TURUN YLIOPISTO

Riemannin kuvauslause

Tommi Penttinen

Pro Gradu -tutkielma
Syyskuu 2022

Tarkastajat:
Prof. Peter Hästö
Prof. Matti Vuorinen

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tommi Penttinen: Riemannin kuvauslause
Pro Gradu -tutkielma, 31 s.
Matematiikka
Syyskuu 2022

Tutkielmassa todistetaan Riemannin kuvauslause, joka on yksi funktioteorian perustuloksista. Sen mukaan jokainen yhdesti yhtenäinen alue D voidaan kuvata yksikkökiekoksi konformikuvauksella, kunhan D ei ole koko kompleksitaso.

Esitettävä todistus edustaa niin sanottua Koebe–Montel-lähestymistapaa, jossa haluttu konformikuvaus saadaan erään funktiojonon raja-arvona.

Tutkielmaa varten kehitettiin uudenlaisia havainnekuvia, ja kuvien tuottamiseen käytetty ohjelmakoodi on asetettu julkisesti saataville. Oheistuotteena syntyi Youtuben ensimmäinen visualisaatiovideo Riemannin kuvauslauseen geometrisesta tulkinnasta.

Tutkielman päälähteenä on Bruce Palkan “An Introduction to Complex Function Theory”.

Asiasanat: funktioteoria, Paul Koebe, konformikuvaukset, Paul Montel, Tristan Needham, Bernhard Riemann, Riemannin kuvauslause, yhdesti yhtenäiset alueet, visualisointi.

Sisällys

1 Johdanto **1**
1.1 Tutkielman rakenteesta . . . 2

2 Merkintöjä ja aputuloksia **3**

3 Yhdesti yhtenäiset alueet **4**

4 Konformikuvaukset **6**
4.1 Konformikuvausten historiaa . . . 7
4.2 Yksikkökiekon Möbius-kuvaukset . . . 8

5 Normaalit perheet ja Montelin lause **11**
5.1 Yhtäjatkuvuus . . . 11
5.2 Normaali suppeneminen ja normaalit perheet . . . 12
5.3 Arzelà-Ascolin lause . . . 14
5.4 Montelin lause . . . 16

6 Rouchén lause ja lokaali kuvauslause **17**
6.1 Seurauksia konformikuvauksiin . . . 18
6.2 Seurauksia normaaliin suppenemiseen . . . 19

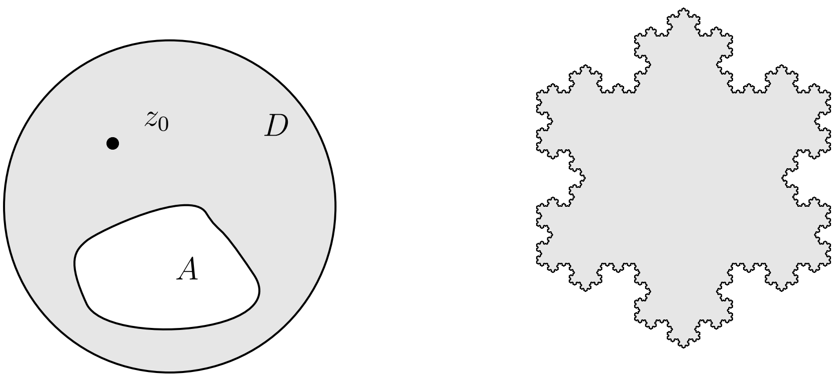
7 Riemannin kuvauslause **20**
7.1 Esivalmistelut . . . 21
7.2 Riemannin kuvauslause visuaalisesti . . . 25
7.3 Weierstrassin lause . . . 27
7.4 Riemannin kuvauslause . . . 28

Kirjallisuutta **29**

1 Johdanto

Eräs keskeinen käsite matematiikassa on ekvivalenssirelaatio. Esimerkiksi lukuteoriassa tarkastellaan lukujen jakojäännöstä tietyn jakajan suhteen ja geometriassa tutkitaan kuvioiden ekvivalenssia peilauksien, translaatioiden, kiertojen ja skaalauksien suhteen. Tässä tutkielmassa tarkastellaan, mitkä kompeksiavaruuden $\mathbb{C}$ osajoukot U ovat ekvivalentteja yksikkökiekon $\Delta = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \,\}$ kanssa, kun ekvivalenssia määrittää konformikuvauksen $f : U \to \Delta$ olemassaolo. Tällöin voidaan sanoa, että joukko U on *konformisti ekvivalentti* yksikkökiekon Δ kanssa. Konformikuvaukset ovat karkeasti kuvaillen holomorfikuvauksia, jotka "säilyttävät kulmat". Tällaisia kuvauksia ovat esimerkiksi Möbius-kuvaukset.

Tutkielmassa todistetaan Riemannin kuvauslause, jonka mukaan yksikkökiekon kanssa konformisti ekvivalentteja joukkoja ovat kaikki *yhdesti yhtenäiset alueet*, jotka eivät ole koko kompleksitaso. Yhdesti yhtenäiset alueet ovat epätarkasti kuvailtuna kompleksitason alueita, joissa "ei ole reikiä". Esimerkiksi kuvan 1 joukko D ei olisi



(a) Useasti yhtenäinen alue D, jossa kiekosta on poistettu suljettu joukko A ja piste z_0

(b) Yhdesti yhtenäinen alue, Kochin lumihiutale K

Kuva 1

yhdesti yhtenäinen, vaikka joukko A kuuluisikin siihen, sillä piste z_0 olisi edelleen "reikä" kyseisessä alueessa. Vastaavasti kuvan toinen joukko, Kochin lumihiutale K, on yhdesti yhtenäinen [1].

Tutkielmassa todistetaan Riemannin kuvauslauseesta seuraava versio:

Riemannin kuvauslause. *Olkoon D koko kompleksitasosta eriävä yhdesti yhtenäinen alue, z_0 sen piste ja Δ origokeskinen yksikkökiekko. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen alueessa D määritelty konformikuvaus f, jolla $f(D) = \Delta$, $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$.*

Tuloksen esitti ensimmäisenä saksalainen Bernhard Riemann (1826–1866) väitöskirjassaan vuonna 1851. Riemannin alkuperäinen todistus reunakäyrältään paloittain sileille alueille oli puutteellinen, mutta tulosta on silti pidetty sekä yhtenä 1800-luvun syvällisimmistä tuloksista että yhtenä funktioteorian tärkeimmistä tuloksista. Ensimmäisenä täsmällisenä todistuksena pidetään William Osgoodin (1864–1943) todistusta mielivaltaisille yhdesti yhtenäisille alueille vuodelta 1900. Riemannin kuvauslauseen parissa työskenteli vuosisadan alussa myös useita muita matemaatikkoja, joista Jeremy Gray nostaa erityisen merkittäväksi Paul Koeben (1882–1945). [2] Grayn käsittelemien todistuksen lisäksi tunnetaan myös uudempia todistuksia, kuten Greenen ja Kimin todistus [3] sekä McKeanin todistus [4]. Näistä ensimmäinen pyrkii noudattamaan Riemannin alkuperäistä ajatusta, ja jälkimmäisessä lause todistetaan Schwarz–Christoffel-kuvausten avulla.

Riemannin kuvauslauseen vahvuutta kuvastaa hyvin, että sen mukaan hyvin monimutkaisetkin alueet voidaan kuvata yksikkökiekoksi Δ ja vieläpä varsin "kiltillä" funktiolla. Näin ollen kaikkia yksikkökiekon ominaisuuksia, jotka säilyvät konformikuvauksessa, voidaan suoraan hyödyntää tarkastellessa mielivaltaista yhdesti yhtenäistä aluetta – esimerkiksi tarkasteltaessa Kochin lumihiutaletta K (ks. kuva 1), jonka reunan pituus ei ole äärellinen eikä reuna myöskään ole differentioituva missään pisteessä [1].

Riemannin kuvauslauseen tulos on myös vahvin mahdollinen. Olkoon U mielivaltainen kompleksitason osajoukko ja f konformikuvaus, joka kuvaa joukon U konformisesti yksikkökiekolle Δ. Tällöin funktiolla f on huomautuksen 4.2 nojalla konforminen käänteiskuvaus f^{-1}, jolloin joukko $U = f^{-1}(\Delta)$ on lauseen 6.6 nojalla yhdesti yhtenäinen alue. Joukko U myöskään voi olla koko kompleksitaso, sillä tällöin f olisi kokonainen, rajoitettu funktio ja Liouvillen lauseen [5, lause 13.3] nojalla vakiofunktio. Niinpä U on välttämättä koko kompleksitasosta eroava yhdesti yhtenäinen alue.

Tutkielmassa esitettävä todistus mukailee Koeben lähestymistapaa: todistuksessä hyödynnetään *normaaleja perheitä* sekä Paul Montelin (1876–1975) mukaan nimettyä *Montelin lausetta*. Tällöin Riemannin kuvauslauseen funktio on erään funktioperheen "raja-arvo".

1.1 Tutkielman rakenteesta

Tutkielman osiossa 2 käydään läpi esityksessä käytettävät merkinnät sekä käytettävän funktioteorian keskeisimmät tulokset. Tämän jälkeen osioissa 3 ja 4 määritellään Riemannin kuvauslauseen keskeisimmät käsitteet, yhdesti yhtenäiset alueet ja konformikuvaukset, sekä tarkastellaan niiden keskeisiä ominaisuuksia. Seuraavaksi osiossa 5 tarkastellaan *normaaleja* funktioperheitä ja todistetaan Montelin lause, joka antaa ehdot johdannossa mainitun raja-arvon olemassaololle. Osiossa 6 esitellään todistuksetta kaksi tärkeää aputulosta, joiden avulla todistetaan muutama tärkeä lisätulos konformikuvauksille ja normaaleille perheille. Lopuksi itse kuvauslause todistetaan osiossa 7: konstruoidaan "nouseva ja ylhäältä rajoitettu" funktiojono, jonka raja-arvo toteuttaa Riemannin kuvauslauseen ehdot.

Lukijalta oletetaan perustietoja metrisistä avaruuksista sekä hyvää funktioteorian perusteiden hallintaa. Edistyneemmät tulokset esitellään erikseen, ja niiden todistuksiin annetaan lähteet.

Tutkielman kuvat on luotu MATHCHA-ympäristössä ja MATPLOTLIB-kirjastolla. Jälkimmäisellä tehtyihin kuviin tarvittu koodi on avoimesti saatavilla GITHUB-palvelussa [6]. Kuvat pohjaavat erityisesti Tristan Needhamin ajatuksiin [7].

2 Merkintöjä ja aputuloksia

Esityksessä käytetään pääasiassa funktioteorian vakiintuneita merkintöjä. Laajennetun kompleksitason $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ merkintä on $\widehat{\mathbb{C}}$. Avointa, r-säteistä kiekkoa pisteen z_0 ympärillä merkitään $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$. Vastaava suljettu kiekko on $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$. Kaksi usein käytettyä erikoistapausta ovat avoin yksikkökiekko $\Delta = D(0, 1)$ ja suljettu yksikkökiekko $\overline{\Delta} = \overline{D}(0, 1)$. Suljetun kiekon $\overline{D}(z_0, r)$ reunaa merkitään $C(z_0, r) = \overline{D}(z_0, r) \backslash D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$. Lisäksi joukkoa sanotaan *puhkaistuksi*, jos siitä on poistettu yksi piste; puhkaistun r-säteisen avoimen kiekon $D'(z_0, r)$ tapauksessa sen keskipiste z_0. Avoin kiekko on eräs esimerkki *alueesta* eli kompleksitason avoimesta ja yhtenäisestä osajoukosta; mielivaltaisessa alueessa U määriteltyjen jatkuvien funktioiden avaruutta merkitään $C(U)$. *Paloittain sileällä polulla* taasen tarkoitetaan paloittain derivoituvaa kompleksitason käyrää, jonka osittaisderivaatat (reaali- ja imaginääriosan suhteen) eivät häviä yht'aikaa. Tätä merkitään monesti $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, jossa a ja b ovat reaalilukuja, $a < b$. Mikäli $a = b$, sanotaan polkua suljetuksi. Polkuintegraalia merkitään kirjoittamalla $\int_\gamma f(z)\, dz$, ja integraalia polun pituuden suhteen merkitään $\int_\gamma f(z)\ |dz|$. Mikäli polku γ on suljettu, käytetään suljetun polkuintegraalin merkintää $\oint_\gamma f(z)\, dz$. Mielivaltaista kompleksilogaritmin haaraa merkitään $\log z$, ja vaihekulmafunktion $\operatorname{Arg} z$ arvo on välillä $(\pi, \pi]$.

Yhdesti yhtenäisten joukkojen määrittelyn yhteydessä käsitellään suljetun ja paloittain sileän polun γ *kierroslukua* $n(\gamma, a)$ polulle kuulumattoman pisteen a ympäri. Kierrosluku $n(\gamma, a)$ on

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z - a}.$$

Lisäksi ilmaisu $z > 0$ kompleksiluvulle z tarkoittaa, että z on reaalinen ja positiivinen.

Esityksessä käytetään seuraavia funktioteorian perustuloksia:

Cauchyn integraalikaava. *Olkoon funktio f holomorfinen avoimessa joukossa U, z_0 joukon piste, $r > 0$ ja γ polku, joka kiertää ympyrän $C(z_0, r)$ tarkalleen kerran vastapäivään. Jos $\overline{D}(z_0, r)$ on joukon U osajoukko, niin tällöin jokaisessa joukon $D(z_0, r)$ pisteessä z*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)\, dw}{w - z}.$$

Cauchyn integraalilause. *Olkoon funktio f holomorfinen yhdesti yhtenäisessä alueessa D ja γ paloittain sileä polku samassa alueessa. Tällöin $\oint_\gamma f = 0$.*

Identtisyyslause. *Olkoot f ja g alueessa D holomorfisia funktioita ja S alueen D osajoukko, jolla on kasautumispiste. Jos $f(z) = g(z)$ kaikissa joukon S pisteissä, niin $f = g$ koko alueessa D.*

Maksimiperiaate. *Olkoon funktio f holomorfinen alueessa D, joukko K alueen D kompakti osajoukko sekä $M = \sup\{|f(z)| \mid z \in K\}$. Tällöin jollain joukon K reunapisteellä z_0 on $|f(z_0)| = M$.*

Schwarzin lemma. *Olkoon funktio f holomorfinen yksikkökiekossa $\Delta = D(0,1)$ ja kuva $f(\Delta)$ sen osajoukko. Oletetaan lisäksi, että $f(0) = 0$. Tällöin kiekossa $|f(z)| \leq |z|$ kaikissa kiekon D pisteissä ja $f'(0) \leq 1$. Lisäksi, mikäli $|f(z)| = |z|$ kiekossa D muualla kuin origossa tai $f'(0) = 1$, niin $f(z) = e^{i\theta} z$ jollain reaaliluvulla θ.*

Esityksessä tarvitaan kahdessa kohtaa myös hieman edistyneempää funktioteoriaa. Ensin osiossa 6 esitetään todistuksetta *Lokaali kuvauslause* ja *Rouchén lause*, ja myöhemmin osiossa 7.3 esitellään (vastaavasti todistuksetta) *Weierstrassin lause.*

3 Yhdesti yhtenäiset alueet

Johdannossa esiteltiin yhdesti yhtenäiset alueet kompleksiavaruuden alueina, joissa "ei ole reikiä". Määritellään ne nyt täsmällisesti.

Määritelmä 3.1. Kompleksilukuavaruuden $\mathbb{C}$ aluetta D sanotaan *yhdesti yhtenäiseksi*, jos jokaisella alueen D komplementin $\mathbb{C} \backslash D$ pisteellä w ja jokaisella alueen D paloittain sileällä polulla γ on $n(\gamma, w) = 0$.

Yhdesti yhtenäinen alue voitaisiin määritellä myös seuraavasti [8].

Määritelmä 3.1′. Alue D on yhdesti yhtenäinen jos ja vain jos $\widehat{\mathbb{C}} \backslash D$ on yhtenäinen.

Esimerkiksi koko kompleksitaso on $\mathbb{C}$ triviaalisti yhtenäinen kummankin määritelmän mukaan. Määritelmät voidaankin osoittaa ekvivalenteiksi [8, alaluku 4.4.2, lause 14], [9, lause IX.3.6].

Osoitetaan seuraavaksi, että yhdesti yhtenäisyys nivoo luontevasti yhteen sekä logaritmin että *primitiivin* olemassaolon.

Määritelmä 3.2. Olkoon f joukossa U määritelty funktio. Jos funktio F on differentioituva joukossa U ja sen jokaisessa pisteessä z on $F'(z) = f(z)$, sanotaan funktiota F funktion f primitiiviksi.

Lause 3.3. *Alue D on yhdesti yhtenäinen, jos ja vain jos jokaisella alueessa D määritellyllä holomorfifunktiolla on primitiivi tässä alueessa.*

Todistus. Oletetaan ensin, että D on yhdesti yhtenäinen. Olkoon z_0 ja z mielivaltaisia alueen D pisteitä, ja olkoon f holomorfinen alueessa D. Näin ollen f on jatkuva ja funktio

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\, dw$$

on tunnetusti differentioituva funktio, jolla $F' = f$. Osoitetaan, että funktion F arvo ei riipu integroimistiestä γ. Jos nyt γ_1 ja γ_2 ovat kaksi paloittain sileää polkua pisteestä z_0 pisteeseen z, niin polku $\gamma_1 - \gamma_2$ on alueen D suljettu ja paloittain sileä polku ja siispä Cauchyn integraalilauseen nojalla

$$\int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = \oint_{\gamma_1 - \gamma_2} f = 0$$

eli primitiivi on hyvin määritelty koko alueessa D.

Oletetaan nyt, että jokaisella alueessa D määritellyllä holomorfifunktiolla on siellä primiivi. Olkoon γ alueen D mielivaltainen suljettu ja paloittain sileä polku sekä a mikä tahansa piste alueen D komplementissa $\mathbb{C}\backslash D$. Funktio $f : D \to \mathbb{C}, f(z) = (z-a)^{-1}$ on tällöin holomorfinen alueessa D ja sillä on siis oletuksen mukaan siellä primitiivi. Siispä

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz = 0,$$

joten D on yhdesti yhtenäinen. □

Yhdesti yhtenäisiä alueita voidaan luonnehtia myös holomorfifunktioiden logaritmien olemassaololla. Tämä osoittautuu hyödylliseksi Riemannin kuvauslauseen todistuksessa, sillä logaritmin haaran avulla voidaan määritellä yksikäsitteinen neliöjuurifunktion haara. Funktiolta vaaditaan luonnollisesti häviämättömyyttä (nollakohdattomuutta) määrittelyalueessaan.

Lause 3.4. *Alue D on yhdesti yhtenäinen jos ja vain jos jokaiselle alueessa D häviämättömälle holomorfifunktiolle f on olemassa alueessa D määritelty logaritmin haara* $\log f(z)$*, joka on holomorfinen koko alueessa.*

Todistus. Oletetaan ensin, että D on yhdesti yhtenäinen ja f on siinä holomorfinen ja nollakohdaton funktio. Tällöin funktio $(f'(z)/f(z))$ on alueessa D määritelty holomorfifunktio, ja lauseen 3.3 nojalla sillä on hyvin määritelty primitiivi. Jos z_0 on alueen D, piste, niin $\int_{z_0}^{z}(f'(w)/f(w))\, dw$ on eräs tällainen primitiivi. Koska lisäksi funktiolla f ei ole nollakohtia alueessa D, on olemassa kompleksiluku a, jolla $e^a = f(z_0)$. Osoitetaan nyt, että funktio $g(z) = a + \int_{z_0}^{z}(f'(w)/f(w))\, dw$ on alueessa D määritelty holomorfinen logaritmin haara $\log f(z)$. Funktio g on selvästi holomorfinen, joten tarkastellaan funktion $e^{-g(z)}f(z)$ derivaattaa. Koska derivaatan ketjusäännön nojalla

$$D(e^{-g(z)}f(z)) = e^{-g(z)}(f'(z) - f(z)g'(z)) = e^{-g(z)}\left(f'(z) - f(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) = 0,$$

niin funktio $e^{-g(z)}f(z)$ vakio alueessa D. Pisteessä z_0 funktion arvo on $f(z_0)e^{-g(z)} = f(z_0)e^{-a} = 1$, joten $f(z) = e^{g(z)}$ alueessa D.

Olkoon nyt z joukon $\mathbb{C} \setminus D$ mielivaltainen piste ja $f : D \to \mathbb{C}, f(\zeta) = (\zeta - z)^{-1}$ sitä vastaava funktio, joka on holomorfinen ja häviämätön alueessa D. Oletuksen nojalla sitä vastaa ainakin yksi funktion f logaritmin haara g. Kuten lauseen 3.3 todistuksessa, olkoon nyt γ alueen D mielivaltainen suljettu ja paloittain sileä polku sekä a mikä tahansa piste alueen D komplementissa $\mathbb{C}\backslash D$. Koska logaritmin haaralle g on $g'(z) = (z-a)^{-1}$ alueessa D, niin

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Siispä D on yhdesti yhtenäinen. □

Kuten aiemmin todettiin koko kompleksitaso on selvästi yhdesti yhtenäinen. Vastaavasti yksikkökiekko on selvästi yhdesti yhtenäinen määritelmän $3.1'$ nojalla. Lisäksi esimerkiksi alue $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ on yhdesti yhtenäinen. Sen komplementti $\mathbb{C} \setminus D$ koostuu kahdesta erillisestä puoliavaruudesta $H_0 = \{z \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}$ ja $H_1 = \{z \mid \operatorname{Re} z \geq 1\}$. Komplementti laajennetun kompleksitason suhteen $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ on kuitenkin yhtenäinen, eli D on yhdesti yhtenäinen.

Riemannin kuvauslauseen yhteydessä käsitellään yhdesti yhtenäisiä alueita, jotka eroavat koko kompleksitasosta. Näiden luonnehtiminen on hieman helpompaa määritelmän $3.1'$ avulla. Olkoon D koko kompleksitasosta eroava yhdesti yhtenäinen alue ja b on piste sen komplementissa $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$. Tällöin pisteiden b ja ∞ on kuuluttava samaan yhtenäiseen komponenttiin. Tämä vastaa intuitiota: koska b ei saa olla osa "reikää", tulee pisteestä b päästä laajennetun kompleksitason äärettömyyteen. Tätä ajatusta vasten lauseen 3.4 tulos on ilmeinen, sillä logaritmin leikkauskäyrä (engl. *branch cut*) voidaan sijoittaa polulle, joka kulkee pisteestä 0 äärettömyyteen.

4 Konformikuvaukset

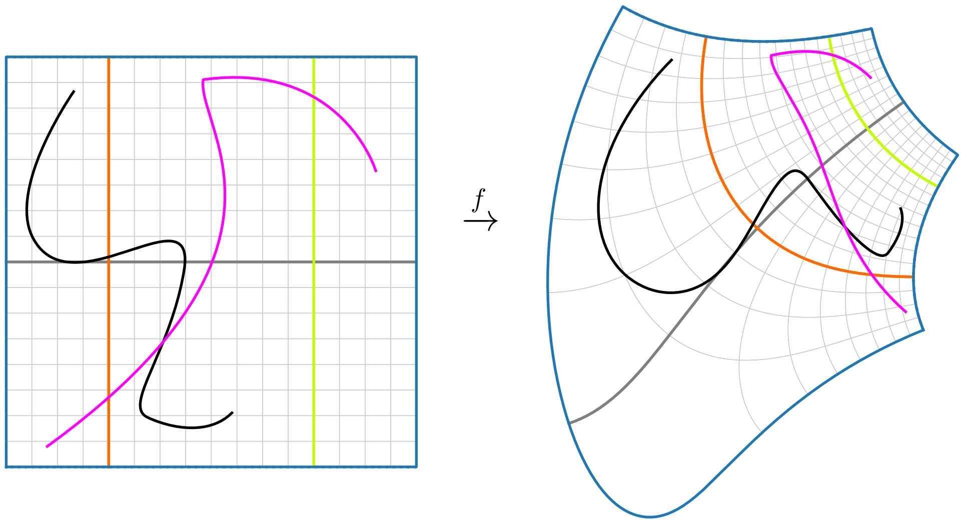
Tässä osiossa määritellään tarkasti konformikuvaukset sekä käsitellään erästä tärkeää konformikuvausten luokkaa, Möbius-kuvauksia. Johdannossa konformikuvaukset esiteltiin "kulmat säilyttävinä" kuvauksina. Jatkossa käytetään seuraavaa täsmällistä määritelmää.

Määritelmä 4.1. Joukossa U määritelty kuvaus f on konforminen, jos se on tässä joukossa holomorfinen injektio.

Kulmien säilyttämisen kautta määritelty konformikuvaus voidaan osoittaa ekvivalentiksi määritelmäksi tässä esitetyn kanssa [9, luku IX]. Esimerkiksi Palka määrittelee konformikuvauksen diffeomorfismiksi, joka säilyttää *käyräviivaiset* (engl. *curvilinear*) kulmat. Tällaisella kulmalla tarkoitetaan kahden sileän polun risteyspisteessä määriteltyjen tangenttien välistä suunnattuaa kulmaa, kun valitaan kulmista pienempi. Koska Möbius-kuvaus säilyttää polkujen väliset kulmat, säilyttää se erityisesti pysty- ja poikkiviivoista muodostetun ristikon kulmat. Tarkastelemalla tällaisen ristikon käyttäytymistä konformikuvauksessa onkin mahdollista havainnollistaa konformikuvauksen geometrista luonnetta (ks. kuva 2). Visualisaatiotapa on saanut inspiraationsa Needhamin teoksesta *Visual Complex Analysis* [7].

Huomautus 4.2. Tässä esitellyn määritelmän etuna on, että konformikuvauksen f käänteisfunktio f^{-1} voidaan suoraan todeta konformikuvaukseksi. Injektiivisen holomorfifunktion käänteisfunktio on nimittäin holomorfinen [9, lause VIII.3.11], [5, lause 16.7].

Huomautus 4.3. Konformikuvaukselle esiintyy kirjallisuudessa myös selkeästi erilainen määritelmä. Konformikuvaus saatetaan määritellä kuvauksena, jonka derivaatta ei häviä sen määrittelyalueessa (esim. [10], [11]). Lauseen 6.4 nojalla kaikki määritelmän 4.1 mukaiset konformikuvaukset täyttävät tämän ehdon, mutta esimerkiksi funktio $f(z) = e^z$ on konformikuvaus ainoastaan tämän heikomman määritelmän mukaan (huomautus 6.5). Lauseen 6.4 todistusta mukaillen voidaan kuitenkin osoittaa, että heikomman ehdon mukainen konformikuvaus on lokaalisti injektiivinen ja



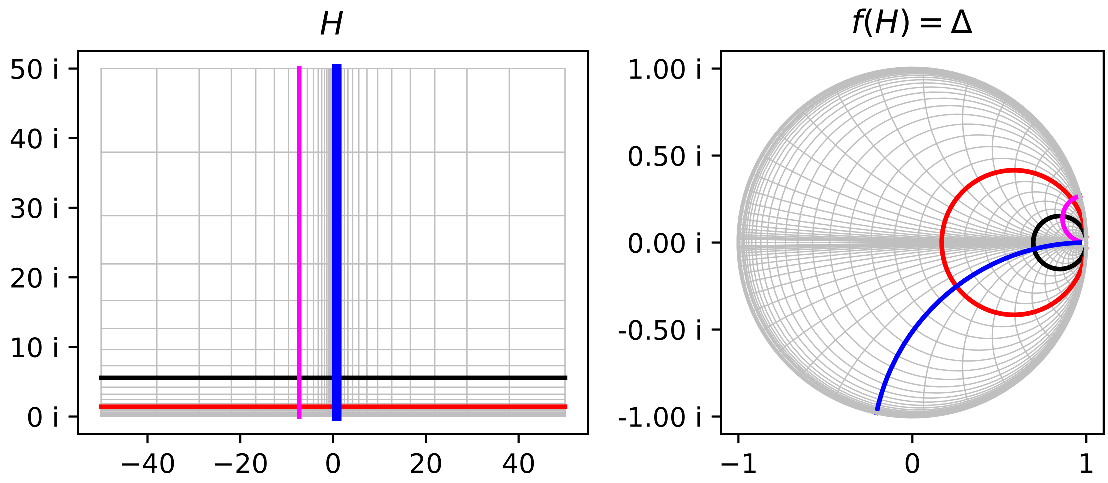
Kuva 2: Kaksi risteävää polkua neliön muotoisessa ruudukossa sekä polkujen ja ruudukon kuvat Möbius-kuvauksessa f. Ruudukon suorat kulmat säilyvät Möbius-kuvauksessa suorina.

siten lokaalisti konforminen myös määritelmän 4.1 mukaan. Mikäli halutaan käyttää molempia määritelmiä, voidaan vahvemman määritelmän mukaisia kuvauksia sanoa *biholomorfismeiksi* (esim. [12], [3]).

4.1 Konformikuvausten historiaa

Eräs esimerkki konformikuvauksista on *stereografinen projektio*, jonka avulla pallon pisteet voidaan projisoida tasolle. Tällaista tapaa laatia karttoja maapallosta käyttivät jo antiikin kreikkalaiset ja arvellaan, että myös muinaiset egyptiläiset olisivat käyttäneet sitä. [13] Kenties tunnetuin konformikuvaus onkin Mercatorin (sylinterikartta)projektio, jota monet nykyiset karttapalvelut käyttävät maapallon esittämiseen. Konformikuvauksilla on sovellusalueita myös fysiikassa, jossa esimerkiksi kahden levyn ja niiden leikkauskulmassa olevan pistevarauksen muodostaman systeemin aikaansaaman sähkökentän laskeminen voi olla hankalaa. Sopivalla konformikuvauksella päästään kuitenkin huomattavasti helpommin ratkaistavaan tilanteeseen. [14]

Tässä esityksessä ei syvennytä konformikuvausten matemaattiseen luonteeseen vaan pitäydytään yhdesti yhtenäisissä alueissa määritellyissä kuvauksissa. Konformikuvaukset voitaisiin määritellä myös useasti yhtenäisissä alueissa, mutta tarkasteluista tulisi monin verroin hankalampia [15]. Konformikuvauksien sijaan voitaisiin myös tarkastella yleisempiä *kvasikonformikuvauksia* (engl. *quasiconformal mapping*), joiden teorian synnyssä suomalaismatemaatikko Lars Ahlforsilla oli merkittävä osa. Hän käytti kvasikonformikuvauksia 1930-luvulla tutkiessaan Nevanlinnan holomorfisten funktioiden arvojenjakautumisteoriaa ja esitteli termin “kvasikonformikuvaus” vuonna 1935 [16].



Kuva 3: Poincarén puolitason $H = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$ ja muutaman esimerkki(puoli)suoran kuvat Möbius-kuvauksessa $f(z) = (z - i)/(z + i)$.

4.2 Yksikkökiekon Möbius-kuvaukset

Riemannin kuvauslauseen todistuksen kannalta tärkeitä konformikuvauksia ovat Möbius-kuvaukset. Ne on nimetty niitä tutkineen August Ferdinand Möbiuksen (1790–1868) mukaan.

Määritelmä 4.4. Olkoot a, b, c ja d kompleksilukuja, joilla

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Tällöin kuvausta $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

sanotaan *Möbius-kuvaukseksi*.

Voidaan osoittaa, että kukin Möbius-kuvaus voidaan ilmaista neljän kuvauksen – siirron, kierron, skaalauksen ja inversion – yhdistettynä kuvauksena [7]. Näistä operaatioista inversio on kenties hankalin hahmottaa geometrisesti, mutta sillekin on olemassa sangen luonnollinen ajattelutapa (ks. [17]).

Möbius-kuvaukset muodostavat ryhmän, jonka operaationa on kuvausten yhdistäminen ja jonka neutraalialkiona on identiteettikuvaus $((a, b, c, d) = (1, 0, 0, 1))$. Tätä ryhmää kutsutaan *projektiiviseksi lineaariseksi ryhmäksi* $PGL(2, \mathbb{C})$, ja sillä on paljon mielenkiintoisia ryhmäteoreettisia ominaisuuksia [18]. Möbius-kuvauksilla on myös läheinen suhde hyperboliseen geometriaan (ks. kuva 3)[19] ja suhteellisuusteorian Lorentz-muunnoksiin [7].

Tässä esityksessä Möbius-kuvauksia tarkastellaan lähinnä niiden geometrisen luonteen kautta. Siinä missä yleiset konformikuvaukset säilyttävät kulmat, Möbius-kuvaukset kuvaavat myös jokaisen suoran suoraksi tai ympyräksi ja jokaisen ympyrän suoraksi tai ympyräksi [7].

Tarkastellaan seuraavaksi niiden Möbius-kuvausten osajoukkoa, jotka kuvaavat yksikkökiekon yksikkökiekoksi.

Lause 4.5. *Kuvaus f kuvaa yksikkökiekon konformisesti itselleen silloin ja vain silloin, kun on olemassa reaaliluku θ ja ehdon $|c| < 1$ täyttävä kompleksiluku c, joilla*

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z+c}{1+\bar{c}z}. \tag{1}$$

Lisäksi kuvauksen f derivaatta on

$$f'(z) = e^{i\theta}\frac{1-|c|^2}{(\bar{c}z+1)^2}.$$

Todistus. Merkitään yksikkökiekkoa $\Delta = D(0,1)$.

Olkoon ensin f kaavan 1 mukainen kuvaus. Selvästi f voidaan määritellä yksikkökiekossa (samoin yksikkökiekossa määriteltyjen) funktioiden $g(z) = e^{i\theta}z$ ja $h(z) = (z+c)/(1+\bar{c}z)$ yhdistettynä kuvauksena. Kuvaus g on yksikkökiekon rotaatio origon suhteen ja selvästi kuvaa yksikkökiekon konformisesti itselleen. Kuvaus h on holomorfinen, sillä osoittajan ainut nollakohta $-1/\bar{c}$ sijaitsee kiekon Δ ulkopuolella. Koska lisäksi epäyhtälöt

$$\begin{aligned}
|h(z)| &< 1 \\
|z+c|^2 &< |1+\bar{c}z|^2 = 1 + (1,\bar{c}z) + (\bar{c}z,1) + |\bar{c}z|^2 = 1 + (c,z) + (z,c) + |\bar{c}z|^2 \\
|z|^2 + |c|^2 &< 1 + |\bar{c}z|^2 = 1 + |c|^2\,|z|^2 \\
0 &< (1-|c|^2)(1-|z|^2)
\end{aligned}$$

ovat keskenään ekvivalentteja ja $|c| < 1$, niin $|h(z)| < 1$, jos ja vain jos $|z| < 1$. Siispä $h(\Delta)$ on yksikkökiekon osajoukko. Määritellään nyt funktio $k(z) = (z-c)/(1-\bar{c}z)$. Funktion h mainitut ominaisuudet pätevät myös funktiolle k ja erityisesti myös $k(\Delta)$ on yksikkökiekon osajoukko. Lisäksi

$$(k \circ h)(z) = \frac{(z+c)/(1+\bar{c}z) - c}{1 - \bar{c}(z+c)/(1+\bar{c}z)} = \frac{z - |c|^2 z}{1-|c|^2} = z,$$

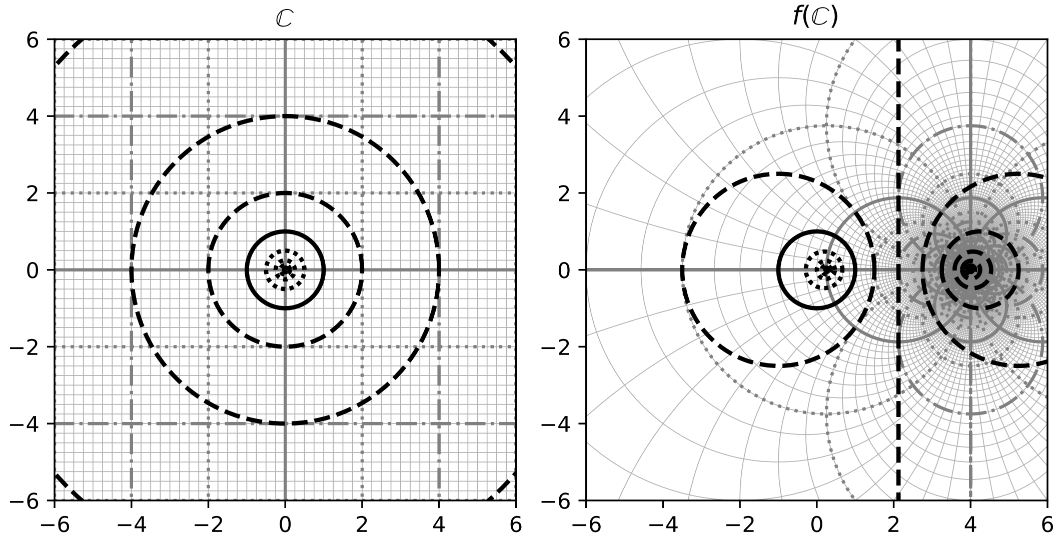
joten $k = h^{-1}$. Siispä sekä k että h ovat injektioita ja $h(\Delta) = \Delta$. Koska sekä g että h kuvaavat yksikkökiekon konformisesti itselleen, sama pätee myös yhdistettyyn kuvaukseen $f = g \circ h$.

Oletetaan kääntäen, että f on konformikuvaus yksikkökiekolta itselleen. Merkitään $c = -f^{-1}(0)$ ja $k(z) = (z-c)/(1-\bar{c}z)$, ja tarkastellaan kuvausta $g = f \circ k$. Vastaavasti kuin todistuksen alkupuolella todetaan, että g on yksikkökiekon itselleen kuvaava konformikuvaus. Lisäksi

$$g(0) = f(k(0)) = f(-c) = f(f^{-1}(0)) = 0,$$

joten Schwarzin lemman nojalla $|g'(0)| \leq 1$. Toisaalta myös $g^{-1} = k^{-1} \circ f^{-1} = h \circ f^{-1}$ on yksikkökiekon itselleen kuvaava ja origon säilyttävä konformikuvaus, joten vastaavasti $|(g^{-1})'(0)| = 1/|g'(0)| \leq 1$. Näin ollen $|g'(0)| \geq 1$ ja siispä $|g'(0)| = 1$. Tällöin Schwarzin lemman mukaan funktio g on rotaatio origon suhteen eli muotoa $g(z) = e^{i\theta}z$ jollakin reaaliluvulla θ. Täten funktiolla f on esitys halutussa muodossa $f = g \circ k^{-1} = g \circ h$.

Derivaatan muoto seuraa suoraan osamäärän derivoimissäännöstä. $\square$



Kuva 4: Kompleksitaso ja sen kuva funktiolla $f(z) = (z-1/4)(1-z/4)$. Yhtenäisellä viivalla on merkitty yksikköympyrä $C = C(0,1)$ ja sen kuva $f(C)$. Katkoviivalla on merkitty ympyrät $C(0, 2^k)$ ja niiden kuvat, kun k on luonnollinen luku. Vastaavasti pisteviivalla on merkitty ympyrät $C(0, 2^{-k})$ ja niiden kuvat.

Seuraus 4.6. *Kaikki yksikkökiekon konformisesti itselleen kuvaavat kuvaukset f ovat Möbius-kuvauksia.*

Todistus. Lauseen 4.5 nojalla jokainen tällainen kuvaus f on ilmaistavissa Möbius-kuvauksena reaaliluvun θ ja yksikkökiekkoon kuuluvan kompleksiluvun c avulla. Tällainen kuvaus f on määritelmän 4.4 antamaa muotoa ja koska

$$\det \begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{i\theta} c \\ e^{i\theta} \overline{c} & e^{i\theta} \end{pmatrix} = e^{i\theta}(1 - |c|^2) \neq 0,$$

on kuvaus f Möbius-kuvaus. □

Esimerkiksi Möbius-kuvaus

$$f(z) = \frac{z - 1/4}{1 - z/4}$$

on lauseen 4.5 mukainen kuvaus, joka kuvaa yksikkökiekon konformisesti itselleen. Yleisemmin se kuvaa ympyrät $C(0, r), r > 0$ suoraksi ja ympyröiksi

$$\begin{cases} x = \dfrac{17}{8}, & \text{kun } r = 4, \\ \left(x - \dfrac{4(r^2-1)}{r^2-16}\right)^2 + y^2 = \left(15\dfrac{r}{|r^2-16|}\right)^2 & \text{muulloin,} \end{cases}$$

kun $z = x + iy$. Tämä on helppo todeta kertomalla yhtälö $f(x+iy)\overline{f(x+iy)} = r^2$ auki ja täydentämällä se neliöksi. Kuva 4 havainnollistaa, kuinka kaikilla luonnollisilla luvuilla k ympyrät $f(C(0, 2^{2-k}))$ ja $f(C(0, 2^{2+k}))$ kuvautuvat symmetrisesti suoran $x = \frac{17}{8}$ suhteen.

Riemannin kuvauslauseen keskeiset käsitteet on nyt esitelty. Määritellään seuraavaksi *normaalit perheet* ja tarkastellaan niiden ominaisuuksia.

5 Normaalit perheet ja Montelin lause

Tässä osiossa käsitellään jatkuvien funktioiden perheen osaperheitä ja tarkastellaan, milloin funktioperheen jonolla on suppeneva osajono. Osion päätulos on Montelin lause 5.10.

5.1 Yhtäjatkuvuus

Tarkastellaan seuraavaksi funktioperheitä, joilla funktion arvojen vaihtelu on kunkin pisteen ympäristössä jokseenkin yhtä suurta. Tällaisia funktioperheitä sanotaan *yhtäjatkuviksi* (tai *tasajatkuviksi*, engl. *equicontinuous*).

Määritelmä 5.1. Joukossa U määriteltyjen funktioiden perhettä $\mathcal{F}$ sanotaan *yhtäjatkuvaksi pisteessä* $z_0 \in U$, jos jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta > 0$, jolle $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ jokaisella perheen $\mathcal{F}$ funktiolla f, kunhan vain $|z - z_0| < \delta$. Jos perhe $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva jokaisessa joukon U pisteessä, perhettä sanotaan tällöin *yhtäjatkuvaksi joukossa* U.

Erityisesti δ ei siis riipu funktion f valinnasta, mutta se saa vaihdella pisteen z_0 mukaan. Tarkastellaan esimerkiksi funktioperhettä $\mathcal{F} = \{ z^2 + c \mid c \in \mathbb{C} \}$. Kun $\epsilon > 0$, on perheen kaikilla funktioilla f lähellä pistettä z_0 voimassa

$$|f(z) - f(z_0)| = |z - z_0| \, |z + z_0| < |z - z_0| \, |z_0 + 1| < \epsilon,$$

kun $|z - z_0| < \epsilon / |z_0 + 1| = \delta(\epsilon)$. Koska rajaluku δ on riippumaton funktiosta f, niin perhe $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$. Sen sijaan esimerkiksi polynomien $f_n(z) = z^n$ perhe $\mathcal{G}$ ei ole yhtäjatkuva suljetun yksikkökiekon ulkopuolella. Olkoon nyt θ reaalilukuja ja z_0 kompleksiluku, jolla $|z_0| = r > 1$. Tarkastellaan nyt lukuja $(e^{i\theta n} z_0)^n$ eli lähestytään lukua $f_n(z_0)$ pitkin r-säteistä ympyrää. Tällöin $\left| f_n(e^{i\theta} z_0) - f_n(z_0) \right| = \left| e^{i\theta n} - 1 \right| r^n$. Erityisesti voidaan valita $\theta = 1/k$, kun k on kokonaisluku. Koska $\lim_{k \to -\infty} = \lim_{k \to \infty} = 0$ ja joukko $\{ k \in \mathbb{N} \mid \left| e^{i\theta k} - 1 \right| \geq 1 \}$ on tunnetusti ääretön, niin erotus $\left| f_n(e^{i\theta} z_0) - f_n(z_0) \right|$ on rajoittamaton kaikilla luvuilla z_0 ja $\theta > 0$. Näin ollen funktioperhe $\mathcal{G}$ ei ole yhtäjatkuva suljetun yksikkökiekon ulkopuolella. Samoin voidaan todeta, että perhe ei ole jatkuva yksikköympyrällä, kun sitä lähestytään sen ulkopuolelta. Perhe $\mathcal{G}$ on kuitenkin yhtäjatkuva avoimessa yksikkökiekossa. Olkoon z_0 yksikkökiekon kompleksiluku ja $\epsilon > 0$. Jos tällöin $\max\{|z|, |z_0|\} = r < 1$, niin soveltamalla kolmioepäyhtälöä

$$|z^n - z_0^n| = \left| z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-1} \right| |z - z_0| \leq n r^{n-1} |z - z_0| .$$

Yhtäjatkuvuuden toteamiseksi riittää nyt osoittaa, että kerroin nr^{n-1} on rajoitettu. Koska $r^{-1} > 1$, niin tarpeeksi suurilla indekseillä n on voimassa $n < r^{1-n/2}$. Tällöin $nr^{n-1} < r^{-n/2}$, joten kerroin nr^{n-1} lähestyy nollaa ja on siten rajoitettu. On siis olemassa äärellinen reaaliluku M, jolla $nr^{n-1} \leq M$ kaikilla indekseillä n. Siispä

$$|z^n - z_0^n| \leq M \, |z - z_0| ,$$

joten kun $|z - z_0| < \epsilon / M$, niin $|z^n - z_0^n| < M \cdot \epsilon / M = \epsilon$. Siispä perhe $\mathcal{G}$ on yhtäjatkuva avoimessa yksikkökiekossa.

5.2 Normaali suppeneminen ja normaalit perheet

Osoittautuu hyödylliseksi tarkastella, milloin funktiojonolla on suppeneva osajono. Tilannetta voidaan verrata yleiseen metriseen avaruuteen (X, d). Joukon X osajoukko K on tunnetusti kompakti tarkalleen silloin, kun jokaisella sen pisteiden äärettömällä jonolla on ääretön osajono, joka suppenee kohti joukon K pistettä. Vastaavasti kompleksitason (tai yleisemmin avaruuden $\mathbb{R}^n$) osajoukko K on kompakti silloin ja vain silloin, kun K on sekä suljettu että rajoitettu. Näin ollen, jos jono kompleksilukujono (z_n) on rajoitettu kompleksitasossa, sillä on osajono, joka suppenee erästä jonon kasautumispistettä kohti. Jatkossa tarkastellaan, onko jatkuvien funktioiden jonolle olemassa vastaavaa rajoittuneisuusehtoa, joka takaa suppenevan osajonon olemassaolon. Erityisesti ollaan kiinnostuneita *normaalisti suppenevista* osajonoista.

Huomautus 5.2. Tässä osiossa joukko U on Banachin avaruuden $(X, \|\cdot\|)$ osajoukko, ellei toisin todeta. Vastaavasti jatkossa oletetaan ilman eri mainintaa, että $\mathcal{F}$ on perheen $C(U)$ osaperhe.

Määritelmä 5.3. Joukossa U määriteltyjen (mielivaltaisten) funktioiden jono (f_n) *suppenee normaalisti* (joukossa U), jos se suppenee tasaisesti jokaisessa joukon U kompaktissa osajoukossa. Lisäksi avoimessa joukossa U määriteltyjen jatkuvien funktioiden joukon $C(U)$ osaperhettä $\mathcal{F}$ sanotaan *normaaliksi* (joukossa U), jos jokaisella perheen $\mathcal{F}$ jonolla (f_n) on ainakin yksi normaalisti suppeneva osajono.

Osoitetaan seuraavaksi, että perheen yhtäjatkuvuus on riittävä ehto pisteittäin suppenevan jonon normaalille suppenemiselle.

Lause 5.4. *Olkoon (f_n) jono perheessä $\mathcal{F}$, joka on yhtäjatkuva joukossa U. Jos tämä jono suppenee joukossa U pisteittäin, se suppenee siinä myös normaalisti.*

Todistus. Olkoon f jonon pisteittäinen raja-arvo joukossa U ja K joukon U mielivaltainen kompakti osajoukko. On osoitettava, että jono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa K. Todistetaan epäsuorasti, että (f_n) on joukossa K tasaisesti suppeneva Cauchyn jono ja tehdään vastaoletus: (f_n) ei suppene tasaisesti joukossa K. Tällöin (f_n) ei toteuta Cauchyn tasaisen suppenemisen kriteeriä, joten on olemassa kiinteä $\epsilon > 0$, jolle jokaista indeksiä k kohti on olemassa piste $z_k \in K$ ja indeksit $m_k > n_k \geq k$, joilla

$$|f_{m_k}(z_k) - f_{n_k}(z_k)| \geq \epsilon. \tag{2}$$

Näin saatu kompleksilukujono (z_n) on kompaktin joukon K jonona rajoitettu, joten sillä on ainakin yksi joukkoon K kuuluva kasautumispiste z_0. Osoitetaan vastaoletus vääräksi kolmessa osassa. Ensinnäkin perhe $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva pisteessä z_0, joten voidaan valita $\delta > 0$, jolle

$$|f_k(z) - f_k(z_0)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{3}$$

kaikilla indekseillä k, kun $|z - z_0| < \delta$. Toiseksi $m_k > n_k \geq k$, joten pisteittäisen suppenemisen nojalla

$$\lim_{k\to\infty} |f_{m_k}(z_0) - f_{n_k}(z_0)| = |f(z_0) - f(z_0)| = 0.$$

Siispä on olemassa rajaluku k_0, jota suuremmilla indekseillä k

$$|f_{m_k}(z_0) - f_{n_k}(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{4}$$

Kolmanneksi, koska (z_k) kasaantuu pisteessä z_0, voidaan valita ehdon $|z_{k_l} - z_0| < \delta$ täyttävä indeksi $k_l \geq k_0$. Jos nyt $m_k > n_k \geq k \geq k_l \geq k_0$, niin epäyhtälöiden (2), (3) ja (4) nojalla

$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq |f_{m_k}(z_k) - f_{n_k}(z_k)| \\
&= |f_{m_k}(z_k) - f_{m_k}(z_0) + f_{m_k}(z_0) - f_{n_k}(z_0) + f_{n_k}(z_0) - f_{n_k}(z_k)| \\
&\leq |f_{m_k}(z_k) - f_{m_k}(z_0)| + |f_{m_k}(z_0) - f_{n_k}(z_0)| + |f_{n_k}(z_0) - f_{n_k}(z_k)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Siispä vastaoletus oli väärä, joten (f_n) suppenee tasaisesti joukossa K ja siis normaalisti joukossa U. □

Edellinen lause on eräs tapa todeta tietyn aliperheen normaalius, mutta Riemannin kuvauslauseen todistamista varten sitä joudutaan vahventamaan. Lauseessa 5.4 vaadittiin pisteittäistä suppenemista koko tarkastelualueessa. Osoitetaan seuraavaksi, että riittää olettaa funktiojonon pistettäinen suppeneminen joukossa U *tiheille* joukoille.

Määritelmä 5.5. Avoimen joukon U osajoukkoa S sanotaan *tiheäksi joukossa* U, jos joukko U sisältyy joukon S sulkeumaan $\overline{S}$. Toisin sanoen joukon U jokaisella pisteellä z ja jokaisella reaaliluvulla $r > 0$ on $S \cap D(z, r) \neq \emptyset$.

Lemma 5.6. *Olkoon (f_n) jono perheessä $\mathcal{F}$, joka on yhtäjatkuva joukossa U. Olkoon lisäksi S tiheä joukossa U. Jos jono (f_n) suppenee pisteittäin joukossa S, se suppenee normaalisti joukossa U.*

Todistus. Lauseen 5.4 nojalla riittää osoittaa, että (f_n) suppenee pisteittäin joukossa U. Olkoon siis z joukon U mielivaltainen piste ja $\epsilon > 0$. Osoitetaan, että $(f_n(z))$ on Cauchyn jono. Perheen $\mathcal{F}$ yhtäjatkuvuuden nojalla voidaan valita $\delta > 0$, joka jokaisella indeksillä n täyttää ehdon $|f_n(w) - f_n(z)| < \epsilon/3$, kunhan $|w - z| < \delta$. Joukon S tiheyden nojalla voidaan valita piste ζ, joka täyttää ehdon $|\zeta - z| < \delta$. Oletuksen mukaan jono $(f_n(\zeta))$ suppenee, joten on olemassa vakio N, jolla kaikilla indekseillä $m > n \geq N$ on $|f_m(\zeta) - f_n(\zeta)| < \epsilon/3$. Näin ollen, kun $m > n \geq N$,

$$\begin{aligned}
|f_m(z) - f_n(z)| &\leq |f_m(z) - f_m(\zeta)| + |f_m(\zeta) - f_n(\zeta)| + |f_n(\zeta) - f_n(z)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

eli $(f_n(z))$ on Cauchyn jono joukon U mielivaltaisessa pisteessä z. Siispä (f_n) suppenee pisteittäin koko joukossa U, mikä lauseen 5.4 nojalla todistaa väitteen. □

5.3 Arzelà-Ascolin lause

Edellä esitetty lemma 5.6 antaa riittävän ehdon funktiojonon normaalille suppenemiselle. Sen avulla todistetaan Arzelà-Ascolin lause, joka antaa välttämättömän ja riittävän ehdon annetun perheen normaaliudelle. Määritellään tätä varten funktioperheen *pisteittäinen rajoittuneisuus.*

Määritelmä 5.7. Perhettä $\mathcal{F}$ sanotaan pisteittäin rajoitetuksi joukossa U, jos joukko $\{ f(z) \mid f \in \mathcal{F} \}$ on rajoitettu jokaisella joukon U pisteellä z.

Pisteittäinen rajoittuneisuus siis sallii kullekin joukon U pisteelle eri rajan, kunhan raja koskee perheen jokaista funktiota. Esimerkiksi origottomassa kompleksitasossa $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ voidaan määritellä funktioperhe $\mathcal{F} = \{ (zn)^{-1} \mid n \in \mathbb{N} \}$, jossa kullakin joukon $\mathbb{C}^*$ pisteellä z on $\max_{f \in \mathcal{F}} |f(z)| \leq |z^{-1}|$. Siispä perhe $\mathcal{F}$ on pisteittäin rajoitettu joukossa $\mathbb{C}^*$, vaikka yksikään perheen funktioista ei ole rajoitettu.

Seuraava lause voitaisiin todistaa myös mielivaltaiselle Banachin avaruudelle $(X, \| \cdot \|)$, mikäli joukolla X olisi numeroituva ja joukossa X tiheä osajoukko S. Tarkastellaan tässä kuitenkin kompleksiavaruuden osajoukkoja U.

Lause 5.8 (Arzelà-Ascolin lause)**.** *Perhe $\mathcal{F}$ on normaali kompleksiavaruuden osajoukossa U, jos ja vain jos se on sekä yhtäjatkuva että pisteittäin rajoitettu joukossa U.*

Todistus. Oletetaan ensin, että perhe $\mathcal{F}$ on sekä yhtäjatkuva että pisteittäin rajoitettu joukossa U ja olkoon (f_n) perheen $\mathcal{F}$ jono. On osoitettava, että tällä jonolla on normaalisti suppeneva osajono (f_{n_k}). Koska $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva, niin lemman 5.6 nojalla riittää osoittaa, että jono (f_{n_k}) suppenee pisteittäin joukossa, joka on tiheä joukossa U. Tunnetusti joukko $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ on tiheä kompleksitasossa, joten tarkastellaan joukkoa $\mathbb{Q}(i) \cap U$. Tämä joukko on numeroituva, joten olkoon $S = (z_n)$. Konstruoidaan haluttu osajono eräänlaisella diagonalisointimenetelmällä. Kompleksilukujono $(f_n(z_1))$ on perheen $\mathcal{F}$ pisteittäisen rajoittuneisuuden nojalla rajoitettu. Näin ollen on olemassa funktiojonon (f_n) osajono (f_n^1), jolla $(f_n^1(z_1))$ suppenee kohti jotain sen kasautumispistettä. Nyt puolestaan kompleksilukujono $(f_n^1(z_2))$ on rajoitettu, joten on olemassa funktiojonon (f_n^1) osajono (f_n^2), jolla $(f_n^2(z_2))$ suppenee. Koska lisäksi $(f_n^1(z_1))$ suppenee, myös sen osajono $(f_n^2(z_1))$ suppenee. Induktiivisesti voidaan todeta, että jos funktiojonolle (f_k) on voimassa $(f_n^k) \subset (f_n^{k-1}) \subset \ldots \subset (f_n^1)$, on jono $(f_n^k(z_{k+1})$, jälleen rajoitettu ja on olemassa funktiojonon (f_n^k) osajono (f_n^{k+1}), jolla jono $(f_n^{k+1}(z_{k+1}))$ suppenee ja myös $(f_n^{k+1}(z_r))$ suppenee kaikilla $r \leq k+1$. Näin syntyy suppenevat jonot

$$\begin{array}{ccccccc}
(f_n^1(z_1)) & \supset (f_n^2(z_1)) & \supset (f_n^3(z_1)) & \supset \ldots & \supset (f_n^k(z_1)) & \supset \ldots & \\
 & (f_n^2(z_2)) & \supset (f_n^3(z_2)) & \supset \ldots & \supset (f_n^k(z_2)) & \supset \ldots & \\
 & & (f_n^3(z_3)) & \supset \ldots & \supset (f_n^k(z_3)) & \supset \ldots & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & (f_n^k(z_k)) & \supset \ldots & \\
 & & & & & \ddots &
\end{array}$$

ja voidaan muodostaa jono $(f_n^n) = (f_k^k)_{k\in\mathbb{N}}$, joka muodostuu jonojen (f_n^k) alkioista indekseillä k. Tämän jonon kaikilla indekseillä k_0 jono $(f_k^k)_{k\geq k_0}$ on jonon $(f_n^{k_0})$ osajono, joten jono $(f_n^n(z_{k_0}))$ suppenee. Koska jokaiselle joukon $\mathbb{Q}(i)\cap U$ alkiolle w on olemassa indeksi k_1, jolla $w = z_{k_1}$, seuraa tästä, että jono (f_n^n) suppenee pisteittäin joukossa $\mathbb{Q}(i)\cap U$. Koska tämä joukko on tiheä joukossa U, väite seuraa lemmasta 5.6.

Oletetaan sitten, että perhe $\mathcal{F}$ on normaali. Osoitetaan ensin, että $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva tekemällä vastaoletus: on olemassa funktiojono (f_n), joka ei ole yhtäjatkuva joukon U pisteessä z_0. Tällöin on olemassa kiinteä $\epsilon > 0$, jolle kaikilla $\delta > 0$ on olemassa funktio f_k ja joukon U piste z_k, joilla $|z_0 - z_1| < \delta$ ja

$$|f_k(z_0) - f_k(z_1)| \geq \epsilon. \tag{5}$$

Erityisesti kutakin luonnollista lukua n ja arvoa $\delta = 1/n$ on olemassa tällainen piste z_n ja funktio f_n. Näin muodostuvalla funktiojonolla (f_n) on perheen $\mathcal{F}$ normaaliuden myötä normaalisti suppeneva osajono (f_{n_k}), joka suppenee tasaisesti kohti (jatkuvaa) funktiota f kaikissa joukon U kompakteissa osajoukoissa. Väite seuraa seuraavasta kolmesta havainnosta: Ensinnäkin, koska f on jatkuva pisteessä z_0, on olemassa $\delta > 0$, jolla sekä $K = \overline{D}(z_0, \delta)$ on joukon U osajoukko, että

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{6}$$

kaikissa joukon K pisteissä z. Toiseksi, koska (f_{n_k}) suppenee kohti funktiota f tasaisesti joukossa K, on olemassa indeksi k_0, jota suuremmilla indekseillä

$$|f_{n_k}(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{7}$$

kaikilla joukon K pisteillä z. Kolmanneksi z_{n_k} lähestyy pistettä z_0, joten on olemassa indeksi k_1, jota suuremmilla indekseillä piste z_{n_k} kuuluu joukkoon K. Näin ollen, kun $k \geq \max\{k_0, k_1\}$, voidaan epäyhtälöt 5, 6 ja 7 yhdistää. Tällöin

$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq |f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(z_0)| \\
&\leq |f_{n_k}(z_{n_k}) - f(z_{n_k})| + |f(z_{n_k}) - f(z_0)| + |f_{n_k}(z_0) - f(z_0)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,
\end{aligned}$$

joten vastaoletus oli väärä ja perhe $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva joukon U mielivaltaisessa pisteessä z_0 ja siten koko joukossa U.

Osoitetaan sitten, että normaali perhe $\mathcal{F}$ on pisteittäin rajoitettu. Tehdään vastaoletus, että $\mathcal{F}$ ei ole pisteittäin rajoitettu joukon U pisteessä z_0. Tällöin jokaiselle luonnolliselle luvulle n on olemassa perheen $\mathcal{F}$ funktio f_n, jolla $|f_n(z_0)| \geq n$. Näin syntyneen jonon (f_n) jokainen osajono hajaantuu, joten sillä ei voi olla suppenevaa osajonoa. Tämä on ristiriidassa perheen normaaliuden kanssa, joten $\mathcal{F}$ on pisteittäin rajoitettu. Siispä normaali perhe $\mathcal{F}$ on sekä yhtäjatkuva että pisteittäin rajoitettu.

$\square$

5.4 Montelin lause

Arzelà-Ascolin lause antoi välttämättömän ja riittävän normaaliuskriteerin jatkuvien funktioiden perheille. Rajaamalla tarkastelu holomorfisten funktioiden perheisiin ilmenee, että tällöin lisäehdoksi riittää funktioperheen *lokaali rajoittuneisuus*. Sen avulla todistetaan osion päätulos *Montelin lause*.

Määritelmä 5.9. Perhettä $\mathcal{F}$ sanotaan lokaalisti rajoitetuksi joukossa U, jos jokaista joukon U kompaktia osajoukkoa K kohti on olemassa vakio $m = m(K)$, jolla $|f(z)| < m$ jokaisessa pisteessä $z \in K$ jokaisella kuvauksella $f \in \mathcal{F}$.

Erityisesti siis jokainen lokaalisti rajoitettu perhe on määritelmän 5.7 mukaan myös pisteittäin rajoitettu, mutta implikaatio toiseen suuntaan ei ole yleisesti voimassa. Tarkastellaan esimerkiksi kunnan $\mathbb{Q}(i)$ alkioiden esitystä $q = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}i$, jossa a, b, c ja d ovat kokonaislukuja. Esitys on yksikäsitteinen, mikäli c ja d ovat positiivisia kokonaislukuja $(a, b) = (c, d) = 1$. Erityisesti siis nimittäjä on 1, mikäli osoittaja on 0. Näin ollen funktio $N(q) = b$ on hyvin määritelty ja laajennettavissa koko kompleksitasossa määritellyiksi funktioiksi

$$f_n(z) = \begin{cases} N(z)/n, & \text{kun } z \text{ kuuluu kuntaan } \mathbb{Q}(i) \text{ ja} \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

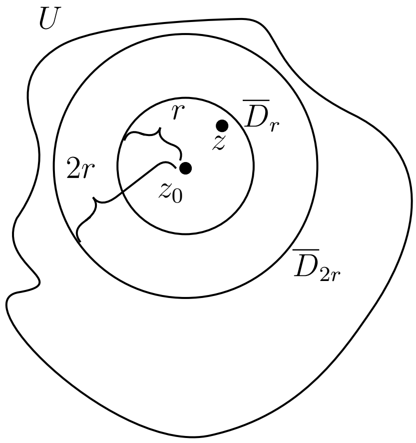
Tällainen perhe $\mathcal{F} = \{f_n\}$ on selvästi pisteittäin rajoitettu, mutta saa mielivaltaisen suuria arvoja jokaisella kompleksitason suljetulla kiekolla, joten se ei ole lokaalisti rajoitettu. Suurten arvojen olemassaolon voi helposti todeta tarkastelemalla reaaliosan katkaistua binääriesitystä: kun $\operatorname{Re} z = \sum_{k=-r}^{m} b_k 2^k$ ja $b_{-r} = b_m = 1$, niin laventamalla binääriesitys saadaan

$$z = \frac{1 + \sum_{k=1}^{r+m} b_{k-r} 2^k}{2^r} + \operatorname{Im} z.$$

Nyt reaaliosan osoittaja on kokonaisluku ja koska $b_m = 1$, se on myöskin pariton. Täten $N(q) = 2^r$. Näin ollen perhe $\mathcal{F}$ ei ole lokaalisti rajoitettu, vaikka se onkin pisteittäin rajoitettu. Osoitetaan seuraavaksi, että lokaali rajoittuneisuus yhdessä perheen holomorfisuuden kanssa riittää perheen normaaliudelle.

Lause 5.10 (Montelin lause). *Olkoon $\mathcal{F}$ perhe funktioita, jotka ovat holomorfisia avoimessa joukossa U. Jos $\mathcal{F}$ on lokaalisti rajoitettu joukossa U, se on tässä joukossa myös normaali.*

Todistus. Perhe $\mathcal{F}$ on selvästi pisteittäin rajoitettu, joten Arzelà-Ascolin lauseen nojalla riittää osoittaa, että $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva joukossa U. Olkoon siis z_0 joukon U piste ja suljettu kiekko $\overline{D}_{2r} = \overline{D}(z_0, 2r)$ joukon U osajoukko jollain luvulla r (ks. kuva 5). Perheen lokaalin rajoittuneisuuden nojalla on olemassa luku $m = m(K) > 0$, jolla $|f(w)| \leq m$ kaikilla perheen $\mathcal{F}$ funktioilla f ja joukon $\overline{D}_{2r}$ pisteillä w. Olkoon nyt γ polku, joka kiertää reunan $C(z_0, 2r)$ kerran vastapäivään, ja sovelletaan Cauchyn integraalikaavaa perheen $\mathcal{F}$ mielivaltaiseen funktioon f ja joukon $\overline{D}_r =$



Kuva 5: Piste z_0 ja z sekä kiekot $\overline{D}_r$ ja $\overline{D}_{2r}$ Montelin lauseen todistuksessa

$\overline{D}(z_0, r)$ pisteille z ja z_0. Tällöin

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)\,dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)\,dw}{w-z_0} \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_\gamma \frac{(w-z_0)f(w) - f(w)(w-z)}{(w-z)(w-z_0)}\,dw \right| \\
&= \frac{|z-z_0|}{2\pi} \left| \oint_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w-z)(w-z_0)} \right| \\
&\leq \frac{|z-z_0|}{2\pi} \oint_\gamma \frac{|f(w)|\,|dw|}{|w-z|\,|w-z_0|}.
\end{aligned}$$

Koska nyt $|w - z_0| = 2r$, jokaisella joukon $\overline{D}_r$ pisteellä z on $|w - z| \geq r$. Kun lisäksi arvioidaan integraali ylöspäin integroimistien pituuden ja integrandin maksimin tuloksi, voidaan edellistä arvioita parantaa edelleen:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{|z-z_0|}{2\pi} \oint_\gamma \frac{m\,|dw|}{r \cdot 2r} \leq \frac{m\,|z-z_0|}{r}.$$

Jos nyt $\epsilon > 0$, niin valitsemalla $\delta = \min\{r, \epsilon r/m\}$ on jokaisella perheen $\mathcal{F}$ funktiolla f voimassa $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, kunhan $|z - z_0| < \delta$. Koska $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva joukon U mielivaltaisessa pisteessä z_0, se on yhtäjatkuva joukossa U ja siis Arzelà-Ascolin lauseen nojalla normaali. □

Montelin lauseen tulos on erityisen hyödyllinen Riemannin kuvauslauseen todistuksen kannalta, sillä tuolloin tarkastellaan holomorfifunktioita, joiden kuvajoukko on yksikkökiekon osajoukko. Koska kaikki tällaiset funktiot ovat ilmeisesti rajoitettuja, ne muodostavat normaalin perheen.

6 Rouchén lause ja lokaali kuvauslause

Ennen Riemannin kuvauslauseeseen paneutumista todistetaan vielä muutamia ominaisuuksia konformikuvauksille ja yhdesti yhtenäisille alueille. Tätä varten esitellään todistuksitta *Rouchén lause* ja siihen nojaava *lokaali kuvauslause* (engl. *local mapping theorem* tai *branch covering principle*).

Lause 6.1 (Rouchén lause)**.** *Olkoon γ suljettu polku yhdesti yhtenäisessä alueessa D sekä f ja g holomorfifunktioita alueessa D. Jos $|g(z)| < |f(z)|$ polun γ jokaisessa pisteessä z, niin funktioilla $f + g$ ja g on yhtä monta nollakohtaa polun γ sisäpuolella (pistejoukossa, jossa $n(\gamma, z) \neq 0$). Jokainen nollakohta lasketaan kertalukunsa mukaan.*

Todistus. [5, Lause 15.14], [20, lause III.7.7]. □

Seuraavan lokaalin kuvauslauseen ϵ-ehto on sikäli mielenkiintoinen, että luku ϵ rajoittaa funktion lähtöjoukkoa maalijoukon sijaan.

Lause 6.2 (Lokaali kuvauslause)**.** *Olkoon f holomorfifunktio, joka ei ole vakio jossain pisteen z_0 ympäristössä. Oletetaan, että $f(z_0) = w_0$ ja että funktiolla $f - w_0$ on kertalukua n oleva nollakohta pisteessä z_0. Tällöin, jos $\epsilon > 0$ on riittävän pieni, on olemassa luku $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, jolla jokaista joukon $D'(w_0, \delta)$ pistettä w kohti voidaan joukosta $D'(z_0, \epsilon)$ valita n eri pistettä $z_1, \ldots, z_n$, jotka toteuttavat ehdon $f(z_j) = w$, kun $j = 1, \ldots, n$. Funktion $f - w$ nollakohdat pisteissä z_j ovat yksinkertaisia.*

Todistus. [9, Lause 3.7, luku VIII]. □

6.1 Seurauksia konformikuvauksiin

Lokaalin kuvauslauseen mukaan holomorfifunktio f, jolla on kertalukua n oleva nollakohta pisteessä z_0, käyttäytyy pisteen z_0 ympäristössä "lokaalisti" kuten funktio $(z - z_0)^n$. Toisin sanoen tarpeeksi pienelle pisteen z_0 ympäristölle $D(z_0, \epsilon)$ määräytyy pisteen $f(z_0) = w_0$ ympäristö $D'(w_0, \delta)$, jonka jokaisella pisteellä on n eri alkukuvaa alkuperäisessä ympäristössä $D(z_0, \epsilon)$. Erityisesti siis $D(w_0, \delta) \subset f(D(z_0, \epsilon))$, joten funktio f kuvaa avoimet joukot avoimiksi, kunhan f vain ei ole vakio alueessa D. Tätä tulosta kutsutaan *avoimen kuvauksen lauseeksi* (engl. *Open Mapping Theorem*).

Lause 6.3 (Avoimen kuvauksen lause)**.** *Jos holomorfikuvaus f ei ole vakio kompleksitason alueessa D, niin se kuvaa avoimet joukot avoimiksi. Erityisesti joukko $f(D)$ on alue.*

Todistus. Olkoon U joukon D avoin osajoukko, z_0 joukon U piste ja $w_0 = f(z_0)$. On osoitettava, että on olemassa $s > 0$, jolla $D(w_0, s)$ on joukon $f(U)$ osajoukko.

Koska kuvaus f ei ole vakio, niin ehdon $f'(z) = 0$ tai $f(z) = w_0$ täyttävät pisteet eivät voi kasautua alueessa D eivätkä siten myöskään pisteen z_0 ympäristössä. Näin ollen on olemassa $r > 0$, jolla joukon $D(z_0, r)$ kaikilla pisteillä z sekä $f'(z) \neq 0$ että $f(z) \neq w_0$. Näin ollen lokaalin kuvauslauseen perusteella on olemassa $\delta = \delta(r) > 0$, jolla $D(w_0, \delta) \subset f(U)$. Näin ollen $f(U)$ on avoin.

Vastaavasti myös $f(D)$ on avoin ja funktion f jatkuvuuden myötä se on yhtenäinen. Toisin sanoen $f(D)$ on alue. □

Lokaalin kuvauslauseen avulla saadaan myös seuraava tärkeä tulos injektiivisen holomorfikuvauksen eli konformikuvauksen derivaatasta.

Lause 6.4. *Olkoon f alueesssa D määritelty konformikuvaus. Tällöin $f'(z) \neq 0$ jokaisessa joukon D pisteessä z.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että $f'(z_0) = 0$ jossain joukon D pisteessä z_0. Injektiivisyyden nojalla f ei ole vakio, joten $f(z_0) = w_0$ vähintään kertaluvulla kaksi. Näin ollen lokaalin kuvauslauseen nojalla pisteellä w_0 on ympäristö, jonka jokaisella alkiolla on ainakin kaksi alkukuvaa alueessa D, mikä on ristiriidassa injektiivisyysoletuksen kanssa. □

Huomautus 6.5. Lauseen 6.4 käänteinen tulos ei ole voimassa, sillä esimerkiksi funktion $f(z) = e^z$ derivaatta ei häviä missään pisteessä. Funktio e^z ei kuitenkaan ole injektio, sillä $f(2\pi i) = e^{2\pi i} = 1 = e^0 = f(0)$. Lokaalin kuvauslauseen mukaan f on kuitenkin lokaalisti injektiivinen.

Seuraava lause sallii konformikuvauksien yhdistämisen siten, että yhdesti yhtenäisyys säilyy.

Lause 6.6. *Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ konformikuvaus. Jos D on yhdesti yhtenäinen alue, myös $f(D)$ on yhdesti yhtenäinen alue.*

Todistus. Jos $f(D) = \mathbb{C}$, väite on triviaali. Oletetaan siis, että $D_0 = f(D) \neq \mathbb{C}$ ja että piste w kuuluu alueen D_0 komplementtiin $\mathbb{C} \setminus D_0$. Koska f ei injektiivisyytensä myötä ole vakio, niin D_0 on alue avoimen kuvauslauseen 6.3 nojalla. Näin ollen riittää todistaa, että alue D_0 on yhdesti yhtenäinen.

Olkoon w piste alueen D_0 komplementissa $\mathbb{C} \setminus D_0$ ja $\beta : [a, b] \to D_0$ suljettu ja paloittain sileä polku. On osoitettava, että tällöin $n(\beta, w) = 0$. Määritellään tätä varten polku $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma = f^{-1} \circ \beta$, jolloin $\beta(t) = f(\gamma(t))$. Tällöin γ on suljettu ja paloittain sileä polku alueessa D. Koska w ei kuulu alueeseen D_0, funktio $f(z)'/(f(z) - w)$ holomorfinen alueessa D ja Cauchyn integraalilauseen nojalla

$$
\begin{aligned}
0 = \oint_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z) - w} &= \oint_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt}{f(\gamma(t)) - w} = \oint_a^b \frac{\beta'(t)dt}{\beta(t) - w} \\
&= \oint_\beta \frac{d\zeta}{\zeta - w} = n(\beta, w)2\pi i.
\end{aligned}
$$

Täten $n(\beta, w) = 0$. □

Tätä tulosta käytetään useasti Riemannin kuvauslauseen todistuksen yhteydessä. Kun haluttuja kuvauksia rakennetaan yhdistettyinä kuvauksina, voidaan jokaisessa vaiheessa hyödyntää osion 3 antamia ominaisuuksia.

Käydään lopuksi läpi muutamia Rouchén lauseen ja lokaalin kuvauslauseen sovelluksia osiossa 5.2 esiteltyyn normaaliin suppenemiseen.

6.2 Seurauksia normaaliin suppenemiseen

Seuraava tulos tunnetaan *Hurwitzin lauseena.* Adolf Hurwitz (1859–1919) oli saksalainen matemaatikko, jonka mukaan nimettyjä tuloksia on myös muun muassa lukuteoriassa ja kompositioalgebrassa. Tässä esitettävä lause luonnehtii normaalisti suppenevan jonon (määritelmä 5.3) rajafunktiota, jos jonon funktiot ovat nollakohdattomia.

Lause 6.7 (Hurwitzin lause)**.** *Olkoon D alue ja (f_n) alueessa D holomorfisista ja nollakohdattomista funktioista koostuva jono, joka suppenee alueessa D normaalisti kohti funktiota f. Tällöin funktiolla f joko ei ole nollakohtaa alueessa D tai f on siinä identtisesti nolla.*

Todistus. Normaalin suppenemisen nojalla funktio f on holomorfinen alueen D jokaisessa kompaktissa osajoukossa K ja siis koko alueessa D. Oletetaan nyt, että $f(z_0) = 0$ jossakin alueen D pisteessä z_0 ja osoitetaan, että tällöin f on identtisesti nolla alueessa D. Oletetaan, että f ei ole identtisesti nolla. Tällöin pisteen z_0 on oltava funktion f eristetty nollakohta; muutoinhan f olisi identtisesti nolla holomorfifunktioiden identtisyyslauseen nojalla. Siispä on olemassa $r > 0$ ja alueen D osajoukko $\overline{D} = \overline{D}(z_0, r)$, jonka reunan $C = C(z_0, r)$ pisteissä z on $f(z) \neq 0$. Koska reuna C on kompakti, funktion f jatkuvuuden nojalla $\min_{z \in C}\{|f(z)|\} = \epsilon$ on äärellinen ja erityisesti $\epsilon > 0$. Koska f_n suppenee kohti funktiota f tasaisesti kompaktissa joukossa C, on olemassa indeksi n, jolla $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \leq |f(z)|$ jokaisessa reunan C pisteessä z. Näin ollen Rouchén lauseen nojalla funktioilla $f + (f_n - f) = f_n$ ja f on yhtä monta nollakohtaa kiekossa $D(z_0, r)$. Siispä myös funktiolla on siinä ainakin yksi nollakohta, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. □

Hurwitzin lauseen avulla voidaan osoittaa seuraava normaalisti suppenevia jonoja koskeva tulos.

Lause 6.8. *Olkoon D alue ja (f_n) jono alueessa D määriteltyjä holomorfisia ja injektiivisiä funktioita. Jos jono (f_n) suppenee normaalisti kohti funktiota f alueessa D, niin f on joko injektio tai vakio alueessa D.*

Todistus. Kuten Hurwitzin lauseen todistuksessa, voidaan nytkin todeta, että rajafunktio f on holomorfinen. Osoitetaan, että jos f ei ole vakio, se on injektio alueessa D. Olkoon z_0 alueen D mielivaltainen piste. Osoitetaan, että jos $z \neq z_0$, niin $f(z) \neq f(z_0)$. Määritellään alueessa $D_0 = D \setminus \{z_0\}$ funktiot $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$. Koska f_n on injektio alueessa D, ei funktioilla g_n ole nollakohtia alueessa D_0. Luonnollisestikin g_n suppenee normaalisti kohti funktiota $g(z) = f(z) - f(z_0)$. Jos funktiolla g olisi nollakohta alueessa D_0, se olisi tässä alueessa Hurwitzin lauseen nojalla identtisesti nolla eli f olisi vakiofunktio. Siispä funktiolla g ei ole nollakohtia alueessa D_0 eli $f(z) \neq f(z_0)$, kun $z \neq z_0$. Koska z_0 oli mielivaltainen, niin funktio f on injektio. □

7 Riemannin kuvauslause

Tässä osiossa todistetaan Riemannin kuvauslause käyttämällä Koeben menetelmää, jossa yksikkökiekon osajoukoksi kuvattua aluetta D laajennetaan toistuvalla neliöjuurifunktion käyttämisellä. Olkoon nyt D kompleksitasosta eriävä yhtenäinen alue ja z_0 sen piste. Tällöin Riemannin kuvauslause etenee seuraavasti:

- **Lemma 7.1:** On olemassa kuvaus, joka kuvaa alueen D yksikkökiekon $\Delta = D(0, 1)$ osajoukoksi ja jolla $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$
- **Lemma 7.2:** Mikäli edellisen kuvauksen kuvajoukko on yksikkökiekon aito osajoukko, on olemassa vastaava kuvaus g, jolla $g'(z_0) > f'(z_0)$

- **Lause 7.4** (Riemannin kuvauslause)**:** Osoitetaan, että näin syntyvästä funktioiden joukosta voidaan muodostaa suppeneva osajono, joka suppenee kohti haluttua kuvausta.

7.1 Esivalmistelut

Lemma 7.1. *Olkoon D koko kompleksitasosta eriävä yhdesti yhtenäinen alue ja z_0 sen piste. Tällöin on olemassa konformikuvaus $f : D \to \mathbb{C}$, jolla*

(i) alue $f(D)$ sisältyy yksikkökiekkoon Δ,

(ii) $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$.

Todistus. Haluttu kuvaus f muodostetaan yhdistelmänä yksinkertaisempia kuvauksia $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ (ks. kuva 6):

- f_1 poistaa origon, jotta on olemassa
- f_2, joka on alueessa $f_1(D)$ määritelty logaritmi. Tällöin eksponentiaalifunktion jaksollisuuden vuoksi (sekä w_0 että $\widetilde{w}_0 = w_0 = 2\pi i$ eivät voi kuulua funktion f_2 kuvajoukkoon) saadaan tähänastiseen kuvajoukkoon kuulumaton ympyrä, jonka suhteen funktio
- f_3 peilaa lähtöjoukon yksikköympyrän sisälle. Sitten
- f_4 siirtää pisteen z_0 kuvan origoon ja
- f_5 kiertää kompleksitasoa siten, että derivaatasta tulee positiivinen.

Olkoon ensin piste b, joka ei kuulu alueeseen D. Tällöin funktio

$$f_1 = z - b$$

on konformikuvaus ja $D_1 = f_1(D)$ ei sisällä nollaa. Koska lauseen 6.6 nojalla D_1 on yhdesti yhtenäinen, voidaan funktiolle f_1 määritellä lauseen 3.4 perusteella holomorfinen logaritmin haara

$$f_2(z) = \log z,$$

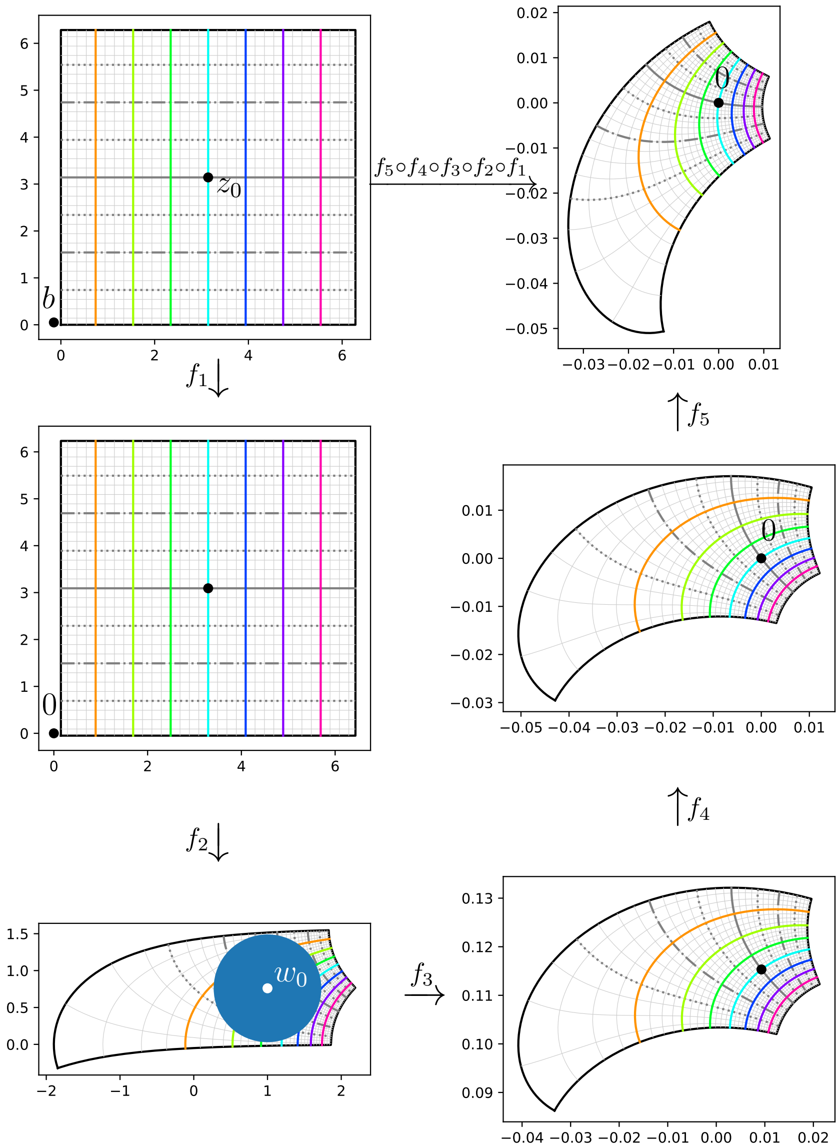
joka on injektiviisyyden myötä konformikuvaus.

Olkoon seuraavaksi w_0 alueen $D_2 = f_2(D_1)$ piste, jolloin on olemassa $r > 0$, jolla $D(w_0, r)$ sisältyy alueeseen D_2. Osoitetaan, että tällöin $\overline{D}(\widetilde{w}_0, r) = \overline{D}(w_0+2\pi i, r)$ on erillinen alueesta D_2. Mikäli olisi olemassa joukon $\overline{D}(\widetilde{w}_0, r) \cap D_2$ piste $\widetilde{w}$, olisi sillä toisaalta esitys $w + 2\pi i$ alueen D_2 pisteen w avulla ja toisaalta $f_2(\widetilde{z}) = n\widetilde{w}$ jollekin alueen D_1 pisteelle $\widetilde{z}$. Koska lisäksi on olemassa alueen D_1 piste z, jolla $f_2(z) = w$, saadaan

$$\widetilde{z} = e^{f_2(\widetilde{z})} = e^{\widetilde{w}} = e^{w+2\pi i} = e^{w} = e^{f_2(z)} = z.$$

Näin ollen $w = f_2(z) = f_2(\widetilde{z}) = \widetilde{w} = w + 2\pi i$, mikä on ristiriita. Näin ollen leikkaus $\overline{D}(\widetilde{w}_0, r) \cap D_2$ on tyhjä ja erityisesti $|z - \widetilde{w}_0| > r$ kaikilla alueen D_1 pisteillä. Tällöin Möbius-kuvauksen

$$f_3(z) = \frac{r}{z - \widetilde{w}_0}$$



Kuva 6: Neliön muotoinen alue kuvattuna sekä lemman 7.1 antamalla kuvauksella f että vaiheittain yhdistämällä kuvaukset f_1, f_2, f_3, f_4 ja f_5

kuva $D_3 = f_3(D_2)$ sisältyy yksikkökiekkoon ja Möbius-kuvauksena kuvaus f_3 on lauseen 4.6 nojalla konformikuvaus.

Olkoon nyt $c = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z_0)$. Koska alue D_3 sisältyy yksikkökiekkoon, on $|c| < 1$ ja tällöin Möbius-kuvaus

$$f_4(z) = \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}$$

on lauseen 4.5 nojalla sekä konforminen että yksikkökiekon säilyttävä. Kun lisäksi $f_4(c) = 0$, täyttyy nyt lauseen toisen ehdon ensimmäinen puoli.

Olkoon vielä $d = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)'(z_0)$. Koska lauseen 6.4 perusteella $d \neq 0$, voidaan valita $u = e^{-i \operatorname{Arg} d}$ ja määritellä

$$f_5(z) = uz.$$

Tämä on jälleen lauseen 4.5 mukainen konforminen kompleksitason kierto ja siten yksikkökiekon säilyttävä konformikuvaus. Nyt yhdistetty kuvaus $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ täyttää lauseen kaikki ehdot, sillä (i): se kuvaa alueen D konformisesti yksikkökiekkoon ja lisäksi (ii) sekä

$$f(z_0) = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z_0) = 0$$

että

$$f'(z_0) = f_5'(0)d = ud = |d| > 0.$$

□

Seuraava lemma on viimeinen ennen varsinaista kuvauslauseen todistusta ja siinä kiteytyy Koeben todistuksen ajatus: yksikkökiekon Δ osajoukon pinta-alaa laajennetaan ottamalla origoa sisältämättömästä alueesta neliöjuuri, jolloin alue "kasvaa".

Lemma 7.2. *Olkoon D koko kompleksitasosta eriävä yhdesti yhtenäinen alue, z_0 sen piste ja $f : D \to \mathbb{C}$ lemman 7.1 ehdot (i) ja (ii) toteuttava konformikuvaus. Oletetaan, että $f(D)$ on yksikkökiekon Δ aito osajoukko. Tällöin on olemassa samat ehdot toteuttava konformikuvaus $g : D \to \mathbb{C}$, jolle $g'(z_0) > f'(z_0)$.*

Todistus. Haluttu funktio g muodostetaan lemman 7.1 todistuksen kaltaisesti yhdistelmänä yksinkertaisempia funktioita $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f$ (ks. kuva 7):

- g_1 poistaa origon, jotta saadaan hyvin määritelty
- logaritmi L, jonka avulla määritellään neliöjuurifunktio g_2.
- g_3 siirtää pisteen z_0 kuvan origoon ja kiertää kompleksitasoa siten, että derivaatasta $g(z_0)$ tulee positiivinen.

Merkitään $D_0 = f(D)$. Koska D_0 on oletuksen mukaan yksikkökiekon Δ aito osajoukko, niin joukosta $\Delta \setminus D_0$ voidaan valita piste b. Nyt $b \neq 0$, sillä $f(z_0) = 0$, ja kuvaus

$$g_1(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}$$

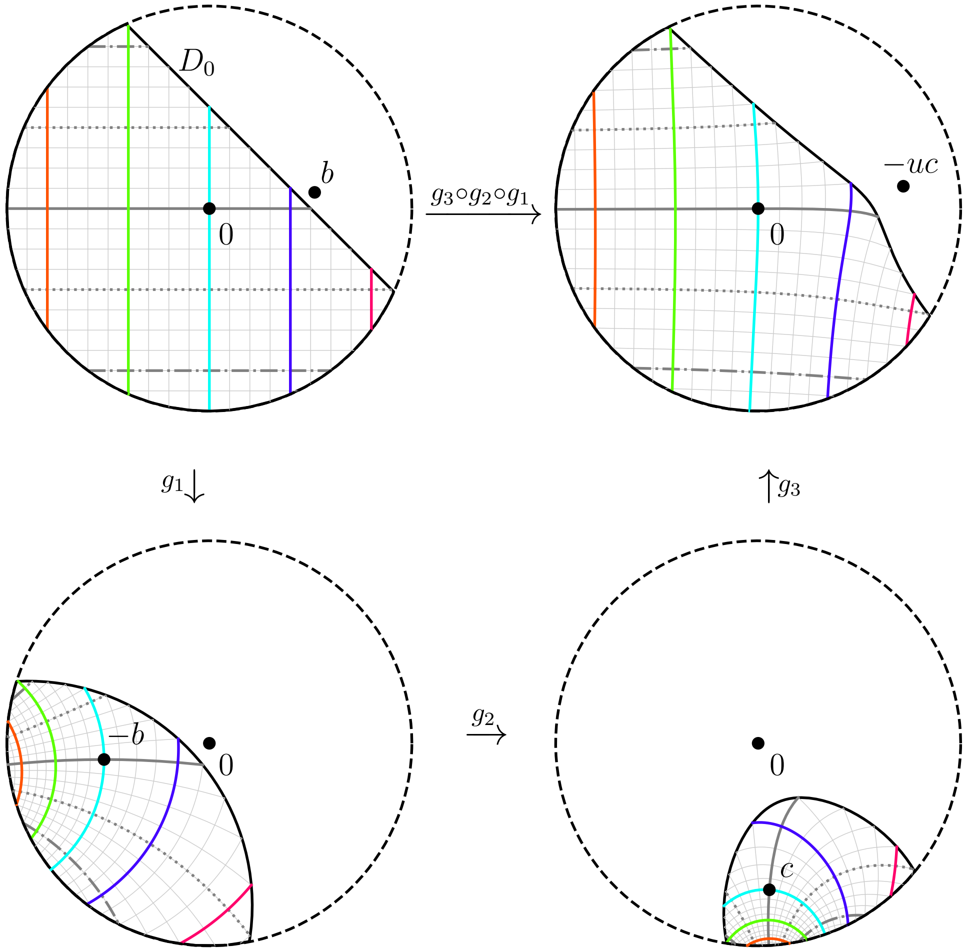
on lauseen 4.5 mukainen, yksikkökiekon yksikkökiekoksi kuvaava konformikuvaus. Koska funktion $g_1(z)$ ainoa nollakohta on $z = b$, niin kuvauksen g_1 injektiivisyyden nojalla $D_1 = g_1(D_0)$ ei sisällä nollaa. Lisäksi $(g_1 \circ f)(z_0) = g_1(0) = -b$ ja

$$g_1'(0) = 1 - |b|^2 .$$

Koska funktiolla g_1 ei ole nollakohtia yhdesti yhtenäisessä alueessa D_1, on sillä lauseen 3.4 nojalla logaritmin haara, joka on holomorfinen alueessa D_1. Olkoon L tällainen logaritmin haara ja määritellään

$$g_2(z) = e^{L(z)/2}.$$

Funktio g_2 on selvästi holomorfifunktio ja lisäksi injektio: jos joillain joukon D_1 pisteillä z ja $\widetilde{z}$ on $g_2(z) = g_2(z)$, niin tällöin $z = (g_2(z))^2 = (g_1(z))^2 = \widetilde{z}$. Näin ollen



Kuva 7: Yksikkökiekon aito osajoukko D_0 kuvattuna sekä lemman 7.2 antamalla kuvauksella g että vaiheittain yhdistämällä kuvaukset g_1, g_2 ja g_3

g_2 on konformikuvaus. Koska $|g_2(z)| = \sqrt{|z|} < 1$, kun $|z| < 1$, niin g_2 myös kuvaa yksikkökiekon yksikkökiekolle. Olkoon nyt $c = g_2(-b)$. Tällöin $c^2 = -b$ ja

$$g_2'(-b) = e^{L(-b)/2} \cdot \frac{L'(-b)}{2} = c \cdot \frac{1}{-2b} = \frac{1}{2c}.$$

Koska $c \neq 0$, voidaan merkitä $u = e^{i \operatorname{Arg} c}$ ja

$$g_3(z) = u\frac{z - c}{1 - \bar{c}z},$$

joka on jälleen lauseen 4.5 mukainen konformikuvaus. Tällä kuvauksella on lauseen 4.5 nojalla

$$g_3'(c) = u\frac{1 - |c|^2}{\left(1 - |c|^2\right)^2} = \frac{u}{1 - |c|^2}.$$

Kuvaus $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f$ täyttää lauseen ehdot, sillä se kuvaa alueen D yksikkökiekon Δ osajoukoksi konformisesti ja lisäksi sekä

$$g(z_0) = (g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f)(z_0) = (g_3 \circ g_2 \circ g_1)(0) = (g_3 \circ g_2)(-b) = g_3(c) = 0$$

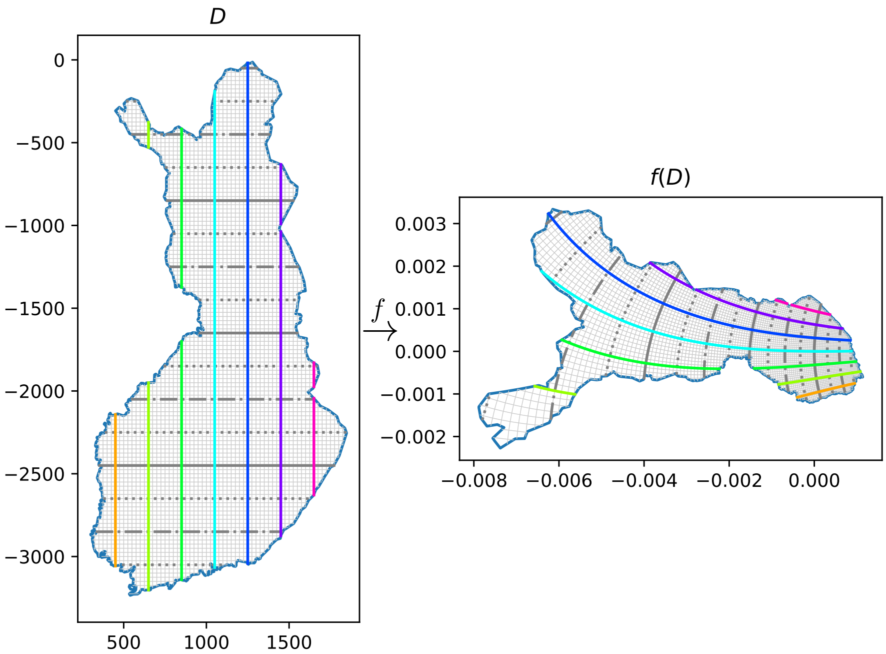
että
$$g'(z_0) = g_3'(c)g_2'(-b)g_1'(0)f'(z_0) = \frac{u}{1-|c|^2}\frac{1}{2c}(1-|b|^2)f'(z_0).$$
Toisaalta $u/c = 1/|c|$ ja $|b| = |c|^2$, joten
$$g'(z_0) = \frac{1-|c|^4}{2|c|\left(1-|c|^2\right)}f'(z_0) = \frac{1+|c|^2}{2|c|}f'(z_0).$$
Koska nyt binomin $1-|c|$ neliö on aina positiivinen, niin $1+|c|^2 > 2|c|$. Siispä $g'(z_0) > f'(z_0)$.

□

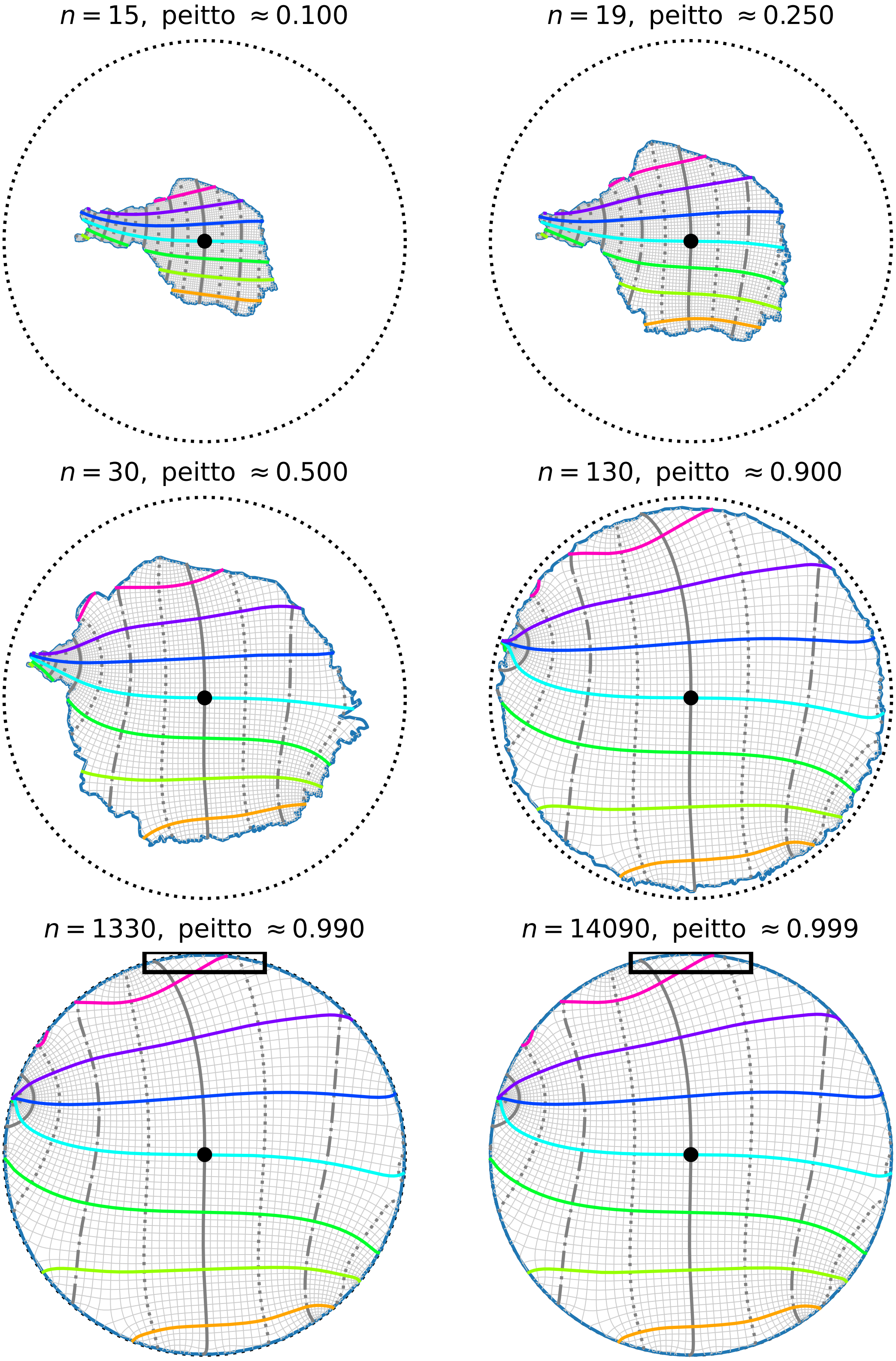
Ennen Riemannin lauseen todistusta tarkastellaan visuaalisesti, miltä lemman 7.2 toistuva soveltaminen näyttää.

7.2 Riemannin kuvauslause visuaalisesti

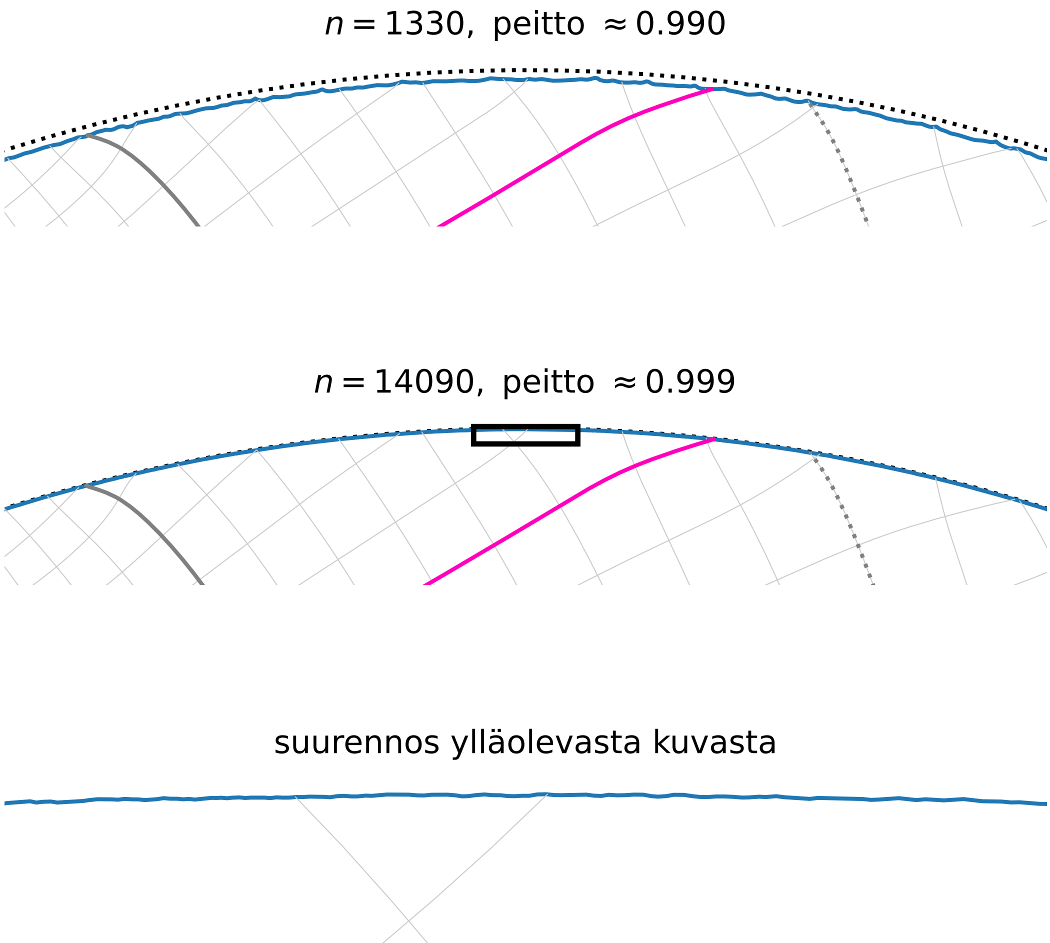
Lemman 7.2 toistuvaa soveltamista voidaan ajatella askelittain etenevänä prosessina. Olkoot D, z_0 ja f kuten lemmassa 7.1 ja olkoon g_0 kuvaus, joka saadaan soveltamalla lemmaa 7.2 kuvaukseen f. Määritellään nyt g_{n+1} kuvaukseksi, joka saadaan sovellettaessa lemmaa 7.2 kuvaukseen g_n. Huomattakoon, että kukin g_n riippuu kyseisellä askeleella valitusta pisteestä b. Numeerisia tarkasteluja varten esimerkkialueen D sisäosa jaettiin ristikoksi reaali- ja imaginääriakselin suuntaisilla suorilla (ks. kuva 8). Numeerisesti havaitaan, että alueen $g_n(D)$ reuna näyttää lähestyvän yksikköympyrää (ks. kuva 9). Tämä todistetaankin osiossa 7.4.



Kuva 8: Alueen D reuna ja alueen ristikoksi jaettu sisäosa sekä niiden kuvat lemman 7.1 antamalla kuvauksella f



Kuva 9: Alueen D kuvia $g_n(D)$, kun n kasvaa ja D on sama kuin kuvassa 8. Alueen kuvien $g_n(D)$ yläpuolelle on merkitty valittu n ja alueen $g_n(D)$ osuus yksikkökiekosta kyseisellä kierroksella. Alue $g_n(D)$ näyttää laajenevan kohti koko yksikkökiekkoa.



Kuva 10: Yksityiskohtia alueen $g_n(D)$ reunasta, kun $n = 1330$ ja $n = 14090$. Yksityiskohdissa näkyy alueen $g_n(D)$ reunan epätasaisuus vielä kierroksella 14090.

Numeerisiin tarkasteluihin ja kuvien laadintaan käytetty Python-lähdekoodi on julkisesti saatavilla [6], joten laskentaa voi melko vaivattomasti jatkaa tässä käsiteltyä pitemmälle. Samalla ohjelmakoodilla luotiin myös Youtube-video, joka havainnollistaa lemman 7.2 ensimmäistä 20000 sovelluskertaa [21]. Valittu lähestymistapa jätti alueen $g_n(D)$ reunaan epätasaisuuksia (ks. kuva 10). Toisaalta ohjelmakoodissa priorisoitiinkin koodin helppolukuisuus ja alueen $g_n(D)$ havaittava, mutta hidas kasvu. Aiheeseen liittyviä tehokkaita numeerisia menetelmiä on olemassa [22],[23],[24],[25], mutta ne sivuutetaan tässä esityksessä.

7.3 Weierstrassin lause

Ennen Riemannin kuvauslauseen todistusta tarvitaan vielä yksi todistuksetta esiteltävä tulos. Edeltävissä lemmoissa 7.1 ja 7.2 osoitettiin, että joukko

$$\mathcal{F} = \{ f \text{ on konformikuvaus } \mid f(D) \subset \Delta, f(z_0) = 0 \text{ ja } f'(z_0) > 0 \}$$

on epätyhjä ja että löydettyä alkiota on mahdollista "kasvattaa". Tässä esitettävän todistuksen keskeinen ajatus on osoittaa, että $f'(z_0)$ ei voi saada mielivaltaisen suuria arvoja ja sitten osoittaa, että on olemassa todistuksen ehdot täyttävä rajafunktio. Riemannin kuvauslause edellyttää tällaiselta rajafunktiolta holomorfisuutta ja tätä varten tarvitaan *Weierstrassin lausetta tasaisesti suppenevien analyyttisten funktioiden sarjalle* vuodelta 1841.

Lause 7.3 (Weierstrassin lause)**.** *Olkoon $(f_n(z))$ jono alueessa D holomorfisia funktioita. Jos jono $(f_n(z))$ suppenee alueessa D normaalisti kohti funktiota f, niin*

(i) rajafunktio $f(z)$ on holomorfinen alueessa D,

(ii) funktion $f(z)$ derivaatoilla on $f^{(p)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(p)}(z)$, $p = 1, 2, \ldots$ ja

(iii) jono $(f_n^{(p)}(z))$ suppenee alueessa D normaalisti kohti funktiota $f^{(p)}(z)$.

Todistus. [8, alaluku 5.1.1, lause 1],[20, lause III.1.3] □

7.4 Riemannin kuvauslause

Kuten johdannossa todettiin, seuraavaksi esitettävä todistus Riemannin kuvauslauseelle eroaa Riemannin alkuperäisestä ajatuksesta. Lause todistetaan tässä esityksessä *normalisoidussa* muodossa eli osoitetaan, että mikä tahansa yhdesti yhtenäinen alue voidaan kuvata konformisesti yksikkökiekolle Δ yksikäsitteisellä kuvauksella. Huomattakoon, että seuraavassa todistuksessa osoitetaan ainostaan halutun kuvauksen olemassaolo, eikä kuvauksen konstruoimista käsitellä. Konstruktiivinen todistus on olemassa esimerkiksi *kuvattaville* (engl. *mappable*) joukoille [26, 27].

Lause 7.4 (Riemannin kuvauslause)**.** *Olkoon D koko kompleksitasosta eriävä yhdesti yhtenäinen alue ja z_0 eräs sen piste. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen konformikuvaus $f : D \to \Delta$, joka kuvaa alueen D yksikkökiekolle Δ (eli $f(D) = \Delta$) ja jolla sekä $f(z_0) = 0$ että $f'(z_0) > 0$.*

Todistus. Osoitetaan ensin lauseen mukaisen kuvauksen olemassaolo. Olkoon

$$\mathcal{F} = \{\, f \text{ on konformikuvaus } \mid f(D) \subset \Delta, f(z_0) = 0 \text{ ja } f'(z_0) > 0\,\}$$

eli niiden funktioiden perhe, joka täyttää lemman 7.1 ehdot. Lemma 7.1 takaa, ettei perhe $\mathcal{F}$ ole tyhjä. Olkoon nyt $r > 0$ luku, jolla kiekko $\overline{D}(z_0, r)$ sisältyy yksikkökiekkoon Δ. Tällöin funktio

$$h(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

on holomorfinen puhkaistussa alueessa $D'(z_0, r)$. Koska f on differentioituva pisteessä z_0, voidaan funktio h laajentaa holomorfiseksi kiekossa $D(z_0, r)$, kun määritellään $h(z_0) = f'(z_0)$. Nyt kehällä $C(z_0, r)$ on

$$|h(z)| = \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \frac{|f(z)|}{r} < \frac{1}{r},$$

joten maksimiperiaatteen nojalla $f'(z_0) < r^{-1}$. Koska arvio on funktion f valinnasta riippumaton, arvio pätee koko joukolla $\{\, f'(z_0) \mid f \in \mathcal{F}\,\}$. Siispä tällä joukolla on äärellinen supremum $M = \sup\{f'(z_0) \mid f \in \mathcal{F}\} < \infty$, jolloin jokaista luonnollista lukua n kohden perheestä $\mathcal{F}$ voidaan valita funktio f_n, jolla $M - \frac{1}{n} < f_n'(z_0) \leq M$. Koska perheen $\mathcal{F}$ jokaisen funktion kuvajoukko sisältyy yksikkökiekkoon, se on lokaalisti rajoitettu. Siispä jonolla (f_n) on Montelin lauseen nojalla suppeneva osajono (f_{n_k}), joka suppenee alueessa D normaalisti kohti funktiota f. Myös funktiolla f on $f(z_0) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z_0) = 0$ ja Weierstrassin lauseen nojalla f on holomorfinen alueessa D sekä erityisesti $f'(z_0) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}'(z_0) = M$. Koska $f'(z_0) \neq 0$, funktio f ei ole vakio koko alueessa D, joten lauseen 6.8 nojalla f on injektiivinen – ja siis konforminen.

Joukko $f(D)$ koostuu yksikkökiekon Δ pistejonojen raja-arvoista, joten $f(D)$ on suljetun yksikkökiekon $\overline{\Delta}$ osajoukko. Toisaalta koska f on konforminen, niin lauseen 6.6 nojalla $f(D)$ on yhdesti yhtenäinen alue ja erityisesti avoin. Siispä $f(D)$ on avoimen yksikkökiekon osajoukko. On vielä osoitettava, että $f(D) = \Delta$. Jos joukko $\Delta \backslash f(D)$ olisi epätyhjä ja w sen piste, niin lemman 7.2 nojalla saataisiin perheeseen $\mathcal{F}$ kuuluva kuvaus g, jolla $g'(z_0) > f'(z_0) = M$, mikä sotii supremumin M määritelmää vastaan. Siispä $f(D) = \Delta$.

Osoitetaan vielä funktion f yksikäsitteisyys. Olkoon nyt g toinen konformikuvaus, jolla $g(D) = \Delta$ sekä $g(z_0) = 0$ ja $g'(z_0) > 0$, ja tarkastellaan funktiota $\varphi : \Delta \to \Delta, \varphi = g \circ f^{-1}$. Koska φ säilyttää yksikkökiekon, voidaan funktio φ ilmaista lauseen 4.5 nojalla muodossa $\varphi(z) = e^{i\theta}(z + c)/(1 - \bar{c}z)$ (joillain reaaliluvulla θ ja kompleksiluvulla c, jolla $|c| < 1$). Koska $\varphi(0) = e^{i\theta}c$ ja funktion φ määritelmän mukaan $\varphi(0) = g(f^{-1}(0)) = 0$, niin $c = 0$. Siispä $\varphi(z) = e^{i\theta}z$ eli funktio φ on yksikkökiekon kierto origon suhteen. Toisaalta

$$\varphi'(0) = g'(z_0)(f^{-1})'(0) = \frac{g'(z_0)}{f'(z_0)} > 0$$

ja ainut mahdollinen kierto, jolla $\varphi'(0) = e^{i\theta} > 0$, on triviaali kierto $\varphi = z$. Siispä $g \circ f^{-1}(z) = z$ eli $g = f$, joten saatu funktio f on yksikäsitteinen. □

Seuraus 7.5. *Olkoot D_1 ja D_2 koko kompleksitasosta eriäviä yhdesti yhtenäisiä alueita ja z_1 (vastaavasti z_2) alueen D_1 (vastaavasti alueen D_2) eräs piste. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen konformikuvaus $f : D_1 \to D_2$, joka kuvaa alueen D_1 alueelle D_2 eli $f(D_1) = D_2$ ja jolla sekä $f(z_1) = z_2$ että $f'(z_1) > 0$.*

Todistus. Olkoon nyt f_1 lauseen 7.4 mukainen, alueen D_1 yksikkökiekolle Δ konformisesti kuvaava funktio, jolla $f_1(z_1) = 0$ ja $f_1'(z_1) > 0$, ja vastaavasti f_2 aluetta D_2 ja pistettä z_2 vastaava kuvaus. Tällöin funktio $f = f_2^{-1} \circ f_1$ on konformikuvaus alueelta D_1 alueelle D_2 ja lisäksi $f(z_1) = z_2$ ja

$$f'(z_1) = (f_2^{-1})'(0) f_1'(z_1) = \frac{f_1'(z_1)}{f_2'(z_2)} > 0.$$

Jos g olisi samat ehdot täyttävä konformikuvaus alueelta D_0 alueelle D_1, voitaisiin lauseen 7.4 yksikäsitteisyystodistuksen tapaan muodostaa konformikuvaus $\varphi = f_1 \circ f^{-1} \circ g \circ f_1^{-1}$, joka kuvaa yksikkökiekon itselleen ja jolla $\varphi(0) = 0$. Lisäksi

$$\varphi'(0) = f_1'(z_1) g'(z_0) \cdot \frac{1}{f'(z_0)} \cdot \frac{1}{f_1'(z_1)} = \frac{g'(z_0)}{f'(z_0)} > 0,$$

joten $\varphi(z) = z$, kuten lauseen 7.4 todistuksessa. Siispä $f_1 \circ g \circ f^{-1} \circ f_1^{-1} = z$ eli $g = f$, joten funktio f on yksikäsitteinen. □

Kirjallisuutta

[1] Lakhtakia, A., Varadan, V. K., Messier, R. ja Varadan, V. V.: *Generalisations and randomisation of the plane Koch curve.* Journal of Physics A: Mathematical and General, 20(11):3537–3541, aug 1987. https://doi.org/10.1088/0305-4470/20/11/052.

[2] Gray, J.: *On the history of the Riemann mapping theorem.* Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Series II, 34:47–94, 1994.

[3] Greene, R. ja Kim, K. T.: *The Riemann mapping theorem from Riemann's viewpoint.* Complex Analysis and its Synergies, 3, tammikuu 2017.

[4] McKean, H. P.: *A quick proof of Riemann's mapping theorem.* Communications on Pure and Applied Mathematics, 52(3):405–409, maaliskuu 1999, ISSN 0010-3640.

[5] Priestley, H. A.: *Introduction to complex analysis.* Oxford University Press, Oxford, England, 2. painos painos, 2005, ISBN 0-19-103720-6.

[6] Penttinen, T.: *Visualizing Riemann Mapping Theorem.* https://github.com/7mp/riemann_mapping_theorem. Vierailtu 12.8.2022.

[7] Needham, T.: *Visual Complex Analysis.* Clarendon Press, Oxford, 1997, ISBN 978-0-19-853446-4.

[8] Ahlfors, L.: *Complex analysis : an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.* International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, New York, PA, 3. painos painos, 1979.

[9] Palka, B. P.: *An introduction to complex function theory.* Undergraduate texts in mathematics. Springer, New York, 1991.

[10] Conway, J. B.: *Functions of One Complex Variable I.* Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer New York, 2. painos painos, 2012, ISBN 9781461263135.

[11] Encyclopedia of Mathematics: *Conformal mapping.* http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Conformal_mapping&oldid=46455. Vierailtu 11.8.2022.

[12] Bracci, F. ja Gaussier, H.: *Abstract Boundaries and Continuous Extension of Biholomorphisms.* Analysis mathematica (Budapest), 48(2):393–409, 2022, ISSN 0133-3852.

[13] Snyder, J. P.: *Flattening the Earth: Two Thousand Years of Map Projections.* University of Chicago Press, 1997, ISBN 9780226767475.

[14] Schinzinger, R. ja Laura, P.: *Conformal mapping: Methods and Applications.* Dover Publications, Mineola, NY, 2003, ISBN 0-486-43236-X.

[15] Nehari, Z.: *Conformal mapping.* International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1952.

[16] Ahlfors, L.: *Zur Theorie der Überlagerungsflächen.* Acta Mathematica, 65:157–194, 1935. https://doi.org/10.1007/BF02420945.

[17] Arnold, D. ja Rogness, J.: *Moebius Transformations Revealed.* https://youtu.be/JX3VmDgiFnY. Vierailtu 20.6.2022.

[18] Kisil, V. V.: *Geometry Of Mobius Transformations: Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Actions of Sl2(R).* World Scientific Publishing Company, Singapore, 2012, ISBN 1848168586.

[19] Beardon, A.: *The Geometry of Discrete Groups.* Graduate Texts in Mathematics ; 91. Springer, New York, 1983, ISBN 0-387-90788-2.

[20] Freitag, E. ja Busam, R.: *Complex analysis.* Universitext. Springer, english ed. painos, 2005, ISBN 9783540308232.

[21] Penttinen, T.: *Riemann mapping theorem visualization (Koebe approach).* https://youtu.be/BOe_X9DEyq8. Vierailtu 27.6.2022.

[22] Nasser, M. M. S. ja Vuorinen, M.: *Conformal Invariants in Simply Connected Domains.* Computational methods and function theory, 20(3-4):747–775, 2020, ISSN 1617-9447.

[23] Bishop, C. J.: *Conformal Mapping in Linear Time.* Discrete & computational geometry, 44(2):330–428, 2010, ISSN 0179-5376.

[24] Bishop, C. J.: *Harmonic measure: algorithms and applications.* Teoksessa *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM 2018) (In 4 Volumes) Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2018*, sivut 1511–1537. World Scientific, 2018. https://www.math.stonybrook.edu/~bishop/papers/icm_proof.pdf.

[25] Green, C.: *The Ahlfors Iteration for Conformal Mapping.* Väitöskirja, Stony Brook University, 2011.

[26] Cheng, H.: *A constructive Riemann mapping theorem.* Pacific Journal of Mathematics, 44(2):435–454, 1973.

[27] Rettinger, R.: *Effective Riemann mappings of multiply connected domains and Riemann surfaces.* Mathematical structures in computer science, 27(8):1495–1520, 2017, ISSN 0960-1295.