Epäuniformien soluautomaattien surjektiivisuus- ja injektiivisyysominaisuuksia

LuK Pyry Paturi

Pro gradu -tutkielma
Lokakuu 2022

Tarkastajat:
Prof. Jarkko Kari
Prof. Vesa Halava

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pyry Paturi: Epäuniformien soluautomaattien surjektiivisuus- ja injektiivisyysominaisuuksia
Pro gradu -tutkielma, 30 s.
Matematiikka
Lokakuu 2022

Tämä työ koostuu kirjallisuuskatsauksesta tavallisiin ja epäuniformeihin soluautomaatteihin, sekä rajoitetun Eedenin puutarhalauseen todistuksesta epäuniformeille soluautomaateille.

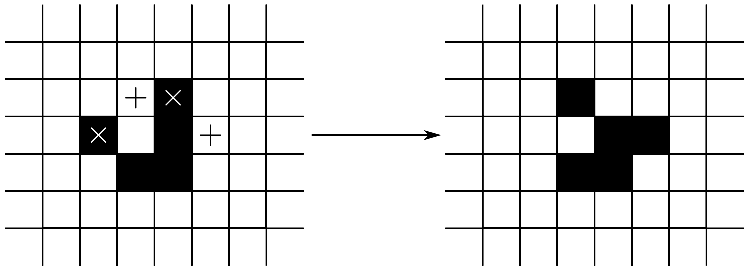
Työn ensimmäisessä osiossa tarkastellaan tavallisia soluautomaatteja. Esitetään näiden perusominaisuuksia, ja todistetaan Eedenin puutarhalause.

Seuraavassa osassa tarkastellaan epäuniformeja soluautomaatteja. Surjektiivisten sääntöjakaumien joukon osoitetaan olevan siirtoavaruus, ja injektiivisten sääntöjakaumien joukon olevan $\omega\omega$-säännöllinen. Lisäksi näytetään, että Eedenin puutarhalause ei päde epäuniformeille soluautomaateille yleisesti, mutta päteen periodisten sääntöjakaumien tapauksessa.

Viimeisessä osiossa tarkastellaan epäuniformeja soluautomaatien rekurrentteja sääntöjakaumia. Erityisesti todistetaan, että Eedenin puutarhalause pätee rekurrenteille sääntöjaumille. Lisäksi esitetään vastaesimerkit ei-rekurrenteille sääntöjakaumille.

Asiasanat: soluautomaatit, Eedenin puutarha

Sisällys



Kuva 1: Elämänpelin yksi askel. Elävät solut ovat mustia ja kuolleet valkoisia. Kuolevat solut on merkity symbolilla $\times$ ja syntyvät solut symbolilla $+$.

1 Johdanto

Soluautomaatti on dynaaminen järjestelmä, joka koostuu verkosta soluja ja paikallisesta säännöstä. Jokaisella solulla on tila, joka muuttuu paikallisen säännön mukaan riippuen solun naapurisoluista. Jokaisen solun tila muuttuu samanaikaisesti.

Yksi vanhimmista ja tunnetuimmista soluautomaateista on John Conwayn *elämänpeli* (engl. *game of life*), joka toimii kaksiuloitteisella neliöverkolla. Solun tila voi olla elävä tai kuollut, ja muuttuu riippuen solun ortagonaalisti ja diagonaalisti vieressä olevien solujen tilojen mukaan. Elävä solu pysyy elävänä, jos sillä on täsmälleen kaksi tai kolme naapuria. Muuten se kuolee. Kuollut solu muuttuu eläväksi, jos sillä on täsmälleen kolme naapuria. Muuten se pysyy kuolleena. Elämänpelin toiminta on esitetty kuvassa 1. [1]

Koko soluverkon tilaa kutsutaan konfiguraatioksi. Koska soluautomaatteja voidaan käsitellä konfiguraatioiden funktiona, niille voidaan määritellä injektiivisyys ja surjektiivisuus yleiseen tapaan. Poikkeuksellisesti kaikki injektiiviset soluautomaatit ovat myös surjektiivisia, eli injektiivisyys on yhtäläistä bijektiivisyyden kanssa. Kaikki surjektiiviset soluautomaatit eivät ole kuitenkaan injektiivisiä. Yksi vanhimmista soluautomaatteja koskevista lauseista on niin kutsuttu *Eedenin puutarha -lause*, jonka mukaan soluautomaatti on surjektiivinen jos ja vain jos se on injektiivinen äärellisillä konfiguraatioilla.

Tavallisesti soluautomaatilla on vain yksi paikallinen sääntö, joka toimii jokaisessa solussa samanaikaisesti. Poikkeavasti voidaan myös määritellä soluautomaatti, jolla on useita eri soluissa toimivia paikallisia sääntöjä. Tällaisia soluautomaatteja kutsutaan *epäuniformeiksi* (engl. *non-uniform*). Tarkemmin epäuniformille soluautomaatille määritellään *sääntöjakauma*, joka on konfiguraatio, jonka solujen tilat ovat paikallisia sääntöjä. Paikalliset säännöt toimivat jokaisessa solussa samanaikaisesti jakauman mukaan.

Toisin kuin tavallisille soluautomaateille, Eedenin puutarha -lause ei päde yleisesti epäuniformeille automaateille. Lause kuitenkin pätee tietynlaisille sääntöjakaumille, esimerkiksi periodisille jakaumille. Tässä työssä myös osoitetaan lauseen pätevän, jos sääntöjakauma on rekurrentti. Työssä keskitytään yksiulotteisiin soluautomaatteihin.

2 Merkintöjä ja määritelmiä

Tässä luvussa määritellään yleisesti käyttettyjä käsitteitä ja merkintöjä. Olkoon $f : A \to B$ funktio, $X \subseteq A$ ja $Y \subseteq B$. Merkitään

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

ja joukon alkukuvaa merkitään

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}.$$

Kaikille $b \in B$ merkitään

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

alkion b alkukuvien joukkoa.

Määritelmä 1. Olkoon $f : A \to B$ funktio. f on *injektiivinen*, jos kaikille $b \in B$

$$|f^{-1}(b)| \leq 1.$$

f on *surjektiivinen*, jos kaikille $b \in B$

$$|f^{-1}(b)| \geq 1.$$

f on *bijektiivinen*, jos kaikille $b \in B$

$$|f^{-1}(b)| = 1.$$

Olkoon $i, j \in \mathbb{Z}$, $i \leq j$. Merkinnällä $[i, j]$ tarkoitetaan joukkoa

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid i \leq k \leq j\}.$$

Määritelmä 2. Olkoon S äärellinen joukko tiloja. *Konfiguraatio* c on funktio

$$c : \mathbb{Z} \to S.$$

Kaikkien konfiguraatioiden joukkoa merkitään $S^{\mathbb{Z}}$.

Konfiguraatio siis määrittää jokaiselle avaruuden $\mathbb{Z}$ solulle tilan.

Määritelmä 3. Olkoon S äärellinen joukko tiloja. Äärellistä joukkoa soluja $D \in \mathbb{Z}$ kutsutaan *äärelliseksi alueeksi*. *Äärellinen kuvio* p on funktio

$$p : D \to S$$

Alueen D kuvioiden joukkoa merkitään S^D. Merkintä S^* tarkoittaa joukkoa

$$S^* = \bigcup_{D \subset \mathbb{Z},\, |D| \in \mathbb{N}} S^D.$$

Merkintä c_D tarkoittaa kuviota alueella D, jolla

$$c_D(x) = c(x)$$

kaikilla $x \in D$. Jos $D = [i, j]$ joillakin $i, j \in \mathbb{Z}$, niin aluetta D kutsutaan *yhtenäiseksi*, ja kuviota $w \in S^D$ kutsutaan *sanaksi*, ja tällöin sanan w *pituus* on $|i - j + 1|$. Jos on $w, u \in S^*$ sanoja, joille joillain $i', j' \in \mathbb{Z}$ pätee $w_{[i',j']} = u$, sanotaan sanaa u sanan w *osasanaksi*.

Olkoon $w = w_1 w_2 \dots w_n$ ja $u = u_1 u_2 \dots u_m$ sanoja, missä $w \in S^{[i,i+n-1]}$. Merkitään

$$wu = w_1 w_2 \dots w_n u_1 u_2 \dots u_m,$$

missä $wu \in S^{[i,i+n+m-1]}$.

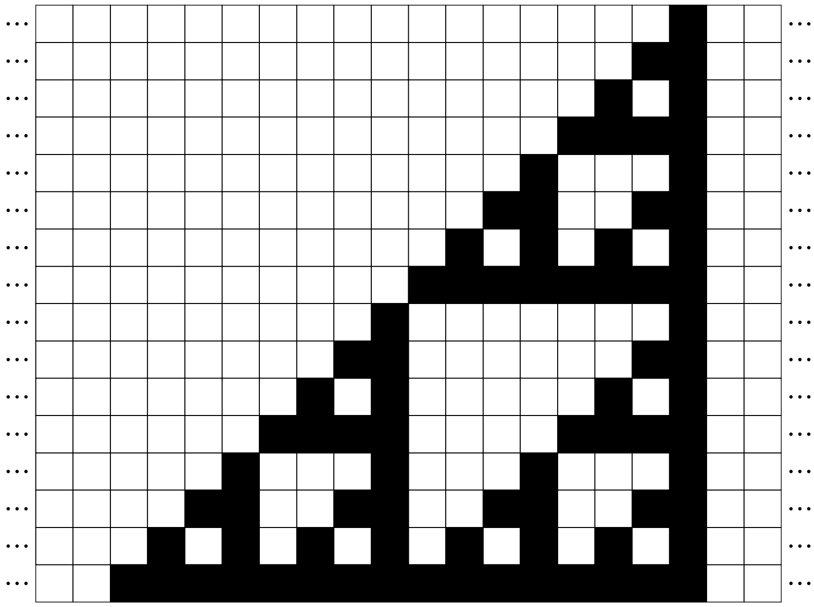
Määritelmä 4. Olkoon $q \in S$. Konfiguraation $c \in S^{\mathbb{Z}}$ *q-tuki* on joukko

$$\mathrm{supp}_q(c) = \{n \in \mathbb{Z} \mid c(n) \neq q\}.$$

Konfiguraatio c on *q-äärellinen* jos $\mathrm{supp}_q(c)$ on äärellinen.

Määritelmä 5. Olkoon $c, e \in S^{\mathbb{Z}}$. Konfiguraatioiden *eroavien solujen joukkoa* merkitään

$$\mathrm{diff}(c, e) = \{x \in \mathbb{Z} \mid c(x) \neq e(x)\}.$$



Kuva 2: Esimerkin 1 soluautomaatin A aika-avaruusdiagrammi, missä jokainen rivi on edellisen rivin G kuva. Kuvassa tilat 0 ja 1 on kuvattu vastaavasti valkoisilla ja mustilla soluilla.

Määritelmä 6. *Soluautomaatti* on monikko $A = (S, N, f)$, missä S on äärellinen joukko tiloja, *naapurusto* $N = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$ on monikko lukuja $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{Z}$ ja funktio $f : S^m \to S$ on *paikallinen päivityssääntö*.

Soluautomaatin A *globaali päivitysfunktio* $G : S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$ kuvaa konfiguraation $c \in S^{\mathbb{Z}}$ konfiguraatioksi $G(c)$, jolla

$$G(c)(x) = f(c(x + n_1), \ldots, c(x + n_m))$$

kaikilla $x \in \mathbb{Z}$.

Esimerkki 1. Olkoon $A = (S, N, \oplus)$, missä $S = \{0, 1\}$, $N = (0, 1)$ ja $\oplus : S^2 \to S$, joka kuvaa sanan $(a, b) \in S^2$

$$\oplus(a, b) = |a - b|.$$

Tätä automaattia kutsutaan XOR-automaatiksi. Olkoon G automaatin globaali päivitysfunktio. Soluautomaatin toiminta on esitetty kuvassa 2.

Jos A on selvä kontekstista, siihen yleensä viitataan funktiolla G. Identiteettifunktiota merkitään id. Määritellään $G^0 = id$ ja kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$ merkitään

$$G^n = G \circ G^{n-1}.$$

Jos $N = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$ on naapurusto, solun $x \in \mathbb{Z}$ ja alueen $D \subseteq \mathbb{Z}$ naapurustoille käytetään lyhennemerkintöjä $N(x) = \{x + n \,|\, n \in N\}$ ja $N(D) = \{x + n \,|\, x \in D, n \in N\}$. Jos $r \in \mathbb{Z}_+$, r-säteisellä naapurustolla tarkoitetaan naapurustoa $(-r, -r+1, \ldots, r)$.

Määritelmä 7. Olkoon $A = (S, N, f)$ soluautomaatti, missä $N = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$. Olkoon $D \subseteq \mathbb{Z}$ äärellinen alue. *Osittainen päivitysfunktio* alueella D on funktio $g_D : S^{N(D)} \to S^D$ joka kuvaa kuvion $p \in S^{N(D)}$ kuvioksi $g_D(p)$, jolla

$$g_D(p)(x) = f(p(x + n_1), p(x + n_2), \ldots, p(x + n_m))$$

kaikilla $x \in D$.

Määritelmä 8. Olkoon S tilajoukko, ja $N = (0, 1)$ *Siirto vasemmalle* on soluautomaatti (S, N, f), missä $f : S^2 \to S$ kuvaa

$$f(a_1, a_2) = a_2,$$

kaikilla $a_1, a_2 \in S$. Tämän soluautomaatin globaalia päivitysfunktiota merkitään σ.

Määritelmä 9. Konfiguraatio $c \in S^{\mathbb{Z}}$ on *periodinen*, jos on olemassa $n \in \mathbb{Z}_+$, jolla $\sigma^n(c) = c$. Konfiguraatio on *rekurrentti*, jos kaikille $i, j \in \mathbb{Z}$ on olemassa äärettömän monta erillistä $n \in \mathbb{Z}$, joille pätee $c_{[i,j]} = \sigma^n(c)_{[i,j]}$.

Määritelmä 10. *Äärellinen automaatti* on monikko $\mathcal{A} = (Q, S, T, I, F)$, missä Q on äärellinen joukko tiloja, S on joukko symboleja, $T \subseteq Q \times S \times Q$ joukko siirtymiä ja $I, F \subseteq Q$ joukko alku- ja lopputiloja. *Kieli* on joukko $\mathcal{L} \subseteq S^*$. *Reitti* on äärellinen jono

$$p = q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n$$

tiloja $q_i \in Q$ ja symboleja $a_i \in S$, joille $(q_i, a_i, q_{i+1}) \in T$ kaikilla $i \in [1, n-1]$ jollain $n \in \mathbb{Z}_+$. Sana $a_0 \ldots a_{n-1}$ on reitin *nimi*. Reitti p on *hyväksyvä* jos $q_1 \in I$ ja $q_n \in F$. Kieli $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ on automaatin $\mathcal{A}$ hyväksyvien reittien nimien joukko. Kieltä $\mathcal{L}$ kutsutaan *säännölliseksi*, jos on olemassa äärellinen automaatti $\mathcal{A}$, jolle pätee $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Seuraava lause oletetaan tunnetuksi.

Lause 1. *Olkoon $\mathcal{L} \in S^*$ säännöllinen kieli. Kieli $\overline{\mathcal{L}} = S^* \setminus \mathcal{L}$ on säännöllinen.*

Todistus. Todistus sivutetaan. Väite on todistettu lähteessä [2]. □

Määritelmä 11. Olkoon $\mathcal{A} = (Q, S, T, I, F)$ äärellinen automaatti. *Kaksisuuntainen ääretön kieli* eli *$\omega\omega$-kieli* on joukko $\mathcal{L} \subseteq S^{\mathbb{Z}}$. *Kaksisuuntainen ääretön reitti* p on kaksisuuntainen jono

$$p = \ldots \xrightarrow{a_{-2}} q_{-1} \xrightarrow{a_{-1}} q_0 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \ldots$$

tiloja $q_i \in Q$ ja symboleja $a_i \in S$, joille $(q_i, a_i, q_{i+1}) \in T$ kaikilla $i \in \mathbb{Z}$. Konfiguraatio $\ldots a_{-1}a_0a_1a_2 \ldots$ on reitin *nimi*. Kaksisuuntainen ääretön reitti on *hyväksyvä*, jos joukot $\{i \in \mathbb{N} \mid q_{-i} \in I\}$ ja $\{i \in \mathbb{N} \mid q_i \in F\}$ ovat äärettömät. Merkitään, että $\omega\omega$-kieli $\mathcal{L}^{\omega\omega}(\mathcal{A})$ on automaatin $\mathcal{A}$ hyväksyvien reittien nimien joukko. Kutsutaan $\omega\omega$-kieltä $\mathcal{L}$ *$\omega\omega$-säännölliseksi*, jos on olemassa automaatti $\mathcal{A}$, jolle pätee $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\omega\omega}(\mathcal{A})$.

Edellä määriteltyä äärettömien reittien hyväksymisehtoa kutsutaan yleisesti *Büchi hyväksyvyydeksi.* [3]

Lemma 1. *Olkoon $\mathcal{L}$ $\omega\omega$-säännöllinen kieli. Tällöin $\omega\omega$-kieli $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{R}^{\mathbb{Z}} \setminus \mathcal{L}$ on $\omega\omega$-säännöllinen.*

Todistus. Todistus sivutetaan. Väite on todistettu lähteessä [4]. □

Määritelmä 12. Olkoon S symbolijoukko, σ siirto vasemmalle ja kieli $\mathcal{F} \subseteq S^*$ joukko *kiellettyjä sanoja*. Kielen $\mathcal{F}$ määräämä *siirtoavaruus* $\mathcal{L} \subseteq S^{\mathbb{Z}}$ on kaksisuuntainen ääretön kieli

$$\mathcal{L} = \{c \in S^{\mathbb{Z}} \mid \forall k, i, j \in \mathbb{Z} : \sigma^k(c)_{[i,j]} \notin \mathcal{F}\}.$$

Jos $\mathcal{F}$ on äärellinen, kieltä $\mathcal{L}$ kutsutaan *äärellisen tyypin siirtoavaruudeksi*. Jos $\mathcal{F}$ on säännöllinen kieli, kutsutaan *sofiseksi siirtoavaruudeksi*.

Määritelmä 13. Olkoon $n \geq 1$. *Ryhmittelyfunktio* $B_n : S^{\mathbb{Z}} \to (S^n)^{\mathbb{Z}}$ kuvaa konfiguraation $c \in S^{\mathbb{Z}}$ konfiguraatioksi $B_n(c)$, jolla

$$B_n(c)(x) = (c(xn), c(xn+1), \ldots, c(xn+n-1))$$

kaikilla $x \in \mathbb{Z}$. Ryhmittelyfunktio on selvästi bijektio, joten tätä pidetään tunnettuna.

3 Tavalliset soluautomaatit

3.1 Yleiset ominaisuudet

Soluautomaattien topologiset ominaisuudet ovat hyödyllisiä injektiivisyyden ja surjektiivisuuden tarkastelussa. Tämän takia automaateille määritellään raja-arvo, sekä todistetaan, että konfiguraatioavaruus on niiden suhteen kompakti.

Määritelmä 14. Olkoon $(c_i) = c_1, c_2, c_3, \ldots$ jono konfiguraatioita $c_i \in S^{\mathbb{Z}}$. Jono (c_i) *suppenee*, jos on olemassa *raja-arvo* $c \in S^{\mathbb{Z}}$, jolle kaikilla $x \in \mathbb{Z}$ on olemassa $k \in \mathbb{Z}_+$, jolla

$$c_i(x) = c(x)$$

kaikilla $i \geq k$. Raja-arvoa merkitään $c = \lim_{i \to \infty} c_i$.

Lause 2. *Suppenevan konfiguraatiojonon raja-arvo on yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoon (c_i) suppeneva jono konfiguraatioita $c_i \in S^{\mathbb{Z}}$ ja $c, c' \in S^{\mathbb{Z}}$ jonon raja-arvoja. Määritelmän mukaan kaikilla $x \in \mathbb{Z}$ on $k \in \mathbb{Z}_+$, jolle $c(x) = c_i(x) = c'(x)$ kaikilla $i \geq k$. Täten $c = c'$. [5, 6] $\square$

Seuraavaa lausetta kutsutaan kompaktisuudeksi.

Lause 3. *Jokaisella konfiguraatiojonolla on suppeneva osajono.*

Todistus. Olkoon $(c_i) = c_1, c_2, c_3, \ldots$ jono konfiguraatioita $c_i \in S^{\mathbb{Z}}$. Olkoon $x_1, x_2, \ldots$ kokonaislukujen $\mathbb{Z}$ numerointi, $i_0 = 0$ ja $I_0 = \mathbb{Z}_+$. Kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$ määritellään

$$I_k = \{i \in \mathbb{Z}_+ \mid \forall j \in [1, k] : c_i(x_j) = c_{i_k}(x_j)\},$$

jossa i_k on pienin joukon I_{k-1} alkio, jolle $i_k > i_{k-1}$ ja I_k on ääretön. Jos I_{k-1} on ääretön, tällainen i_k on aina olemassa: solulla x_k on vain äärellisen monta mahdollista mahdollista tilaa, joten on olemassa ääretön $I \subseteq I_{k-1}$, jolle kaikilla $i, i' \in I$ pätee $c_i(x_k) = c_{i'}(x_k)$. Nyt jono $(c_{i_k}) = c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots$ suppenee, koska kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$ on olemassa $a \in S$, jolle kaikilla $j \geq k$ pätee $c_{i_j}(x_k) = a$. [5, 6] $\square$

Seuraavaa lausetta kutsutaan jatkuvuudeksi.

Lause 4. *Olkoon $G : S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$ soluautomaatti ja $(c_i) = c_1, c_2, \ldots$ suppeneva jono konfiguraatioita $c_i \in S^{\mathbb{Z}}$ raja-arvolla $c = \lim_{i \to \infty} c_i$. Tällöin jono $G(c_1), G(c_2), \ldots$ myös suppenee, ja sen raja-arvo on*

$$\lim_{i \to \infty} G(c_i) = G(c).$$

Todistus. Oletetaan, että G on automaatin $A = (S, N, f)$ globaali päivitysfunktio, missä $N = (n_1, \ldots, n_m)$. Olkoon $x \in \mathbb{Z}$. Koska $c = \lim_{i\to\infty} c_i$, kaikilla $j \in \{1, \ldots, m\}$ on $k_j \in \mathbb{Z}_+$, jolle pätee $c_i(x + n_j) = c(x + n_j)$ kaikilla $i \geq k_j$. Olkoon $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Nyt kaikilla $i \geq k$

$$\begin{aligned} G(c_i)(x) &= f(c_i(x + n_1), \ldots, c_i(x + n_m)) \\ &= f(c(x + n_1), \ldots, c(x + n_m)) \\ &= G(c)(x). \end{aligned}$$

Koska $x \in \mathbb{Z}$ on mielivaltainen, kaikille $x \in \mathbb{Z}$ siis on olemassa $k \in \mathbb{Z}$, jolle pätee $G(c_i)(x) = G(c)(x)$ kaikilla $i \geq k$. Täten $G(c_1), G(c_2), \ldots$ suppenee raja-arvolla $G(c)$. [5, 6] □

Nämä kompaktisuuden ja jatkuvuuden määritelmät ovat yhtäpitäviä topologisten määritelmien kanssa, kun konfiguraatioavaruutta käsitellään metrisenä avaruutena.

3.2 Eedenin puutarha -lause

Olkoon $G : S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$ soluautomaatti. Jos jollain $c \in S^{\mathbb{Z}}$ ei ole alkukuvaa, eli $G^{-1}(c) = \emptyset$, kutsutaan konfiguraatiota c *Eedenin puutarhaksi.* Soluautomaatti G on siis surjektiivinen jos ja vain jos sillä ei ole yhtään Eedenin puutarhaa.

Olkoon $g_D : S^{N(D)} \to S^D$ automaattia G vastaava osittainen päivitysfunktio alueella D. Jos jollain kuviolla $p \in S^D$ ei ole alkukuvaa, eli $g_D^{-1}(p) = \emptyset$, kutsutaan kuviota p *orvoksi.* Jos konfiguraatio sisältää orvon, se on selvästi Eedenin puutarha. Seuraavaksi todistetaan, että nämä ehdot ovat yhtäpitävät.

Lemma 2. *Olkoon $(c_i) = c_1, c_2, \ldots$ suppenenva jono konfiguraatioita $c_i \in S^{\mathbb{Z}}$ kaikilla $i \in \mathbb{Z}_+$, ja $\lim_{i\to\infty} c_i = c$. Jonon (c_i) osajono $(c_{i_j}) = c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots$ suppenee, ja*

$$\lim_{j\to\infty} c_{i_j} = c.$$

Todistus. Olkoon $x \in \mathbb{Z}$. Koska (c_i) suppenee, on jokin $k \in \mathbb{Z}_+$, jolle $c_i(x) = c(x)$ kaikilla $i \geq k$. Nyt kaikilla $i_j \geq k$ myös $c_{i_j}(x) = c(x)$. Koska x on mielivaltainen, jono (c_{i_j}) siis suppenee, ja $\lim_{j\to\infty} c_{i_j} = c$. [6] □

Lause 5. *Olkoon $G : S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$ soluautomaatti. Konfiguraatio $c \in S^{\mathbb{Z}}$ on Eedenin puutarha jos ja vain jos c_D on orpo jollain äärellisellä alueella $D \subset \mathbb{Z}$.*

Todistus. Oletetaan, että konfiguraatiolle $c \in S^{\mathbb{Z}}$ kuvio $c_D \in S^D$ on orpo. Jos olisi konfiguraatio $e \in S^{\mathbb{Z}}$, jolle pätisi $G(e) = c$, niin kuviolle $e_{N(D)} \in S^{N(D)}$ pätisi $g_D(e_{N(D)}) = c_D$, joka on ristiriita oletuksen kanssa. Siis c on Eedenin puutarha.

Seuraavaksi oletetaan, että c ei sisällä orpoa. Olkoon $x_1, x_2, \ldots$ kokonaislukujen $\mathbb{Z}$ numerointi, ja kaikille $j \in \mathbb{Z}_+$, $D_j = \{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$. Koska mikään konfiguraation c sisältämä kuvio alueella D_j ei ole orpo, on oltava jokin $e_j \in S^{\mathbb{Z}}$, jolle pätee $G(e_j)_{D_j} = c_{D_j}$. Täten konfiguraatiojono $G(e_1), G(e_2), \ldots$ suppenee raja-arvolla c. Lauseen 3 mukaan jonolla (e_i) on suppeneva osajono $(e_{i_j}) = e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots$. Olkoon $e = \lim_{j\to\infty} e_{i_j}$. Lauseen 4 mukaan nyt $\lim_{j\to\infty} G(e_{i_j}) = G(e)$. Toisaalta lemman 2 mukaan

$$\lim_{j\to\infty} G(e_{i_j}) = \lim_{i\to\infty} G(e_i) = c.$$

Täten $c = G(e)$, eli c ei ole Eedenin puutarha. [6] $\square$

Eedenin puutarha -lause väittää, että soluautomaatti on surjektiivinen jos ja vain jos se on injektiivinen äärellisillä konfiguraatiolla. Äärellisten konfiguraatioden määritteleminen vaatii erityisen nollatilan, joten sen sijaan määritellään yleisempi asymptoottisuuden käsite ja todistetaan Eedenin puutarha -lauseen vahvempi muoto.

Määritelmä 15. Konfiguraatiot $c, e \in \mathbb{Z}$ ovat *asymptoottisia*, jos $\mathrm{diff}(c, e)$ on äärellinen.

Määritelmä 16. Soluautomaatti $G : S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$ on *pre-injektiivinen*, jos kaikille asymptoottisille konfiguraatiopareille $c, e \in S^{\mathbb{Z}}$ pätee $G(c) \neq G(e)$, kun $c \neq e$.

Esimerkki 2. Olkoon A XOR-automaatti kuten esimerkissä 1, ja G sen globaali päivitysfunktio. G on pre-injektiivinen.

Todistus. Olkoon $c, e \in S^{\mathbb{Z}}$, $c \neq e$ asymptoottisia. On olemassa jokin $x \in \mathbb{Z}$, jolle $c(x) \neq e(x)$ ja kaikille $y \in \mathbb{Z}, y > x$ pätee $c(y) = e(y)$. Jos $c(x) = c(x+1)$, niin $e(x) \neq e(x+1)$, koska $e(x+1) = c(x+1)$. Tällöin $G(c)(x) \neq G(e)(x)$.

Toisaalta jos $c(x) \neq c(x+1)$, niin $e(x) = e(x+1)$, koska mahdollisia tiloja on vain 2. Tällöin myös $G(c)(x) \neq G(e)(x)$. Siis $G(c) \neq G(e)$, eli G on pre-injektiivinen. $\square$

Seuraava lemma on epäyhtäsuuruus, jota tarvitaan Eedenin puutarha -lauseen todistamisessa.

Lemma 3. *Olkoon $n, s, r \in \mathbb{Z}_+$. Kaikilla riittävän suurilla luvuilla $k \in \mathbb{Z}$ pätee*

$$(s^n - 1)^k < s^{kn-2r}.$$

Todistus. Jos $s = 1$, väite selvästi pätee. Oletetaan, että $s > 1$. Logaritmia käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned}
&(s^n - 1)^k < s^{kn-2r} \\
\Leftrightarrow\ &\log_s (s^n - 1)^k < \log_s s^{kn-2r} \\
\Leftrightarrow\ &k \log_s (s^n - 1) < kn - 2r \\
\Leftrightarrow\ &\log_s (s^n - 1) < \frac{kn - 2r}{k} = n - \frac{2r}{k}.
\end{aligned}$$

Lisäksi $\log_s(s^n-1) < \log_s s^n = n$, joten on olemassa $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, jolle $\log_s(s^n-1) = n-\varepsilon$. Nyt jos $k > \frac{2r}{\varepsilon}$, niin

$$\log_s(s^n - 1) = n - \varepsilon = n - \frac{2r}{\frac{2r}{\varepsilon}} < n - \frac{2r}{k}.$$

□

Seuraavaksi todistetaan Eedenin puutarha -lause.

Lause 6. *Olkoon $G : S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$ soluautomaatti. Jos G ei ole surjektiivinen, se ei ole pre-injektiivinen.*

Todistus. Oletetaan, että G ei ole surjektiivinen. Olkoon $q, t \in S$ tiloja, joille pätee $f(q, \ldots, q) = t$, missä f on soluautomaatin paikallinen funktio. Merkitään $s = |S|$. Olkoon $r \in \mathbb{Z}_+$ tarpeeksi suuri, että G voidaan määritellä r-säteisellä naapurustolla.

Koska G ei ole surjektiivinen, lauseen 5 mukaan sillä on jokin orpo $p \in S^D$. Olkoon w sana joka sisältää kuvion p ja jonka muut solut ovat tilassa t. Selvästi w on myös orpo. Merkitään, että $n \in \mathbb{Z}_+$ on sanan w pituus.

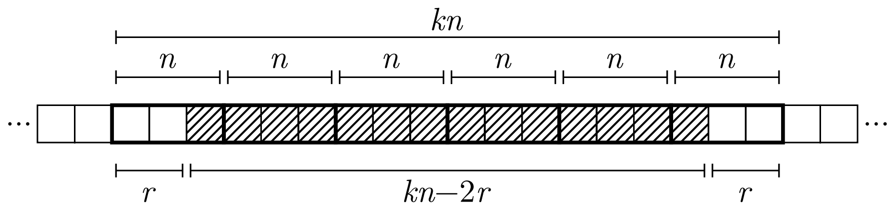
Olkoon $k \in \mathbb{Z}_+$ ja C äärellinen yhtenäinen alue jonka pituus on kn. Jaetaan C k-moneen n-pituiseen alueeseen. Olkoon C' alueen C keskellä oleva alue, jonka pituus on $kn - 2r$. Esimerkki alueista C ja C' on esitetty kuvassa 3. Olkoon

$$K = \{c \in S^{\mathbb{Z}} \,|\, \mathrm{supp}_q(c) \subseteq C'\}.$$

Nyt $|K| = s^{|C'|}$.

Koska automaatin G naapurusto on enintään r-säteinen, kaikille $c \in K$ pätee nyt $\mathrm{supp}_t(G(c)) \subseteq C$. Lisäksi konfiguraatio $G(c)$ ei voi sisältää kuviota w missään alueen C sisältämistä n-pituisissa alueissa, eli $|G(K)| \leq (s^n - 1)^k$. Nyt lemman 3 mukaan jollain $k \in \mathbb{Z}_+$

$$|G(K)| \leq (s^n - 1)^k < s^{kn-2r} = s^{|C'|} = |K|,$$



Kuva 3: Esimerkki lauseiden 6 ja 7 todistuksien alueista C ja C'. Alue C on merkitty paksulla ääriviivalla ja alue C' väritetyillä soluilla.

eli on oltava $c_1, c_2 \in K$, joille pätee $c_1 \neq c_2$ ja $G(c_1) = G(c_2)$. Täten G ei ole pre-injektiivinen. [7]

□

Lause 7. *Olkoon $G : S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$ soluautomaatti. Jos G ei ole pre-injektiivinen, niin sillä on olemassa Eedenin puutarha.*

Todistus. Olkoon $c_1, c_2 \in S^{\mathbb{Z}}$ asymptoottisia konfiguraatioita, joille $c_1 \neq c_2$, mutta $G(c_1) = G(c_2)$. Merkitään $s = |S|$. Olkoon $r \in \mathbb{Z}_+$ tarpeeksi suuri, että G voidaan määritellä $\frac{r}{2}$-säteisellä naapurustolla.

Olkoon n tarpeeksi suuri, että on olemassa yhtenäinen alue D', jonka pituus on $n - 2r$, jolle $\text{diff}(c_1, c_2) \subseteq D'$. Olkoon D yhtenäinen alue, jonka pituus on n, ja jonka keskellä on D'. Lisäksi olkoon $w_1, w_2 \in S^D$ sanoja, joille $w_1(x) = c_1(x)$ ja $w_2(x) = c_2(x)$ kaikilla $x \in D$.

Koska $G(c_1) = G(c_2)$, myös $g_{D'}(w_1) = g_{D'}(w_2)$. Olkoon $c \in S^{\mathbb{Z}}$ konfiguraatio joka sisältää sanan w_1 alueella D, ja $c' \in S^{\mathbb{Z}}$ konfiguraatio joka saadaan konfiguraatiosta c korvaamalla sana w_1 sanalla w_2. Nyt jos jonkin solun $x \in \mathbb{Z}$ naapurusto $N(x)$ ei sisällä soluja joukosta $\text{diff}(\text{c}, \text{c}') \subseteq D'$, selvästi $G(c)(x) = G(c')(x)$. Toisaalta jos $N(x)$ sisältää soluja joukosta $\text{diff}(\text{c}, \text{c}')$, se on enintään etäisyydellä $\frac{r}{2}$ eroavista soluista. Täten $N(x) \subseteq D$, eli

$$G(c)(x) = G(c_1)(x) = G(c_2)(x) = G(c')(x).$$

On siis näytetty, että $G(c) = G(c')$.

Olkoon C yhtenäinen alue, jonka pituus on kn, ja jaetaan se k-moneen n-pituiseen alueeseen. Olkoon C' yhtenäinen alue alueen C keskellä, jonka pituus on $kn - 2r$. Esimerkki alueista C ja C' on esitetty kuvassa 3. Jos G on surjektiivinen, niin jokaisella kuviolla alueella C' on alkukuva alueella C. Koska jokainen sanan w_1 kopio voidaan korvata sanalla w_2 vaikuttamatta konfiguraation kuvaan, jokaisella kuviolla alueella C' on siis alkukuva jossa ei ole sanan w_1 kopiota missään n-pituisista alueista. Tällaisia kuviota on alueella C

$$(s^{|D|}-1)^k = (s^n-1)^k.$$

Toisaalta alueella C' on s^{kn-2r} kuviota. Täten lemman 3 mukaan, jos k on tarpeeksi suuri, on oltava jokin kuvio alueella C' jolla ei ole alkukuvaa. Täten automaatilla G on Eedenin puutarha. [8] $\square$

Lause 8. (Eedenin puutarha -lause.) *Olkoon $G : S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$ soluautomaatti. G on surjektiivinen jos ja vain jos G on pre-injektiivinen.*

Todistus. Väite seuraa lauseista 6 ja 7. $\square$

Koska injektiiviset soluautomaatit ovat selvästi pre-injektiivisiä, seuraa, että injektiiviset soluautomaatit ovat myös surjektiivisia. Täten soluautomaatin injektiivisyys on ekvivalenttia bijektiivisyyden kanssa.

Lemma 4. *Olkoon $(c_i) = c_1, c_2, c_3, \ldots$ ja $(e_i) = e_1, e_2, e_3, \ldots$ jonoja konfiguraatioita $c_i, e_i \in S^{\mathbb{Z}}$. On olemassa jono indeksejä $(i_j) = i_1, i_2, i_3, \ldots$, joille pätee $i_j \in \mathbb{Z}_+$, $i_j < i_{j+1}$, ja jonot*

$$(c_{i_j}) = c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3}, \ldots,$$
$$(e_{i_j}) = e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \ldots$$

suppenevat.

Todistus. Olkoon $x_1, x_2, \ldots$ kokonaislukujen $\mathbb{Z}$ numerointi, $i_0 = 0$ ja $I_0 = \mathbb{Z}_+$. Kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$ määritellään

$$I_k = \{i \in \mathbb{Z}_+ \,|\, \forall l \in [1,k] : c_i(x_l) = c_{i_k}(x_l)\},$$
$$J_k = \{i \in \mathbb{Z}_+ \,|\, \forall l \in [1,k] : e_i(x_l) = e_{j_k}(x_l)\},$$

jossa $i_k \in J_k$ ja $j_k \in I_{k-1}$ ovat pienimmät alkiot joille $i_k > i_{k-1}, j_k > j_{k-1}$ ja joukot I_k, J_k ovat äärettömät. Jos J_k ja I_{k-1} ovat äärettömät, tällaiset i_k ja j_k ovat aina olemassa: solulla x_k on vain äärellisen monta mahdollista tilaa, joten on olemassa ääretön $I \subseteq I_{k-1}$, jolle kaikilla $j, j' \in I$ pätee $c_j(x_k) = c_{j'}(x_k)$, eli J_k on ääretön. Tällöin samoin on olemassa $J \subseteq J_k$, jolle kaikilla $i, i' \in J$ pätee $c_i(x_k) = c_{i'}(x_k)$.

Nyt kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$ on olemassa tilat $a, b \in S$, joille kaikilla $j \geq k$ pätee $c_{i_j}(x_k) = a$ ja $e_{i_j}(x_k) = b$. Täten jonot (c_{i_k}) ja (e_{i_k}) suppenevat. $\square$

4 Epäuniformit soluautomaatit

4.1 Yleiset ominaisuudet

Tässä luvussa käsitellään epäuniformien soluautomaattien yleisiä ominaisuuksia. Ensin määritellään epäuniformi soluautomaatti formaalisti.

Määritelmä 17. Olkoon $\mathcal{R}$ äärellinen joukko paikallisia sääntöjä tilajoukolla S ja naapurustolla N. Konfiguraatiota $\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$ kutsutaan *sääntöjakaumaksi*. *Epäuniformi soluautomaatti* on monikko $B = (S, N, \mathcal{R}, \theta)$.

Jatkossa joukon $\mathcal{R}$ oletetaan olevan äärellinen. Epäuniformin soluautomaatin B globaali päivitysfunktio on $H_\theta : S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$, joka kuvaa konfiguraation $c \in S^{\mathbb{Z}}$ konfiguraatioksi $H_\theta(c)$, jolle

$$H_\theta(c)(x) = \theta(x)(c(x + n_1), \ldots, c(x + n_m))$$

kaikilla $x \in \mathbb{Z}$. Jos B on selvä kontekstista, siihen yleensä viitataan funktiolla H_θ.

Määritelmä 18. Olkoon $B = (S, N, \mathcal{R}, \theta)$ epäuniformi soluautomaatti, missä $N = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$. Olkoon D äärellinen alue. Merkitään $\theta_D : D \to \mathcal{R}$, joka kuvaa $\theta_D(x) = \theta(x)$ kaikilla $x \in D$.

Osittainen epäuniformi päivitysfunktio on funktio $h_{\theta_D} : S^{N(D)} \to S^D$ joka kuvaa

$$h_{\theta_D}(p)(x) = \theta(x)(p(x + n_1), p(x + n_2), \ldots, p(x + n_m))$$

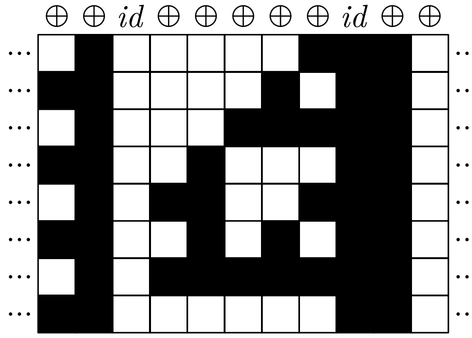
kaikilla $p \in S^{N(D)}, x \in D$.

Esimerkki 3. Olkoon $S = \{0, 1\}$, $N = (0, 1)$, $\mathcal{R} = \{id, \oplus\}$, missä $id : S^2 \to S$ kuvaa $id(a, b) = a$ ja $\oplus : S^2 \to S$ on XOR-automattin paikallinen sääntö kuten esimerkissä 1. Olkoon $\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$ sääntöjakauma, jolle

$$\theta(x) = \begin{cases} id, & \text{jos } x = 0 \text{ tai } x = 6, \\ \oplus & \text{muuten.} \end{cases}$$

Monikko $(S, N, \mathcal{R}, \theta)$ on epäuniformi soluautomaatti. Sen toiminta on esitetty kuvassa 4.

Seuraavaksi todistetaan, että epäuniformin soluautomaatin päivitysfunktio on jatkuva.



Kuva 4: Esimerkin 3 epäuniformin soluautomaatin toiminta. Ylimmällä rivillä on kuvattu kyseisen solun paikallinen sääntö. Tilat 0 ja 1 on kuvattu vastaavasti valkoisilla ja mustilla soluilla.

Lause 9. *Olkoon $\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$, $H_\theta : S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$ ja $(c_i) = c_1, c_2, \ldots$ suppeneva jono konfiguraatioita $c_i \in S^{\mathbb{Z}}$ kaikilla $i \in \mathbb{Z}_+$, ja $\lim_{i\to\infty} c_i = c$. Jono $H_\theta(c_1), H_\theta(c_2), \ldots$ suppenee, ja*

$$\lim_{i\to\infty} H_\theta(c_i) = H_\theta(c).$$

Todistus. Olkoon H_θ automaatin $B = (S, N, \mathcal{R}, \theta)$ globaali päivitysfunktio ja $x \in \mathbb{Z}$. Merkitään $N = (n_1, \ldots, n_m)$. Koska $c = \lim_{i\to\infty} c_i$, kaikille $j \in \{1, \ldots, m\}$ on olemassa $k_j \in \mathbb{Z}_+$, jolle $c_i(x + n_j) = c(x + n_j)$ kaikilla $i \geq k_j$. Olkoon $k = \max(k_1, \ldots, k_m)$. Nyt kaikilla $i \geq k$

$$\begin{aligned} H_\theta(c_i)(x) &= \theta(x)(c_i(x+n_1), \ldots, c_i(x+n_m)) \\ &= \theta(x)(c(x+n_1), \ldots, c(x+n_m)) \\ &= H_\theta(c)(x). \end{aligned}$$

Koska $x \in \mathbb{Z}$ on mielivaltainen, kaikille $x \in \mathbb{Z}$ siis on $k \in \mathbb{Z}$, jolle $H_\theta(c_i)(x) = H_\theta(c)(x)$ kaikilla $i \geq k$. Täten $H_\theta(c_1), H_\theta(c_2), \ldots$ suppenee raja-arvolla $H_\theta(c)$. $\square$

Seuraavaksi todistetaan, että epäuniformi soluautomaatti on surjektiivinen jos ja vain jos se on surjektiivinen kaikilla äärellisillä alueilla. Tämä tulos on verrannollinen lauseeseen 5.

Lause 10. *Olkoon $\mathcal{R}$ joukko paikallisia sääntöjä ja $\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$. Epäuniformi soluautomaatti H_θ on surjektiivinen jos ja vain jos $h_{\theta_{[i,j]}}$ on surjektiivinen kaikilla $i, j \in \mathbb{Z}$ joilla $i \leq j$.*

Todistus. Ensin oletetaan, että H_θ on surjektiivinen. Olkoon $i, j \in \mathbb{Z}$, $i \leq j$ ja sana $w \in S^{j-i+1}$. Olkoon $r \in \mathbb{Z}_+$ tarpeeksi suuri, että paikalliset säännöt joukossa $\mathcal{R}$

voidaan määritellä r-säteisellä naapurustolla. Olkoon $c \in S^{\mathbb{Z}}$ konfiguraatio, jolle pätee $c_{[i,j]} = w$. Koska H_θ on surjektiivinen, on olemassa $e \in S^{\mathbb{Z}}$, jolle $H_\theta(e) = c$. Nyt $h_{\theta_{[i,j]}}(e_{[i-r,j+r]}) = w$. Täten $h_{\theta_{[i,j]}}$ on surjektiivinen.

Seuraavaksi oletetaan, että $h_{\theta_{[i,j]}}$ on surjektiivinen kaikilla $i, j \in \mathbb{Z}$ joilla $i \leq j$. Olkoon $c \in S^{\mathbb{Z}}$ ja $(e_i) = e_1, e_2, \ldots$ jono konfiguraatioita $e_i \in S^{\mathbb{Z}}$ kaikilla $i \in \mathbb{Z}_+$, jolle pätee

$$H_\theta(e_i)_{[-i,i]} = c_{[-i,i]}.$$

Merkitään $c_i = H_\theta(e_i)$. Nyt selvästi jono $(c_i) = c_1, c_2, \ldots$ suppenee raja-arvolla $\lim_{i\to\infty} c_i = c$. Lauseen 3 mukaan jonolla (e_i) on suppeneva osajono (e_{i_j}). Merkitään $\lim_{j\to\infty} e_{i_j} = e$. Nyt lauseen 9 mukaan

$$\lim_{j\to\infty} c_{i_j} = \lim_{j\to\infty} H_\theta(e_{i_j}) = H_\theta(e).$$

Koska (c_{i_j}) on jonon (c_i) osajono, lemman 2 mukaan

$$\lim_{j\to\infty} c_{i_j} = \lim_{i\to\infty} c_i = c.$$

Siis $c = H_\theta(e)$, eli konfiguraatiolla c on alkukuva. Funktio H_θ on siis surjektiivinen.

□

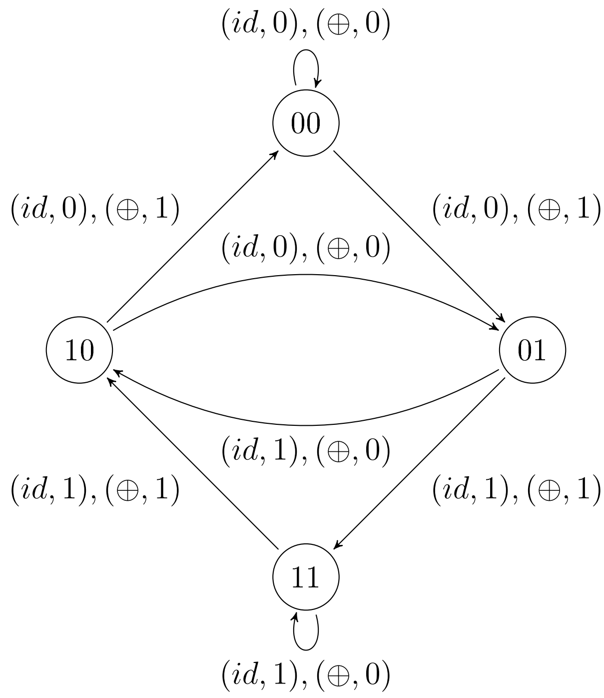
4.2 Surjektiiviset ja injektiiviset sääntöjakaumat

Tässä luvussa tarkastellaan surjektiivisten ja injektiivisten sääntöjakaumien joukkoja. Näytetään, että surjektiivisten jakaumien joukko on sofinen siirtoavaruus, ja että injektiivisten jakaumien joukko on $\omega\omega$-säännöllinen kieli. Ensin määritellään de Bruijn -graafi. Tämä luku perustuu lähteeseen [3].

Määritelmä 19. Olkoon $\mathcal{R}$ joukko paikallisia sääntöjä ja $m \in \mathbb{Z}_+$ tarpeeksi suuri, että joukon $\mathcal{R}$ säännöt voidaan määritellä m-pituisella naapurustolla. Joukon $\mathcal{R}$ *de Bruijn graafi* on nimellinen suunnattu moniviivainen graafi $\mathcal{G} = (V, E)$, jossa $V = S^{m-1}$ ja kaikille $f \in \mathcal{R}$, $w \in S^{m-2}$ ja $a, b \in S$ joukossa E on viiva (aw, wb) nimellä $(f, f(awb))$.

De Bruijn -graafi on soluautomaatin paikallisten sääntöjen graafinen esitys.

Esimerkki 4. Olkoon $S = \{0, 1\}, N = (-1, 0, 1)$ ja $\mathcal{R} = \{id, \oplus\}$, missä $id(a, b, c) = b$ ja $\oplus(a, b, c) = |a - c|$. Joukon $\mathcal{R}$ de Bruijn -graafi $\mathcal{G}$ on esitetty kuvassa 5.



Kuva 5: Esimerkin 4 graafi $\mathcal{G}$. Samojen pisteiden väliset viivat on yhdistetty.

Seuraavaksi todistetaan, että surjektiivisten jakaumien joukko on sofinen siirtoavaruus. Merkinnällä (ψ, u) tarkoitetaan joukon $(\mathcal{R} \times S)^*$ alkiota

$$(f_1, a_1)(f_2, a_2)\dots(f_n, a_n),$$

jolle $\psi = f_1 f_2 \dots f_n$ ja $u = a_1 a_2 \dots a_n$.

Lemma 5. *Olkoon $\mathcal{G} = (V, E)$ sääntöjoukon $\mathcal{R}$ de Bruijn -graafi. Olkoon $\mathcal{A} = (Q, (\mathcal{R} \times S), T, I, F)$ äärellinen automaatti, missä $Q = I = F = V$ ja $(q, a, q') \in T$ jos on a-niminen viiva $(q, q') \in E$. Tällöin $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{(\psi, u) \in (\mathcal{R} \times S)^* \mid h_\psi^{-1}(u) \neq \emptyset\}$.*

Todistus. Parille $(\psi, u) \in (\mathcal{R} \times S)^n$ pätee $h_\psi^{-1}(u) \neq \emptyset$ jos ja vain jos on $w \in S^{n+m}$, jolle pätee $h_\psi(w) = u$. Määritelmän mukaan näin käy jos ja vain jos graafissa $\mathcal{G}$ on reitti joka käy tiloissa $w_{[0,m-1]}, \dots, w_{[n,n+m-1]}$ viivojen $(\psi_0, u_0), \dots, (\psi_{n-1}, u_{n-1})$ kautta. Tämä pätee jollekkin $w \in S^{n+m}$ jos ja vain jos $(\psi, u) \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. [3] $\square$

Lause 11. *Olkoon $\mathcal{R}$ joukko paikallisia sääntöjä, ja*

$$\mathcal{L} = \{\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}} \mid H_\theta \text{ on surjektiivinen}\}.$$

Kieli $\mathcal{L}$ on sofinen siirtoavaruus.

Todistus. Olkoon $\mathcal{F} = \{\psi \in \mathcal{R}^* \mid h_\psi$ ei ole surjektiivinen$\}$. Lauseen 10 mukaan $\mathcal{L}$ on nyt siirtoavaruus, jonka määrää kiellettyjen kuvioiden joukko $\mathcal{F}$.

Olkoon $\mathcal{G}$ joukon $\mathcal{R}$ de Bruijn graafi, ja $\mathcal{A}$ tälle automaatti kuten lemmassa 5. Nyt siis lemman 5 mukaan $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{(\psi, u) \in (\mathcal{R} \times S)^* \mid h_\psi^{-1}(u) \neq \emptyset\}$. Olkoon $\overline{\mathcal{A}} = (Q, (\mathcal{R} \times S)^*, T, I, F)$ automaatti joka hyväksyy kielen

$$\overline{\mathcal{L}} = \{(\psi, u) \in (\mathcal{R} \times S)^* \mid h_\psi^{-1}(u) = \emptyset\}.$$

Lauseen 1 mukaan tällainen automaatti on olemassa. Olkoon $\mathcal{B} = (Q, \mathcal{R}^*, T', I, F)$, jossa kaikille $(q, (f, a), q') \in T$ on $(q, f, q') \in T'$. Automaatti $\mathcal{B}$ tunnistaa sanan $\psi \in \mathcal{R}^*$ jos ja vain jos on olemassa sana $u \in S^*$, jolle $(\psi, u) \in \overline{\mathcal{L}}$, eli jos ja vain jos h_ψ ei ole surjektiivinen. Täten $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{F}$ ja $\mathcal{L}$ siis on sofinen siirtoavaruus. [3] $\square$

Seuraavaksi todistetaan, että injektiivisten jakaumien joukko on $\omega\omega$-säännöllinen. Tätä varten ensin määritellään sääntöjoukon tulograafi.

Määritelmä 20. Olkoon $\mathcal{R}$ äärellinen joukko paikallisia sääntöja ja $\mathcal{G} = (V, E)$ sen de Bruijn graafi. Joukon $\mathcal{R}$ *tulograafi* on nimellinen graafi $\mathcal{P} = (V \times V, W)$, missä $((u, u'), (v, v')) \in W$ nimellä $(f, a) \in \mathcal{R} \times S$ jos ja vain jos $(u, v), (u', v') \in E$ ja molemmilla viivoilla on sama nimi (f, a).

Lemma 6. *Olkoon $\mathcal{A} = (Q, S, T, Q, F)$ äärellinen automaatti ja P automaatin $\mathcal{A}$ kaikkien kaksisuuntaisten äärettömien reittien joukko. Kaksisuuntainen ääretön kieli*

$$\mathcal{L} = \{c \in S^{\mathbb{Z}} \mid \exists p \in P, q \in F, i \in \mathbb{Z} : p(i) = q \textit{ ja } c \textit{ on reitin } p \textit{ nimi.}\}$$

on $\omega\omega$-säännöllinen.

Todistus. Olkoon $\mathcal{A}' = (Q \times \{0, 1\}, S, T', Q \times \{0\}, Q \times \{1\})$, missä

$$\begin{aligned} T' = &\{((q, 0), a, (q', 0)) | (q, a, q') \in T\} \\ &\cup \{((q, 1), a, (q', 1)) | (q, a, q') \in T\} \\ &\cup \{((q, 0), a, (q', 1)) | q \in F, (q, a, q') \in T\}. \end{aligned}$$

Jos $c \in \mathcal{L}$, on olemassa $i \in \mathbb{Z}$, jolle automaatilla $\mathcal{A}$ on kaksisuuntainen ääretön reitti

$$\dots \xrightarrow{c(i-2)} q_{i-1} \xrightarrow{c(i-1)} q_i \xrightarrow{c(i)} q_{i+1} \xrightarrow{c(i+1)} q_{i+2} \xrightarrow{c(i+2)} \dots,$$

missä $q_j \in Q$ kaikilla $j \in \mathbb{Z}$, ja $q_i \in F$. Tällöin automaatti $\mathcal{A}'$ hyväksyy kaksisuuntaisen äärettömän reitin

$$\dots \xrightarrow{c(i-2)} (q_{i-1},0) \xrightarrow{c(i-1)} (q_i,0) \xrightarrow{c(i)} (q_{i+1},1) \xrightarrow{c(i+1)} (q_{i+2},1) \xrightarrow{c(i+2)} \dots,$$

eli $c \in \mathcal{L}^{\omega\omega}(\mathcal{A}')$

Jos $c \notin \mathcal{L}$ ja automaatilla $\mathcal{A}$ on kaksisuuntainen ääretön reitti nimellä c, mikään lopputila ei esiinny reitissä. Täten jos automaatilla $\mathcal{A}'$ on reitti nimellä c sen kaikki tilat ovat $(q,0)$ tai kaikki tilat ovat $(q,1)$ jollain $q \in Q$, eli reitti ei ole hyväksyvä. Täten $c \notin \mathcal{L}^{\omega\omega}(\mathcal{A}')$. Siis $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\omega\omega}(\mathcal{A}')$, eli $\mathcal{L}$ on $\omega\omega$-säännöllinen. □

Lause 12. *Olkoon $\mathcal{R}$ joukko paikallisia sääntöjä, ja*

$$\mathcal{L} = \{\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}} \mid H_\theta \text{ on injektiivinen}\}.$$

Kieli $\mathcal{L}$ on $\omega\omega$-säännöllinen.

Todistus. Olkoon $\mathcal{P} = (V, E)$ joukon $\mathcal{R}$ tulograafi. Olkoon $\mathcal{A} = (Q, \mathcal{R} \times S, T, I, F)$ automaatti, jolle $Q = I = V$, $F = \{(v, v') \in V \mid v \neq v'\}$, ja $(q, \psi, q') \in T$ jos ja vain jos on viiva $(q, q') \in E$ jonka nimi on (ψ, a) jollain $a \in S$.

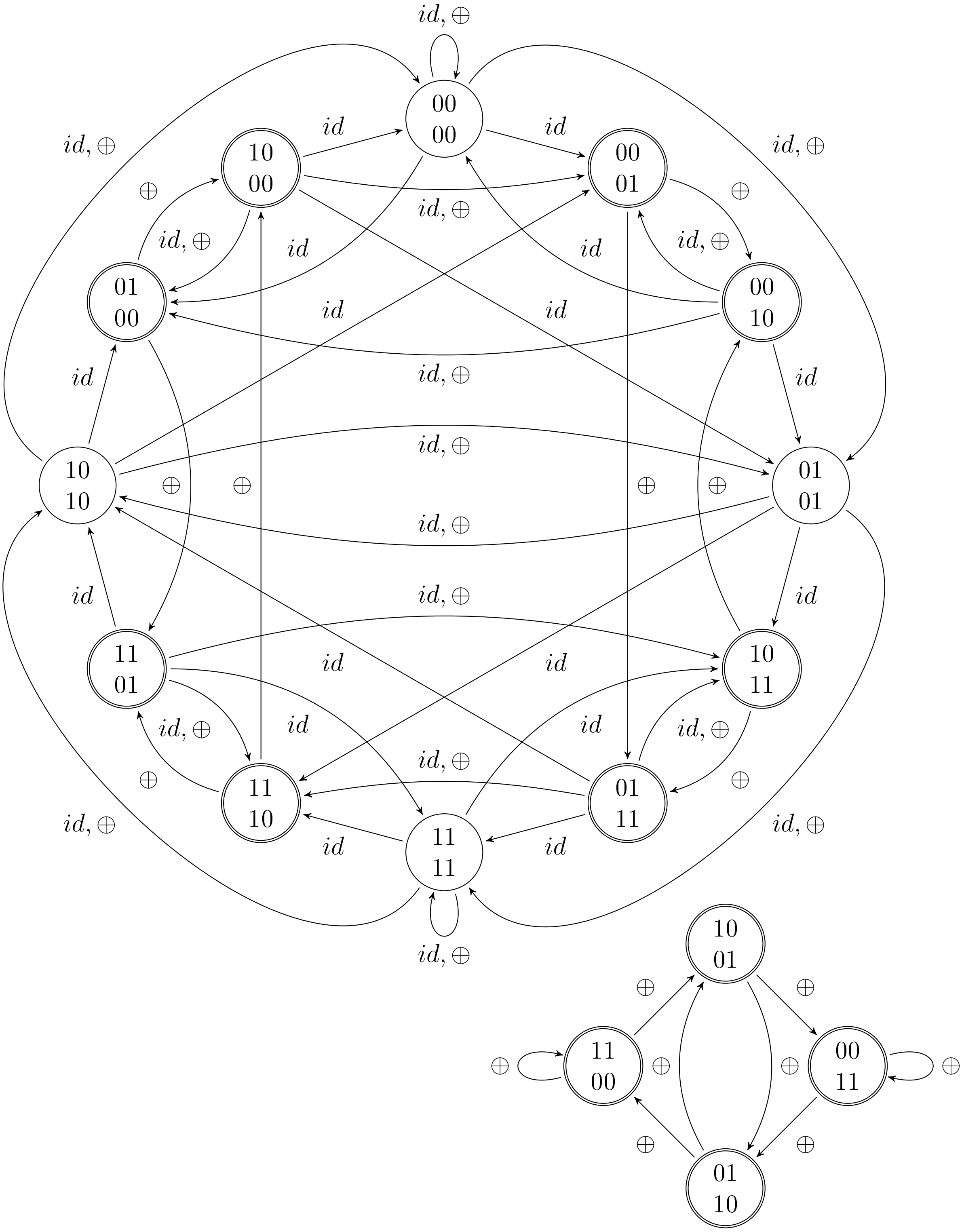
Olkoon $\mathcal{G}$ joukon $\mathcal{R}$ de Bruijn graafi. Jos on olemassa kaksisuuntainen ääretön reitti graafissa $\mathcal{P}$ nimellä $(\theta, c) \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}} \times S^{\mathbb{Z}}$, niin graafissa $\mathcal{G}$ on kaksi ääretöntä reittiä, joiden läpi käymät tilat määrittävät konfiguraatiot $e_1, e_2 \in S^{\mathbb{Z}}$, joille $H_\theta(e_1) = H_\theta(e_2) = c$. Nyt automaatin $\mathcal{A}$ reitti p nimellä θ määrää konfiguraatiot $e_1, e_2 \in S^{\mathbb{Z}}$, joille $H_\theta(e_1) = H_\theta(e_2)$. Toisaalta jakauma $\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$ ja kaksi konfiguraatiota $e_1, e_2 \in S^{\mathbb{Z}}$, joille $H_\theta(e_1) = H_\theta(e_2)$, yksikäsitteisesti määräävät automaatin $\mathcal{A}$ reitin p. Sellaisten automaatin $\mathcal{A}$ reittien, jotka käyvät hyväksyvässä tilassa ainakin kerran, joukko siis on

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}} &= \{\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}} \mid \exists c, e \in S^{\mathbb{Z}} : c \neq e \text{ ja } H_\theta(c) = H_\theta(e)\} \\ &= \{\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}} \mid H_\theta \text{ ei ole injektiivinen}\}. \end{aligned}$$

Lemman 6 mukaan on olemassa äärellinen automaatti, joka hyväksyy kielen $\overline{\mathcal{L}}$. Selvästi $\mathcal{L} = \mathcal{R}^{\mathbb{Z}} \setminus \overline{\mathcal{L}}$. Lemman 1 mukaan $\mathcal{L}$ on $\omega\omega$-säännöllinen. [3] □

Esimerkki 5. Olkoon $\mathcal{R}$ kuten esimerkissä 3. Lauseen 12 todistuksessa konstruoitu automaatti $\mathcal{A}$ sääntöjoukolle $\mathcal{R}$ on esitetty graafisesti kuvassa 6.

Lause 13. *Olkoon $\mathcal{L}$ sofinen siirtoavaruus. Kieli $\mathcal{L}$ on $\omega\omega$-rationaalinen.*



Kuva 6: Lauseen 12 todistuksen automaatti $\mathcal{A}$ esimerkin 3 sääntöjoukolle. Samojen pisteiden väliset viivat on yhdistetty. Kaksoisympyrällä merkityt tilat ovat hyväksyviä tiloja.

Todistus. Koska $\mathcal{L}$ on sofinen, sen määrää kiellettyjen kuvioiden joukko $\mathcal{F}$, joka on rationaalinen kieli. Olkoon

$$S^*\mathcal{F}S^* = \{w \in S^* \mid \exists u \in \mathcal{F}, v_1, v_2 \in S^* : w = v_1 u v_2\}.$$

Joukko $S^*\mathcal{F}S^*$ on siis sellaisten sanojen joukko, jotka sisältävät jonkin joukon $\mathcal{F}$ sanan. Selvästi $S^*\mathcal{F}S^*$ määrää saman siirtoavaruuden kuin $\mathcal{F}$. Koska $\mathcal{F}$ on säännöllinen, myös $S^*\mathcal{F}S^*$ on säännöllinen.

Olkoon $\mathcal{C} = S^* \setminus S^*\mathcal{F}S^*$. Koska millään kielen $\mathcal{C}$ sanoista ei ole osasanaa kielestä $\mathcal{F}$, tämä pätee myös kaikkien kielen $\mathcal{C}$ sanojen osasanoille. Täten jos $w \in \mathcal{C}$, sen kaikille osasanoille $u \in S^*$ pätee $u \in \mathcal{C}$.

Koska $S^*\mathcal{F}S^*$ on säännöllinen, sen komplementtikieli $\mathcal{C}$ on säännöllinen. Olkoon $\mathcal{A} = (Q, S, T, I, F)$ automaatti, joka hyväksyy kielen $\mathcal{C}$. Olkoon P automaatin $\mathcal{A}$ reittien joukko, ja

$$\begin{aligned} Q' = \{q \in Q \mid \exists n, m \in \mathbb{Z}_+ : \exists a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in S, q_I \in I, q_F \in F :& \\ q_I \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_n} q, q \xrightarrow{b_1} \dots \xrightarrow{b_m} q_F \in P\},& \end{aligned}$$

eli Q' on sellaisten joukon Q tilojen joukko, joihin on reitti jostain alkutilasta ja joista on reitti johonkin lopputilaan. Olkoon

$$T' = \{(q, a, q') \in T \mid q, q' \in Q', a \in S\}.$$

Olkoon $\mathcal{A}' = \{Q', S, T', Q', Q'\}$ äärellinen automaatti. Koska $\mathcal{A}$ hyväksyy kielen $\mathcal{C}$, kaikilla kielen sanoilla on hyväksyvä reitti automaatilla $\mathcal{A}$, joten niillä on myös hyväksyvä reitti automaatilla $\mathcal{A}'$. Toisaalta koska kaikki kielen $\mathcal{C}$ sanojen osasanat ovat myös kielessä $\mathcal{C}$, ei automaatti $\mathcal{A}'$ hyväksy sanoja jotka eivät ole kielessä $\mathcal{C}$. Automaatti $\mathcal{A}'$ siis hyväksyy kielen $\mathcal{C}$.

Näytetään, että automaatti $\mathcal{A}'$ hyväksyy $\omega\omega$-kielen $\mathcal{L}$. Jos $c \in \mathcal{L}$, niin minkään kielen $\mathcal{F}$ sanojen kopio ei ole konfiguraatiossa c. Siis automaatti $\mathcal{A}'$ hyväksyy jokaisen konfiguraation c sisältämän sanan, eli kompaktisuuden nojalla automaatilla on oltava kaksisuuntainen ääretön reitti nimellä c. Koska kaikki automaatin $\mathcal{A}'$ tilat ovat alku- ja lopputiloja, se hyväksyy reitin c.

Toisaalta jos $\mathcal{A}'$ hyväksyy reitin c, siinä ei esiinny yhtäkään joukon $\mathcal{F}$ sanan kopiota. Täten $c \in \mathcal{L}$. Siis automaatti $\mathcal{A}'$ hyväksyy $\omega\omega$-kielen $\mathcal{L}$, eli $\mathcal{L}$ on $\omega\omega$-säännöllinen. □

Seuraavassa esimerkissä nähdään, että on olemassa sääntöjoukko, jonka injektiivisten jakaumien joukko ei ole sofinen siirtoavaruus.

Esimerkki 6. Olkoon $S = \{0,1\}$, $N = (0,1)$ ja $\mathcal{R} = \{id, \oplus\}$. Kaksisuuntaiset äärettömät kielet

$$\mathcal{L} = \{\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}} \mid H_\theta \text{ on injektiivinen}\}$$

ja $\overline{\mathcal{L}} = S^{\mathbb{Z}} \setminus \mathcal{L}$ eivät ole siirtoavaruuksia.

Todistus. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, $w \in \mathcal{R}^n$ sana ja $\theta_w \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$ sääntöjakauma, joille

$$\theta_w(x) = \begin{cases} w(x), & \text{jos } x \in [0, n-1], \\ id, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Näytetään, että epäuniformi soluautomaatti H_{θ_w} on injektiivinen. Olkoon $c, e \in S^{\mathbb{Z}}$ eroavat konfiguraatiot $c \neq e$. Jos $c(x) \neq e(x)$ solussa $x \in \mathbb{Z}$ jolla $\theta_w(x) = id$, selvästi $H_{\theta_w}(c) \neq H_{\theta_w}(e)$. Oletetaan, että jos $\theta_w(x) = id$, niin $c(x) = e(x)$. Tällöin on solu $y \in \mathbb{Z}$, jolla $\theta_w(x) = \oplus$ ja kaikilla $z > y, z \in \mathbb{Z}$ pätee $c(z) = e(z)$. Tällöin joko $c(y) = c(y+1)$ ja $e(y) \neq e(y+1)$, tai $c(y) \neq c(y+1)$ ja $e(y) = e(y+1)$, eli $H_{\theta_w}(c)(y) \neq H_{\theta_w}(e)(y)$. Siis $H_{\theta_w}(c) \neq H_{\theta_w}(e)$, eli H_{θ_w} on injektiivinen.

Toisaalta olkoon $\psi_w \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$ sääntöjakauma, jolle

$$\psi_w(x) = \begin{cases} w(x), & \text{jos } x \in [0, n-1], \\ \oplus, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Näytetään, että soluautomaatti H_{ψ_w} ei ole injektiivinen. Ensin oletetaan, että $\psi_w(x) = \oplus$ kaikilla $x \in \mathbb{Z}$. Olkoon $c_0, c_1 \in S^{\mathbb{Z}}$ konfiguraatioita, joille pätee $c_0(x) = 0$ ja $c_1(x) = 1$ kaikilla x. Nyt selvästi $H_{\psi_w}(c_0) = c_0$ ja $H_{\psi_w}(c_1) = c_0$, eli H_{ψ_w} ei ole injektiivinen

Oletetaan sitten, että sana w sisältää symbolin id. Tällöin on olemassa $y \in \mathbb{Z}$, jolle $\psi_w(y) = id$ ja kaikille $z > y$, $z \in \mathbb{Z}$ pätee $\psi_w(z) = \oplus$. Olkoon $e \in S^{\mathbb{Z}}$ konfiguraatio, jolle

$$e(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \leq y, \\ 1, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tällöin $H_{\psi_w}(e) = c_0$ ja $H_{\psi_w}(c_0) = c_0$, eli H_{ψ_w} ei ole injektiivinen.

Nyt kaikilla $w \in \mathcal{R}^*$ jakaumat $\theta_w \in \mathcal{L}$ ja $\psi_w \in \overline{\mathcal{L}}$. Näytetään, että kielet $\mathcal{L}$ ja $\overline{\mathcal{L}}$ eivät ole siirtoavaruuksia. Oletetaan, että on kiellettyjen kuvioiden joukko $\mathcal{F}$ joka määrää kielen $\mathcal{L}$. Olkoon $u \in \mathcal{R}^*$ sana, joka sisältää jonkin joukon $\mathcal{F}$ kuvion. Nyt $\theta_u \notin \mathcal{L}$, joka on ristiriita. Todistus kielelle $\overline{\mathcal{L}}$ on samanlainen. $\square$

4.3 Eedenin puutarha -lauseesta

Toisin kuin tavallisille soluautomaateille, Eedenin puutarha -lause ei yleisesti päde epäuniformeille soluautomaateille.

Lause 14. *On olemassa epäuniformi soluautomaatti, jonka globaali päivitysfunktio $H_\theta : S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$ on surjektiivinen, mutta ei ole pre-injektiivinen.*

Todistus. Olkoon σ siirto vasemmalle ja σ^{-1} siirto oikealle. Olkoon $B = (S, N, \mathcal{R}, \theta)$ epäuniformi soluautomaatti, missä $S = \{0, 1\}$, $N = (-1, 0, 1)$, $\mathcal{R} = \{\sigma, \sigma^{-1}\}$, ja $\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$ sääntöjakauma, jolle

$$\theta(x) = \begin{cases} \sigma^{-1}, & \text{jos } x \leq 0, \\ \sigma, & \text{jos } x > 0 \end{cases}$$

kaikilla $x \in \mathbb{Z}$. Olkoon H_θ tämän automaatin globaali päivitysfunktio.

Olkoon $c \in S^{\mathbb{Z}}$. Nyt jos $c' \in S^{\mathbb{Z}}$ on konfiguraatio, jolle

$$c'(x) = \begin{cases} c(x+1), & \text{jos } x < 0, \\ c(x-1), & \text{jos } x > 1, \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

kaikilla $x \in \mathbb{Z}$, niin kaikilla $y \leq 0$

$$H_\theta(c')(y) = c'(y-1) = c(y),$$

ja kaikilla $y > 0$

$$H_\theta(c')(y) = c'(y+1) = c(y).$$

Siis $H_\theta(c') = c$, eli H_θ on surjektiivinen.

Toisaalta olkoon $e_1, e_2 \in S^{\mathbb{Z}}$ konfiguraatioita, joille $e_1(x) = 0$ ja

$$e_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

kaikilla $x \in \mathbb{Z}$. Konfiguraatiot e_1 ja e_2 ovat asymptoottisia, mutta $H_\theta(e_1) = e_1 = H_\theta(e_2)$. Funktio H_θ siis ei ole pre-injektiivinen. □

Lause 15. *On olemassa epäuniformi soluautomaatti, jonka globaali päivitysfunktio $H_\theta : S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$ on pre-injektiivinen, mutta ei ole surjektiivinen.*

$\cdots$	a	b	c	d	e	f	g	h	$\cdots$
$\cdots$	$*$	a	b	c	f	g	h	$*$	$\cdots$
$\cdots$	$*$	$*$	a	b	g	h	$*$	$*$	$\cdots$
$\cdots$	$*$	$*$	$*$	a	h	$*$	$*$	$*$	$\cdots$

$\cdots$	a	b	c	d	e	f	g	h	$\cdots$
$\cdots$	b	c	d	e	d	e	f	g	$\cdots$
$\cdots$	c	d	e	d	e	d	e	f	$\cdots$
$\cdots$	d	e	d	e	d	e	d	e	$\cdots$

Kuva 7: Lauseiden 14 (vasen) ja 15 (oikea) todistuksissa esitettyjen soluautomaattien toiminta.

Todistus. Olkoon σ siirto vasemmalle ja σ^{-1} siirto oikealle. Olkoon $B = (S, N, \mathcal{R}, \theta)$ epäuniformi soluautomaatti, missä $S = \{0, 1\}$, $N = (-1, 0, 1)$, $\mathcal{R} = \{\sigma, \sigma^{-1}\}$, ja $\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$ sääntöjakauma, jolle

$$\theta(x) = \begin{cases} \sigma, \text{ jos } x \leq 0, \\ \sigma^{-1}, \text{ jos } x > 0 \end{cases}$$

kaikilla $x \in \mathbb{Z}$. Olkoon H_θ tämän automaatin globaali päivitysfunktio.

Olkoon $c_1, c_2 \in S^{\mathbb{Z}}$ asymptoottisia konfiguraatioita, joille $c_1 \neq c_2$. On siis jokin solu $x \in \mathbb{Z}$, jolla $c_1(x) \neq c_2(x)$. Jos $x \leq 0$, niin $H_\theta(c_1)(x-1) \neq H_\theta(c_2)(x-1)$. Jos taas $x > 0$, niin $H_\theta(c_1)(x+1) \neq H_\theta(c_2)(x+1)$. Siis $H_\theta(c_1) \neq H_\theta(c_2)$, eli H_θ on pre-injektiivinen.

Toisaalta olkoon $e \in S^{\mathbb{Z}}$ konfiguraatio, jolle

$$e(x) = \begin{cases} 1, \text{ jos } x \in [0, 1], \\ 0, \text{ muuten.} \end{cases}$$

Oletetaan, että on olemassa $e' \in S^{\mathbb{Z}}$, jolle pätee $H_\theta(e') = e$. Koska $e(-1) = e(2) = 0$, nyt $e'(0) = e'(1) = 0$. Mutta tällöin $e(0) = H_\theta(e')(0) = e'(1) = 0$, joka on ristiriita. Siis konfiguraatiolla e ei ole alkukuvaa, eli H_θ ei ole surjektiivinen. □

Esimerkin 15 soluautomaatti on myös injektiivinen, eli epäuniformin soluautomaatin injektiivisyys ei ole ekvivalenttia bijektiivisyyden kanssa. Toisaalta jos sääntöjakauma on periodinen, Eedenin puutarha -lause pätee, koska tällöin epäuniformi soluautomaatti voidaan redusoida tavalliseksi soluautomaatiksi.

Lemma 7. *Konfiguraatiot $c, e \in S^{\mathbb{Z}}$ ovat asymptoottisia jos ja vain jos $B_n(c)$ ja $B_n(e)$ ovat asymptoottisia.*

Todistus. Oletetaan, että c ja e ovat asymptoottisia. Nyt on olemassa jotkin $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, joille kaikille $x \in \mathbb{Z}$ joille $x < x_1$ tai $x > x_2$, pätee $c(x) = e(x)$. Tällöin kaikille

$y \in \mathbb{Z}$ joille $y < \lfloor \frac{x_1}{n} \rfloor$ tai $y > \lfloor \frac{x_2}{n} \rfloor$ pätee $B_n(c)(y) = B_n(e)(y)$, eli $B_n(c)$ ja $B_n(e)$ ovat asymptoottiset.

Oletetaan, että $B_n(c)$ ja $B_n(e)$ ovat asymptoottisia. Nyt on olemassa jotkin $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, joille kaikille $x \in \mathbb{Z}$ joille $x < x_1$ tai $x > x_2$, pätee $B_n(c)(x) = B_n(e)(x)$. Tällöin kaikille $y \in \mathbb{Z}$ joille $y < n(x_1 - 1)$ tai $y > n(x_2 + 1)$ pätee $c(y) = e(y)$. eli c ja e ovat asymptoottiset. □

Lause 16. *Olkoon $\mathcal{R}$ äärellinen joukko paikallisia sääntöjä, ja $\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$ periodinen sääntöjakauma. Globaali päivitysfunktio H_θ on surjektiivinen jos ja vain jos se on pre-injektiivinen.*

Todistus. Olkoon S automaatin H_θ symbolijoukko, $n \in \mathbb{Z}_+$ luku, jolla $\sigma^n(\theta) = \theta$ ja $m \in \mathbb{Z}_+$ tarpeeksi suuri, että H_θ voidaan määritellä m-säteisellä naapurustolla. Olkoon $A = (S^n, N, f)$, missä N on $(\lfloor \frac{2m}{n} \rfloor + 1)$-säteinen naapurusto, ja $f : (S^n)^{|N|} \to S^n$ paikallinen sääntö, joka kuvaa sanan $w \in (S^n)^{|N|}$

$$f(w) = h_{[0,n-1]}(w).$$

Olkoon automaatin A globaali päivitysfunktio G. Olkoon $B_n : S^{\mathbb{Z}} \to (S^n)^{\mathbb{Z}}$ ryhmittelyfunktio. Ryhmittelyfunktion toiminta on esitetty graafisesti kuvassa 8. Mielivaltaiselle konfiguraatiolle $c \in S^{\mathbb{Z}}$ pätee

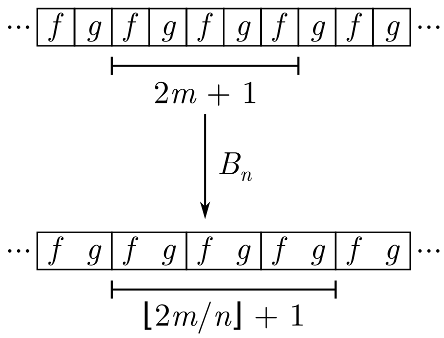
$$B_n(H_\theta(c))(x) = (H_\theta(c)(nx), \ldots, H_\theta(c)(nx + n - 1)) = G(B_n(c))(x),$$

siis $B_n(H_\theta(c)) = G(B_n(c))$. Täten koska B_n on bijektio, H_θ on surjektiivinen jos ja vain jos G on surjektiivinen.

Toisaalta olkoon $c_1, c_2 \in S^{\mathbb{Z}}$ asymptoottisia. Lemman 7 mukaan $B_n(c_1)$ ja $B_n(c_2)$ ovat asymptoottiset. Nyt koska B_n on bijektio, $H_\theta(c_1) = H_\theta(c_2)$ jos ja vain jos $G(B_n(c_1)) = B_n(H_\theta(c_1)) = B_n(H_\theta(c_2)) = G(B_n(c_2))$. Täten H_θ on pre-injektiivinen jos ja vain jos G on pre-injektiivinen.

Koska G on tavallinen soluautomaatti, lauseen 8 mukaan G on surjektiivinen jos ja vain jos se on pre-injektiivinen. Koska H_θ on surjektiivinen jos ja vain jos G on surjektiivinen sekä pre-injektiivinen jos ja vain jos G on pre-injektiivinen, H_θ on surjektiivinen jos ja vain jos H_θ on pre-injektiivinen.

□



Kuva 8: Lauseen 16 todistuksen ryhmittelyfunktion toiminta.

5 Rekurrentit sääntöjakaumat

Tässä luvussa osoitetaan, että Eedenin puutarha -lause pätee epäuniformeille soluautomaateille, joiden sääntöjakauma on rekurrentti. Todistuksen rakenne on hyvin samanlainen, kuin lauseen 8. Ensin osoitetaan lemmaa 3 vastaava epäyhtäsuuruus.

Lemma 8. *Olkoon $s, n, r, k \in \mathbb{Z}_+$. Kaikille riittävän suurille $m \in \mathbb{Z}_+$, pätee*

$$(s^n - 1)^m s^{n(k-m)} < s^{kn-2r}.$$

Todistus. Lemman 3 mukaan kaikille riittävän suurille $m \in \mathbb{Z}_+$,

$$(s^n - 1)^m < s^{mn-2r}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}(s^n - 1)^m s^{n(k-m)} &< s^{mn-2r} s^{n(k-m)} \\ &= s^{kn-mn+mn-2r} \\ &= s^{kn-2r}.\end{aligned}$$

□

Seuraavaksi todistetaan Eedenin puutarha -lause.

Lause 17. *Olkoon $\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$ rekurrentti sääntöjakauma. Jos H_θ ei ole surjektiivinen, se ei ole pre-injektiivinen.*

Todistus. Olkoon $r \in \mathbb{Z}_+$ tarpeeksi suuri, että H_θ voidaa määritellä r-säteisillä paikallisilla säännöillä. Merkitään $s = |S|$. Oletetaan, että H_θ ei ole surjektiivinen. Lauseen 10 mukaan on olemassa $i, j \in \mathbb{Z}$, joille $h_{\theta_{[i,j]}}$ ei ole surjektiivinen. Merkitään

$n = |j - i| + 1$. On siis olemassa jokin sana $w \in S^n$, jolla ei ole $h_{\theta_{[i,j]}}$ alkukuvaa. Koska θ on rekurrentti, siinä on äärettömän monta sanan $\theta_{[i,j]}$ kopiota.

Olkoon $q \in S$ ja $k \in \mathbb{Z}_+$. Olkoon C yhtenäinen alue, jonka pituus on kn ja C' yhtenäinen alue sen keskellä, jonka pituus on $kn - 2r$. Olkoon

$$K = \{c \in S^{\mathbb{Z}} \,|\, \mathrm{supp}_q(c) \subseteq C'\}.$$

Nyt $|K| = s^{|C'|} = s^{kn-2r}$.

Koska jakaumassa θ esiintyy äärettömän monta sanan $\theta_{[i,j]}$ kopiota, siinä myös esiintyy äärettömän monta sanan $\theta_{[i,j]}$ kopiota, jotka ovat luvun n monikertojen erottamat. Olkoon $m \in \mathbb{Z}_+$ tällaisten kopioiden lukumäärä sanassa θ_C. Koska tällaisia sanan $\theta_{[i,j]}$ kopioita esiintyy konfiguraatiossa θ äärettömän monta kertaa, jos k on tarpeeksi suuri, m voi olla mielivaltaisen suuri.

Koska sanalla w ei ole $h_{\theta_{[i,j]}}$ alkukuvaa, se ei voi esiintyä minkään sanan $\theta_{[i,j]}$ kohdalla missään joukon $H_\theta(K)$ konfiguraatiossa. Konfiguraatioita joukossa $H_\theta(K)$ on siis enintään $(s^n - 1)^m s^{n(k-m)}$. Lemman 8 mukaan siis

$$|H_\theta(K)| \leq (s^n - 1)^m s^{n(k-m)} < s^{kn-2r} = |K|.$$

Täten on oltava konfiguraatiot $c_1, c_2 \in K$, joille $c_1 \neq c_2$ ja $H_\theta(c_1) = H_\theta(c_2)$. Täten H_θ ei ole pre-injektiivinen. □

Lause 18. *Olkoon $\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$ rekurrentti sääntöjakauma. Jos H_θ ei ole pre-injektiivinen, niin sillä on Eedenin puutarha.*

Todistus. Olkoon $r \in \mathbb{Z}_+$ tarpeeksi suuri, että H_θ voidaa määritellä $\frac{r}{2}$-säteisillä paikallisilla säännöillä. Merkitään $s = |S|$. Oletetaan, että H_θ ei ole pre-injektiivinen. Olkoon $c_1, c_2 \in S^{\mathbb{Z}}$ asymptoottisia konfiguraatioita, joille $c_1 \neq c_2$ ja $H_\theta(c_1) = H_\theta(c_2)$.

Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ tarpeeksi suuri, että on olemassa alue $[i + r, j - r]$ jonka pituus on $n - 2r$ ja jolle $\mathrm{diff}(c_1, c_2) \subseteq [i + r, j - r]$. Nyt alueen $[i, j]$ pituus on n. Olkoon $w_1, w_2 \in S^n$ sanoja, joille $w_1(x) = c_1(x)$ ja $w_2(x) = c_2(x)$ kaikilla $x \in [i, j]$.

Koska $H_\theta(c_1) = H_\theta(c_2)$, myös $h_{\theta_{[i',j']}}(w_1) = h_{\theta_{[i',j']}}(w_2)$ kaikilla $i', j' \in [i, j]$. Olkoon $c \in S^{\mathbb{Z}}$ konfiguraatio joka sisältää sanan w_1 kopion alueella $[i + y, j + y]$, jossa $y \in \mathbb{Z}$ on solu, jolle sana $\theta_{[i+y,j+y]}$ on sanan $\theta_{[i,j]}$ kopio. Olkoon $c' \in S^{\mathbb{Z}}$ konfiguraatio joka saadaan konfiguraatiosta c korvaamalla sanan w_1 sanalla w_2 alueessa $[i + y, j + y]$. Nyt jos jonkin solun $x \in \mathbb{Z}$ naapurusto $N(x)$ ei sisällä soluja joukosta $\mathrm{diff}(c, c')$, selvästi $H_\theta(c)(x) = H_\theta(c')(x)$. Toisaalta jos $N(x)$ sisältää soluja joukosta $\mathrm{diff}(c, c')$, se on enintään etäisyydellä $\frac{r}{2}$ eroavista soluista. Tällöin $x \in [i + y, j + y]$, eli

$$H_\theta(c)(x) = H_\theta(c_1)(x-y) = H_\theta(c_2)(x-y) = H_\theta(c')(x).$$

Siis $H_\theta(c) = H_\theta(c')$, eli sanan w_1 kopio voidaan korvata sanan w_2 kopiolla vaikuttamatta konfiguraation kuvaan, jos sana on samalla kohdalla kuin sanan $\theta_{[i,j]}$ kopio sääntöjakaumassa θ.

Olkoon C yhtenäinen alue pituudeltaan kn ja C' yhtenäinen alue sen keskellä pituudeltaan $kn - 2r$. Jos H_θ on surjektiivinen, niin on myös $h_{\theta_{C'}}$, eli jokaisella kuviolla alueella C' on alkukuva alueella C. Koska θ on rekurrentti, jakaumassa θ esiintyy äärettömän monta sanan $\theta_{[i,j]}$ kopiota, siinä myös esiintyy äärettömän monta sanan $\theta_{[i,j]}$ kopiota, jotka ovat luvun n monikertojen erottamat. Olkoon $m \in \mathbb{Z}_+$ tällaisten kopioiden lukumäärä sanassa θ_C. Koska konfiguraatiossa on äärettömän monta tällaista sanan $\theta_{[i,j]}$ kopiota, jos k on tarpeeksi suuri, m voi olla mielivaltaisen suuri. Lisäksi $m \leq k$.

Koska jokainen sana w_1 joka on luvun n monikerran eroittman sanan $\theta_{[i,j]}$ kohdalla voidaan korvata sanalla w_2, jokaisella kuviolla aluella C' on alkukuva jossa ei ole sanan w_1 kopiota samanlaisen sanan $\theta_{[i,j]}$ kopion kohdalla. Tällaisia kuvioita on $(s^n - 1)^m s^{n(k-m)}$. Toisaalta alueella C' on s^{kn-2r} kuviota. Lemman 8 mukaan jos k ja m ovat tarpeeksi suuria, $(s^n - 1)^m s^{n(k-m)} < s^{kn-2r}$, eli on jokin kuvio alueella C' jolla ei ole alkukuvaa. Nyt lauseen 10 mukaan automaatilla H_θ on Eedenin puutarha. □

Lause 19. *Olkoon $\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$ rekurrentti sääntöjakauma. H_θ on surjektiivinen jos ja vain jos se on pre-injektiivinen.*

Todistus. Väite seuraa lauseista 17 ja 18. □

Lause 20. *On olemassa paikallisten sääntöjen joukko $\mathcal{R} = \{f, g\}$ ja sääntöjakauma $\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$, missä*

$$\theta(x) = \begin{cases} f, & \text{jos } x = 0, \\ g, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

kaikilla $x \in \mathbb{Z}$, joille epäuniformi soluautomaatti H_θ on pre-injektiivinen mutta ei surjektiivinen.

Todistus. Olkoon $S = \{0, 1\}$ ja $N = (0, 1)$. Olkoon $g = \oplus$ XOR-automaatin paikallinen sääntö ja f sääntö, joka kuvaa $g(a, b) = 0$ kaikilla $a, b \in S$. Selvästi H_θ ei ole surjektiivinen, koska kaikilla $c \in S^{\mathbb{Z}}$ solu 0 saa tilan $H_\theta(c)(0) = 0$.

Olkoon $c, e \in S^{\mathbb{Z}}$ asymptoottiset konfiguraatiot joille $c \neq e$. Koska konfiguraatiot ovat asymptoottisia, on olemassa $x \in \mathbb{Z}$, jolle $c(x) \neq e(x)$ ja kaikille $y > x, y \in \mathbb{Z}$ pätee $c(y) = e(y)$. Jos $x \neq 0$, niin $H_\theta(c) \neq H_\theta(e)$ kuten esimerkissä 2.

Oletetaan, että $x = 0$. Koska c ja e ovat asymptoottisia, on olemassa $z \in \mathbb{Z}$, jolle $c(z) \neq e(z)$ ja kaikille $y < z, y \in \mathbb{Z}$ pätee $c(y) = e(y)$. Selvästi $z \leq x = 0$. Nyt jos $c(z) = c(z-1)$, niin $e(z) \neq e(z-1)$, eli $H_\theta(c)(z-1) \neq H_\theta(e)(z-1)$. Toisaalta jos $c(z) \neq c(z-1)$, koska mahdollisia tiloja on vain kaksi, pätee $e(z) = e(z-1)$, jolloin $H_\theta(c)(z-1) \neq H_\theta(e)(z-1)$. Siis H_θ on pre-injektiivinen. □

Lause 21. *On olemassa paikallisten sääntöjen joukko $\mathcal{R} = \{f, g\}$ ja sääntöjakauma $\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$, missä*

$$\theta(x) = \begin{cases} f, & \text{jos } x = 0, \\ g, & \text{muuten,} \end{cases}$$

kaikilla $x \in \mathbb{Z}$, joille epäuniformi soluautomaatti H_θ on surjektiivinen mutta ei pre-injektiivinen.

Todistus. Olkoon $S = \{0, 1\}$ ja $N = (-1, 0, 1)$. Olkoon $\oplus_\leftrightarrow, \oplus_\leftarrow$ ja $\oplus_\rightarrow$ paikallisia sääntöjä $S^3 \to S$, joille

$$\begin{aligned} \oplus_\leftrightarrow (a, b, c) &= |a - c|, \\ \oplus_\leftarrow (a, b, c) &= |a - b|, \\ \oplus_\rightarrow (a, b, c) &= |b - c|. \end{aligned}$$

Olkoon $\mathcal{R} = \{\oplus_\leftrightarrow, \oplus_\leftarrow, \oplus_\rightarrow\}$ ja $\psi \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$, joille

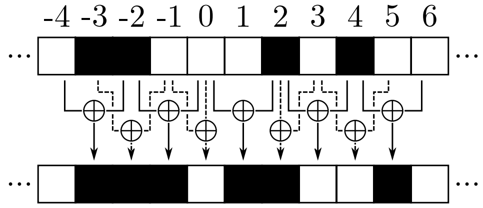
$$\psi(x) = \begin{cases} \oplus_\leftarrow, & \text{jos } x = 0, \\ \oplus_\rightarrow, & \text{jos } x = 2, \\ \oplus_\leftrightarrow, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Automaatin H_ψ toiminta on esitetty graafisesti kuvassa 9.

Olkoon $c, e \in S^{\mathbb{Z}}$ konfiguraatioita, joille $c(x) = 0$ ja

$$e(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x = 1, \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

kaikilla $x \in \mathbb{Z}$. Nyt c ja e ovat asymptoottisia ja $c \neq e$. Toisaalta selvästi $H_\psi(c) = c = H_\psi(e)$, eli H_ψ ei ole pre-injektiivinen.



Kuva 9: Lauseen 21 todistuksen automaatin H_ψ toiminta.

Toisaalta, olkoon $c \in S^{\mathbb{Z}}$ mielivaltainen. Olkoon $e \in S^{\mathbb{Z}}$ konfiguraatio, jolle

$$e(x) = \begin{cases} |c(0) - c(1)| \text{ jos } x = -1, \\ c(1), \text{ jos } x = 0, \\ 0, \text{ jos } x \in [1,2], \\ c(2) \text{ jos } x = 3, \\ |e(x+2) - c(x+1)| \text{ jos } x < -1, \\ |e(x-2) - c(x-1)| \text{ jos } x > 3, \end{cases}$$

kaikilla $x \in \mathbb{Z}$. Nähdään, että

$$\begin{aligned} H_\psi(e)(0) &= \oplus_{\leftarrow}(|c(0) - c(1)|, c(1), 0) = ||c(0) - c(1)| - c(1)| = c(0) \\ H_\psi(e)(1) &= \oplus_{\leftrightarrow}(c(1), 0, 0) = |c(1) - 0| = c(1), \\ H_\psi(e)(2) &= \oplus_{\rightarrow}(0, 0, c(2)) = |0 - c(2)| = c(2), \end{aligned}$$

ja kaikille $x < 0, y > 2$

$$\begin{aligned} H_\psi(e)(x) &= \oplus_{\leftrightarrow}(|e(x+1) - c(x)|, e(x), e(x+1)) = ||e(x+1) - c(x)| - e(x+1)| = c(x), \\ H_\psi(e)(y) &= \oplus_{\leftrightarrow}(e(y-1), e(y), |e(y-1) - c(y)|) = |e(y-1) - |e(y-1) - c(y)|| = c(y). \end{aligned}$$

Siis $H_\psi(e) = c$, eli H_ψ on surjektiivinen.

Olkoon $h_0, h_1, h_2 \in \mathcal{R}$. Merkitään $(h_0, h_1, h_2) : (S^3)^3 \to S^3$, joka kuvaa

$$\begin{aligned} &(h_0, h_1, h_2)((a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)) \\ &= (h_0(c_0, a_1, b_1), h_1(a_1, b_1, c_1), h_2(b_1, c_1, a_2)) \end{aligned}$$

Olkoon $B_3 : S^{\mathbb{Z}} \to (S^3)^{\mathbb{Z}}$ ryhmittelyfunktio, $f = (\oplus_{\leftarrow}, \oplus_{\leftrightarrow}, \oplus_{\rightarrow})$, $g = (\oplus_{\leftrightarrow}, \oplus_{\leftrightarrow}, \oplus_{\leftrightarrow})$ ja $\theta \in (\mathcal{R}^3)^{\mathbb{Z}}$ kuten määritelty aikaisemmin. Selvästi kaikille $c \in S^{\mathbb{Z}}$ pätee

$$H_\theta(B_3(c)) = B_3(H_\psi(c)),$$

ja koska B_3 on bijektio, H_θ on surjektio. Toisaalta lemman 7 mukaan konfiguraatiot $c, e \in S^{\mathbb{Z}}$ ovat asymptoottiset jos ja vain jos $B_3(c)$ ja $B_3(e)$ ovat asymptoottiset, eli H_θ ei ole pre-injektio.

$\square$

6 Yhteenveto

Nähtiin, että uniformien ja epäuniformien soluautomaattien surjektiivisuus- ja injektiivisyysominaisuudet eroavat toisistaan huomattavasti. Eedenin puutarhalause, joka on yksi tavallisten soluautomaattien perustavanlaatuisista lauseista, ei päde yleisesti epäuniformeille soluautomaateille. Rajoittamalla epäuniformit soluautomaatit vain rekurrentteihin tapauksiin lause kuitenkin pätee. Erityisesti tätä rajoitettua joukkoa ei väida redusoida tavallisiksi soluautomaateiksi. Lisäksi nähtiin, että epäuniformien soluautomaattien surjektiivisten ja injektiivisten jakaumien joukot ovat sofisia siirtoavaruuksia ja säännöllisiä kieliä vastaavasti.

7 Viitteet

[1] Martin, G. 1970. *The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life".* Mathematical games. Scientific American, 224 (4), 120-123.

[2] Linz, P. 2012. *An Introduction to Formal Languages and Automata, Fifth Edition.* Jones & Bartlett Learning, Sudbury, MA.

[3] Dennuzio, A., Formenti, E., Provillard, R. 2013. *Local rule distributions, language complexity and non-uniform cellular automata.* Theoretical Computer Science, 504, 38-50.

[4] Büchi, J. R. 1990. *On a Decision Method in Restricted Second Order Arithmetic.* In: Mac Lane, S., Siefkes, D. (eds) The Collected Works of J. Richard Büchi. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8928-6_23

[5] Hedlund, G.A. 1969. *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system.* Math. Systems Theory 3, 320–375. https://doi.org/10.1007/BF01691062

[6] Kari, J. *Cellular Automata.* Luentomoniste, Turun yliopisto, 2022.

[7] Myhill, J. 1963 *The converse of Moore's Garden-of-Eden theorem.* Proceedings of the American Mathematical Society, 14, 685-686.

[8] Moore, E. F. 1962. *Machine models of self-reproduction*. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 14, 17–33.