  $T$  särmä  $e \in T$  tai särmä  $e \notin T$





Kuva 19: Graafi  $G/e$ , josta on kutistettu särmä  $e$  pois. Solmut  $i$  ja  $j$  on yhdistetty yhdeksi solmuksi  $(i, j)$ .

eli särmä  $e$  joko kuuluu tai ei kuulu virittävään puuhun  $T$ . Tällöin  $\tau(G/e)$  ilmaisee niiden graafin  $G$  virittävien puiden  $T$  lukumäärän, joissa särmä  $e \in T$ , ja  $\tau(G - e)$  ilmaisee niiden graafin  $G$  virittävien puiden  $T$  lukumäärän, joissa särmä  $e \notin T$ . Tällöin

$$\tau(G) = \tau(G/e) + \tau(G - e).$$

Graafissa  $G/e$  on yksi solmu ja yksi särmä vähemmän kuin alkuperäisellä graafilla  $G$  ja graafilla  $G - e$  on yksi särmä vähemmän kuin alkuperäisessä graafissa  $G$ .

Tarkastellaan ensin matriisia  $G - e$ . Sen Laplacen matriisi eroaa graafin  $G$  Laplacen matriisista vain alkioissa  $(i, i)$ ,  $(i, j)$ ,  $(j, i)$  ja  $(j, j)$ . Huomataan, että  $L_G[i] = L_{G-e}[i] + E_{jj}$ . Ottamalla tämä ja alussa määritelty tieto, saadaan

$$\begin{aligned} \det(L_G[i]) &= \det(L_{G-e}[i] + E_{jj}) \\ &= \det(L_{G-e}[i]) + \det(L_{G-e}[i, j]) \\ &= \det(L_{G-e}[i]) + \det(L_G[i, j]), \end{aligned}$$

kun merkintä  $L_G[i, j]$  tarkoittaa Laplacen matriisia  $L_G$ , josta on rivi  $i$  ja sarake  $j$  poistettu. Viimeinen yhtäsuuruus pätee, koska kun rivi  $i$  ja sarake  $j$  on poistettu, matriisit  $L_G$  ja  $L_{G-e}$  ovat samat.

Tarkastellaan nyt matriisia  $G/e$ . Solmut  $i$  ja  $j$  on yhdistetty yhdeksi sellaiseksi solmuksi  $k$  siten, että matriisin  $L_{G/e}$  yksikään rivi tai sara-

ke ei vastaa solmua  $i$  tai  $j$ . Täten  $L_{G/e}[k] = L_G[i, j]$ . Tällöin kaavasta  $\det(L_G[i]) = \det(L_{G-e}[i]) + \det(L_G[i, j])$  saadaan

$$\begin{aligned}\det(L_G[i]) &= \det(L_{G-e}[i]) + \det(L_{G/e}[k]) \\ &= \tau(G - e) + \tau(G/e) = \tau(G).\end{aligned}$$

Nyt on todistettu, että lauseen 3.7 väite toteutuu, kun on poistettu sarake ja rivi  $i$  eli  $l = m$ . Seuraavaksi todistetaan, että väite toteutuu, kun  $l$  ja  $m$  eivät ole samat eli voidaan poistaa erinumeroiset rivi ja sarake Laplacen matriisista. Sitä varten esitellään lemma 3.8.

Olkoon  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  neliömatriisi ja olkoon  $A_{i,j}$  matriisi, jossa matriisista  $A$  on poistettu rivi  $i$  ja sarake  $j$ . Olkoon neliömatriisin  $A$  kofaktorimatriisi  $C = (c_{i,j})$ , jonka alkiot toteuttavat  $c_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$ . Matriisin  $A$  adjunkoitu matriisi eli liittomatriisi on sen kofaktorimatriisin  $C$  transpoosi eli  $\text{adj}(A) = C^T$ . Lauseen 2.17 mukaan

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det(A)I.$$

Graafin  $G$  Laplacen matriisin  $L_G$  kofaktorin  $(i, i)$  determinantti on  $\tau(G)$ , koska lauseen 3.7 väite toteutuu, kun on poistettu sarake ja rivi  $i$  eli  $l = m$ .

**Lemma 3.8.** Olkoon yhtenäisen graafin  $G$  Laplacen matriisin  $L = L(G)$  kofaktorimatriisi  $C = (c_{i,j})$ , jonka alkiot toteuttavat  $c_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(L(G)_{i,j})$ . Tällöin toteutuu

$$c_{i,j} = c_{i,i},$$

kaikilla  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Pelkistettyjen Laplacen matriisien  $L(G)_{i,j}$  determinantit ovat täten aina samat kuin pelkistettyjen Laplacen matriisien  $L(G)_{i,i}$ .

*Todistus.* Lemman todistus on jaettu neljään vaiheeseen.

(1) Koska jokaisen Laplacen matriisin rivin alkoiden summa on nolla, niin toteutuu

$$L \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(2) Jos  $L \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$  niin  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ . Tämä seuraa siitä, että graafi  $G$  on yhtenäinen. Olkoon  $a = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Jos  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  ovat sellaisia, että  $a_i = a$  ja solmut  $i$  ja  $j$  ovat vierussolmuja graafissa  $G$  eli solmujen  $i$  ja  $j$  välissä on särmä, niin myös  $a_j = a$ . Nimittäin  $L \begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

ja  $L \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ , joten  $L \begin{bmatrix} a - a_1 \\ \vdots \\ a - a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ . Tarkastellaan matriisin  $L$  riviä  $i$ . Se on muotoa  $(b_1, \dots, b_n)$ , missä  $b_i$  on solmun  $i$  aste graafissa  $G$  ja  $-b_j$  on solmujen  $i$  ja  $j$  olevien särmien lukumäärä graafissa  $G$ , kun  $i \neq j$ . Koska

$$(b_1, \dots, b_n) \begin{bmatrix} a - a_1 \\ \vdots \\ a - a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ja } a - a_i = 0, \text{ saadaan}$$

$$\sum_{i \neq j} (-b_j)(a - a_j) = 0.$$

Tässä  $-b_j \geq 0$  ja  $a - a_j \geq 0$ , kaikilla  $i \neq j$ , joten alkio  $a - a_j = 0$  aina, kun  $b_j \neq 0$ . Toisin sanoen  $a_j = a$ , jos  $i$  ja  $j$  ovat vierussolmuja. Koska graafi  $G$  on yhtenäinen, saadaan tästä helpolla induktiolla, että  $a_j = a$  kaikilla  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

(3) Ensimmäisestä vaiheesta seuraa

$$\det(L) = 0.$$

Jos olisi  $\det(L) \neq 0$ , niin käänteismatriisi  $L^{-1}$  olisi olemassa. Ensimmäisen vaiheen mukaan

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = L^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = L^{-1} \cdot L \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

mikä johtaa ristiriitaan.

(4) Matriisin  $L$  liittomatriisi on  $n \times n$ -matriisi muotoa

$$\text{adj}(L) = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & \cdots \\ c_{1,2} & c_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

missä alkio kohdassa  $j, i$  on  $c_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$ . Lauseen 2.17 mukaan

$$L \cdot \text{adj}(L) = \det(L) \cdot I,$$

joka on nollamatriisi kolmannen vaiheen seurauksena. Tarkastellaan matriisin  $\text{adj}(L)$  saraketta  $i$ , jolloin saadaan

$$L \cdot \begin{bmatrix} c_{i,1} \\ \vdots \\ c_{i,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Toisen vaiheen mukaan  $c_{i,1} = c_{i,2} = \cdots = c_{i,n}$  eli  $c_{i,j} = c_{i,i}$ . Täten lemmän väite toteutuu.

□

Lemman 3.8. mukaan Laplacen matriisien  $L(G)_{i,j}$  determinantit ovat aina samat kuin Laplacen matriisien  $L(G)_{i,i}$ . Sen seurauksena saadaan, että lauseen 3.7 väite toteutuu, kun  $l$  ja  $m$  voivat olla erit eli Laplacen matriisista voidaan poistaa erinumeroiset rivi ja sarake. Täten lause 3.7 on todistettu.

□

Havainnollistetaan Kirchhoffin matriisiipuulauseen käyttöä kahden esimerkin avulla.

**Esimerkki 3.9.** Selvitetään esimerkin 2.17 graafin  $G$  virittävien puiden lukumäärä, kun graafin  $G$  pelkistetty Laplacen matriisi  $L(G)_{2,3}$  on muotoa

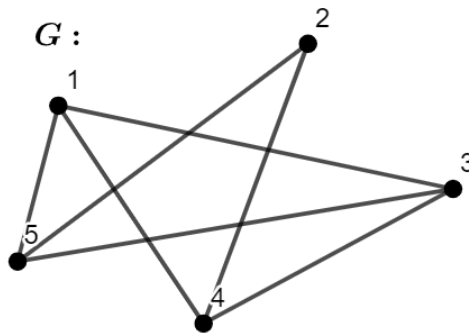
$$L(G)_{2,3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kirchhoffin matriisiipuulauseen mukaan

$$\begin{aligned}\tau(G) &= (-1)^{l+m} \cdot \det(L(G)_{l,m}) \\ &= (-1)^{2+3} \cdot \det(L(G)_{2,3}) \\ &= (-1) \cdot (-8) = 8.\end{aligned}$$

Kirchhoffin matriisiipuulauseen mukaan graafilla  $G$  on kahdeksan virittävää puuta, mikä vastaa esimerkissä 2.17 esitettyjä kahdeksaa graafin  $G$  virittävää puuta.

**Esimerkki 3.10.** Kuvassa 20 on graafi  $G$ . Selvitetään, kuinka monta virittävää puuta on graafilla  $G$ .



Kuva 20: Graafi  $G$ .

Graafin  $G$  solmujoukko on  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Lasketaan ensin graafin  $G$  jokaisen solmun aste, jotta saadaan matriisin  $G$  Laplacen matriisin lävistäjäalkiot.

$$\deg(1) = 3$$

$$\deg(2) = 2$$

$$\deg(3) = 3$$

$$\deg(4) = 3$$

$$\deg(5) = 3$$

Tällöin graafin  $G$  Laplacen matriisi  $L(G)$  on muotoa

$$L(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Poistetaan graafin  $G$  Laplacen matriisista  $L(G)$  rivi 3 ja sarake 4. Saadaan graafin  $G$  pelkistetty Laplacen matriisi  $L(G)_{3,4}$ , joka on muotoa

$$L(G)_{3,4} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kirchhoffin matriisipuulauseen mukaan

$$\begin{aligned} \tau(G) &= (-1)^{l+m} \cdot \det(L(G)_{l,m}) \\ &= (-1)^{3+4} \cdot \det(L(G)_{3,4}) \\ &= (-1) \cdot (-24) = 24. \end{aligned}$$

Kirchhoffin matriisipuulauseen mukaan graafilla  $G$  on 24 virittävää puuta.

Jopa yksinkertaiselle graafille, kuten esimerkissä 3.9 determinantin laskeminen pelkistetyistä Laplacen matriisista voi olla työlästä. Laskeminen voi olla helpompaa valitsemalla eri rivi ja sarake Laplacen matriisista poistettavaksi, mutta se voi yhä olla uuvuttavaa. Seuraavassa osiossa esitellään nopeampi tapa laskea täydellisten graafien virittävien puiden lukumäärä.

## 4 Täydellisten graafien virittävien puiden lukumäärät

Tässä luvussa esitellään ensin matriisin determinanttilemma ja sen avulla lemma 4.2, jotka ovat tunnettuja tuloksia lineaarialgebrasta. Sen jälkeen hyödynnetään niitä graafin virittävien puiden lukumäärän laskemiseen, kun on kyseessä täydellinen graafi, täydellinen kaksijakoinen graafi tai täydellinen k-jakoinen graafi ja havainnollistetaan tilanteita esimerkein. Tämä luku pohjautuu lähteeseen [3].

### 4.1 Matriisin determinanttilemma

**Lemma 4.1. (Matriisin determinanttilemma)** Olkoon matriisi  $A$  muotoa  $n \times n$ , ja olkoot  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  avaruuden  $\mathbb{R}^n$  sarakevektorit. Silloin

$$\det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \det(A) + \mathbf{v}^T \text{adj}(A)\mathbf{u}.$$

Erityisesti, jos matriisi  $A$  on kääntävä, niin tällöin

$$\det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \det(A)(1 + \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u}).$$

*Todistus.* Kun matriisi  $A$  on säännöllinen eli kääntävä, toteutuu yhtälö

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I.$$

Kun kerrotaan yhtälön molemmat puolet matriisin  $A$  käänteismatriisilla  $A^{-1}$ , saadaan

$$\text{adj}(A) = \det(A) \cdot A^{-1}.$$

Kun jaetaan yhtälön molemmat puolet puolet matriisin  $A$  determinantilla, saadaan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

Tarkastellaan ensin tilannetta, että matriisi  $A$  on identiteettimatriisi  $I$ . Tarkastellaan tällöin tuloa

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{u} \\ 0 & 1 + \mathbf{v}^T \mathbf{u} \end{bmatrix}.$$

Yhtälön vasemman puolen determinantti koostuu kolmen matriisin determinanttien kertolaskusta. Koska yhtälön vasemman puolen ensimmäinen ja kolmas matriisi ovat alakolmiomatriiseja, joiden lävistäjäalkiot ovat ykkösiä, niiden determinantit ovat yksi. Yhtälön vasemman puolen determinantti siis määräytyy keskimmäisen matriisin determinantista. Yhtälön oikean puolen determinantti on  $1 + \mathbf{v}^T \mathbf{u}$ . Tästä saadaan

$$\det(I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = 1 + \mathbf{v}^T \mathbf{u}.$$

Tästä saadaan kääntyvälle matriisille  $A$

$$\begin{aligned} \det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) &= \det(A)\det(I + (A^{-1}\mathbf{u})\mathbf{v}^T) \\ &= \det(A)(1 + \mathbf{v}^T(A^{-1}\mathbf{u})). \end{aligned}$$

Sijoitetaan yhtälöön  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$  ja saadaan

$$\begin{aligned} \det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) &= \det(A)(1 + \mathbf{v}^T \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) \cdot \mathbf{u}) \\ &= \det(A) + \mathbf{v}^T \text{adj}(A)\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Nyt on todistettu, että matriisin determinanttilemma toteutuu kääntyvälle matriisille  $A$ . Jos matriisi  $A$  ei ole kääntyvä, niin  $\det(A) = 0$ . Kaikilla riittävän pienillä positiivisilla luvuilla  $x > 0$  toteutuu  $\det(A + xI) \neq 0$ , sillä  $\det(A + xI) = 0$  vain äärellisen monella arvolla  $x$ , koska determinantti  $\det(A + xI)$  on  $x$ :n polynomi astetta  $n$ .

Käytetään kaavaa  $\det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \det(A) + \mathbf{v}^T \text{adj}(A)\mathbf{u}$  kääntyville matriiseille  $A_x = A + xI$ . Saadaan

$$\det(A_x + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \det(A_x) + \mathbf{v}^T \text{adj}(A_x)\mathbf{u}.$$

Otetaan raja-arvo yhtälön molemmilta puolilta erikseen, kun  $x$  lähestyy kohti nollaa positiiviselta puolelta. Yhtälön vasemmasta puolesta saadaan

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \det(A_x + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T).$$

Yhtälön oikeasta puolesta saadaan

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \det(A_x) + \mathbf{v}^T \text{adj}(A_x)\mathbf{u} = \det(A) + \mathbf{v}^T \text{adj}(A)\mathbf{u}.$$



Täten saadaan myös ei-kääntyvälle matriisille  $A$

$$\det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \det(A) + \mathbf{v}^T \text{adj}(A)\mathbf{u}.$$

□

Matriisin determinanttilemmasta seuraa seuraava tulos.

**Lemma 4.2.** Olkoon  $G$  graafi, jolla on solmujoukko  $V$  ja Laplacen matriisi  $L$ . Olkoon  $\mathbf{u} = (u_i)_{i \in V}$  ja  $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in V}$  sarakevektorit avaruudessa  $\mathbb{R}^V$ . Tällöin

$$\det(L + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \left( \sum_{i \in V} u_i \right) \cdot \left( \sum_{i \in V} v_i \right) \cdot \tau(G).$$

*Todistus.* Olkoon  $\mathbf{1}_{V,V}$  muotoa  $|V| \times |V|$  oleva ykkösmatriisi ja olkoon  $\mathbf{1}_V$  sarakevektori, joka on muotoa  $|V| \times 1$  ja sen alkiot ovat ykkösiä. Kirchhoffin matriisipuulauseen avulla jokainen kofaktori Laplacen matriisista  $L$  on  $\tau(G)$ , joten liittomatriisi  $\text{adj}(L)$  voidaan kirjoittaa muodossa  $\tau(G)\mathbf{1}_{V,V} = \tau(G)\mathbf{1}_V\mathbf{1}_V^T$ . Täten matriisin determinanttilemmän avulla saadaan

$$\begin{aligned} \det(L + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) &= \det(L) + \mathbf{v}^T \text{adj}(L)\mathbf{u} \\ &= 0 + \mathbf{v}^T (\tau(G)\mathbf{1}_V\mathbf{1}_V^T)\mathbf{u} \\ &= (\mathbf{v}^T \mathbf{1}_V)(\mathbf{1}_V^T \mathbf{u}) \cdot \tau(G) \\ &= \left( \sum_{i \in V} v_i \right) \cdot \left( \sum_{i \in V} u_i \right) \cdot \tau(G). \end{aligned}$$

□

Seuraavaksi esitellään, miten voidaan hyödyntää lemmaa 4.1 graafin virittävien puiden lukumäärän laskemiseen, kun on kyseessä täydellinen graafi, täydellinen kaksijakoinen graafi tai täydellinen  $k$ -jakoinen graafi. Täydellisessä graafissa jokaisen kahden eri solmun välissä on särmä. Lisäksi täydellisessä kaksijakoisessa ja  $k$ -jakoisessa graafissa kahden solmun välissä on särmä aina, kun solmut kuuluvat eri osajoukkoihin. Seuraavaa tulosta kutsutaan Cayleyn kaavaksi ja sitä on käytetty laajalti numeratiivisessa kombinatoriikassa.

**Lause 4.3.** Täydellisen graafin  $K_n$  virittävien puiden lukumäärä on  $n^{n-2}$ .

*Todistus.* Täydellisen graafin  $K_n$  Laplacen matriisilla  $L(K_n)$  on arvo  $n - 1$  jokaisella lävistäjäalkiolla ja  $-1$  muulloin. Täten  $L(K_n) + \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T = nI_n$ , missä  $I_n$  on muotoa  $n \times n$  oleva identiteettimatriisi. Lemman 4.2 nojalla saadaan

$$n^2 \tau(K_n) = \det(nI_n) = n^n.$$

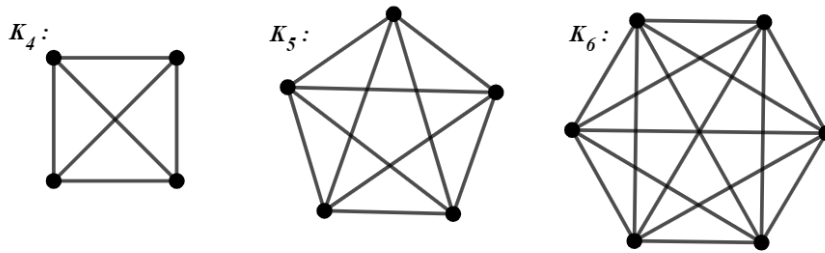
Tästä saadaan

$$\tau(K_n) = \frac{n^n}{n^2} = n^{n-2}.$$

□

Havainnollistetaan lauseen 4.3 käyttöä esimerkin avulla.

**Esimerkki 4.4.** Kuvassa 21 on täydelliset graafit  $K_4$ ,  $K_5$  ja  $K_6$ . Lasketaan täydellisten graafien  $K_4$ ,  $K_5$  ja  $K_6$  virittävien puiden lukumäärät.



Kuva 21: Täydelliset graafit  $K_4$ ,  $K_5$  ja  $K_6$ .

Täydellisen graafin  $K_4$  virittävien puiden määrä on lauseen 4.3 mukaan

$$\tau(K_4) = 4^{4-2} = 4^2 = 16.$$

Täydellisen graafin  $K_5$  virittävien puiden määrä on lauseen 4.3 mukaan

$$\tau(K_5) = 5^{5-2} = 5^3 = 125.$$

Täydellisen graafin  $K_6$  virittävien puiden määrä on lauseen 4.3 mukaan

$$\tau(K_6) = 6^{6-2} = 6^4 = 1296.$$

**Lause 4.5.** Täydellisen kaksijakoisen graafin  $K_{m,n}$  virittävien puiden lukumäärä on  $m^{n-1}n^{m-1}$ .

*Todistus.* Täydellisen kaksijakoisen graafin  $K_{m,n}$  solmujoukko on jaettu kahteen  $m$ - ja  $n$ -alkioiseen osajoukkoon  $V_1$  ja  $V_2$ . Laplacen matriisi graafista  $K_{m,n}$  on lohkomuodossa

$$L(K_{m,n}) = \begin{bmatrix} nI_m & -\mathbf{1}_{m,n} \\ -\mathbf{1}_{m,n} & mI_n \end{bmatrix}.$$

Olkoon  $\mathbf{1}_{V_1} \in \mathbb{R}^{m+n}$  indikaattorivektori solmuille joukossa  $V_1$ . Toisin sanoen jokainen alkio, mikä on indikoitu joukon  $V_1$  solmuille, on 1 ja kaikki muut ovat 0. Samoin tavoin olkoon  $\mathbf{1}_{V_2}$  idikaattorivektori joukon  $V_2$  solmuille. Tällöin  $L(K_{m,n}) + \mathbf{1}_{V_2}\mathbf{1}_{V_1}^T$  muodostaa yläkolmiolohkomatriisin

$$L(K_{m,n}) + \mathbf{1}_{V_2}\mathbf{1}_{V_1}^T = \begin{bmatrix} nI_m & -\mathbf{1}_{m,n} \\ \mathbf{0}_{m,n} & mI_n \end{bmatrix}.$$

Lemman 4.2 nojalla siitä saadaan

$$\begin{aligned} m \cdot n \cdot \tau(K_{m,n}) &= |V_1| \cdot |V_2| \cdot \tau(K_{m,n}) \\ &= \det(L(K_{m,n}) + \mathbf{1}_{V_2}\mathbf{1}_{V_1}^T) \\ &= \det(nI_m) \cdot \det(mI_n) \\ &= n^m \cdot m^n. \end{aligned}$$

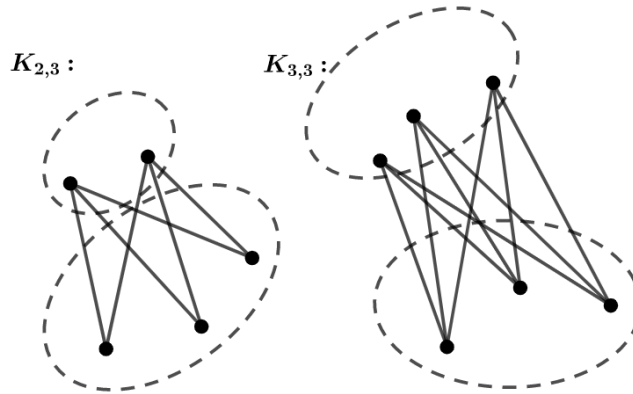
Tästä saadaan

$$\tau(K_{m,n}) = \frac{n^m \cdot m^n}{m \cdot n} = m^{n-1}n^{m-1}.$$

□

Havannoillistetaan lauseen 4.5 käyttöä esimerkin avulla.

**Esimerkki 4.6.** Kuvassa 22 on täydelliset kaksijakoiset graafit  $K_{2,3}$  ja  $K_{3,3}$ . Lasketaan täydellisten kaksijakoisten graafien  $K_{2,3}$  ja  $K_{3,3}$  virittävien puiden lukumäärät.



Kuva 22: Täydelliset kaksijakoiset graafit  $K_{2,3}$  ja  $K_{3,3}$ .

Täydellisen kaksijakoisen graafin  $K_{2,3}$  virittävien puiden määrä on lauseen 4.5 mukaan

$$\begin{aligned}\tau(K_{m,n}) &= m^{n-1}n^{m-1} \\ \tau(K_{2,3}) &= 2^{3-1}3^{2-1} \\ &= 4 \cdot 3 = 12.\end{aligned}$$

Täydellisen kaksijakoisen graafin  $K_{3,3}$  virittävien puiden määrä on lauseen 4.5 mukaan

$$\begin{aligned}\tau(K_{m,n}) &= m^{n-1}n^{m-1} \\ \tau(K_{3,3}) &= 3^{3-1}3^{3-1} \\ &= 9 \cdot 9 = 81.\end{aligned}$$

**Lause 4.7.** Olkoot  $n_1, \dots, n_k$  positiivisia kokonaislukuja ja olkoon  $n = n_1 + \dots + n_k$ . Täydellisen  $k$ -jakoisen graafin  $K_{n_1, \dots, n_k}$  virittävien puiden lukumäärä voidaan laskea kaavalla

$$\tau(K_{n_1, \dots, n_k}) = n^{k-2} \prod_{i=1}^k (n - n_i)^{n_i-1}.$$

*Todistus.* Olkoon  $K = K_{n_1, \dots, n_k}$  ja  $V = V(K) = \{v_1, \dots, v_n\}$  järjestetty niin, että  $v_1, \dots, v_{n_1}$  muodostavat joukon  $V_1$ , että  $v_{n_1+1}, \dots, v_{n_1+n_2}$  muodostavat joukon  $V_2$  ja niin edelleen. Tällöin Laplacen matriisi graafista  $K$  sisältää lävis-täjällä lohkot  $(n - n_i)I_n$ , missä  $i = 1, \dots, n$ , ja kaikki arvot ovat  $-1$  näiden

lohkojen ulkopuolella. Tämä tarkoittaa, että  $L(K) + \mathbf{1}_{V,V} = L(K) + \mathbf{1}_V \mathbf{1}_{V^T}$  on lohkolävistäjämatrissi, jonka lävistäjälohkot ovat muotoa  $(n - n_i)I_{n_i} + \mathbf{1}_{n_i} \mathbf{1}_{n_i}^T$ . Matriisin determinanttilemmän nojalla jokaiselle lävistäjälohkolle

$$\begin{aligned} \det((n - n_i)I_{n_i} + \mathbf{1}_{n_i} \mathbf{1}_{n_i}^T) &= \det((n - n_i)I_{n_i})(1 + \mathbf{1}_{n_i} \mathbf{1}_{n_i}^T ((n - n_i)I_{n_i})^{-1}) \\ &= (n - n_i)^{n_i} \left(1 + \mathbf{1}_{n_i} \mathbf{1}_{n_i}^T \frac{1}{n - n_i}\right) \\ &= (n - n_i)^{n_i} \left(1 + \frac{n_i}{n - n_i}\right) \\ &= (n - n_i)^{n_i - 1} \cdot n. \end{aligned}$$

Täten lemmän 4.2 nojalla saadaan

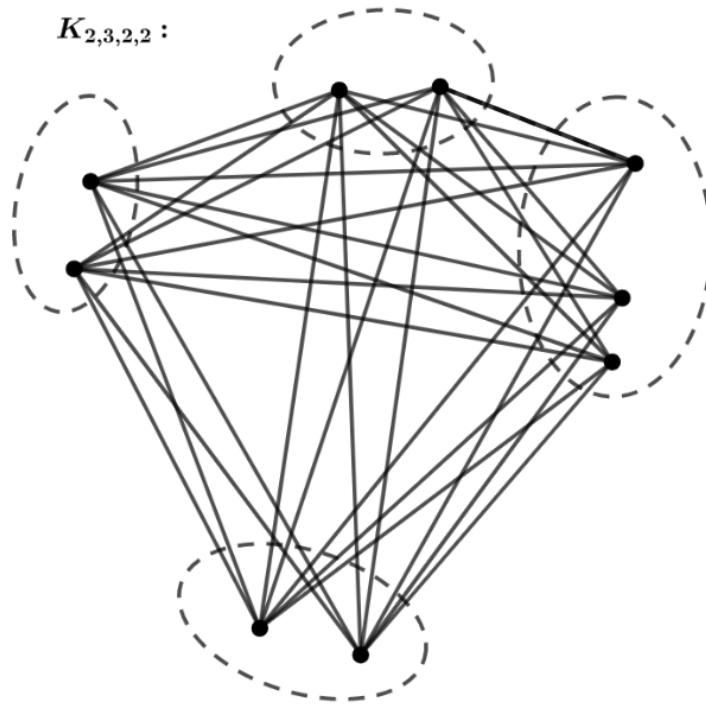
$$\begin{aligned} n^2 \tau(G) &= \det(L(K) + \mathbf{1}_V \mathbf{1}_{V^T}) \\ &= \prod_{i=1}^k \det((n - n_i)I_{n_i} + \mathbf{1}_{n_i} \mathbf{1}_{n_i}^T) \\ &= \prod_{i=1}^k (n - n_i)^{n_i - 1} \cdot n \\ &= n^k \prod_{i=1}^k (n - n_i)^{n_i - 1}. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 4.8 havainnollistaa, kuinka graafia voidaan hyödyntää mallintamaan matemaattista ongelmaa. Matemaattisten ongelmien ratkaisemista graafien avulla on käsitelty lähteessä [9].

**Esimerkki 4.8.** Graafien avulla voidaan mallintaa tietokoneverkkoja. Tällöin verkon koneet ovat graafin solmuja ja särmät ovat yhteyksiä koneiden välillä. On tärkeää, ettei yhden koneen yhteyden katkeaminen katkaise verkkoa. Selvitetään, miten monella eri tavalla kaikki verkon koneet voivat olla kytkettynä toisiinsa, kun tietokoneverkostoa mallintaa kuvan 23 täydellinen 4-jakoinen graafi.

Selvitetään, miten monella eri tavalla kaikki verkon koneet voivat olla kytkettynä toisiinsa eli lasketaan täydellisen 4-jakoisten graafin virittävien



Kuva 23: Täydellinen 4-jakoinen graafi  $K_{2,3,2,2}$ .

puiden lukumäärä. Täydellisen 4-jakoisen graafin  $K_{2,3,2,2}$  solmujen määrä on  $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2 + 3 + 2 + 2 = 9$  ja solmujen osajoukkoja on  $k = 4$ . Tällöin virittävien puiden määrä on lauseen 4.7 mukaan

$$\begin{aligned} \tau(K_{n_1, n_2, n_3, n_4}) &= n^{k-2} \prod_{i=1}^k (n - n_i)^{n_i-1} \\ \tau(K_{2,3,2,2}) &= 9^{4-2} \prod_{i=1}^4 (9 - n_i)^{n_i-1} \\ &= 81((9 - 2)^{2-1} + (9 - 3)^{3-1} + (9 - 2)^{2-1} + (9 - 2)^{2-1}) \\ &= 81(7 + 36 + 7 + 7) = 81 \cdot 57 = 4617. \end{aligned}$$

Tietokoneverkoston koneet voivat olla kytkettynä toisiinsa 4617:llä eri tavalla.

## 5 Yhteenveto

Tutkielman tarkoituksena on tutustuttaa lukija graafien peruskäsitteisiin, graafien virittäviin puihin ja graafien virittävien puiden lukumäärän laskemiseen. Graafiteoriaa voidaan soveltaa monen eri alan ongelmiin, kuten tietojenkäsittelytieteisiin. Graafit ovat erinomaisia työkaluja erilaisten matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen ja niiden avulla demonstroidaan, tutkitaan ja analysoidaan erilaisia tietoverkkoja.

Graafi koostuu äärellisestä joukosta solmuja ja niitä yhdistävistä särmistä. Multigraafi on graafi, jossa voi olla enemmän kuin yksi särmä kahden eri solmun välissä. Graafi on täydellinen, jos jokaisen kahden eri solmun välissä on särmä. Puu on syklitön ja yhtenäinen graafi ja puiden avulla voidaan havainnollistaa monia eri ilmiöitä, kuten molekyylien rakenteita. Graafin virittävä puu on puu, joka sisältää kaikki alkuperäisen graafin solmut. Virittävät puut ovat tärkeitä erilaisten verkkojen suunnittelussa, kuten sähkö-, liikenne- tai dataverkko.

Graafilla voi olla lukuisia virittäviä puita ja niiden kaikkien listaaminen on usein hyvin työlästä. Sen takia on keksitty erilaisia lineaarisen algebran keinoja, miten graafin virittävien puiden lukumäärän saa kätevämmiin selvitettyä. Kirchhoffin matriisipuulauseen avulla voidaan selvittää graafien virittävien puiden lukumäärä pelkistetystä Laplacen matriisista. Laplacen matriisissa lävistäjäalkioiden paikalle tulee graafin solmujen asteet ja muiden alkoiden paikalle  $-1$ , jos solmut  $i$  ja  $j$  ovat vierussolmuja eli niiden välillä on särmä, tai  $0$  muulloin. Kun Laplacen matriisista poistetaan jokin rivi ja jokin sarake, saadaan pelkistetty Laplacen matriisi.

Tässä tutkielmassa esitellään nopeampi tapa laskea täydellisten graafien virittävien puiden lukumäärä. Täydellisen graafin  $K_n$  virittävien puiden lukumäärä on  $n^{n-2}$ , täydellisen kaksijakoisen graafin  $K_{m,n}$  virittävien puiden lukumäärä on  $m^{n-1}n^{m-1}$  ja täydellisen  $k$ -jakoisen graafin  $K_{n_1, \dots, n_k}$  virittävien puiden lukumäärä voidaan laskea kaavalla

$$\tau(K_{n_1, \dots, n_k}) = n^{k-2} \prod_{i=1}^k (n - n_i)^{n_i-1}.$$

Tässä tutkielmassa aihe on rajattu määrittämään graafin virittävien puiden lukumäärä, ja sen takia tutkielmassa ei perehdytä eri tapoihin muodostaa graafista virittävä puu. Tulevissa tutkielmissa nämä kaksi aihetta voisi yhdistää. Tässä tutkielmassa on esitelty nopeammat tavat laskea virittävien puiden lukumäärä, kun kyseessä on täydelliset graafit. Tulevissa tutkielmissa voi laajentaa erilaisia algebran keinoja myös muihin graafeihin.



## 6 Kirjallisuutta

- [1] Koivisto, Pertti, Niemistö, Riitta: *Graafiteoria*, luentomoniste, 2017.
- [2] Williamson, David P.: *Bridging Continuous and Discrete Optimization*, Lecture 8, Sep 30, 2019.
- [3] Klee, Steven, Stamps, Matthew T.: *Linear Algebraic Techniques For Spanning Tree Enumeration*, The American Mathematical Monthly, 127:4, 297-307, Mar 12, 2019.
- [4] Salo, Jesse: *Lineaariset kongruenssiyhtälöryhmät*, LuK-tutkielma, Oulun yliopisto, 2016.
- [5] Moore, Cristopher, Mertens, Stephan: *The Nature of Computation*, Oxford University Press, August 2011.
- [6] Pesonen, Martti E.: *Diskreetti Matematiikka*, luentomoniste, 2010.
- [7] Lyons, Russell: *Asymptotic Enumeration of Spanning Trees*, Cambridge University Press, 2005.
- [8] Qvick, Pyry: *Graafiteorian oppimateriaalia*, Pro Gradu -tutkielma, Tampereen yliopisto, 2019.
- [9] Vallivaara, Visa: *Tietoturvallisten verkkojen suunnittelu graafiteorian avulla*, FM-tutkielma, Oulun yliopisto, 2019.
- [10] Smithers, Brown, Dayna: *Graph Theory for the Secondary School Classroom*, East Tennessee State University, 2005.