

# Topologiset solitonit ja niiden kvantisointi

Pro Gradu  
Turun yliopisto  
Teoreettinen fysiikka  
2023  
LuK Jaakko Luomala  
Tarkastajat:  
dos. Iiro Vilja  
dos. Juha-Pekka Pellonpää

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO  
Fysiikan laitos

**Luomala, Jaakko** Topologiset solitonit ja niiden kvantisointi

Pro Gradu, 92 s.  
Teoreettinen fysiikka  
Maaliskuu 2023

---

Tässä tutkielmassa perehdytään topologisesti epätriviaaleihin kenttäkonfiguraatioihin eli topologisiin solitoneihin eri kenttäteorioissa. Topologiset solitonit ovat teorian topologisesti epätriviaaleissa sektoreissa esiintyviä stabiileja ratkaisuja. Erityisesti tarkastellaan kinkkiä, Ginzburgin–Landaun vorteksia, 't Hooftin–Polyakovin monopolia ja Yangin–Millsin instantonia. Avaruusajan ulottuvuudet joissa nämä solitonit ovat määritelty ovat kinkille  $(1+1)$ , vorteksille  $(2+1)$  ja monopolille ja instantonille  $(3+1)$ .

Kinkki on tässä tutkielmassa esimerkkimalli, jonka avulla esitellään kenttäteorioiden topologiaan liittyviä käsitteitä, kuten topologinen varaus ja Bogomolnyn raja. Ginzburgin–Landaun vorteksi on topologinen solitoni, joka esiintyy suprajohteita kuvaavassa Ginzburgin–Landaun teoriassa. Vorteksien avulla voidaan selittää tyyppin II suprajohteiden käyttäytymistä korkeissa magneettikenttien voimakkuuksissa. 't Hooftin–Polyakovin monopoli esiintyy  $SU(2)$ -symmetriaryhmään perustuvassa mittakenttäteoriassa ja toimii analogiana hypoteettiselle magneettiselle monopolille monimutkaisemmissa teorioissa. Instantonit ovat Euklidisessa avaruusajassa määriteltyjä topologisia solitoneja. Instantonit ovat hyödyllisiä erityisesti kvanttikenttäteorioissa, sillä instantoniratkaisut liittyvät kvanttitunneloitumiseen.

Tutkielmassa keskitytään topologisten solitonien ratkaisujen löytämiseen analyyttisesti, jos tämä on mahdollista, ja topologisen varauksen määrittämiseen. Lisäksi tutustutaan hieman topologisten solitonien esiintymiseen fysikaalisissa teorioissa. Klassisen teorian lisäksi tarkastellaan topologisten solitonien kvantisointia. Kvantisoinnissa keskitytään kinkin kvantisointiin, koska tämä selittää jo tärkeimmät erot teorian kvantisointiin tyhjiösektorissa. Kinkille lasketaan alimmassa approksimaatiossa kinkin energiatilat ja selitetään pääpiirteittäin, miten transitioamplitudi voidaan laskea solitonielle.

Asiasanat: Klassinen kenttäteoria, solitoni, topologinen solitoni, kinkki, vorteksi, magneettinen monopoli, instantoni

# Sisältö

<b>Johdanto</b>	<b>2</b>
<b>1 Matemaattinen ja fysikaalinen tausta</b>	<b>2</b>
1.1 Klassinen kenttäteoria . . . . .	2
1.2 Homotopia . . . . .	3
1.3 Topologinen aste . . . . .	5
1.4 Derrickin teoreema . . . . .	6
<b>2 Solitonit yleisesti</b>	<b>9</b>
2.1 Solitonien määritelmä ja ominaisuuksia . . . . .	9
2.2 Topologiset solitonit . . . . .	12
<b>3 Kinkki</b>	<b>14</b>
<b>4 Ginzburgin–Landaun vorteksi</b>	<b>18</b>
4.1 Ginzburgin–Landaun energia . . . . .	18
4.2 Vorteksien topologia . . . . .	22
4.3 Vorteksiratkaisut . . . . .	25
4.4 Vorteksit fysiikassa . . . . .	30
<b>5 Magneettinen monopoli</b>	<b>31</b>
5.1 ’t Hooftin–Polyakovin monopoli . . . . .	32
5.2 Magneettinen varaus . . . . .	38
5.3 Monopolit muissa teorioissa . . . . .	43
5.4 Viimeaikainen tutkimus . . . . .	45
<b>6 Instantoni</b>	<b>46</b>
6.1 Instantoni Yang–Mills-teoriassa . . . . .	47
6.2 Yang–Mills-teorian instantoniratkaisut . . . . .	52

6.3	Instantonien käyttö fysiikassa . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Solitonien kvantisointi</b>	<b>61</b>
7.1	Kvanttimekaniikka . . . . .	62
7.2	Staattinen kinkki . . . . .	67
7.2.1	Solitonisektorin energiatasot . . . . .	69
7.2.2	Kinkkisektorin muototekijät . . . . .	74
7.3	Kinkin transiioamplitudi funktionaali-integraalina . . . . .	81
<b>8</b>	<b>Yhteenveto</b>	<b>88</b>

## Johdanto

Tietyillä epälineaarilla osittaisdifferentiaaliyhtälöillä on ominaisuuksia, jotka sallivat ajassa muotonsa säilyttäviä ja avaruudessa lokalisoituneita ratkaisuja. Näitä ratkaisuja kutsutaan solitoneiksi. Solitonien tutkiminen fysiikassa alkoi 1800-luvulla vedessä esiintyvien aaltopulssien tutkimisesta [1]. Modernimpi esimerkki solitoneista on solitonit optisissa kuiduissa, joiden tutkiminen alkoi 1900-luvun lopulla [2].

Erikoistapaus solitoneista on topologiset solitonit, joita esiintyy joissakin kenttäteorioissa kenttäyhtälöiden ratkaisuna. Nämä kenttäkonfiguraatiot eroavat tavallisista solitoneista siinä, että ne eivät ole jatkuvasti muunnettavissa systeemin perustilaksi. Tämä topologinen ominaisuus tekee topologisista solitoneista normaaleja solitoneja pysyvämpiä.

Tässä tutkielmassa perehdytään muutamaa erilaiseen topologiseen solitoniin. Ensimmäisessä luvussa esitellään tärkeimmät fysikaaliset ja matemaattiset ideat, joita tarvitaan topologisten solitonien käsittelyssä. Toisessa luvussa määritellään solitonit yleisesti ja topologiset solitonit erikoistapauksena. Kolmannessa luvussa tarkastellaan  $(1+1)$ -ulotteisessa avaruusajassa määriteltyä kinkkiä, joka on yksinkertaisin topologinen solitoni. Kinkin avulla selitetään topologisten solitonien perusominaisuuksia. Neljännessä luvussa tarkastellaan  $(2+1)$ -ulotteisessa avaruusajassa määriteltyjä vortekseja, jotka mallintavat tyypin 2 suprajohteissa esiintyvää ilmiötä. Viidennessä luvussa siirrytään magneettisen monopolin tarkasteluun. Magneettiset monopolit ovat hypoteettisia kosmologisia hiukkasia, joita esiintyy useissa eri teorioissa. Kuudennessa luvussa esitellään instantoni, joka eroaa edellisistä esimerkeistä topologiselta rakenteeltaan. Instantonin topologinen rakenne määritellään koko avaruusajassa, kun edellisissä tapauksissa topologinen rakenne liittyy vain avaruuteen. Instantoneita löytyy useista teorioista, mutta tässä tutkielmassa keskitytään  $(3+1)$ -ulotteisessa avaruusajassa määriteltyyn Yang–Mills-instantoniin. Seitsemännessä luvussa perehdytään topologisten solitonien kvantisointiin. Kvantisointi esi-

tellään tässä tutkielmassa vain kinkille, koska tästä nähdään jo tärkeimmät kvantisointiin tarvittavat menetelmät. Tutkielmassa käytetään yksiköitä  $c = \hbar = 1$ , missä  $c$  on valonnopeus tyhjiössä ja  $\hbar$  on redusoitu Planckin vakio.

# 1 Matemaattinen ja fysikaalinen tausta

## 1.1 Klassinen kenttäteoria

Klassinen kenttäteoria käsittelee avaruusajassa määriteltyjä jatkuvia ja sileitä funktioita, jotka kuvaavat jonkin fysikaalisen systeemin käyttäytymistä, kuten kaikkialla avaruudessa määriteltyä kenttää tai nesteeseen tai kiinteään aineeseen rajoittunutta ilmiötä. Systeemistä riippuen avaruus on usein  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , ja avaruusaika  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ . Kenttä voi olla esimerkiksi skalaarikenttä  $\phi(t, \mathbf{x})$ , vektorikenttä  $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$  tai tensorikenttä. Näitä systeemejä kuvataan Lagrangen tiheyden  $\mathcal{L}$  avulla. Lagrangen tiheys on systeemiin liittyvien kenttien  $\phi_a$  ja niiden derivaattojen  $\partial\phi_a$  funktio. Systeemiä kuvaavat kenttäyhtälöt saadaan varioimalla vaikutusta

$$S = \int \mathcal{L}(\phi_a(t, \mathbf{x}), \partial\phi_a(t, \mathbf{x}), t, \mathbf{x}) dt d^d \mathbf{x} \quad (1.1)$$

kentän  $\phi_a$  suhteen, mikä johtaa jokaiselle  $a$ :lle Eulerin-Lagrangen yhtälöihin

$$\partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_a)} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0. \quad (1.2)$$

Tässä kentät  $\phi_a$  voivat olla minkä tahansa tyyppisiä, ja derivaatat tulkitaan sen mukaan. Lorentz invarianteissa teorioissa käytetään  $(d+1)$ -dimensioista Minkowskin avaruutta koordinaateilla  $(x^\mu) = (x^0, x^1, \dots, x^d) = (ct, \mathbf{x})$ , missä  $c$  on valonnopeus. Indeksejä nostetaan ja lasketaan Minkowskin metriikalla  $\eta^{\mu\nu}$ , jonka signatuuri on  $(1, -1, \dots, -1)$ . Vaikutus ja Eulerin-Lagrangen yhtälöt ovat tällöin

$$S = \int \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial\phi_a(x), x) d^{d+1}x \quad (1.3)$$

ja

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0. \quad (1.4)$$

Kentän kokonaisenergia  $E$  on

$$E = \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_a)} \partial_0 \phi_a - \mathcal{L} \right) d^d \mathbf{x}, \quad (1.5)$$

joka jaetaan liike-energiaan  $T$ , joka sisältää kenttien aikaderivaattatermit ja kenttien aikakomponenttitermit, ja energiaan  $V$ , joka sisältää kenttien paikkaderivaattatermeihin liittyvän pintaenergian ja kenttien paikkakomponenttitermeihin liittyvän potentiaalienergian. Energiaa  $V$  kutsutaan jatkossa kokonaisuudessaan potentiaalienergiaksi.

## 1.2 Homotopia

Joissakin klassisissa kenttäteorioissa esiintyy fysikaalisia ratkaisuja, joita ei voi muuntaa toisikseen jatkuvalla muunnoksella siten, että systeemin energia pysyy äärellisenä. Tätä varten tarvitaan topologiasta homotopian käsitettä. Olkoon  $f_1$  ja  $f_2$  jatkuvia kuvauksia  $f_i : X \rightarrow Y$ ,  $i = 1, 2$ , missä  $X$  ja  $Y$  ovat topologisia avaruuksia. Jos on olemassa jatkuva kuvaus  $F : X \times I \rightarrow Y$ , missä  $I = [0, 1]$ , jolle

$$F(x, 0) = f_1(x), \quad F(x, 1) = f_2(x) \quad \forall x \in X, \quad (1.6)$$

niin  $f_1$  ja  $f_2$  ovat homotooppisia ja  $F$  on homotopia kuvauksien  $f_1$  ja  $f_2$  välillä [3].

Homotopian lisäksi tarvitaan homotopiaryhmiä. Määritellään aluksi homotopian avulla ekvivalenssiluokat siten, että jatkuvat kuvaukset  $f$  ja  $g$  ovat ekvivalentit  $f \sim g$ , jos kuvaus  $f$  on homotooppinen kuvauksen  $g$  kanssa, eli ekvivalenssiluokat ovat [3]

$$[f] = \{g : X \rightarrow Y | g \sim f, f : X \rightarrow Y\}. \quad (1.7)$$

Oletetaan, että topologinen avaruus  $X$  on polkuyhtenäinen. Avaruuden  $X$  ensimmäinen homotopiaryhmä  $\pi_1(X)$  määritellään jatkuvien kuvauksien  $f : S^1 \rightarrow X$  ekvivalenssiluokkien  $[f]$  joukkona. Parametrisoinnilla  $S^1 \cong [0, 2\pi]$  jatkuvuusehto vaatii, että  $f(0) = f(2\pi)$ . Kuvaus  $f$  määrittää siis sulkeutuvan polun joukossa  $X$ . Jos kahdella polulla  $f$  ja  $g$  on sama lähtöpiste avaruudessa  $X$ , poluille voidaan määritellä tulo [3]

$$f * g = F(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq \pi, \\ g(2(s - \pi)), & \pi \leq s \leq 2\pi, \end{cases} \quad (1.8)$$

joka käy läpi ensi polun  $f$  ja sitten polun  $g$ . Tämän avulla määritellään suoraan tulo homotopiaryhmässä tulona  $[f] * [g] = [f * g]$ . Tässä määritelmässä kuvauksilla  $f$  ja  $g$  ei tarvitse olla samaa lähtöpistettä, vaan riittää, että lähtöpisteet voidaan yhdistää jatkuvalla kuvauksella. Samalla tavalla määritellään  $n$ :s homotopiaryhmä  $\pi_n(X)$ ,  $n \geq 1$ , kuvauksien  $f : S^n \rightarrow X$  avulla. Jos avaruus  $X$  koostuu erillisistä komponenteista, homotopiaryhmät määritellään jokaiselle erilliselle komponentille erikseen. Lisäksi määritellään erikseen  $\pi_0(X)$  topologisen avaruuden  $X$  erillisten komponenttien joukkona. Jos homotopiaryhmässä on vain yksi alkio, eli se on triviaali, merkitään  $\pi_n(X) = I$ .

Yksinkertainen esimerkki on  $X = S^1$ . Yleisyyttä loukkaamatta voidaan olettaa, että  $f(0) = 0$ , jolloin jatkuvuus toteutuu, kun  $f(2\pi) = p2\pi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . Lähtöavaruuden käydessä läpi arvot  $[0, 2\pi]$ , kuvauksen  $f$  täytyy siis kiertää maalijoukon  $S^1$  ympäri kokonaislukumäärän kierroksia. Kuvaus  $f$  voi vaihtaa kiertosuuntaa, mutta se on aina homotooppinen johonkin kuvaukseen, joka kiertää maalijoukon ympäri samaan suuntaan kokonaislukumäärän kierroksia. Jokaiseen ekvivalenssiluokkaan voidaan siis liittää yksikäsitteisesti kokonaisluku, joten  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ . Tätä kokonaislukua kutsutaan kiertoaluvuksi  $N$ . Kiertoalukua  $N = p \in \mathbb{Z}$  vastaavaksi edustajaksi voidaan valita esimerkiksi  $f(s) = ps$ . Jos valitaan toinen ekvivalenssiluokka  $[g]$ , jota vastaa kiertoaluku  $N = q$ , niin tulolla  $[f * g]$  on kiertoaluku  $N = p + q$ . Tämä on sel-

vää valitsemalla ekvivalenssiluokasta  $[g]$  edustaja  $\tilde{g}(s) = qs + p2\pi$  ja tarkastelemalla tuloa  $f * \tilde{g}$  määritelmässä (1.8). Kiertoluvut ovat siis additiivisia. Samantyyppisesti voidaan osoittaa, että  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$  kaikille  $n \in \mathbb{N}$  [3]. Tässä tapauksessa kiertoluku kertoo samaan tapaan, kuinka monta kertaa maalijoukon pisteiden yli pyyhkäistään, kun lähtöjoukon pisteet käydään läpi kerran.

### 1.3 Topologinen aste

Joissakin tapauksissa homotopialuokan kiertoluvun voi laskea tässä määritellyn topologisen asteen avulla [4]. Olkoon  $f$  kuvaus  $f : X \rightarrow Y$ , missä  $X$  ja  $Y$  ovat suljettuja orientoituvia monistoja, joilla on sama ulottuvuus,  $\dim(X) = \dim(Y) = d$ . Oletetaan, että kuvaus  $f$  on differentioituva kaikkialla, ja että monistot  $X$  ja  $Y$  ovat yhtenäisiä. Olkoon  $\omega = \omega_{12\dots d}(\mathbf{y})dy^1 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dy^d$  monistolla  $Y$  määritelty normalisoitu tilavuusmuoto eli

$$\int_Y \omega = 1. \quad (1.9)$$

Kuvaus  $f$  määrittelee  $d$ -muodon  $\omega$  'pullback'-kuvauksen  $f^*$ , joka kuvaa  $p$ -muodon monistolta  $Y$   $p$ -muodoksi monistolle  $X$ . Erityisesti  $f^*(\omega)$  on tilavuusmuoto monistolla  $X$ . Merkitään  $\alpha(\mathbf{y}) \equiv \omega_{12\dots d}$ . 'Pullback'-kuvaus on määritelmän mukaan

$$f^*(\omega) = \frac{1}{d!} \omega_{i_1 i_2 \dots i_d}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial y^{i_2}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial y^{i_d}}{\partial x^{j_d}} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_d} \quad (1.10)$$

$$= \alpha(\mathbf{y}(\mathbf{x})) \frac{\partial y^1}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial y^2}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial y^d}{\partial x^{j_d}} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_d} \quad (1.11)$$

$$= \alpha(\mathbf{y}(\mathbf{x})) J(\mathbf{x}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^d, \quad (1.12)$$

missä  $x^i$  on kartta monistolla  $X$  ja  $J(\mathbf{x}) = \det \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)$  on kuvauksen  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  Jakobiaani pisteessä  $\mathbf{x}$ . Kuvauksen  $f$  topologinen aste on nyt

$$\deg(f) = \int_X f^*(\omega). \quad (1.13)$$

Topologinen aste on kokonaisluku, ja täten topologinen invariantti, koska kokonaisluku ei voi muuttua jatkuvassa muunnoksessa. Topologinen aste on myös tilavuus-

muodosta  $\omega$  riippumaton.

Toinen tapa määrittää topologinen aste  $\deg(f)$  on laskemalla jonkin pisteen  $\mathbf{y} \in Y$  alkukuvat  $\mathbf{x} \in X$  merkillä  $\text{sign}(J(\mathbf{x}))$  kerrottuna. Vaaditaan, että pisteen  $\mathbf{y} \in Y$  alkukuvat  $\{\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{(p)}\}$  ovat erillisiä, ja että näissä pisteissä Jakobiaani ei ole nolla. Voidaan siis määritellä myös

$$\deg(f) = \sum_{i=1}^p \text{sign}(J(\mathbf{x}_{(i)})). \quad (1.14)$$

## 1.4 Derrickin teoreema

Homotopialuokkien avulla kenttäkonfiguraatiot voidaan jakaa eri topologisiin luokkiin, jotka mahdollistavat topologisesti erilaisten ratkaisujen olemassaolon. Ne eivät kuitenkaan anna tietoa kenttäyhtälöiden ratkaisujen olemassaolosta näissä homotopialuokissa. Jotta teoriassa voisi olla stabiileja topologisia solitoneja, energialla täytyy olla lokaaleja minimejä tyhjiön homotopialuokan lisäksi myös muissa homotopialuokissa. Toisaalta ratkaisut voivat olla myös muita stationäärisiä pisteitä, maksimeja tai satulapisteitä, jotka vastaavat solitonimaisia ratkaisuja. Tämän mahdollisuuden tutkimista varten on Derrickin teoreema [5]. Sen avulla voidaan sanoa, että joko stationäärisiä ratkaisuja, muita kuin tyhjiö, ei ole tai sitten niitä on mahdollista olla. Varmuutta niiden olemassaolosta se ei kuitenkaan anna.

Derrickin teoreema perustuu ideaan, että stationääriseen kenttäkonfiguraation energian variaation täytyy olla nolla pienillä kentän muunnoksilla. Näihin muunnoksiin sisältyy avaruuden skaalauksesta  $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$ ,  $\lambda > 0$ , aiheutuva kentän muunnos  $\Psi(\mathbf{x}) \rightarrow \Psi^{(\lambda)}(\mathbf{x})$ , missä kenttä  $\Psi$  on mikä tahansa kenttä tai kenttien kokoelma, jolla on äärellinen energia. Derrickin teoreema pätee vain litteässä avaruudessa  $\mathbb{R}^d$ . Lisäksi oletetaan, että kenttäkonfiguraatio  $\Psi(\mathbf{x})$  on staattinen. Olkoon parametria  $\lambda$  vastaavan kenttäkonfiguraation  $\Psi^{(\lambda)}(\mathbf{x})$  energia

$$E(\lambda) = E[\Psi^{(\lambda)}(\mathbf{x})], \quad (1.15)$$

kun kenttäkonfiguraatio  $\Psi(\mathbf{x})$  on kiinnitetty. Derrickin teoreema on:

Olkoon  $\Psi(\mathbf{x})$  mielivaltainen kenttäkonfiguraatio, jolla on äärellinen energia, mutta se ei ole tyhjiö. Oletetaan, että tätä vastaavalla funktiolla  $E(\lambda)$  ei ole stationaarisia pisteitä. Tällöin teorialla ei ole muita staattisia ratkaisuja, joilla on äärellinen energia, kuin tyhjiö.

Derrickin teoreeman käyttämistä varten täytyy määrittellä, miten erilaiset kentät muuntuvat avaruuden skaalauksessa [4]. Määritellään skalaarikentälle

$$\phi^{(\lambda)}(\mathbf{x}) = \phi(\lambda\mathbf{x}), \quad (1.16)$$

jolloin skalaarikentän gradientille saadaan

$$\nabla_{\mathbf{x}}\phi^{(\lambda)}(\mathbf{x}) = \lambda\nabla_{\lambda\mathbf{x}}\phi(\lambda\mathbf{x}). \quad (1.17)$$

Vektorikentälle  $\mathbf{V}$  ja 1-muodolle  $A$  määritellään luonnollisesti

$$\mathbf{V}^{(\lambda)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{V}(\lambda\mathbf{x}) \quad (1.18)$$

ja

$$A^{(\lambda)}(\mathbf{x}) = \lambda A(\lambda\mathbf{x}). \quad (1.19)$$

Koska kovariantti derivaatta  $D\phi$  ja 1-muoto  $A$  muuntuvat samalla tavalla, skalaarikentän  $\phi$  kovariantin derivaatan muunnos on

$$D_{A^{(\lambda)}}\phi^{(\lambda)}(\mathbf{x}) = (d\phi^{(\lambda)} + A^{(\lambda)}\phi^{(\lambda)})(\mathbf{x}) = \lambda D_A\phi(\lambda\mathbf{x}). \quad (1.20)$$

1-muotoa  $A$  vastaavan kenttätensarin  $F$ , jolla on komponentit  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ , muunnos on

$$F^{(\lambda)}(\mathbf{x}) = \lambda^2 F(\lambda\mathbf{x}). \quad (1.21)$$

Rajaehdot  $\phi(\mathbf{x}) = 0$ ,  $D\phi(\mathbf{x}) = 0$  ja  $F(\mathbf{x}) = 0$  äärettömyydessä säilyvät skaalauksessa, joten skaalaus pitää energian äärellisenä, eikä muuta kentän topologiaa.

Tarkastellaan esimerkkinä skalaariteoriaa, jonka energiafunktionaali staattiselle kentälle on muotoa

$$E[\phi] = \int_{\mathbb{R}^d} (W(\phi)\nabla\phi \cdot \nabla\phi + U(\phi)) d^d\mathbf{x}, \quad (1.22)$$

missä funktio  $W(\phi) \geq 0$  muuntuu samoin kuin kenttä  $\phi$ . Myös potentiaali  $U(\phi)$  muuntuu samoin kuin kenttä  $\phi$ . Merkitään eri energian termejä alaindeksillä  $a \in \mathbb{Z}$  siten, että alaindeksi kertoo termin skaalauksessa saaman kertoimen  $\lambda$  asteen. Voidaan siis kirjoittaa

$$E[\phi] = E_2 + E_0. \quad (1.23)$$

Nyt skaalatun kentän  $\phi^{(\lambda)}$  energia on

$$E(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} (W(\phi^{(\lambda)}(\mathbf{x}))\nabla\phi^{(\lambda)}(\mathbf{x}) \cdot \nabla\phi^{(\lambda)}(\mathbf{x}) + U(\phi^{(\lambda)}(\mathbf{x}))) d^d\mathbf{x} \quad (1.24)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} (\lambda^2 W(\phi(\lambda\mathbf{x}))\nabla_{(\lambda\mathbf{x})}\phi(\lambda\mathbf{x}) \cdot \nabla_{(\lambda\mathbf{x})}\phi(\lambda\mathbf{x}) + U(\phi(\lambda\mathbf{x}))) \frac{1}{\lambda^d} d^d(\lambda\mathbf{x}) \quad (1.25)$$

$$= \lambda^{2-d}E_2 + \lambda^{-d}E_0. \quad (1.26)$$

Arvoilla  $d=1, 2$  ja  $3$  saadaan

$$E(\lambda) = \begin{cases} \lambda E_2 + \frac{1}{\lambda} E_0, & d = 1 \\ E_2 + \frac{1}{\lambda^2} E_0, & d = 2 \\ \frac{1}{\lambda} E_2 + \frac{1}{\lambda^3} E_0, & d = 3. \end{cases} \quad (1.27)$$

Jos  $d \geq 3$ , energia  $E(\lambda)$  on aidosti vähenevä, joten energialla ei ole stationäärisä pisteitä ja teoriassa ei topologisia solitoneja. Jos  $d = 2$ , energia on myös aidosti vähenevä, paitsi jos energia  $E_0 = 0$ , eli jos esimerkiksi teoriassa ei ole potentiaalia  $U(\phi)$ . Energialla ei kuitenkaan ole stabiilia pistettä, joten teoriassa ei ole stabiileja topologisia solitoneja, mutta solitonimaisia epästabiileja ratkaisuja saattaa löytyä. Jos  $d = 1$ , energian  $\lambda E_2 + \frac{1}{\lambda} E_0$  derivaatalla  $E_2 - \frac{1}{\lambda^2} E_0$  on nollakohta  $\lambda = \sqrt{E_0/E_2}$ . Erityisesti, vaatimalla  $\lambda = 1$ , saadaan  $E_0 = E_2$  eli Derrickin teoreema antaa myös

viriaaliteoreeman energioiden välille. Tässä tapauksessa skalaariteoriasta löytyy siis mahdollisesti topologisia solitoneja. Näitä tarkastellaan luvussa 3. Tässä esimerkissä esitellyssä skalaariteoriassa esiintyy stabiileja topologisia solitoneja äärellisellä energialla vain tapauksessa  $d = 1$ . Tapauksessa  $d = 2$  esiintyy kuitenkin topologisia solitoneja, globaaleja vortekseja, jos energian sallitaan olla ääretön. Toinen vaihtoehto on kytkeä skalaarikenttä mittapotentiaaliin. Näitä tarkastellaan luvussa 4. Skalaariteoriaan voitaisiin lisätä korkeamman asteen derivaattatermejä, jolloin myös tapauksessa  $d = 3$  voi olla topologisia solitoneja, kuten skyrmioneja. Tämä esimerkki näyttää Derrickin teoreeman merkityksen teorioiden tutkimisessa. Se voi hyvin helposti kertoa, jos teoriassa ei ole topologisia solitoneja, jolloin niiden etsimiseen ei tarvitse käyttää aikaa. Se antaa myös viriaaliteoreeman teorioiden energioille siinä tapauksessa, kun stationäärisiä pisteitä löytyy.

## 2 Solitonit yleisesti

### 2.1 Solitonien määritelmä ja ominaisuuksia

Matemaattisesti solitoni määritellään avaruudessa vakionopeudella liikkuvana, muotonsa säilyttävänä lokaalina ratkaisuna epälineaarille osittaisdifferentiaaliyhtälölle [4]. Lokaalius tarkoittaa, että ratkaisun muoto on keskittynyt pääasiassa äärelliselle alueelle ja lähestyy vakiota, yleensä nollaa, suhteellisen nopeasti kaukana tästä alueesta. Esimerkiksi yhdessä ulottuvuudessa ratkaisu voidaan tällöin antaa muodossa  $f(t, x) = f(x \pm vt)$ , missä  $v$  on solitonin nopeus. Lokaalius tekee ratkaisuista hiukkasmaisia, joten solitoniratkaisuja kutsutaan usein hiukkasiksi. Yleensä matemaattisessa määritelmässä vaaditaan, että systeemi on integroitava. Tässä tapauksessa säilyvät suureet sisältävät hiukkasten lukumäärän ja niiden liikemäärät. Tämä johtaa siihen, että törmäyksen jälkeen, kaukana muista solitoneista, solitonit jatkavat liikettään samalla nopeudella ja saman muotoisina kuin ennen törmäystä. Solitonien

liikemäärien voidaan myös ajatella permutoituneen, koska solitoneja ei voida yksilöidä törmäyksen hetkellä. Törmäykset ovat siis elastisia. Vain solitonien vaihe voi muuttua, eli törmäyksen jälkeen yksittäinen pulssi on asympotoottisesti  $f(x - vt + \delta)$ .

Yksinkertainen esimerkki solitonista on esimerkiksi Korteweg-De Vries -yhtälön (KdV-yhtälö) solitoniratkaisu, joka on yksiulotteinen approksimaatio matalassa vedessä etenevälle aaltopulssille. KdV-yhtälö on [1]

$$\partial_t \phi(t, x) + 6\phi(t, x)\partial_x \phi(t, x) + \partial_x^3 \phi(t, x) = 0, \quad (2.1)$$

missä muuttujat  $t$  ja  $x$  ovat dimensiottomiksi skaalatut aika ja paikka koordinaatit ja kenttä  $\phi(t, x)$  on verrannollinen veden pinnan korkeuteen veden lepokorkeudesta. Koska etsitään solitoniratkaisua, kirjoitetaan  $\phi(t, x) = \phi(x - vt) = f(z)$ . Nyt ketjusäännöllä saadaan  $\partial_x \phi(x - vt) = f'(z)$  ja  $\partial_t \phi(x - vt) = -vf'(z)$ . Nyt yhtälö (2.1) on muotoa

$$f''' + 6ff' - vf' = 0 \quad (2.2)$$

Tämän voi integroida, jolloin saadaan

$$\int \frac{d}{dz}(f'')dz + 6 \int fdf - v \int df = 0 \quad (2.3)$$

$$\Leftrightarrow f'' + 3f^2 - vf + C = 0. \quad (2.4)$$

Koska äärellisellä ajalla  $t$  vaaditaan  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(t, x) = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} f(z) = 0$ , integrointivakion täytyy hävitä. Kertomalla tämä funktiolla  $f'$  ja integroimalla uudestaan saadaan

$$\int f' df' + 3 \int f^2 df - v \int f df = 0 \quad (2.5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}f'^2 + f^3 - \frac{1}{2}vf^2 + D = 0, \quad (2.6)$$

missä voidaan taas asettaa  $D = 0$ . Ratkaisemalla  $f'$  ja intergoimalla saadaan

$$f' = \pm \sqrt{vf^2 - 2f^3} \quad (2.7)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{df}{\sqrt{vf^2 - 2f^3}} = \pm(z + z_0) \quad (2.8)$$

$$\stackrel{f \geq 0}{\Leftrightarrow} -\frac{2}{\sqrt{v}} \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{v-2f}{v}} \right) = \pm(z + z_0) \quad (2.9)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{v-2f}{v}} = \tanh \left( \pm \frac{\sqrt{v}}{2} (z + z_0) \right) \quad (2.10)$$

$$\Leftrightarrow f = -\frac{1}{2}v \tanh^2 \left( \pm \frac{\sqrt{v}}{2} (z + z_0) \right) + \frac{1}{2}v \quad (2.11)$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{1}{2}v \frac{1}{\cosh^2 \left( \pm \frac{\sqrt{v}}{2} (z + z_0) \right)}. \quad (2.12)$$

Tässä oletettiin, että funktio  $f$  on positiivinen ja käytettiin identiteettiä  $1 - \tanh^2(x) = 1/\cosh^2(x)$ . Sijoitetaan sitten takaisin  $z = x - vt$ , ja merkitään  $z_0 = x_0$ . Valitsemalla  $+$ -merkkiä vastaava ratkaisu saadaan KdV-yhtälön ratkaisuksi

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2}v \frac{1}{\cosh^2 \left( \frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt - x_0) \right)}, \quad (2.13)$$

missä  $x_0$  on aallon huipun paikka hetkellä  $t = 0$ . Ratkaisusta nähdään, että aallon nopeus on verrannollinen sen amplitudiin, joten solitonit eri amplitudeilla etenevät eri nopeuksilla. Tämän tyyppisten solitoniratkaisujen olemassaolo osittaisdifferentiaaliyhtälölle perustuu dispersiorelaation ja yhtälön epälineaarisuuden vaikutuksen kumoutumiseen. Eri taajuiset aallot vedessä liikkuvat eri nopeuksilla, mikä johtaa useimmiten pulssien hajoamiseen. Jos pulssi on muotoa (2.13), pulssi ei kuitenkaan hajoa, mikä johtuu pohjimmiltaan kenttäyhtälön epälineaarisuudesta [6].

Fysiikassa solitonin määritelmää heikennetään hieman. Kentän itsessään ei tarvitse olla rajoittunut äärelliselle alueelle. Sen sijaan vaaditaan, että systeemin energiatiheys on lokaali, muotonsa säilyttävä ja vakionopeudella liikkuva funktio. Tämä tehdään, koska energiatiheys on fysikaalinen suure, mutta kentät eivät aina ole [6]. Esimerkiksi mittateoriassa kentän sallitaan olla paikkariippuvainen puhdas mitta kaukana solitonista, koska puhdas mitta ei muuta fysikaalisia suureita. Lisäksi

integroituvuudesta luovutaan, koska suurin osa merkittävistä fysikaalisista systeemeistä eivät ole integroituvia. Tällöin hiukkasten törmäykset eivät ole aina elastisia, vaan törmäyksissä osa energiasta voi vapautua säteilynä eikä hiukkaset aina jatka liikerataansa samaan suuntaan kuin ennen törmäystä. Tätä tapahtuu erityisesti topologisissa solitoneissa, joita käsitellään seuravassa luvussa. Integroimattomuudesta huolimatta näitä kutsutaan solitoneiksi tai solitonimaisiksi [4]. Hiukkasfysiikassa solitonit eroavat alkeishiukkasista siten, että solitonit ovat ratkaisuja koko epälineaariin kenttäyhtälöön, kun taas alkeishiukkaset saadaan kvantisoimalla linearisoidun kenttäyhtälön ratkaisu [6].

Solitoneille ei usein saada analyttistä ratkaisua, vaan se pitää etsiä numeerisesti. Erityisesti solitonien dynamiikka on usein vaikea laskea, joten solitonien vuorovaikutukset lasketaan pääasiassa numeerisesti [4].

## 2.2 Topologiset solitonit

Yksi erityinen solitonityyppi on topologiset solitonit. Topologiset solitonit ovat ratkaisuja liikeyhtälöille, kuten muutkin solitonit, mutta niiden pysyvyys perustuu kentän topologiaan [4]. Tavanomaiset solitonit ovat homotooppisia tyhjiöön, kun taas topologiset solitonit eivät ole. Topologisen luonteensa vuoksi ne eivät voi hajota säteilyksi tai alkeishiukkasiksi, jotka ovat molemmat homotooppisia tyhjiöön.

Kenttäteorioiden kenttäkonfiguraatiot luokitellaan niihin liittyvän topologian perusteella. Yleensä vain avaruus on tärkeä topologian kannalta, joten oletetaan, että kyseessä oleva kenttä  $\phi$  on aikariippumaton. Kenttä  $\phi$  on tässä tarkastelussa mielivaltainen. Rajoitutaan lisäksi Euklidiseen avaruuteen  $\mathbb{R}^d$ . Solitonien energiatheyden  $\mathcal{E}$  oletetaan häviävän äärettömyydessä  $r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , mikä asettaa kentälle  $\phi$  rajaehdon äärettömyydessä olevalla pallopinnalla  $S_\infty^{d-1}$ . Olkoon kentän maalijoukko  $Y$  eli kenttä on  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow Y$ . Oletetaan, että energiatheyden  $\mathcal{E}$  arvoa nolla, eli tyhjiötä, vastaa maalijoukon aliavaruus  $\mathcal{V} \in Y$ . Rajaehdon avulla voidaan sitten määritellä

kentän  $\phi$  rajoittuma äärettömyyteen kuvauksena

$$\phi^\infty : S_\infty^{d-1} \rightarrow \mathcal{V}. \quad (2.14)$$

Jos  $d = 1$ , niin  $S_\infty^0 = \{-\infty, +\infty\}$ . Rajaehdon määrittely pallolla, jolla on ääretön säde, ei tuota ongelmia, koska käytännössä kenttien asymptoottista käyttäytymistä voidaan kuvata avaruuskulmilla, joten topologisesti tilanne vastaa äärellisellä pallolla määriteltyä kuvausta. Kentän  $\phi^\infty$  topologian määrittelee siis oleellisesti homotopiaryhmä  $\pi_{d-1}(\mathcal{V})$ . Toisaalta kentän  $\phi$  arvot muualla avaruudessa  $\mathbb{R}^d$  ei vaikuta koko kenttäkonfiguraation  $\phi(\mathbf{x})$  topologian luokitteluun. Tämä seuraa siitä, että  $\mathbb{R}^d$  on kutistuva, joten siinä määritellyn jatkuvan kuvauksen topologia on aina triviaali, jos kuvaukselle ei aseteta rajoituksia. Siis kenttäkonfiguraation  $\phi(\mathbf{x})$  topologian määrittää täysin kuvauksen  $\phi^\infty$  topologia. Jokaiseen kenttäkonfiguraatioon  $\phi(\mathbf{x})$  voidaan liittää kuvauksen  $\phi^\infty$  homotopialuokka, joka kuuluu homotopiaryhmään  $\pi_{d-1}(\mathcal{V})$ , kun  $d \geq 2$ . Arvolla  $d = 1$  topologian määrittää  $\pi_0(\mathcal{V}) \times \pi_0(\mathcal{V})$ , sillä molemmille rajoille  $\pm\infty$  annetaan arvo joukosta  $\mathcal{V} \cong \pi_0(\mathcal{V})$ .

Usein homotopiaryhmä  $\pi_{d-1}(\mathcal{V})$  on diskreetti, joten kentän homotopialuokkaan liittyy säilyvä suure, koska diskreetti suure ei voi muuttua, kun kentän muutokset ovat jatkuvia. Tätä suureta kutsutaan topologiseksi varaukseksi. Yleensä kyseessä oleva homotopiaryhmä on isomorfinen kokonaislukuihin  $\mathbb{Z}$  ja tällöin topologista varausta vastaava kokonaisluku antaa hiukkasmäärän. Välillä solitonit voivat pakkautua päällekkäin, jolloin puhutaan  $N$ -solitonitilasta erillisten solitonien sijaan. Positiiviset luvut vastaavat solitoneja ja negatiiviset luvut vastaavat antisolitoneja. Nolla vastaa tyhjiön homotopialuokkaa, eli avaruudessa joko ei ole solitoneja, tai se sisältää saman määrän solitoneja ja antisolitoneja.

### 3 Kinkki

Tässä luvussa tarkastellaan yksinkertaisimpia skalaariteorioita, joissa on topologisia solitoneja, kinkkejä [4]. Avaruusaika on (1+1)-ulotteinen Minkowskin avaruus. Lagrangen tiheys on

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi), \quad (3.1)$$

missä  $\phi$  on reaalinen skalaarikenttä ja potentiaali  $U(\phi)$  on reaalinen ei-negatiivinen funktio. Eulerin-Lagrangen yhtälö tälle on

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\phi} - \phi'' + \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (3.2)$$

Kokonaisenergia on

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + U(\phi) \right) dx, \quad (3.3)$$

joka voidaan jakaa kineettiseen energiaan

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}^2 dx \quad (3.4)$$

ja potentiaalienergiaan

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \phi'^2 + U(\phi) \right) dx. \quad (3.5)$$

Oletetaan, että potentiaalin  $U(\phi)$  globaali minimi on nolla,  $U_{\min} = 0$ , jotta kokonaisenergia olisi äärellinen. Tämä voidaan aina tehdä lisäämällä potentiaaliin vakiofunktio, mikä ei muuta kenttäyhtälöitä tai energiaa. Oletetaan myös, että pisteet, joissa minimi saavutetaan, ovat erillisiä. Koska kaikki termit kokonaisenergiasa (3.3) ovat ei-negatiivisia, tyhjiötä vastaa vakiokenttä  $\phi(t, x) = \phi_0$ , jolle pätee  $U(\phi_0) = U_{\min} = 0$ . Nyt tyhjiöratkaisujen joukko on siis

$$\mathcal{V} = \{ \phi_0 \mid \dot{\phi}_0 = 0, \phi'_0 = 0, U(\phi_0) = U_{\min} = 0 \}. \quad (3.6)$$

Merkitään  $\phi_\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \in \mathcal{V}$ , missä raja-arvo määritetään kiinnitettyllä ja äärellisellä ajan hetkellä. Ratkaisun topologian määrää pari  $(\phi_-, \phi_+)$ , joka kuuluu

joukkoon  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \cong \pi_0(\mathcal{V}) \times \pi_0(\mathcal{V})$ . Koska pisteet joukossa  $\mathcal{V}$  ovat erillisiä, arvot  $\phi_{\pm}$  eivät voi muuttua ajassa. Teoriasta löytyy siis topologisesti eri ratkaisuja, kunhan  $|\mathcal{V}| > 1$ . Jos ratkaisulle pätee  $\phi_+ = \phi_-$ , ratkaisu on homotooppinen tyhjiöön. Jos taas  $\phi_+ \neq \phi_-$ , kyseessä on topologinen solitoni, jonka nimi on kinkki. Kinkkiä ei voi muuntaa jatkuvalla muunnoksella tyhjiöksi ilman, että kentän energia kasvaa äärettömäksi, sillä integraali potentiaalin  $U(\phi)$  yli on äärellinen vain, jos potentiaali  $U(\phi)$  on asympotoottisesti nolla eli kenttä  $\phi$  on asympotoottisesti  $\phi_{\pm}$ . Tämä ominaisuus tekee kinkistä topologisesti stabiilin, koska kentän aikakehityksessä energian vaaditaan olevan äärellinen.

Etsitään staattinen ratkaisu,  $\dot{\phi} = 0$ , jolloin Eulerin-Lagrangen yhtälö (3.2) on

$$\phi'' - \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (3.7)$$

Tämä voidaan ratkaista suoraan:

$$\frac{d\phi'}{dx} = \frac{dU}{d\phi} \quad (3.8)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\phi}{dx} \frac{d\phi'}{d\phi} = \frac{dU}{d\phi} \quad (3.9)$$

$$\Leftrightarrow \int \phi' d\phi' = \int dU \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\phi'^2 - U = C, \quad (3.11)$$

missä  $C$  on integrointivakio. Koska äärettömyydessä kentän derivaatta  $\phi'$  ja potentiaali  $U(\phi)$  häviävät, täytyy olla  $C = 0$ . Nyt saadaan

$$\phi' = \pm \sqrt{2U(\phi)}, \quad (3.12)$$

missä +-merkki vastaa kinkkiä ja --merkki vastaa antikinkkiä.

Ratkaisuista voidaan kertoa lisää tarkastelemalla epäyhtälöä [4]

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}}\phi' \pm \sqrt{U(\phi)} \right)^2 \geq 0. \quad (3.13)$$

Avaamalla sulut ja integroimalla koko avaruuden yli tästä saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2}\phi'^2 + U(\phi) \right) dx \geq \pm \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2U(\phi)}\phi' dx. \quad (3.14)$$

Tässä vasemmalla puolella on staattisen kentän energia  $E$ , joten energia toteuttaa epäyhtälön

$$E \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2U(\phi)} \phi' dx \right| = \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} \sqrt{2U(\phi)} d\phi \right|. \quad (3.15)$$

Koska potentiaali  $U(\phi) \geq 0$  ja oletetaan, että potentiaali on tarpeeksi säännöllinen, voidaan kirjoittaa  $U(\phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{dW(\phi)}{d\phi} \right)^2$  jollekin funktiolle  $W(\phi)$ . Tällöin integraali edellisessä yhtälössä voidaan laskea ja energialle saadaan alaraja

$$E \geq \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} \frac{dW}{d\phi} d\phi \right| = |W(\phi_+) - W(\phi_-)|. \quad (3.16)$$

Alaraja saavutetaan epäyhtälön (3.13) mukaan vain silloin, kun  $\phi' = \pm \sqrt{2U(\phi)}$ , mikä on sama yhtälö, kuin kenttäyhtälöstä johdettu yhtälö (3.12). Energian alaraja (3.16) on siten merkittävä, että se riippuu vain topologisesta tiedosta  $\phi_+$  ja  $\phi_-$ , ja se antaa siten energian alarajan jokaiselle homotopialuokalle erikseen.

Energian alarajaa, joka riippuu vain kentän topologiasta, kutsutaan Bogomolnyn rajaksi ja staattista, ensimmäisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöä, jonka ratkaisu saavuttaa Bogomolnyn rajan, kutsutaan Bogomolnyn yhtälöksi. Bogomolnyn yhtälön ratkaisut ovat siis myös kenttäyhtälön stabiileja ratkaisuja. Näitä on johdettu useille teorioille ja ne ovat usein hyödyllisempiä kuin kenttäyhtälöt, jotka ovat korkeampaa kertalukua [4].

Tarkastellaan tapausta, jossa potentiaali  $U(\phi)$  on polynomi. Yksinkertaisin tapaus, jossa äärellisiä minimejä on useampi kuin yksi, on neljännen asteen polynomi. Valitaan siis  $U(\phi) = \mu + \nu\phi^2 + \kappa\phi^4$ , missä  $\mu, \nu, \lambda \in \mathbb{R}$  ja  $\lambda > 0$ . Jälkimmäinen ehto varmistaa, että energia on alhaalta rajoitettu. Valitaan lisäksi  $\nu < 0$ , jotta potentiaalilla  $U(\phi)$  olisi kaksi erillistä minimiä, jolloin kentällä  $\phi$  voi olla epätriviaali topologia. Kirjoitetaan  $\kappa = \lambda/4$ ,  $\nu = -m^2/2$  ja  $\mu = m^4/(4\lambda)$ , jolloin potentiaalın  $U(\phi)$  minimi  $U_{\min} = 0$  ja voidaan kirjoittaa

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left( \frac{m^2}{\lambda} - \phi^2 \right)^2. \quad (3.17)$$

Potentiaalilla on minimi kentillä  $\phi = m/\sqrt{\lambda}$  ja  $\phi = -m/\sqrt{\lambda}$ , joten nyt tyhjiöratkaisujen joukko on  $\mathcal{V} = \{m/\sqrt{\lambda}, -m/\sqrt{\lambda}\}$ . Lagrangen tiheys (3.1) on nyt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} \left( \frac{m^2}{\lambda} - \phi^2 \right)^2 \quad (3.18)$$

ja kenttäyhtälöt (3.2)

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \lambda \left( \frac{m^2}{\lambda} - \phi^2 \right) \phi = 0. \quad (3.19)$$

Energian alaraja Bogomolnyn rajan (3.15) mukaan on

$$\begin{aligned} E &= \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left( \frac{m^2}{\lambda} - \phi^2 \right) d\phi \right| = \left| \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \Big|_{\phi_-}^{\phi_+} \left( \frac{m^2}{\lambda} \phi - \frac{1}{3} \phi^3 \right) \right| \\ &= \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left| \left( \frac{m^2}{\lambda} \phi_+ - \frac{1}{3} \phi_+^3 \right) - \left( \frac{m^2}{\lambda} \phi_- - \frac{1}{3} \phi_-^3 \right) \right|. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sijoittamalla  $\phi_+^2 = \phi_-^2 = m^2/\lambda$ , saadaan

$$E = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{2}{3} \frac{m^2}{\lambda} |\phi_+ - \phi_-| = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} \left| \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} (\phi_+ - \phi_-) \right| = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} |N|, \quad (3.21)$$

missä määriteltiin  $N = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} (\phi_+ - \phi_-)$ . Tämän voi määritellä kinkkien hiukkasluvuna, sillä  $N = 1$ , jos  $\phi_- = -m/\sqrt{\lambda}$  ja  $\phi_+ = m/\sqrt{\lambda}$ , eli kenttä on kasvava ja toteuttaa tällöin yhtälön (3.12) +-merkillä. Antikinkille saadaan  $N = -1$  ja tyhjiön homotopialuokalle  $N = 0$ . Kinkkiä vastaava Bogomolnyn yhtälö  $\phi' = \sqrt{2U(\phi)}$  voidaan ratkaista suoraan integroimalla.

$$\begin{aligned} \phi' &= \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left( \frac{m^2}{\lambda} - \phi^2 \right) \\ \Leftrightarrow \int \frac{d\phi}{\frac{m^2}{\lambda} - \phi^2} &= \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int dx \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \tanh^{-1} \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi(x) \right) &= \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (x - a) \\ \Leftrightarrow \phi(x) &= \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left( \frac{m}{\sqrt{2}} (x - a) \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

missä  $a$  on integrointivakio. Kinkkiratkaisu (3.22) kasvaa välillä  $(-\infty, \infty)$  arvosta  $-m/\sqrt{\lambda}$  arvoon  $m/\sqrt{\lambda}$  ja saavuttaa arvon 0 pisteessä  $x = a$ . Kinkki on lisäksi antisymmetrinen pisteen  $x = a$  suhteen, ja energiatihedys maksimi on myös tässä pisteessä, joten parametria  $a$  voidaan kutsua kinkin paikaksi. Parametri  $a$  on ratkaisun

ainoa vapaa parametri, joten yhtä kinkkiä vastaava ratkaisuvävy on isomorfinen reaalilukuihin  $\mathbb{R}$ .

Liikkuva kinkki saadaan tekemällä Lorentzin buusti,

$$\phi(t, x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left( \frac{m}{\sqrt{2}} \gamma (x - vt - a) \right), \quad (3.23)$$

missä on asetettu  $c = 1$ , jolloin  $-1 < v < 1$  ja  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ . Tämä on yhä ratkaisu, koska teoria on Lorentz-invariantti.

## 4 Ginzburgin–Landaun vorteksi

Tässä luvussa tarkastellaan kaksiulotteisessa avaruudessa esiintyviä topologisia solitoneja. Kaksiulotteiset solitonit ovat fysiikassa oleellisia ohuissa kalvoissa tai pinnoissa esiintyvissä ilmiöissä. Esimerkiksi ohuissa suprajohtavissa levyissä esiintyy ympyräsymmetrisiä vortekseja, jotka kuvaavat suprajohteen vuorovaikutusta ulkoisen magneettikentän kanssa. Suprajohteissa vorteksiksi kutsutaan aluetta, jossa Cooperin parien tiheys on nolla. Vorteksit voidaan laajentaa kolmanteen ulottuvuuteen sylinterisymmetrisiksi pylväiksi. Tässä rajoitutaan mitallisiin vortekseihin. Mitalliset vorteksit ovat kytketty sähkömagneettiseen mittapotentiaaliin  $A$ , ja teorian symmetriaryhmä on  $U(1)$ . Tämä luku seuraa suurimmaksi osaksi lähdeä [4].

### 4.1 Ginzburgin–Landaun energia

Avaruus on nyt  $\mathbb{R}^2$  koordinaateilla  $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$ , ja avaruusajan koordinaatit ovat  $x = (t, x^1, x^2) = (x^0, x^1, x^2)$ . Skalaarikenttä on kompleksikenttä  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$  ja sähkömagneettinen potentiaali on  $(A^\mu) = (A^0, \mathbf{A}) = (A^0, A^1, A^2)$ . Fysikaalisesti skalaarikentän itseisarvon neliö  $|\phi|^2$  on verrannollinen materiaalin Cooperin parien tiheyteen. Sähkömagneettinen kenttätensori on  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  ja kovariantti

derivaatta  $D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$ . Teorian Lagrangen tiheys on

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overline{D_\mu\phi}D^\mu\phi - \frac{\lambda}{8}(m^2 - \overline{\phi}\phi)^2, \quad (4.1)$$

missä summaukseen käytetään Minkowskin metriikkaa. Lagrangen tiheys on symmetrinen mittamuunnoksessa

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x) \quad (4.2)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \quad (4.3)$$

missä  $\alpha(x)$  on reaalifunktio. Oleellinen osa energiafunktionaalista on nyt staattisten kenttien energia, joka ei sisällä potentiaalin  $A$  aikakomponenttia  $A_0$ . Kenttätensorilla on vain yksi lineaarisesti riippumaton paikkakoordinaatteihin liittyvä komponentti,  $B = F_{12} = \partial_1A_2 - \partial_2A_1$ , joka vastaa avaruuteen  $\mathbb{R}^2$  kohtisuoraa olevaa magneettikentän komponenttia suunnassa  $-x^3$  [4]. Tämän avulla voidaan kirjoittaa  $F_{ij} = \varepsilon_{ij}B$  ja  $F_{ij}F^{ij} = 2B^2$ , missä  $\varepsilon_{ij}$  on Levi-Civitan symboli. Oleellinen energia on nyt Ginzburgin–Landaun energia (GL-energia)

$$E[\mathbf{A}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left( B^2 + \overline{D_i\phi}D_i\phi + \frac{\lambda}{4}(m^2 - \overline{\phi}\phi)^2 \right) d^2x, \quad (4.4)$$

missä on yhä summa indeksin  $i$  yli, mutta ilman Minkowskin metriikkaa. Kenttäyhtälöt saadaan varioimalla tätä energiaa kenttien  $\overline{\phi}$ ,  $A_1$  ja  $A_2$  suhteen. Kenttäyhtälöiksi saadaan

$$D_iD_i\phi + \frac{\lambda}{2}(m^2 - \overline{\phi}\phi)\phi = 0 \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_{ij}\partial_jB + i\frac{e}{2}(\overline{\phi}D_i\phi - \phi\overline{D_i\phi}) = 0. \quad (4.6)$$

Vertaamalla alempaa yhtälöä Ampèren yhtälöön  $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}$ , voidaan tulkita indeksin noston jälkeen termi

$$J_i = i\frac{e}{2}(\overline{\phi}D_i\phi - \phi\overline{D_i\phi}) \quad (4.7)$$

sähkövirtana tasossa  $\mathbb{R}^2$ . Jatkossa käytetään vain paikkakoordinaateista riippuvia mittamuunnoksia

$$\phi(\mathbf{x}) \rightarrow e^{i\alpha(\mathbf{x})}\phi(\mathbf{x}) \quad (4.8)$$

$$A_i(x) \rightarrow A_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{e}\partial_i\alpha(\mathbf{x}). \quad (4.9)$$

Tarkastella seuraavaksi teorian tyhjiöratkaisuja. Asetetaan myös kykentävaktion  $e$  arvoksi  $e = 1$ . GL-energian kaikki termit ovat positiivisia, joten energia on pienin, kun  $B = 0$ ,  $D_i\phi = 0$  ja  $|\phi|^2 = m^2$ . Kenttätensarin  $F$  komponentti  $B = F_{12}$  on nolla, kun sähkömagneettisen potentiaalin komponentit  $A_i$  ovat puhtaita mittoja, eli ensimmäinen ehto toteutuu, kun

$$A_i = \partial_i\alpha(\mathbf{x}). \quad (4.10)$$

Viimeinen ehto toteutuu, kun

$$\phi(\mathbf{x}) = me^{i\chi(\mathbf{x})}. \quad (4.11)$$

Sijoittamalla nämä ehtoon  $D_i\phi = 0$  saadaan

$$\begin{aligned} & (\partial_i - i\partial_i(\alpha(\mathbf{x})))me^{i\chi(\mathbf{x})} = 0 \\ \Leftrightarrow & (\partial_i\chi(\mathbf{x}) - \partial_i\alpha(\mathbf{x}))ime^{i\chi(\mathbf{x})} = 0 \\ \Leftrightarrow & \partial_i\chi(\mathbf{x}) = \partial_i\alpha(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

eli  $\alpha(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) + c$ , missä  $c$  on vakio. Tyhjiöratkaisut ovat siis

$$\phi(\mathbf{x}) = me^{i\chi(\mathbf{x})} \quad (4.13)$$

$$A_i = \partial_i\chi(\mathbf{x}). \quad (4.14)$$

Derrickin teoreeman käyttämiseen tarvittava energia on

$$E(\mu) = \mu^2 E_4 + E_2 + \mu^{-2} E_0, \quad (4.15)$$

jonka derivaatta on

$$2\mu E_4 - 2\mu^{-3}E_0. \quad (4.16)$$

Tämä on nolla arvolla  $\mu = 1$ , jos  $E_4 = E_0$ . Lisäksi toinen derivaatta  $2E_4 + 6\mu^{-4}E_0$  on positiivinen eli Derrickin teoreeman mukaan energialla saattaa olla minimi tyhjiöratkaisujen ulkopuolella. Viriaaliteoreema  $E_4 = E_0$  on auki kirjoitettuna

$$\frac{1}{2} \int B^2 d^2x = \frac{\lambda}{4} \int (m^2 - \bar{\phi}\phi)^2 d^2x. \quad (4.17)$$

Tämä antaa yhtälön ulkoisen magneettikentän energian ja skaalaarikentän potentiaalifunktioon  $U(\bar{\phi}\phi) = \frac{\lambda}{4}(m^2 - \bar{\phi}\phi)^2$  liittyvän energian välille.

Siirrytään napakoordinaatistoon laskujen helpottamiseksi. Sädettä  $r$  ja kulmaa  $\theta$  käyttämällä saadaan

$$x^1 = r \cos(\theta), \quad x^2 = r \sin(\theta) \quad (4.18)$$

$$dx^1 = \cos(\theta)dr - r \sin(\theta)d\theta, \quad dx^2 = \sin(\theta)dr + r \cos(\theta)d\theta \quad (4.19)$$

ja tilavuusmuoto on

$$dx^1 dx^2 = r dr d\theta \quad (4.20)$$

Koska mittapotentiaali  $A$  on 1-muoto, sen komponentit ovat

$$A_r = A_1 \frac{\partial x^1}{\partial r} + A_2 \frac{\partial x^2}{\partial r} = A_1 \cos(\theta) + A_2 \sin(\theta) \quad (4.21)$$

$$A_\theta = A_1 \frac{\partial x^1}{\partial \theta} + A_2 \frac{\partial x^2}{\partial \theta} = -A_1 r \sin(\theta) + A_2 r \cos(\theta). \quad (4.22)$$

Kenttätensori on 2-muoto, joten sille saadaan

$$F_{r\theta} = \frac{\partial x^1}{\partial r} \frac{\partial x^2}{\partial \theta} F_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial r} \frac{\partial x^1}{\partial \theta} F_{21} = r \cos^2(\theta) F_{12} - r \sin^2(\theta) F_{21} = r F_{12} = rB. \quad (4.23)$$

Metriikka on nyt  $h = \text{diag}(1, -1, -r^2)$ ,  $h_{00} = 1$ ,  $h_{rr} = -1$  ja  $h_{\theta\theta} = -r^2$ , joten GL-energia on

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{A}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})] &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{1}{2} \eta^{ik} \eta^{jl} F_{ij} F_{kl} - \eta^{ij} \overline{D_i \phi} D_j \phi + \frac{\lambda}{4} (m^2 - \overline{\phi} \phi)^2 \right) d^2 x \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left( h^{rr} h^{\theta\theta} F_{r\theta} F_{r\theta} - h^{rr} \overline{D_r \phi} D_r \phi \right. \\
&\quad \left. - h^{\theta\theta} \overline{D_\theta \phi} D_\theta \phi + \frac{\lambda}{4} (m^2 - \overline{\phi} \phi)^2 \right) r dr d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{r^2} F_{r\theta} F_{r\theta} + \overline{D_r \phi} D_r \phi \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^2} \overline{D_\theta \phi} D_\theta \phi + \frac{\lambda}{4} (m^2 - \overline{\phi} \phi)^2 \right) r dr d\theta. \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Tässä kovariantit derivaatat  $D_r \phi$  ja  $D_\theta \phi$  ovat  $D_r \phi = \partial_r \phi - i A_r \phi$  ja  $D_\theta \phi = \partial_\theta \phi - i A_\theta \phi$ .

## 4.2 Vorteksien topologia

Tässä luvussa tarkastellaan staattisten kenttäkonfiguraatioiden  $\{\phi(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\}$  topologiaa äärettömydessä  $S_\infty^1$ . Oletetaan, että kenttäkonfiguraation energia on äärellinen. Jotta GL-energiatiheys kaavassa (4.24) voisi olla nolla äärettömydessä, vaaditaan, että pätee  $|\phi| \rightarrow m$  rajalla  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , eli kenttä  $\phi$  on asympotoottisesti muotoa  $\phi(r, \theta) \sim m e^{i\chi(r, \theta)}$ . Vaaditaan myös, että kovariantti derivaatta  $D_r \phi$  toteuttaa ehdon  $D_r \phi \rightarrow 0$  rajalla  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Tästä ehdosta saadaan

$$\begin{aligned}
0 &= D_r \phi(r, \theta) = (\partial_r - i A_r) m e^{i\chi(r, \theta)} \\
&\Leftrightarrow A_r = \partial_r \chi(r, \theta) \tag{4.25}
\end{aligned}$$

rajalla  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Nämä ehdot vaaditaan, mutta ne eivät ole riittäviä.

Voimme aina siirtyä radiaalimitaan  $A_r = 0$  käyttämällä mittamuunnosta

$$\phi(r, \theta) \rightarrow \phi(r, \theta) e^{i\alpha(r, \theta)}, \tag{4.26}$$

missä

$$\alpha(r, \theta) = - \int_0^r A_r(r', \theta) dr', \tag{4.27}$$

jolloin saadaan

$$A_r \rightarrow A_r + \partial_r \left( - \int_0^r A_r(r', \theta) dr' \right) = A_r - A_r = 0. \quad (4.28)$$

Tässä mitassa kovariantin derivaatan  $D_r \phi$  rajaehto  $D_r \phi \rightarrow 0$ , kun  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , muuntuu muotoon  $\partial_r \phi \rightarrow 0$ . Skalaarikentällä  $\phi$  on siis tässä mitassa jokaisella radiaalisella suoralla säteestä  $r$  riippumaton raja-arvo

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r, \theta) = \phi^\infty(\theta) = m e^{i\chi^\infty(\theta)}, \quad (4.29)$$

jonka avulla voidaan määrittellä kenttä  $\phi$  äärettömydessä  $S_\infty^1$ . Radiaalimitassa säteestä  $r$  riippuvat mittamuunnokset eivät ole enää sallittuja. Kulmasta riippuvat mittamuunnokset ovat myös kiellettyjä, koska funktio  $e^{i\alpha(\theta)}$  ei ole hyvin määritelty origossa. Ainoa jäljelle jäävä sallittu mittamuunnos on  $e^{i\alpha}$ , missä  $\alpha$  on vakio.

Kaksi muuta termiä GL-energiassa (4.24) ovat  $\frac{1}{r^2} F_{r\theta} F_{r\theta}$  ja  $\frac{1}{r^2} \overline{D_\theta \phi} D_\theta \phi$ . Näiden kerroin  $\frac{1}{r^2}$  lähestyy jo nollaa äärettömydessä, mutta avaruudessa  $\mathbb{R}^2$   $\frac{1}{r^2}$  ei lähesty nollaa tarpeeksi nopeasti saavuttaakseen äärellisen integraaliin. Vaaditaan siis vielä, että  $F_{r\theta}$  ja  $D_\theta \phi$  lähestyvät nollaa äärettömydessä. Koska radiaalimitassa  $F_{r\theta} = \partial_r A_\theta - \partial_\theta A_r = \partial_r A_\theta \rightarrow 0$  rajalla  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , saadaan mittapotentialin komponentille  $A_\theta$  säteestä  $r$  riippumaton raja-arvo

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_\theta(r, \theta) = A_\theta^\infty(\theta) \quad (4.30)$$

joka määrittää kentän  $A_\theta$  äärettömydessä  $S_\infty^1$ . Termin  $D_\theta \phi$  rajaehto antaa tälle

$$\begin{aligned} D_\theta \phi^\infty &= (\partial_\theta - i A_\theta^\infty(\theta)) m e^{i\chi^\infty(\theta)} = 0 \\ \Leftrightarrow A_\theta^\infty(\theta) &= \partial_\theta \chi^\infty(\theta). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Etsitään seuraavaksi kentän  $\phi$  homotopialuokat. Tyhjiöratkaisut ovat muotoa  $m e^{i\chi^\infty(\theta)}$  olevat kentät eli  $\mathcal{V} \cong S_m^1$ . Kentän topologian määrittää funktio

$$\phi^\infty : S_\infty^1 \rightarrow S_m^1. \quad (4.32)$$

Käytetään näille kulmaparametreja  $\theta$  ja kentän  $\phi$  vaihetta  $\chi^\infty(\theta)$ , jolloin topologian voi määrittää ekvivalentisti kuvauksella

$$\chi^\infty : S^1 \rightarrow S^1. \quad (4.33)$$

Luvussa (1.2) esitellyn teorian perusteella näiden kenttien homotopialuokat kuuluvat homotopiaryhmään  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ , ja homotopialuokkiin liittyvä kierto-luku on topologisen asteen avulla

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{2\pi} (\chi^\infty)^* \left( \frac{1}{2\pi} d\chi^\infty \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_\theta \chi^\infty(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} (\chi^\infty(2\pi) - \chi^\infty(0)). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Jatkuvuusehto  $\chi^\infty(2\pi) \equiv \chi^\infty(0) \pmod{2\pi}$  varmistaa, että  $(\chi^\infty(2\pi) - \chi^\infty(0))$  on luvun  $2\pi$  monikerta. Kenttäyhtälöiden ratkaisua, jonka kierto-luku on  $N = 1$ , kutsutaan vorteksiksi. Jos  $N > 1$ , ratkaisu on multivorteksi.

Varmistetaan vielä, että kierto-luku on mittainvariantti. Olkoon  $g(\mathbf{x}) = e^{i\alpha(\mathbf{x})}$  mittamuunnos. Jokaisella kiinnitetyllä säteellä  $r$ , funktio  $g(\mathbf{x})$  on kuvaus  $g^{(r)} : S^1 \rightarrow U(1) \cong S^1$  eli kuvauksella  $g^{(r)}$  on kierto-luku  $N_g(r)$ . Mittamuunnoksen sileys origossa vaatii, että origon jossakin ympäristössä  $B(0, \epsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x}| < \epsilon, \epsilon > 0\}$  kierto-luku  $N_g(r)$  on nolla eli  $N_g(\frac{1}{2}\epsilon) = 0$ . Koska kierto-luku on kokonaisluku ja mittafunktio  $g(\mathbf{x})$  jatkuva funktio, täytyy olla  $N_g(\infty) = N_g(\epsilon) = 0$ . Kierto-luku on additiivinen, joten mittamuunnoksen jälkeen kentän  $\phi^\infty$  kierto-luku on sama,  $N + N_g(\infty) = N$ . Kierto-luku on siis mittainvariantti.

Kirjoitetaan kenttätenosori 2-muotona  $F = F_{12}dx^1 \wedge dx^2 = Bdx^1 \wedge dx^2 = dA$ , jolloin saadaan kaavan (4.23) ja Stokesin teoreeman avulla

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} B d^2x &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} dA \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^\infty(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (4.35)$$

Yhtälön (4.25) ja kaavajonon (4.34) toisen rivin perusteella tämä on

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} B d^2x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_\theta \chi^\infty(\theta) d\theta = N, \quad (4.36)$$

eli magneettivuo  $\Phi = \int_{\mathbb{R}^2} B d^2x = 2\pi N$  on kvantittunut  $2\pi$  monikerroiksi.

Jotta kenttä  $\phi$  voisi olla sileä kaikkialla, kun kiertoluku on  $N \neq 0$ , kentän  $\phi$  täytyy olla nolla joissakin pisteissä  $\{\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{(p)}\}$ . Yhden pisteen ympäri kierteessä kentän  $\phi$  vaihe kasvaa  $n_i 2\pi$  verran, missä  $n_i$  on pisteen  $\mathbf{x}_{(i)}$  kiertoluku. Jos kiertetään usean pisteen ympäri, kiertoiluvut summataan. Kiertämällä kaikkien pisteiden ympäri, saadaan summasta  $N$ . Piste, jossa  $\phi = 0$ , tulkitaan vorteksin paikaksi, sillä tässä  $|\phi|^2$  on nolla, eli Cooperin parien tiheys on nolla. Kentän  $\phi$  jatkuvilla muunnoksilla sen nollakohtia voidaan siirtää. Kaksi nollakohtaa, kiertoiluvuilla  $n_1$  ja  $n_2$  voidaan esimerkiksi siirtää päällekkäin, jolloin tämän nollakohdan uudeksi kiertoiluvuksi tulee  $n_1 + n_2$ . Jos  $n_1 = -n_2$ , vorteksitilat annihiloivat toisensa. Toisaalta tämä voidaan tehdä myös toiseen suuntaan.

### 4.3 Vorteksiratkaisut

Tarkastellaan seuraavaksi mahdollisia vorteksiratkaisuja eksplisiittisesti. Asetetaan käsittelyn yksinkertaistamiseksi  $m = 1$ . On luonnollista etsiä kiertosymmetrisiä ratkaisuja yksittäiselle vorteksille. Teorian siirtainvarianssin perusteella voidaan olettaa, että vorteksin paikka on origossa. Käytetään yhä napakoordinaatteja  $(r, \theta)$ . Määritellään kiertosymmetria avaruuden  $\mathbb{R}^2$  rotaatioryhmän  $SO(2)$  ja kentän  $\phi$  sisäisen symmetriaryhmän  $U(1)$  avulla. Olkoon  $R(\beta) \in SO(2)$  avaruuden  $\mathbb{R}^2$  rotaatio  $R(\beta) : \theta \mapsto \theta + \beta$  ja  $\tilde{R}(\beta) \in U(1)$  kentän  $\phi$  globaali rotaatio  $\tilde{R}(\beta) : \phi \mapsto e^{i\beta} \phi$ . Määritellään yhdistetty muunnos  $(R(\beta), \tilde{R}(k\beta))$ , jolle määritellään tulo

$$(R(\beta_1), \tilde{R}(k\beta_1)) \cdot (R(\beta_2), \tilde{R}(k\beta_2)) = (R(\beta_1 + \beta_2), \tilde{R}(k(\beta_1 + \beta_2))). \quad (4.37)$$

Vaaditaan, että  $k$  on kokonaisluku, jotta  $(R(2\pi), \tilde{R}(k2\pi))$  olisi identiteettikuvaus.

Määritellään, että kenttä  $\phi$  on invariantti tässä muunnoksessa, jos

$$\begin{aligned}\phi(r, R(\beta)\theta) &= \tilde{R}(\beta)\phi(r, \theta) \\ \Leftrightarrow \phi(r, \theta + \beta) &= e^{ik\beta}\phi(r, \theta).\end{aligned}\tag{4.38}$$

Merkitään  $f(r) = \phi(r, 0)$ . Invarianssi ehto antaa nyt

$$\phi(r, \theta) = e^{ik\theta}f(r).\tag{4.39}$$

Koska  $f(r)$  on kulmasta riippumaton, kenttäkonfiguraation  $\phi(r, \theta)$  kierto-  
luku voidaan identifioida vakion  $k$  kanssa. Kirjoitetaan siis suoraan

$$\phi(r, \theta) = e^{iN\theta}f(r).\tag{4.40}$$

Mittamuunnos  $e^{iN\beta}$  on vakio avaruudessa, joten potentiaali  $A$  ei muutu tässä muunnoksessa. Potentiaali  $A$  on siis symmetrinen avaruuden kierrossa vain, jos se on kulmasta riippumaton. Kiertosymmetriset kentät ovat siis muotoa

$$\phi(r, \theta) = e^{iN\theta}f(r)\tag{4.41}$$

$$A_r(r, \theta) = A_r(r)\tag{4.42}$$

$$A_\theta(r, \theta) = A_\theta(r),\tag{4.43}$$

Kirtosymmetrian lisäksi vaaditaan peilaussymmetria  $\phi(r, \theta) = \overline{\phi}(r, -\theta)$ , eli peilaus avaruudessa vastaa peilausta kentän  $\phi$  arvoavaruudessa. Vaatimalla tätä kentälle (4.41) saadaan  $e^{iN\theta}f(r) = e^{iN\theta}\overline{f}(r)$ , mistä seuraa, että funktion  $f(r)$  täytyy olla reaalinen. Tämä tarkoittaa,  $N$ -solitonitilan  $e^{iN\theta}f(r)$  ja  $-N$ -antisolitonitilan  $e^{-iN\theta}f(r)$  ainoa ero on vaiheen kasvusuunta, mikä on myös luonnollinen oletus yritteelle.

Siirrytään radiaalimitaan  $A_r = 0$ . Rajaehdot ovat nyt kaavojen (4.29) ja (4.31) mukaan  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1$  ja  $\lim_{r \rightarrow \infty} A_\theta(r) = \partial_\theta \chi^\infty(\theta) = N$ . Vorteksin paikka valittiin origoon, joten funktion  $f$  arvo on origossa  $f(0) = 0$ . Mittapotentiaalın kulmakomponentille  $A_\theta$  vaaditaan  $A_\theta(0) = 0$ , jotta se ei olisi singulaarinen origossa.

GL-energia (4.24) on nyt

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{A}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})] &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{r^2} \partial_r A_\theta \partial_r A_\theta + \overline{\partial_r (e^{iN\theta} f)} \partial_r (e^{iN\theta} f) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^2} \overline{(\partial_\theta - iA_\theta) (e^{iN\theta} f)} (\partial_\theta - iA_\theta) (e^{iN\theta} f) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda}{4} (1 - \overline{e^{iN\theta} f} e^{iN\theta} f)^2 \right) r dr d\theta \\
&= \pi \int_0^\infty \left( \frac{1}{r^2} \left( \frac{dA_\theta}{dr} \right)^2 + \left( \frac{df}{dr} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^2} (N - A_\theta)^2 f^2 + \frac{\lambda}{4} (1 - f^2)^2 \right) r dr. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Kenttäyhtälöt ovat

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{1}{r^2} (N - A_\theta)^2 f + \frac{\lambda}{2} (1 - f^2) f = 0, \tag{4.45}$$

$$\frac{d^2 A_\theta}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dA_\theta}{dr} + (N - A_\theta) f^2 = 0, \tag{4.46}$$

missä ensimmäinen yhtälö saatiin varioimalla funktion  $f(r)$  suhteen ja toinen yhtälö varioimalla kentän  $A_\theta(r)$  suhteen.

Tarkastellaan funktion  $f$  käyttäytymistä origon ympäristössä. Yhtälössä (4.45) voidaan tällöin olettaa, että termissä  $-\frac{1}{r^2} (N - A_\theta)^2 f$  lineaarinen osa  $-\frac{N^2}{r^2} f$  on johtava termi, ja että  $|\frac{N^2}{r^2} f| \gg |\frac{\lambda}{2} (1 - f^2) f|$ , koska  $\frac{1}{r^2} \gg 0$ , jolloin saadaan yhtälö

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{N^2}{r^2} f = 0. \tag{4.47}$$

Tällä on ratkaisut

$$f(r) = Cr^{\pm N}, \tag{4.48}$$

missä  $C$  on vakio, sillä

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{N^2}{r^2} f = \pm N(\pm N - 1)Cr^{N-2} \pm NCr^{N-2} - N^2Cr^{N-2} = 0. \tag{4.49}$$

Rajaehdon  $f \rightarrow 0$  täyttää ratkaisu  $f(r) = Cr^N$ .  $N$ -vorteksiratkaisulla on siis origon ympäristössä johtava termi  $C(re^{i\theta})^N$ .

Osoitetaan vielä, että kenttäyhtälöt (4.5) täyttävälle kentälle  $\phi$  pätee  $|\phi| \leq 1$ . Olkoon  $W(\mathbf{x}) = 1 - |\phi(\mathbf{x})|$ . Tiedetään, että vorteksiratkaisulle  $\phi(\mathbf{a}) = 0$  jossakin pisteessä  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  ja  $|\phi(\mathbf{x})| \rightarrow 1$  äärettömyydessä. Jos  $|\phi(\mathbf{x})|$  on suurempi kuin yksi jossakin pisteessä, sillä on myös maksimi jossakin pisteessä, joka ei ole äärettömyydessä. Tässä pisteessä funktiolla  $W$  on minimi ja täytyy olla  $W(\mathbf{x}) < 0$ . Osoitetaan, että  $W(\mathbf{x}) \geq 0$  pisteessä, jossa funktiolla  $W$  on minimi, jolloin  $|\phi| \leq 1$ . Tällaisessa pisteessä  $\partial_i \partial_i W(\mathbf{x}) \geq 0$ , missä on summa indeksin  $i$  yli. Lisäämällä nolla saadaan

$$\begin{aligned} \partial_i W &= -\partial_i \bar{\phi} \phi - \bar{\phi} \partial_i \phi \\ &= -(\partial_i + iA_i) \bar{\phi} \phi - \bar{\phi} (\partial_i - iA_i) \phi \\ &= -\overline{D_i \phi} \phi - \bar{\phi} D_i \phi, \end{aligned} \tag{4.50}$$

ja samaan tapaan

$$\partial_i \partial_i W = -\overline{D_i D_i \phi} \phi - \bar{\phi} D_i D_i \phi - 2\overline{D_i \phi} D_i \phi. \tag{4.51}$$

Käyttämällä tähän liikeyhtälöä (4.5) saadaan

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_i W &= \lambda(1 - |\phi|^2)|\phi|^2 - 2\overline{D_i \phi} D_i \phi \\ &= \lambda W |\phi|^2 - 2\overline{D_i \phi} D_i \phi \end{aligned} \tag{4.52}$$

eli

$$\lambda W |\phi|^2 = \partial_i \partial_i W + 2\overline{D_i \phi} D_i \phi \geq 0. \tag{4.53}$$

Siis  $W \geq 0$  eli  $|\phi| \leq 1$ .

On osoitettu, että kaikilla  $\lambda > 0$  yhtälöille (4.45) ja (4.46) on olemassa ratkaisu, mutta ratkaisu ei ole aina stabiili kaikilla parametrin  $\lambda$  arvoilla [7]. Vain tapauksessa  $|N| = 1$  ratkaisu on stabiili kaikilla  $\lambda > 0$ . Jos  $|N| \geq 2$ , ratkaisut ovat stabiileja, kun  $\lambda < 1$  ja epästabiileja, kun  $\lambda > 1$ . Ensimmäisessä tapauksessa siis lähellä olevat vorteksit pyrkivät muodostamaan suuria multivortekseja, ja jälkimmäisessä tapauksessa multivorteksi pyrkii hajoamaan useaksi vorteksiksi, jotka hylkivät toisiaan.

Arvo  $\lambda = 1$  on kriittinen arvo, jolle on löydetty suurempi joukko ratkaisuja. On osoitettu, että stabiilien ratkaisujen avaruus on isomorfinen avaruuteen  $\mathbb{R}^{2|N|}$ , missä  $N$  on kentän  $\phi$  kierto luku [8]. Jokaista pistettä  $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{|N|}, y_{|N|})) \in \mathbb{R}^{2|N|}$  vastaa yksikäsitteinen ratkaisu, joka koostuu joko vain vortekseista tai anti-vortekseista. Piste antaa vorteksin paikat tasossa. Jos sama piste esiintyy monta kertaa, niin pisteen lukumäärä antaa kyseisen vorteksin kierto luvun. Perustellaan ratkaisujen stabiilius GL-energian avulla.

GL-energia (4.4) voidaan kirjoittaa neliöksi täydentämällä muotoon

$$E[\mathbf{A}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \left( B - \frac{1}{2}(1 - \bar{\phi}\phi) \right)^2 + \overline{(D_1\phi + iD_2\phi)}(D_1\phi + iD_2\phi) + B - i(\partial_1(\bar{\phi}D_2\phi) - \partial_2(\bar{\phi}D_1\phi)) \right\} dx^2. \quad (4.54)$$

Tässä viimeinen termi on roottori kahdessa ulottuvuudessa, joten Stokesin teoreeman perusteella sen integraali avaruuden  $\mathbb{R}^2$  yli voidaan antaa käyräintegraalina äärettömyydessä. Rajaehtojen  $|\phi| \rightarrow 1$  ja  $D_i\phi \rightarrow 0$  perusteella tämä käyräintegraali häviää. Lisäksi integraali termin  $B$  yli on kaavan (4.36) mukaan  $2\pi N$ . Näiden avulla saadaan

$$E[\mathbf{A}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \left( B - \frac{1}{2}(1 - \bar{\phi}\phi) \right)^2 + \overline{(D_1\phi + iD_2\phi)}(D_1\phi + iD_2\phi) \right\} dx^2 + \pi N \quad (4.55)$$

Integraalitermi on selvästi ei-negatiivinen, joten energialle saadaan alaraja  $E \geq \pi N$ . GL-energia on symmetrinen muunnoksessa  $\phi \rightarrow \bar{\phi}$ ,  $\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$ . Suorittamalla tämä muunnos yllä olevaan kaavaan saadaan

$$E[\mathbf{A}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \left( -B - \frac{1}{2}(1 - \bar{\phi}\phi) \right)^2 + \overline{(D_1\phi - iD_2\phi)}(D_1\phi - iD_2\phi) \right] dx^2 - \pi N, \quad (4.56)$$

joka antaa alarajan  $E \geq -\pi N$ . Kokonaisuudessaan siis saadaan Bogomolnyn raja  $E \geq \pi|N|$ . Jos  $N > 0$ , ensimmäisessä tapauksessa alaraja saavutetaan, kun inte-

graalitermi häviää eli

$$D_1\phi + iD_2\phi = 0 \text{ ja } B - \frac{1}{2}(1 - \bar{\phi}\phi) = 0. \quad (4.57)$$

Kun  $N < 0$ , alaraja saavutetaan toisessa tapauksessa, kun

$$D_1\phi - iD_2\phi = 0 \text{ ja } B + \frac{1}{2}(1 - \bar{\phi}\phi) = 0. \quad (4.58)$$

On osoitettu, että ensimmäisen yhtälöparin ratkaisut sisältävät vain vortekseja ja toisen yhtälöparin ratkaisut vain antivortekseja [8]. Nämä ovat ensimmäistä kertalukua olevia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, kun taas kenttäyhtälöt ovat toista kertalukua. Näiden yhtälöiden ratkaisut ovat automaattisesti stabiileja, koska ne saavuttavat minimienergian  $\pi|N|$  omassa homotopialuokassaan. Ratkaisujen olemassaolo on todistettu ja niiden avaruus on aiemmin mainittu  $\mathbb{R}^{2N}$ . Oleellinen huomio on, että energian alaraja  $E = \pi|N|$  on riippumaton vorteksin paikasta, joten vorteksin välillä ei ole voimia. Tämä perustelee sitä, että stabiileja ratkaisuja on kaikille paikkakoordinaateille  $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{|N|}, y_{|N|})) \in \mathbb{R}^{2|N|}$ .

#### 4.4 Vorteksit fysiikassa

Fysiikassa GL-teorialla voidaan kuvata suprajohteita [9]. Kentän  $\phi$  itseisarvon neliö  $|\phi|^2$  on verrannollinen aineessa esiintyvien Cooperin parien tiheyteen, ja kuvaa täten aineen suprajohtavuutta. Kun  $\phi = 0$ , aine on normaalissa tilassa, ja arvolla  $\phi = 1$  aine on täysin suprajohtava. Suprajohtavassa tilassa aine pyrkii sulkemaan ulkoisen magneettikentän aineen ulkopuolelle. Suprajohteita on kahta tyyppiä, tyyppiä I ja tyyppiä II. Tyypin I suprajohteilla on yksi kriittinen magneettikenttä  $H_k$ , jonka ylittyessä aineen suprajohtavuus katoaa, ja magneettikenttä tunkeutuu aineen läpi. Tyypin II suprajohteilla kriittisiä magneettikentän arvoja on kaksi,  $H_{k_1}$  ja  $H_{k_2}$ , missä  $H_{k_1} < H_{k_2}$ . Magneettikentän arvon  $H_{k_1}$  alapuolella aine on täysin suprajohtavassa tilassa ja arvon  $H_{k_2}$  yläpuolella normaalissa tilassa. Näiden välissä tyypin II

suprajohde on tilassa, missä siihen syntyy vortekseja, jotka päästävät magneettikentän niiden läpi ohutta nauhaa pitkin. Tämän nauhan keskellä aine on normaalissa tilassa, ja sen ulkopuolella lähestyy nopeasti täysin suprajohtavaa tilaa. Kuten aiemmin näytettiin, magneettivuo näiden vorteksien läpi on kvantittunut.

Tyyppin II suprajohteita kuvaa GL-teoria kytkentävakion arvot  $\lambda > 1$ . Tässä tapauksessa vorteksit hylkivät toisiaan, mutta ovat kuitenkin rajoitettu äärellisen kokoiseen kappaleeseen, joten ne pyrkivät muodostamaan hilarakenteita [9]. Kytkentävakion arvot  $\lambda < 1$  kuvaavat tyyppin I suprajohteita. Vaikka vorteksiratkaisuja löytyy myös tässä tapauksessa, niitä ei suprajohteissa yleensä esiinny, koska energia on pienempi silloin, kun ulkoinen magneettikenttä läpäisee koko kappaleen vorteksien muodostumisen sijaan. Tietyissä tapauksissa myös tyyppin I materiaaleissa voi esiintyä tyyppin II suprajohtavuutta, jolloin niissä on mahdollista luoda vortekseja. Tätä tapahtuu erityisesti ohuissa tyyppin I materiaalista koostuvissa kalvoissa. Ginzburg-Landau teoriaan perustuvat simulaatiot ennustavat sekä yksittäisten vorteksien ( $N = 1$ ), että suurten  $N$ -vorteksien esiintymisen [10]. Suuria  $N$ -vortekseja voi syntyä vorteksien välillä esiintyvän vetovoiman ansiosta. Molempia vortekseja on havaittu myös kokeellisesti [11, 12].

## 5 Magneettinen monopoli

Magneettinen monopoli on hiukkanen, joka toimii magneettikentän lähteenä, kuten sähköisesti varattu hiukkanen toimii sähkökentän lähteenä. Magneettinen monopoli on hypoteettinen hiukkanen, jota ei esiinny Maxwellin sähkömagnetismin teoriassa eikä tavallisessa standardimallissa. Niitä esiintyy kuitenkin suurissa yhtenäisteorioissa, jotka ovat kandidaatteja maailmankaikkeuden alussa vallitsevalle teorialle, jossa vahva vuorovaikutus ja sähköheikko vuorovaikutus yhdistyvät, ja tietyissä standardimallin laajennuksissa. Täten magneettiset monopolit ovat tärkeä osa selittämään nuorta maailmankaikkeutta ja kosmologisia havaintoja [13, 14]. Toinen tärkeä seu-

raus magneettisten monopolioiden olemassaololla olisi sähkövarauksen kvantisoituminen alkeisvarauksen monikerroiksi. Magneettinen varaus  $g$  ja sähköinen varaus  $q$  toteuttaisivat aina yhtälön [15]

$$\frac{gq}{2\pi\hbar} \in \mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

Tämä yhtälö johdettiin ensimmäisenä Maxwellin teorian laajennukselle, joka sisältää magneettisia monopoleja, mutta kaikki teorit joissa esiintyy magneettisia monopoleja sisältävät saman tyyppisen yhtälön. Magneettisen monopolin sisältävä teoria selittäisi siis suoraan sähkövarauksen kvantisoitumisen.

Suuria yhtenäisteorioita on useita, ja tässä keskitytään yksinkertaisimpaan kentäteoriaan, jolla on samantyyppinen rakenne kuin suurilla yhtenäisteorioilla. Tämä on  $SU(2)$  Yangin–Millsin teoria, jossa esiintyy ’t Hooftin–Polyakovin monopoleja [16]. Oleellinen yhteys tämän teorian ja suurien yhtenäisteorioiden välillä on teorioiden ei-Abelisuus ja symmetriaryhmän hajoaminen ryhmään, joka sisältää sähkömagneettisen symmetriaryhmän  $U(1)$  [14]. Kaikki tällaiset teorit eivät kuitenkaan sisällä monopoleja. Esimerkiksi sähköheikossa teoriassa symmetriarikko on  $SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)$ , mutta siinä ei esiinny monopoleja.  $SU(2)$  Yangin–Millsin teoriassa symmetriarikko on  $SU(2) \rightarrow U(1)$ . Tämä luku seuraa pääasiassa lähteitä [4, 17].

## 5.1 ’t Hooftin–Polyakovin monopoli

Kentät  $SU(2)$  Yangin–Millsin teoriassa ovat  $SU(2)$  mittapotentialiaali  $A_\mu$  ja Higgsin kenttä  $\Phi$ , jotka ovat  $su(2)$ -arvoisia, ja kuuluvat ryhmän  $SU(2)$  adjungaattiesitykseen. Lien algebralle  $su(2)$  käytetään kantaa  $\{\tau^a = i\tau^a | a = 1, 2, 3\}$ , missä  $\tau^a$  ovat Paulin matriisit

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Kannan alkioit toteuttavat kommutaatiorelaation

$$[t^a, t^b] = -2\epsilon_{abc}t^c, \quad (5.3)$$

missä  $\epsilon_{abc}$  on Levi-Civitan symboli, ja normalisointiehdon

$$\text{tr}(t^a t^b) = -2\delta^{ab}. \quad (5.4)$$

Kannan avulla kirjoitettuna kentät ovat

$$A_\mu = A_\mu^a t^a \quad \text{ja} \quad \Phi = \Phi^a t^a, \quad (5.5)$$

missä komponentit  $A_\mu^a$  ja  $\Phi^a$  ovat reaalisia. Higgsin kentän  $\Phi$  kovariantti derivaatta ja kenttätensori ovat

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \Phi + g[A_\mu, \Phi], \quad (5.6)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu], \quad (5.7)$$

missä  $g$  on kytkentävakio, jolle asetetaan jatkossa arvo  $g = 1$ . Kenttätensori  $F_{\mu\nu}$  toteuttaa Bianchin identiteetin

$$\epsilon^{\lambda\alpha\mu\nu} D_\alpha F_{\mu\nu} = 0. \quad (5.8)$$

Teorian Lagrangen tiheys on

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8}\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\text{tr}(D_\mu \Phi D^\mu \Phi) - \frac{\lambda}{4}(1 - |\Phi|^2)^2, \quad (5.9)$$

missä  $\lambda \geq 0$  on reaalinen kytkentävakio, ja missä on määritelty normin neliö  $|\Phi|^2 = -\frac{1}{2}\text{tr}(\Phi^2)$ . Käyttämällä kantaesitystä (5.5) ja normalisointiehtoa (5.4) normin neliö voidaan kirjoittaa komponenttien  $\Phi^a$  avulla myös muodossa

$$\begin{aligned} |\Phi|^2 &= -\frac{1}{2}\text{tr}(\Phi^2) \\ &= -\frac{1}{2}\text{tr}(\Phi^a t^a \Phi^b t^b) \\ &= \Phi^a \Phi^b \delta^{ab} \\ &= \Phi^a \Phi^a. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Lagrangen tiheys on symmetrinen mittamuunnoksissa

$$\Phi(x) \rightarrow g(x)\Phi(x)g^{-1}(x), \quad (5.11)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow g(x)A_\mu(x)g^{-1}(x) - \partial_\mu g(x)g^{-1}(x), \quad (5.12)$$

missä mittafunktio  $g(x)$   $SU(2)$ -arvoinen. Kenttätensarin  $F_{\mu\nu}$  ja kovariantin derivaatan  $D_\mu\Phi$  mittamuunnokset ovat

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow g(x)F_{\mu\nu}(x)g^{-1}(x), \quad (5.13)$$

$$D_\mu\Phi(x) \rightarrow g(x)D_\mu\Phi(x)g^{-1}(x). \quad (5.14)$$

Lagrangen tiheyden symmetria näissä muunnoksissa seuraa suoraan jäljen sykliisyydestä. Lagrangen tiheydellä on myös diskreetti symmetria  $x \rightarrow -x$ ,  $\Phi \rightarrow -\Phi$ ,  $A \rightarrow -A$ . Kenttäyhtälöt Lagrangen tiheydelle (5.9) ovat

$$D_\mu D^\mu \Phi = \lambda(1 - |\Phi|^2)\Phi \quad (5.15)$$

$$D_\mu F^{\mu\nu} = [D^\nu \Phi, \Phi]. \quad (5.16)$$

Kirjoitetaan Lagrangen funktio  $L = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L} d^3x$  muodossa  $L = T - V$ , missä  $T$  on kineettinen energia

$$T = \int_{\mathbb{R}^3} \left( -\frac{1}{4} \text{tr}(E_i E_i) - \frac{1}{4} \text{tr}(D_0 \Phi D_0 \Phi) \right) d^3x \quad (5.17)$$

ja  $V$  koostuu potentiaalienergiasta

$$V = \int_{\mathbb{R}^3} \left( -\frac{1}{8} \text{tr}(F_{ij} F_{ij}) - \frac{1}{4} \text{tr}(D_i \Phi D_i \Phi) + \frac{\lambda}{4} (1 - |\Phi|^2)^2 \right) d^3x, \quad (5.18)$$

missä merkitään  $E_i = F_{0i}$ . Normalisointiehtoa (5.4) käyttämällä nähdään, että kaikki termit energiassa  $E = T + V$  ovat ei-negatiivisia, joten sen minimi saavutetaan, kun kaikki termit ovat nolla. Tyhiöratkaisut toteuttavat siis ehdot  $|\Phi|^2 = 1$ ,  $D_\mu \Phi = 0$  ja  $F_{\mu\nu} = 0$ . Ehto  $F_{\mu\nu} = 0$  täyttyy kun mittapotentiaali on puhdas mitta eli  $A_\mu = -\partial_\mu g g^{-1}$ . Ehto  $|\Phi|^2 = 1$  voidaan kirjoittaa kaavan (5.10) mukaan myös muodossa  $\Phi^a \Phi^a = 1$ . Tämä määrittää yksikköpallon avaruudessa  $su(2)$ .

Mittamuunnosten avulla voidaan aina valita tyhjiöksi  $A_\mu = 0$  ja  $\Phi = t^3$ . Tyhjiö on muuttumaton mittamuunnoksissa, joille pätee  $g(x)t^3g^{-1}(x) = t^3$ .  $SU(2)$ -arvoiset funktiot ovat muotoa  $g(x) = e^{\chi^a(x)t^a}$ , joten kommutaatiorelaation (5.3) perusteella vain mittamuunnokset  $g(x) = e^{\chi^3(x)t^3}$  täyttävät tämän ehdon. Koska tyhjiössä  $D_\mu\Phi = 0$  ja  $F_{\mu\nu} = 0$  kaikkialla, nämä pätevät myös mittamuunnoksen jälkeen muunnosten (5.13) ja (5.14) perusteella. Rikkoutumaton symmetriaryhmä on siis alkion  $t^3$  generoima ryhmä  $U(1)$ . Toisaalta tyhjiöksi voitaisiin valita mitkä tahansa tyhjiöratkaisut  $A_\mu(x)$  ja  $\Phi(x)$ , jolloin jäljelle jäävät mittamuunnokset ovat muotoa  $g(x) = e^{\chi(x)\Phi(x)}$ . Siis jokaisessa pisteessä  $x$  rikkoutumaton symmetriaryhmä on alkion  $\Phi(x)$  generoima ja isomorfinen ryhmän  $U(1)$  kanssa. Teoriassa on siis symmetriarikko  $SU(2) \rightarrow U(1)$ .

Rajoitutaan kenttien topologian tarkastelua varten statisiin kenttiin, ja oletetaan myös, että  $A_0 = 0$ . Oleellinen energia on nyt potentiaalienergia  $V$ ,

$$V = \int_{\mathbb{R}^3} \left( -\frac{1}{8}\text{tr}(F_{ij}F_{ij}) - \frac{1}{4}\text{tr}(D_i\Phi D_i\Phi) + \frac{\lambda}{4}(1 - |\Phi|^2)^2 \right) d^3x, \quad (5.19)$$

ja kenttäyhtälöt ovat

$$D_i D_i \Phi = -\lambda(1 - |\Phi|^2)\Phi \quad (5.20)$$

$$D_i F_{ij} = -[D_i \Phi, \Phi]. \quad (5.21)$$

Tyhjiöratkaisut täyttävät ehdot  $|\Phi(\mathbf{x})|^2 = 1$ ,  $D_i\Phi(\mathbf{x}) = 0$  ja  $A_i(\mathbf{x}) = -\partial_i g(\mathbf{x})g^{-1}(\mathbf{x})$ .

Varmistetaan monopoliin olemassaolon mahdollisuus Derrickin teoreeman avulla. Skaalatun avaruuden energiafunktionaali on

$$\begin{aligned} V(\mu) &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( -\frac{1}{8}\mu^4\text{tr}(F_{ij}F_{ij}) - \frac{1}{4}\mu^2\text{tr}(D_i\Phi D_i\Phi) + \frac{\lambda}{4}(1 - |\Phi|^2)^2 \right) \frac{1}{\mu^3} d^3(\mu x), \\ &= \mu V_4 + \frac{1}{\mu} V_2 + \frac{1}{\mu^3} E_0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Tämän derivaatalla  $V_4 - \mu^{-2}V_2 - 3\mu^{-4}V_0$  on nollakohta arvolla  $\mu = 1$ , jos energiat toteuttavat viriaaliteoreeman  $V_4 = V_2 + 3V_0$ . Kyseessä on minimi, koska toinen

derivaatta arvolla  $\mu = 1$  on  $2V_2 + 12V_0$ , joka on positiivinen, kun kenttä ei ole tyhjiöratkaisu. Derrickin teoreema ei siis sulje pois stabiileja solitoniratkaisuja.

Kentän  $\Phi$  topologian määrää kuvaus äärettömyydestä  $S_\infty^2$  yksikköpallolle  $S^2$ , jonka määrää ehto  $\Phi^a \Phi^a = 1$ . Tyhjiöavaruus on siis  $\mathcal{V} = S^2$  ja kentät kuuluvat homotopialuokkiin, jotka määrää homotopiar ryhmä  $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ . Solitoniratkaisuihin liittyy siis kokonaisluku  $N = \mathbb{Z}$ . Etsitään aluksi ratkaisua arvolle  $N = 1$ .

Yksinkertaisin yrite ratkaisulle, jolla on topologinen varaus  $N = 1$ , on pallosymmetrinen funktio

$$\Phi(\mathbf{x}) = h(r) \frac{x^a}{r} t^a, \quad (5.23)$$

missä reaalfunktio  $h(r)$  riippuu vain etäisyydestä origoon,  $r$ , ja  $(x^a/r)$  ovat pisteeseen  $\mathbf{x}$  osoittavan yksikkövektorin komponentit. Ehto

$$1 = \Phi^a \Phi^a = h(r)^2 \frac{x^a}{r} \frac{x^a}{r} = h(r)^2 \quad (5.24)$$

toteutuu, kun valitaan funktiolle  $h(r)$  rajaehto  $\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = 1$ . Kuvauksen  $\Phi(\mathbf{x})$  kiertoluku äärettömyydessä on nyt selvästi  $N = 1$ . Äärettömyydessä derivaatalla  $\partial_i \Phi^a$  on asymptoottinen muoto

$$\partial_i \Phi^a \rightarrow \left( \delta_{ia} \frac{1}{r} - \frac{x^a x^i}{r^3} \right) = \frac{1}{r} \left( \delta_{ia} - \frac{x^a x^i}{r^2} \right) \propto \frac{1}{r}, \quad (5.25)$$

joka ei vähene tarpeeksi nopeasti, jotta termiin  $D_i \Phi D_i \Phi$  liittyvä energia olisi äärellinen. Tästä syystä kovariantin derivaatan  $(D_i \Phi)^a = \partial_i \Phi^a - 2\epsilon_{bca} A_i^b \Phi^c$  jälkimmäisen osan täytyy sisältää termi, joka kumoaa tämän hajaantuvan derivaattatermin. Tällainen termi on

$$A_i^a = -\frac{1}{2} \epsilon_{ija} \frac{x^j}{r^2}, \quad (5.26)$$

sillä

$$\begin{aligned}
-2\epsilon_{bca}A_i^b\Phi^c &= -2\epsilon_{bca}\left(-\frac{1}{2}\epsilon_{ijb}\frac{x^j}{r^2}\right)h(r)\frac{x^c}{r} \\
&= h(r)(\delta_{ci}\delta_{aj} - \delta_{cj}\delta_{ai})\frac{x^jx^c}{r^3} \\
&= -\frac{h(r)}{r}\left(\delta_{ai} - \frac{x^i x^a}{r^2}\right), \tag{5.27}
\end{aligned}$$

missä käytettiin Levi-Civitan symbolin ominaisuutta  $\epsilon_{bca}\epsilon_{bij} = \delta_{ci}\delta_{aj} - \delta_{cj}\delta_{ai}$ . Mittapotentiaali voi sisältää myös termin, joka vähenee tarpeeksi nopeasti. Valitaan sellainen termi, että

$$A_i^a = -\frac{1}{2}(1 - k(r))\epsilon_{ija}\frac{x^j}{r^2}, \tag{5.28}$$

missä reaalifunktio  $k(r)$  toteuttaa rajaehdon  $\lim_{r \rightarrow \infty} k(r) = 0$ . Kentät (5.23) ja (5.28) ovat yritteet monopoliratkaisulle. Jotta nämä kentät eivät olisi singulaarisia origossa, vaaditaan funktioille  $h(r)$  ja  $k(r)$  origossa raja-arvot  $h(0) = 0$  ja  $k(0) = 1$ . Tarkemmin, vaaditaan vähintään  $h(r) \sim r$  ja  $(1 - k(r)) \sim r^2$  origon ympäristössä, jotta kenttien komponentit  $\Phi^a$  ja  $A_i^a$  eivät olisi rajalla verrannollisia yksikkövektoriin  $(x^a/r)$ .

Sijoittamalla yritteet (5.23) ja (5.28) kenttäyhtälöihin (5.20) ja (5.21) saadaan funktioille  $h(r)$  ja  $k(r)$  kenttäyhtälöt

$$\frac{d^2h}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dh}{dr} = \frac{2}{r^2}k^2h - \lambda(1 - h^2)h, \tag{5.29}$$

$$\frac{d^2k}{dr^2} = \frac{1}{r^2}(k^2 - 1)k + 4h^2k. \tag{5.30}$$

Yhtälöille löytyy ratkaisut kaikilla  $\lambda \geq 0$ , joten muotoa (5.23) ja (5.28) olevia monopoliratkaisuja on olemassa [4].

On mahdollista löytää myös sellaisia ratkaisuja, joille mittapotentiaalin komponentti  $A_0$  ei häviä. Tällaisia ratkaisuja kutsutaan dyoneiksi, ja niillä on myös sähkövaraus [18].

## 5.2 Magneettinen varaus

Jotta voisimme määritellä magneettisen varauksen ja magneettikentän, täytyy aluksi määritellä kenttätensori  $f_{\mu\nu}$ , joka vastaa fysikaalisia suureita. Oletetaan, että kenttä  $\Phi$  on jollakin avaruuden alueella muotoa  $\Phi = h(x)\hat{\Phi}$ , missä  $h(x)$  on positiivinen ja  $|\hat{\Phi}|^2 = 1$ . Oletetaan, että tämä kenttä on lähellä tyhjiöratkaisua siinä mielessä, että  $D_\mu\hat{\Phi} = 0$ . Tällöin saadaan  $D_\mu\Phi = (\partial_\mu h)\hat{\Phi}$ , joka on lähellä nollaa, kun  $\partial_\mu h$  on pieni. Kenttä (5.23) toteuttaa tämän asympotoottisesti. Yhtälön  $D_\mu\hat{\Phi} = 0$  toteuttaa mittapotentiali

$$A_\mu = \frac{1}{4}[\partial_\mu\hat{\Phi}, \hat{\Phi}] + a_\mu\hat{\Phi}, \quad (5.31)$$

missä  $a_\mu$  on mielivaltainen reaaliarvoinen nelivektori. Tämä voidaan osoittaa laske-  
malla kovariantin derivaatan  $D_\mu\hat{\Phi} = \partial_\mu\hat{\Phi} + [A_\mu, \hat{\Phi}]$  toinen termi,

$$\begin{aligned} [A_\mu, \hat{\Phi}] &= \frac{1}{4}[[\partial_\mu\hat{\Phi}, \hat{\Phi}], \hat{\Phi}] + a_\mu[\hat{\Phi}, \hat{\Phi}] \\ &= \frac{1}{4}\partial_\mu\hat{\Phi}^a\hat{\Phi}^b\hat{\Phi}^c[[t^a, t^b], t^c] \\ &= -\frac{1}{2}\epsilon_{abd}\partial_\mu\hat{\Phi}^a\hat{\Phi}^b\hat{\Phi}^c[t^d, t^c] \\ &= \epsilon_{abd}\epsilon_{dce}\partial_\mu\hat{\Phi}^a\hat{\Phi}^b\hat{\Phi}^c t^e \\ &= \partial_\mu\hat{\Phi}^c\hat{\Phi}^e\hat{\Phi}^c t^e - \partial_\mu\hat{\Phi}^e\hat{\Phi}^c\hat{\Phi}^c t^e \\ &= \partial_\mu\hat{\Phi}^c\hat{\Phi}^c\hat{\Phi} - \partial_\mu\hat{\Phi}\hat{\Phi}^c\hat{\Phi}^c \\ &= -\partial_\mu\hat{\Phi}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

missä käytettiin tietoja  $\epsilon_{dab}\epsilon_{dce} = \delta_{ac}\delta_{be} - \delta_{ae}\delta_{bc}$ ,  $\hat{\Phi}^c\hat{\Phi}^c = 1$  ja  $\partial_\mu\hat{\Phi}^c\hat{\Phi}^c = 0$ . Viimeinen ominaisuus seuraa siitä, että  $\hat{\Phi}$  ja  $\partial_\mu\hat{\Phi}$  ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden komponenttiavaruudessa. Potentialista (5.31) laskettu kenttätensori on

$$F_{\mu\nu} = \left( \frac{1}{8}\text{tr}([\partial_\mu\hat{\Phi}, \partial_\nu\hat{\Phi}]\hat{\Phi}) + \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu \right) \hat{\Phi}. \quad (5.33)$$

Tämä on  $su(2)$ -avaruudessa Higgsin kentän  $\Phi$  suuntainen. Lähellä tyhjiötä kenttä-  
tensorilla  $F_{\mu\nu}$  on siis lokaalisti vain rikkoutumattomaan  $U(1)$ -symmetriaryhmään

liittyvä komponentti. Seuraavaksi nähdään myös, että tämä komponentti toteuttaa Maxwellin yhtälöt, joten se on sopiva analogia klassisen sähködynamiikan kenttätensorille.

Määritellään mittainvariantti ja skalaariarvoinen kenttätensori

$$f_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\text{tr}(F_{\mu\nu}\hat{\Phi}) = F_{\mu\nu}^a \hat{\Phi}^a. \quad (5.34)$$

Tämä on mittainvariantti mittamuunnosten (5.11) ja (5.13) ja jäljen syklisyyden perusteella. Sijoittamalla tähän kenttätensori (5.33) ja käyttämällä yhtälöä  $|\hat{\Phi}|^2 = -\frac{1}{2}\text{tr}(\hat{\Phi}^2) = 1$  saadaan

$$f_{\mu\nu} = \frac{1}{8}\text{tr}([\partial_\mu\hat{\Phi}, \partial_\nu\hat{\Phi}]\hat{\Phi}) + \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu. \quad (5.35)$$

Koska

$$D_\mu\Phi = \partial_\mu\hat{\Phi}, \quad (5.36)$$

$$D_\mu F^{\mu\nu} = D_\mu(f^{\mu\nu}\hat{\Phi}) = (\partial_\mu f^{\mu\nu})\hat{\Phi} \quad (5.37)$$

ja

$$[D_\mu\Phi, \Phi] = (\partial_\mu h)h[\hat{\Phi}, \hat{\Phi}] = 0, \quad (5.38)$$

kenttäyhtälöt (5.20) ja (5.21) ovat nyt muotoa

$$\partial_\mu\partial^\mu h = \lambda(1 - h^2)h, \quad (5.39)$$

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0. \quad (5.40)$$

Ensimmäinen yhtälö on epälineaarinen aaltoyhtälö skalaarifunktiolle  $h$ . Toinen yhtälö on samaa muotoa kuin epähomogeeninen Maxwellin yhtälö  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ , kun laitetaan virta nolaksi. Kenttätensori (5.35) toteuttaa myös homogeenisen Maxwellin yhtälön

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_\beta f_{\mu\nu} = 0. \quad (5.41)$$

Tämä nähdään huomioimalla aluksi, että

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} f_{\mu\nu} = \frac{1}{8} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \text{tr}([\partial_\mu \hat{\Phi}, \partial_\nu \hat{\Phi}] \partial_\beta \hat{\Phi}), \quad (5.42)$$

koska symmetriset derivaattatermit  $\partial_\beta \partial_\mu \hat{\Phi}$  ja  $\partial_\beta \partial_\mu a_\nu$  häviävät summassa. Lisäksi  $\partial_\mu \hat{\Phi}$ ,  $\partial_\nu \hat{\Phi}$  ja  $\partial_\beta \hat{\Phi}$  ovat kaikilla indekseillä lineaarisesti riippuvia, koska ne ovat komponenttiavaruudessa pallon pinnalla. Tällöin termit  $\text{tr}([\partial_\mu \hat{\Phi}, \partial_\nu \hat{\Phi}] \partial_\beta \hat{\Phi})$  koostuvat termeistä  $\text{tr}([\partial_\mu \hat{\Phi}, \partial_\nu \hat{\Phi}] \partial_\mu \hat{\Phi})$  ja  $\text{tr}([\partial_\mu \hat{\Phi}, \partial_\nu \hat{\Phi}] \partial_\nu \hat{\Phi})$ , jotka häviävät jäljen syklistyyden perusteella. Kenttätensori (5.35) on siis edellä käydyn perusteella toimiva analogia magneettikentän määrittelyä varten.

Oletetaan seuraavaksi, että kenttä on staattinen, ja että mittapotentialin komponentti  $A_0$  on  $A_0 = 0$ . Määritellään sähkö- ja magneettikentät kuten normaalisti,

$$E_i = f_{0i} \quad (5.43)$$

ja

$$B_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} f_{jk}. \quad (5.44)$$

Oletuksien perusteella kenttätensorin komponentit  $F_{0i}$  ovat nollia, eli myös  $f_{0i}$  ja täten  $E_i$  häviävät, joten monopolilla ei ole sähköistä varausta. Käyttämällä määritelmää (5.34) ja asymptoottista mittapotentialia (5.26) sekä kenttää  $\hat{\Phi}^c = (x^c/r)$  magneettikentäksi (5.44) saadaan

$$\begin{aligned} B_i &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\partial_j A_k^c - \partial_k A_j^c - 2\epsilon_{abc} A_j^a A_k^b) \hat{\Phi}^c \\ &= -\epsilon_{ijk} \partial_j A_k^c \hat{\Phi}^c + \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} A_j^a A_k^b \hat{\Phi}^c \\ &= -\frac{x^i}{2r^3}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Tässä tarvittiin kaavoja  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{iab} = \delta_{ja} \delta_{kb} - \delta_{jb} \delta_{ka}$  ja  $\delta_{jk} \delta_{jk} = 3$ . Magneettikenttä on siis asymptoottisesti radiaalinen, eli avaruudessa on magneettinen monopoli. Jos magneettikenttä kirjoitetaan muodossa

$$B_i = \frac{g}{4\pi} \frac{x^i}{r^3}, \quad (5.46)$$

nähdään, että monopolin varaus on  $g = -2\pi$ .

Magneettisen monopolin varaus voidaan määrittää myös kentän topologian avulla. Oletetaan, että kenttä lähestyy tyhjiötä äärettömyydessä  $S_\infty^2$ , eli  $D_i \hat{\Phi} = 0$ . Oleellinen kenttä on  $\hat{\Phi} : S_\infty^2 \rightarrow S^2$ , jolla on topologinen varaus  $N$ . Muunnetaan laskuja varten kenttä  $\hat{\Phi}$  mittaan, jossa se on  $\hat{\Phi} = t^3$  lähes kaikkialla. Muunnoksen voi tehdä kaikkialla vain, jos kenttä kuuluu tyhjiön homotopialuokkaan. Määritellään mittamuunnos  $g_N$ , joka on määritelty kaikkialla lukuunottamatta pientä aluetta 'etelänavan' ympärillä, ja jonka määrittelee yhtälö

$$g_N \hat{\Phi} g_N^{-1} = t^3 \quad (5.47)$$

Määritellään samoin toinen mittamuunnos,  $g_S$ , joka on määritelty kaikkialla lukuunottamatta pientä aluetta 'pohjoisnavan' ympärillä, ja jonka määrittelee yhtälö

$$g_S \hat{\Phi} g_S^{-1} = t^3 \quad (5.48)$$

Muunnoksien  $g_N$  ja  $g_S$  määrittelyalueiden leikkauksessa molemmat yhtälöistä toteutuvat. Ratkaisemalla jälkimmäistä yhtälöstä  $\hat{\Phi}$  ja sijoittamalla se ensimmäiseen saadaan

$$g_N g_S^{-1} t^3 g_S g_N^{-1} = t^3 \quad \Leftrightarrow \quad (g_N g_S^{-1}) t^3 (g_N g_S^{-1})^{-1} = t^3 \quad (5.49)$$

eli leikkauksessa muunnos  $\Omega = g_N g_S^{-1}$  säilyttää kentän  $\hat{\Phi} = t^3$ , eli se kuuluu alkion  $t^3$  generoimaan ryhmän  $SU(2)$  aliryhmään  $U(1)$ . Muunnoksen  $\Omega$  voi siis kirjoittaa 'ekvaattorilla' muodossa

$$\Omega(\varphi) = e^{\alpha(\varphi)t^3}, \quad (5.50)$$

missä  $\varphi$  mittaa kulmaa ekvaattorin ympäri. Koska muunnokset  $g_N$  ja  $g_S$  ovat hyvin määriteltyjä ekvaattorilla, myös muunnoksen  $\Omega$  täytyy olla hyvin määritelty. Tämä johtaa vaatimukseen  $\exp(\alpha(0)t^3) = \exp(\alpha(2\pi)t^3)$ , eli  $\alpha(2\pi) = \alpha(0) + 2\pi\tilde{N}$ ,  $\tilde{N} \in \mathbb{Z}$ . Tässä käytetään moduloa  $2\pi$ , koska pienin kulma  $\alpha > 0$ , jolle  $\exp(\alpha t^3) = 1$ , on

$\alpha = 2\pi$ .

Koska pohjois- tai etelänapojen ympäristöä lukuunottamatta kumman tahansa mittamuunnoksen jälkeen kenttä  $\hat{\Phi}$  on vakio, eli  $\partial_i \hat{\Phi} = 0$ , mittapotentialiaali (5.31) mittamuunnoksien jälkeen on

$$A_i^{(N)} = a_i^{(N)} \hat{\Phi} = a_i^{(N)} t^3 \quad (5.51)$$

ja

$$A_i^{(S)} = a_i^{(S)} \hat{\Phi} = a_i^{(S)} t^3, \quad (5.52)$$

ja nämä saadaan alkuperäisestä mittapotentialialista  $A_i$  mittamuunnoksilla

$$A_i^{(N)} = g_N A_i g_N^{-1} + g_N \partial_i g_N^{-1}, \quad (5.53)$$

$$A_i^{(S)} = g_S A_i g_S^{-1} + g_S \partial_i g_S^{-1}. \quad (5.54)$$

Potentiaaleja (5.51) ja (5.52) yhdistää ekvaattorilla mittamuunnos

$$\begin{aligned} A_i^{(N)} &= \Omega A_i^{(S)} \Omega^{-1} + \Omega \partial_i \Omega^{-1} \\ &= \Omega a_i^{(S)} t^3 \Omega^{-1} + e^{\alpha(\varphi)t^3} \partial_i e^{-\alpha(\varphi)t^3} \\ &= a_i^{(S)} t^3 - \partial_i \alpha(\varphi) t^3, \end{aligned} \quad (5.55)$$

joten

$$a_i^{(N)} = a_i^{(S)} - \partial_i \alpha(\varphi). \quad (5.56)$$

Kenttätensori (5.35) on 2-muotona kirjoitettuna

$$f = da^{(N)} = da^{(S)}. \quad (5.57)$$

Jakamalla pallo  $S_\infty^2$  puolipalloiksi  $O_N$  ja  $O_S$  ekvaattorin kohdalta, magneettivuo pallon  $S_\infty^2$  läpi voidaan kirjoittaa Stokesin teoreeman avulla muodossa

$$\begin{aligned} \int_{S_\infty^2} f &= \int_{O_N} f + \int_{O_S} f \\ &= \int_{O_N} da^{(N)} + \int_{O_S} da^{(S)} \\ &= \int_{S_\infty^1} a^{(N)} dl - \int_{S_\infty^1} a^{(S)} dl, \end{aligned} \quad (5.58)$$

missä merkin muunnos johtuu ympyrän  $S_\infty^1$  kiertosuunnan muutoksesta. Sijoittamalla tähän yhtälö (5.56) saadaan

$$\int_{S_\infty^2} f = - \int_{S_\infty^1} \partial_i \alpha(\varphi) dl. \quad (5.59)$$

Koska  $\alpha(2\pi) - \alpha(0) = 2\pi\tilde{N}$ , magneettivuoksi saadaan

$$\int_{S_\infty^2} f = -2\pi\tilde{N}. \quad (5.60)$$

Kokonaisluku  $\tilde{N}$  identifioidaan topologian teorian perusteella homotopialuokan  $N$  kanssa [3], eli magneettivuo on kvantittunut arvoiksi  $-2\pi N$ , missä  $N$  on kenttäkonfiguraation topologinen varaus. Tässä käsittelyssä näkyy rikkoutumattoman symmetriaryhmän  $U(1)$  olemassaolon oleellisuus. Topologinen varaus liittyy juuri tähän rikkoutumattomaan ryhmään, ja se on samassa roolissa myös monissa fysikaalisemmissä teorioissa, jotka yrittävät laajentaa standardimallia.

### 5.3 Monopolit muissa teorioissa

Standardimallissa  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  ei esiinny ilman teorian laajennusta magneettisia monopoleja, joilla olisi äärellinen energia [13]. Standardimallin symmetriaryhmän voi kuitenkin upottaa suurempaan symmetriaryhmään, kuten ryhmään  $SU(5)$  tai  $SO(10)$ , jotka ovat esimerkkejä suurista yhtenäisteorioista. Ne mallintavat vahvan, heikon ja sähkömagneettisen vuorovaikutuksen yhdistämistä yhdeksi voimaksi. Nämä teorat kuvaavat jotakin aikaa varhaisesta maailmankaikkeudesta, ja niissä esiintyy monopoleja. Jos jokin monopoleja sisältävistä teorioista on tarkka malli varhaisesta maailmankaikkeudesta, ja maailmankaikkeuden kehitys on ollut sopivanlaista, monopoleja saattaa löytyä myös nykyisestä maailmankaikkeudesta. Monopoleja ei ole havaittu, mutta niitä etsitään yhä [19–24]. Niiden etsiminen on pitkään rajoittunut ulkoavaruudesta tulevaan säteilyyn ja hiukkasiin, koska monopolienergia on usein liian suuri niiden tuottamiseksi tämän päivän hiukkaskiihdyttimissä. Eri teorat ennustavat eri määrän monopoleja ja erisuuret energiat niille,

joten monopolien havaitseminen ja niiden ominaisuuksien mittaaminen antaisi tärkeää tietoa varhaisesta maailmakaikkeudesta ja silloin vallineesta teoriasta.

Georgin–Glashown mallissa standardimalli on upotettu symmetriaryhmään  $SU(5)$ . Symmetriaryhmän  $SU(5)$  symmetriarikko on [25]

$$SU(5) \rightarrow SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow SU(3)_c \times U(1)_{em}. \quad (5.61)$$

Monopolit muodostuvat ensimmäisen symmetriarikon yhteydessä. Monopoleilla on tässä vaiheessa kaikkiin symmetriaryhmiin,  $SU(3)$ ,  $SU(2)$  ja  $U(1)$ , liittyvä magneettinen varaus, ja niiden topologinen varaus liittyy ryhmään  $U(1)$ . Jälkimmäisessä symmetriarikossa ei synny uusia monopoleja, mutta ryhmän  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  rikkoutuessa ryhmäksi  $U(1)_{em}$  monopoleissa tapahtuu niiden varauksista riippuvia muutoksia. Tietynlaiset monopolit selviävät, kun taas toiset annihiloituvat nopeasti. Symmetriaryhmän  $SO(10)$  symmetriarikko on [13]

$$SO(10) \rightarrow SU(4)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (5.62)$$

$$\rightarrow SU(3)_c \times U(1)_{em}. \quad (5.63)$$

Tässä tapauksessa monopoleja on kahta eri tyyppiä, yksi kummallekin ensimmäisistä symmetriarikoista, jotka tapahtuvat eri lämpötiloissa. Suurien yhtenäisteorioiden monopoleilla on usein todella suuri luokkaa  $10^{14} - 10^{16}$  GeV oleva massa.

Standardimallista löytyy pienellä tulkinnan muunnoksella monopoleja ja dyoneja, joilla on ääretön energia. Näitä kutsutaan Chon–Maisonin monopoleiksi [26], ja ne esiintyvät standardimallin sähköheikossa sektorissa. Monopoli löytyy kirjoittamalla Higgsin kenttä  $\Phi$  muodossa  $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\xi$ , missä  $\rho = \rho(x)$  on reaalfunktio ja  $\xi$  on normitettu dupletti,  $\xi^\dagger\xi = 1$ . Monopolien olemassaolo perustuu kentän  $\xi$  tulkisemisena  $CP^1$ -arvoisena. Tällöin sen topologiaa kuvaa homotopiar ryhmä  $\pi_2(CP^1) = \mathbb{Z}$ . Tässä avaruus  $CP^1$  on kompleksinen projektiivinen suora. Chon–Maisonin monopoleille on kuitenkin löydetty eri tapoja saada sille äärellinen energia. Tämä tapahtuu laajentamalla standardimallia sen Lagrangen tiheyttä muuttamalla [27–29]. Näis-

sä malleissa monopoliin massa voi olla suhteellisen matala, vain muutamia TeV:ja. Näin matalat energiat ovat jo LHC-hiukkaskiihdyttimen energialuokkaa, ja uusimmat kokeet ovat jo päässeet lähelle näitä lukuja [19, 21]. Monopoleja ei kuitenkaan löytynyt.

## 5.4 Viimeaikainen tutkimus

Magneettisia monopoleja ei ole vielä havaittu, joten suuri osa monopoliin tutkimuksesta on aina keskittynyt niiden etsimiseen. Teoreettisella puolella lasketaan eri teorioiden monopoliin ominaisuuksia, kuten massaa ja vaikutusalaa, jotka helpottavat monopoliin etsimistä kokeissa, joissa etsittävän hiukkasen massa täytyy tietää etukäteen [13, 29].

Lisäksi mallinnetaan monopoliin muodostumista eri mekanismien kautta, mikä pohjalta voidaan toteuttaa kokeita. Schwingerin mekanismi selittää elektroni-positroni parien muodostumisen vahvassa sähkökentässä kvanttitunneleutumisen avulla [30]. Saman mekanismin oletetaan toimivan myös magneettisten monopoliin tapauksessa [13]. Viimeaikoina tätä on tutkittu teoreettisesti painavien ionien törmäyksissä, joissa muodostuu vahva magneettikenttä [31, 32]. On laskettu muun muassa magneettisten monopoliin muodostumisprosessin vaikutusalaa ja magneettisten monopoliin liikemääräjakausta. Painavien ionien ohella myös protonitörmäyksen käyttö on yleistä. Myös tälle prosessille on määritetty vaikutusala [33]. Näiden laskujen kehittäminen paremmiksi auttaa suunnittelemaan koelaitteistot löytämään magneettisia monopoleja tehokkaammin. Monopoliin syntymistä Schwinger mekanismilla tutkittiin ensimmäistä kertaa lyijyionien törmäyksessä vuonna 2018 MoEDAL-kokeessa [22]. Monopoleja ei löytynyt, mutta koe asetti uuden alarajan monopoliin massalle. Rajoja on lähiaikoina asetettu myös protoni-protoni törmäyksen avulla MoEDAL- ja ATLAS-kokeissa [19, 20].

Paljon tutkittu tänäpäivänä on kvarkkivankeus [34]. Kvarkkivankeus viittaa kvark-

kien havaitsemiseen vain tiloissa, joissa ne ovat sidottuina toisiinsa. Kvarkkien vuorovaikutusta hallitsee vahva vuorovaikutus, jonka toiminta tunnetaan hyvin protonin halkaisijaa pienemmillä etäisyyksillä, mutta huonosti suuremmilla etäisyyksillä. Tämä johtuu siitä, että pienillä etäisyyksillä vuorovaikutuksen voi laskea perturbatiivisesti, mutta suurilla etäisyyksillä ei voi. Kvarkkivankeuden selittäminen vaatisi vuorovaikutuksen tuntemisen myös suurilla etäisyyksillä. Kvarkkivankeudelle on esitetty eri teorioita, ja myös monopoleilla on mahdollisesti osuus teoriassa.

Monopolit pystyvät luomaan sidottuja tiloja, jotka koostuvat useista monopoleista ja antimonopoleista. Näitä tiloja kutsutaan monopoliumeiksi, ja monopoliensaantuminen näihin tiloihin on yksi mahdollien selitysten sille, että monopoleja ei ole havaittu [35]. Viimeaikaiset teoreettiset tutkimukset antavat viitteitä siitä, että kokeellista tutkimusta kannattaa suorittaa myös monopoliuumien suunnassa [36–39]. Monopoliuumien tutkiminen on oleellista, koska niiden havaitseminen hiukkaskiihdyttimissä eroaa yksittäisten monopoliensaantimisesta, ja niiden muodostumistodennäköisyys voi olla varsin suuri [36].

Suurta osaa monopoliensaantimien ominaisuuksista ei pystytä laskemaan perturbatiivisesti, joten muiden laskutekniikoiden kehittäminen on tärkeää. Yksi paljon käytetty vaihtoehto on hilamittateoria, jonka avulla tehdään numeerisia simulaatioita. Hilamittateoriaa on käytetty esimerkiksi monopoliensaantimien Schwingerin mekanismin tutkimisessa [40] ja monopoliuumien tutkimisessa [39].

## 6 Instantoni

Aiemmin käsiteltyjen solitonien topologian on määrittänyt kentän arvot avaruudessa, jolloin kenttä on lokalisoitunut avaruuteen, ja sen muoto on ajassa muuttumaton. Kenttä voi toisaalta olla lokalisoitunut myös ajassa, jos sen topologian määrittää arvot koko avaruusajassa. Tämä ei tietenkään ole enään solitoni siinä mielessä, että se ei ole pysyvä rakenne, mutta topologisen luonteensa vuoksi tällaista

ratkaisuja kutsutaan kuitenkin usein topologiseksi solitoniksi. Tämän tyyppisiä ratkaisuja löytyy (3+1)-ulotteisessa Euklidisessa avaruusajassa määritellyssä puhtaassa Yangin–Millsin teoriassa, ja niitä kutsutaan instantoneiksi. Minkowskin avaruusaika voidaan muuntaa Euklidiseksi Wickin kierrolla  $x^0 \rightarrow ix^0$ . Tämä muuntaa Minkowskin metriikan Euklidiseksi. Määritellään  $x^4 = ix^0$ , jolloin avaruusajan piste on  $(x^\mu) = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ . Myös tensorisuureiden aikakomponentti muunnetaan samaan tapaan siten, että esimerkiksi mittapotentialiaali on  $(A_\mu) = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ . Jatkossa kreikkalaiset aakkoset  $\mu, \nu \dots$  viittaavat indekseihin 1, 2, 3, 4 ja latinalaiset aakkoset  $i, j, k \dots$  viittaavat indekseihin 1, 2, 3.

Vaikka teoriat halutaan loppujen lopuksi määritellä fysikaalisessa Minkowskin avaruudessa, Euklidisessa avaruudessa löydetyt klassiset solitoniratkaisut ovat tärkeitä. Instantonit ovat tärkeitä teorioissa, joissa esiintyy useita tyhjiöitä [41]. Näissä teorioissa tyhjiöiden välinen tunneloitumisen mahdollisuus täytyy huomioida, mutta matalan energian laskuissa tunneloitumisen vaikutus ei esiinny Minkowskin avaruudessa tehdyissä perturbatiivisissa laskuissa. Tämä ongelma voidaan ratkaista siirtymällä Euklidiseen avaruusaikaan ja hyödyntämällä instantoneja. Tämä luku seuraa pääasiassa lähdeä [6].

## 6.1 Instantoni Yang–Mills-teoriassa

Tarkastellaan samaa  $SU(2)$ -teoriaa kuin 't Hooftin–Polyakovin monopoliin tapauksessa, mutta ilman skalaarikenttää. Ainoa kenttä on siis  $su(2)$ -arvoinen mittapotentialiaali

$$A_\mu = gA_\mu^a \frac{\tau^a}{2i}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (6.1)$$

missä  $\tau^a$  ovat jälleen Paulin matriisit. Kentän komponentit ovat tällä kertaa skaalattu kytkentävakiolla  $g$ , ja kantana käytetään matriiseja  $\{\tau^a/2i\}$ . Kenttätensori on

$$F_{\mu\nu} = gF_{\mu\nu}^a \frac{\tau^a}{2i} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (6.2)$$

Puhtaan Yangin–Millsin teorian vaikutus Minkowskisessa avaruusajassa sisältää vain ensimmäisen termin Lagrangen tiheydestä (5.9). Skaalattua kenttätensoria (6.2) käyttämällä se on

$$S_M = \frac{1}{2g^2} \int_{\mathbb{R}^4} dt d^3x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}). \quad (6.3)$$

Wickin kierrossa määritellään uudet muuttujat ja kentät siten, että  $t = -ix_4$ ,  $(\partial/\partial t) = i(\partial/\partial x^4)$  ja  $A_0 = iA_4$ , missä oletetaan, että uudet muuttujat ovat reaalisia. Tämä muuntaa kenttätensorin komponentteja siten, että  $F_{0k} = iF_{4k}$  ja muut komponentit pysyvät muuttumattomina. Saadaan siis

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2F_{0i} F^{0i} + F_{ij} F^{ij} = -2F_{0i} F_{0i} + F_{ij} F_{ij} = 2F_{4i} F_{4i} + F_{ij} F_{ij} = F_{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

missä summaukseen käytetään indeksien laskun jälkeen Euklidisen metriikan signatuuria  $(+, +, +, +)$ . Sijoittamalla nämä muunnokset vaikutukseen (6.3) saadaan vaikutus

$$(S_M)_{\text{Wick}} = -i \frac{1}{2g^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}). \quad (6.4)$$

Lopullinen vaikutus Euklidisessa avaruusajassa määritellään kertomalla tämä vaikutus kertoimella  $-i$ . Puhtaan Yangin–Millsin teorian vaikutus Euklidisessa avaruusajassa on siis

$$S = -\frac{1}{2g^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}). \quad (6.5)$$

Kenttäyhtälöt ovat tälle vaikutukselle

$$D_\mu F_{\mu\nu} = 0. \quad (6.6)$$

Edellisten solitonien tapauksessa tarkasteltiin staattisia ratkaisuja, jotka ovat energian minimejä. Instantonien tapauksessa etsitään vaikutuksen minimiä, eli myös kentän aikakehitys ja kenttien aikakomponentit ovat oleellisia.

Skaalatun avaruusajan vaikutus on

$$S(\mu) = -\frac{1}{2g^2} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4(\mu x)}{\mu^4} \mu^4 \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = S, \quad (6.7)$$

eli vaikutus on invariantti skaalauksessa. Derrickin teoreema ei siis kiellä stationaarisia ratkaisuja. Toisaalta, kuten myöhemmin tullaan huomaamaan, ratkaisuilla on niiden kokoon liittyvä vapaa parametri, joka liittyy vaikutuksen skaalausinvarianssiin.

Etsitään aluksi tyjiöratkaisut. Vaikutus (6.5) on ei-negatiivinen, joten tyjiöratkaisu on  $F_{\mu\nu}(x) = 0$  eli

$$A_\mu(x) = -\partial_\mu g(x)g^{-1}(x), \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (6.8)$$

missä  $g(x) \in SU(2)$ . Jotta vaikutus (6.5) olisi äärellinen, kenttätensoren  $F_{\mu\nu}$  täytyy lähestyä nollaa nopeammin kuin  $1/r^2$ , missä  $r = |x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$ .

Määritellään seuraavaksi kenttä äärettömydessä homotopian tarkastelua varten. Siirrytään radiaalimitaan  $A_r = 0$ , jotta voidaan määrittellä avaruusajan äärettömydessä  $S_\infty^3$  mittafunktion  $g(x)$  ja sen derivaattojen kolmen kulmaparametrin  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  avulla. Rajaehto mittapotentialille on nyt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_\mu(x) = A_\mu^\infty(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\partial_\mu g^\infty(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)(g^\infty)^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (6.9)$$

Homotopialuokkien määrittelyyn tarvitaan kuvaukset avaruusajan äärettömydestä  $S_\infty^3$  mittafunktion  $g^\infty(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  arvoavaruuteen  $SU(2)$ , eli

$$g^\infty : S_\infty^3 \rightarrow SU(2). \quad (6.10)$$

Ryhmä  $SU(2)$  koostuu alkioista

$$g = c_\mu t_\mu, \quad (6.11)$$

missä  $c_\mu \in \mathbb{R}$ ,  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ovat Paulin matriisit kerrottuna imaginaariyksiköllä,  $\sigma_4 = \mathbf{1}$  on  $2 \times 2$  identiteettimatriisi ja kertoimet  $c_\mu$  toteuttavat ehdon

$$c_\mu c_\mu = 1. \quad (6.12)$$

Ryhmän  $SU(2)$  parametriseoi neljä reaalilukua  $c_\mu$ , jotka toteuttavat ehdon (6.12), eli ryhmä on käytännössä pallo  $S^3$ . Mittafunktion  $g^\infty$  määrittää siis homotopialuokat, jotka kuuluvat homotopiar ryhmään  $\pi_3(SU(2)) \cong \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ . Rajaehdon (6.9)

perusteella myös kentän  $A_\mu^\infty$  homotopialuokat määrittelee sama homotopiaryhmä, koska jatkuvat muunnokset kentässä  $A_\mu^\infty$  vastaavat jatkuvia muunnoksia kentässä  $g^\infty$ .

Kirjoitetaan  $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ . Kenttätensoriin  $F$  Hodgen duaali  $\star F$  on

$$\star F = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (6.13)$$

missä Levi–Civitan symboli  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  on määritelty indeksin vaihdon  $0 \rightarrow 4$  jälkeen siten, että  $\epsilon_{1234} = -1$ . Kenttätensori  $F$  ja sen Hodgen duaali  $\star F$  toteuttavat identiteetin

$$\text{tr}[\star F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}] = \text{tr}[F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}], \quad (6.14)$$

mikä nähdään käyttämällä identiteettiä  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = 2(\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma})$ .

Osoitetaan, että mittakenttä  $A_\mu$  voidaan indeksoida kokonaisluvun

$$N = -\frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \text{tr}(F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}) \quad (6.15)$$

avulla, ja että tämä kokonaisluku vastaa mittafunktion  $g$  topologiasta astetta. Huomioidaan aluksi, että Hodgen duaali  $\star F$  toteuttaa aina yhtälön

$$D_\mu \star F_{\mu\nu} = \partial_\mu \star F_{\mu\nu} + [A_\mu, \star F_{\mu\nu}] = 0, \quad (6.16)$$

mikä on vain Bianchin identiteetti (5.8) kirjoitettuna eri muodossa. Lisäksi voidaan kirjoittaa

$$\star F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta). \quad (6.17)$$

Käyttämällä kaavoja (6.16) ja (6.17) saadaan

$$\begin{aligned} \text{tr}[F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}] &= \text{tr}[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \star F_{\mu\nu} + (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) \star F_{\mu\nu}] \\ &= \text{tr}[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \star F_{\mu\nu} + A_\mu [A_\nu, \star F_{\mu\nu}]] \\ &= \text{tr}[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \star F_{\mu\nu} - A_\mu \partial_\nu \star F_{\mu\nu}] \\ &= \text{tr}[(\partial_\mu A_\nu \star F_{\mu\nu} - \partial_\nu (A_\mu \star F_{\mu\nu}))] \\ &= \text{tr}[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \{ \partial_\mu A_\nu (\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) - \partial_\nu (A_\mu (\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta)) \}]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Levi–Civitan symbolin antisymmetrisyyden ja jäljen syklisyyden avulla voidaan kirjoittaa

$$\text{tr}[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta] = \frac{1}{3}\text{tr}[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\nu A_\alpha A_\beta)]. \quad (6.19)$$

Käyttämällä tätä, Levi–Civitan symbolin antisymmetrisyyttä ja vaihtamalla indeksejä voidaan yhtälö (6.18) kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \text{tr}[F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}] &= \text{tr}[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{2\partial_\mu(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{4}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta)\}] \\ &= 2\partial_\mu \text{tr}[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta)]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Stokesin teoreeman avulla voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} N &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \partial_\mu \text{tr}[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta)] \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S_\infty^3} dS_\mu \text{tr}[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta)]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Äärettömyydessä kenttätensori  $F_{\mu\nu}$  häviää, mistä saadaan

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 2\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) = 0 \quad (6.22)$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta = -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\alpha A_\beta. \quad (6.23)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (6.21) ja kirjoittamalla mittapotentialiaali muotoon  $A_\mu = -\partial_\mu g g^{-1}$  saadaan

$$\begin{aligned} N &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S_\infty^3} dS_\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr}[-\frac{1}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta] \\ &= -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S_\infty^3} dS_\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr}[\partial_\nu g g^{-1} \partial_\alpha g g^{-1} \partial_\beta g g^{-1}], \end{aligned} \quad (6.24)$$

mikä voidaan tunnistaa funktion  $g(x)$  topologiseksi asteeksi [6]. Jokaista mittafunktiota  $g(x)$ , ja täten mittapotentialiaalia  $A_\mu(x)$ , vastaa siis jokin kokonaisluku.

## 6.2 Yang–Mills-teorian instantoniratkaisut

Tarkastellaan instantoniratkaisuja, joita kutsutaan itseduaalisiksi ja anti-itseduaalisiksi. Käyttämällä identiteettiä (6.14) ja jäljen syklisyyttä triviaaliin epäyhtälöön

$$- \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \operatorname{tr}[(F_{\mu\nu} \pm \star F_{\mu\nu})^2] \geq 0 \quad (6.25)$$

saadaan

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \operatorname{tr}[F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \pm 2F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu} + \star F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}] &\geq 0 \\ - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \operatorname{tr}[F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}] &\geq \mp \int_{\mathbb{R}^4} \operatorname{tr}[F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}] \\ S &\geq \frac{8\pi^2}{g^2} |N|. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Tämä antaa vaikutukselle alarajan, joka riippuu topologisen asteen itseisarvosta. Alkuperäisen epäyhtälön perusteella alaraja saavutetaan, kun

$$F_{\mu\nu} = \pm \star F_{\mu\nu}. \quad (6.27)$$

Ratkaisua, joka toteuttaa yhtälön +-merkillä, kutsutaan itseduaaliseksi ja ratkaisua, joka toteuttaa yhtälön --merkillä, kutsutaan anti-itseduaaliseksi. Nämä selvästi toteuttavat kenttäyhtälöt (6.6) Bianchin identiteetin (6.16) perusteella. Itse- ja anti-itseduaaliset kentät ovat siis vaikutuksen minimejä omissa homotopialuokissaan. Kenttäyhtälöillä (6.6) voi olla muitakin ratkaisuja, mutta koska itse- ja anti-itseduaaliset kentät antavat minimin, keskitymme niihin.

Verrataan vielä Euklidista teoriaa Minkowskiseen teoriaan [6]. Yhtälöstä (6.27) nähdään, että itse- ja anti-itseduaalisille kentille duaalin duaali on

$$\star \star F_{\mu\nu} = \pm \star F_{\mu\nu} = \star \pm F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}. \quad (6.28)$$

Toisaalta yleisesti pätee

$$\begin{aligned} \star \star F_{\mu\nu} &= \star \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} \\ &= F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (6.29)$$

missä käytettiin identiteettiä  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta\kappa\lambda} = 2(\delta_{\mu\kappa}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\kappa})$ . Yhtälö (6.27) on siis johdonmukainen yleisten ominaisuuksien kanssa. Minkowskin avaruudessa sen sijaan saadaan yleisesti

$$\begin{aligned}
**F_{\mu\nu} &= **\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta}^{\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\kappa\lambda}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda} \\
&= -F_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{6.30}$$

missä --merkki johtuu siitä, että toisella rivillä kaikki yläindeksit ovat erisuuria nollasta eroaville termeille, jolloin niiden laskemisesta tulee yhteensä kerroin  $-1$ . Tästä syystä Minkowskisessa teoriassa ei ole olemassa itse- tai anti-itseduaalisia ratkaisuja. Tällaiset ratkaisut ovat kuitenkin hyödyllisiä fysiikassa, mistä johtuu teorian tutkiminen Euklidisessä avaruudessa.

Määritellään ratkaisuja varten Paulin matriiseista koostuva tensori

$$(\bar{\sigma}_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau^3 & -\tau^2 & -\tau^1 \\ -\tau^3 & 0 & \tau^1 & -\tau^2 \\ \tau^2 & -\tau^1 & 0 & -\tau^3 \\ \tau^1 & \tau^2 & \tau^3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.31}$$

Tensorin on antisymmetrinen,  $\bar{\sigma}_{\mu\nu} = -\bar{\sigma}_{\nu\mu}$ , ja sillä on ominaisuudet

$$[\bar{\sigma}_{\mu\alpha}, \bar{\sigma}_{\nu\beta}] = i[\delta_{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}\bar{\sigma}_{\mu\nu} - \delta_{\mu\beta}\bar{\sigma}_{\alpha\nu} - \delta_{\alpha\nu}\bar{\sigma}_{\mu\beta}], \tag{6.32}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\sigma}_{\beta\sigma} = \delta_{\mu\sigma}\bar{\sigma}_{\nu\alpha} + \delta_{\nu\sigma}\bar{\sigma}_{\alpha\mu} + \delta_{\alpha\sigma}\bar{\sigma}_{\mu\nu} \tag{6.33}$$

ja

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\sigma}_{\alpha\beta} = -\bar{\sigma}_{\mu\nu}. \tag{6.34}$$

Viimeinen ominaisuus tarkoittaa että matriisi  $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$  on anti-itseduaalinen.

Yhtälöistä (6.27) itseduaaliselle yhtälölle löytyy ratkaisu muodossa

$$A_\mu = i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\nu(\ln\phi(x)) \quad (6.35)$$

missä  $\phi(x)$  on reaaliarvoinen skalaarifunktio. Käyttämällä ominaisuuksia (6.32)-(6.34) saadaan kenttätensoriksi  $F_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \\ &= i\bar{\sigma}_{\nu\alpha}(\partial_\mu\partial_\alpha\ln\phi - \partial_\alpha\phi\partial_\mu\ln\phi) - i\bar{\sigma}_{\mu\alpha}(\partial_\nu\partial_\alpha\ln\phi - \partial_\alpha\phi\partial_\nu\ln\phi) - i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial_\alpha\ln\phi \end{aligned} \quad (6.36)$$

ja sen duaaliksi

$$\begin{aligned} \star F_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\ &= i\bar{\sigma}_{\nu\alpha}(\partial_\alpha\partial_\mu\ln\phi - \partial_\alpha\phi\partial_\mu\ln\phi) - i\bar{\sigma}_{\mu\alpha}(\partial_\alpha\partial_\nu\ln\phi - \partial_\alpha\phi\partial_\nu\ln\phi) + i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\alpha\ln\phi. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Vaativalla yhtälön  $\star F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$  toteutuvan saadaan matriisien  $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$  kertoimia vertailemalla yhtälöt

$$\partial_\mu\partial_\alpha\ln\phi - \partial_\mu\ln\phi\partial_\alpha\ln\phi = \partial_\alpha\partial_\mu\ln\phi - \partial_\mu\ln\phi\partial_\alpha\ln\phi, \quad (6.38)$$

$$-\partial_\alpha\ln\phi\partial_\alpha\ln\phi = \partial_\alpha\partial_\alpha\ln\phi. \quad (6.39)$$

Ensimmäinen näistä toteutuu aina ja toisesta yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} \partial_\alpha\partial_\alpha\ln\phi + \partial_\alpha\ln\phi\partial_\alpha\ln\phi &= 0 \\ \partial_\alpha\left(\frac{\partial_\alpha\phi}{\phi}\right) + \frac{\partial_\alpha\phi\partial_\alpha\phi}{\phi^2} &= 0 \\ \frac{\partial_\alpha\partial_\alpha\phi}{\phi} - \frac{\partial_\alpha\phi\partial_\alpha\phi}{\phi^2} + \frac{\partial_\alpha\phi\partial_\alpha\phi}{\phi^2} &= 0 \\ \partial_\alpha\partial_\alpha\phi &= 0, \end{aligned} \quad (6.40)$$

kun  $\phi > 0$ . Skalaarikenttä  $\phi$  toteuttaa siis Laplacen yhtälön neljässä ulottuvuudessa.

Instantoneille yleinen ratkaisu on tavallista kirjoittaa muodossa

$$\phi(x) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{|x - a_i|^2}, \quad (6.41)$$

missä  $\lambda_i$  ja  $a_i^\mu$  ovat reaalisia vakioita. Vakio 1 on valittu, jotta mittapotentialiaali  $A_\mu$  ei olisi singulaarinen äärettömyydessä. Kun pisteet  $a_i$  ovat tarpeeksi kaukana toisistaan, voidaan tulkita pisteet  $a_i$  instantonien paikkana avaruudessa  $\mathbb{R}^4$ . Funktio (6.41) kuvaa  $N$ -instantoniratkaisua. Kun  $N = 0$ , saadaan  $\phi = 1$  ja mittapotentialiaali on kaikkialla  $A_\mu = 0$ , mikä vastaa tyhjiöratkaisua.

Tarkastellaan ratkaisua tapauksessa  $N = 1$ . Nyt

$$\phi(x) = 1 + \frac{\lambda^2}{|x - a|^2}. \quad (6.42)$$

Siirrytään koordinaatteihin  $y^\mu = x^\mu - a^\mu$ , jolloin sijoittamalla skalaarikenttä (6.42) mittapotentialiaaliin (6.35) saadaan

$$A_\mu(y) = -2i\bar{\sigma}_{\mu\nu} \frac{\lambda^2 y^\nu}{|y|^2(|y|^2 + \lambda^2)}. \quad (6.43)$$

Tämä on singulaarinen pisteessä  $y = 0$ , mutta kyseessä ei ole oikea singulariteetti, vaan sen voi poistaa mittamuunnoksella. Itse- ja anti-itseduaalisuusyhtälöt (6.27) ovat mittainvariantteja, joten mittamuunnettu itseduaalinen kenttätensori on yhä itseduaalinen. Singulariteetin poistamiseen tarvittava mittamuunnos on

$$g(y) = \frac{y^\mu}{|y|} t^\mu = \frac{1}{|y|} (y^4 + iy^k \tau^k). \quad (6.44)$$

Käyttämällä kommutaatio- ja antikommutaatiorelaatioiden

$$\frac{1}{2}[\tau^k, \tau^i] = \epsilon_{kij} \tau^j \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2}\{\tau^k, \tau^i\} = \delta_{ki} \mathbf{1} \quad (6.45)$$

summaa, ja huomioimalla, että  $g^{-1} = \frac{1}{|y|} (y^4 - iy^k \tau^k)$ , voidaan osoittaa, että

$$g^{-1}(y) \frac{\partial}{\partial y^\mu} g(y) = -2i\bar{\sigma}_{\mu\nu} \frac{y^\nu}{|y|^2}. \quad (6.46)$$

Mittapotentialiaali (6.43) voidaan nyt antaa muodossa

$$A_\mu(y) = g^{-1}(y) \frac{\partial}{\partial y^\mu} g(y) \frac{\lambda^2}{|y|^2 + \lambda^2}. \quad (6.47)$$

Tästä nähdään, että mittapotentialin singulaarisuus liittyy rajalla  $y \rightarrow 0$  puhtaaseen mittaan  $g^{-1}(y)\frac{\partial}{\partial y^\mu}g(y)$ , joka vastaa mittafunktiota  $g^{-1}$ , joka on singulaarinen pisteessä  $y = 0$ . Tästä syystä singulaarisuus voidaan poistaa mittamuunnoksella. Suorittamalla tämä mittamuunnos, käyttämällä mittafunktiota (6.44), saadaan mittapotentialiksi

$$\begin{aligned}
A_\mu(y) &\rightarrow A'_\mu(y) = g(y)A_\mu g^{-1}(y) - \partial_\mu g(y)g^{-1}(y) \\
&= g(y)g^{-1}(y)\partial_\mu g(y)\frac{\lambda^2}{|y|^2 + \lambda^2}g^{-1}(y) - \partial_\mu g(y)g^{-1}(y) \\
&= \partial_\mu g(y)g^{-1}(y)\left(\frac{\lambda^2}{|y|^2 + \lambda^2} - 1\right) \\
&= -\partial_\mu g(y)g^{-1}(y)\frac{|y|^2}{|y|^2 + \lambda^2} \\
&= g(y)\partial_\mu g^{-1}(y)\frac{|y|^2}{|y|^2 + \lambda^2}. \tag{6.48}
\end{aligned}$$

Nyt mittapotentiali  $A'_\mu$  häviää pisteessä  $y = 0$  ja on siinä hyvin käyttäytyvä, joten singulariteetti saatiin poistettua. Määritellään tensori  $\sigma_{\mu\nu}$ , joka on muuten sama kuin  $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ , mutta määritellään  $\sigma_{i4} = -\bar{\sigma}_{i4}$ . Tensori  $\sigma_{\mu\nu}$  on itseduaalinen ja toteuttaa yhtälön

$$g(y)\frac{\partial}{\partial y^\mu}g^{-1}(y) = -2i\sigma_{\mu\nu}\frac{y^\nu}{|y|^2}, \tag{6.49}$$

missä mittafunktio  $g(y)$  on määritelty kaavassa (6.44). Tämän avulla mittapotentiali voidaan alkuperäisissä koordinaateissa  $x^\mu$  kirjoittaa muotoon

$$A'_\mu(x) = -2i\sigma_{\mu\nu}\frac{x^\nu - a^\nu}{|x - a|^2 + \lambda^2}. \tag{6.50}$$

Mittapotentiali  $A'_\mu$  on nyt ei-singulaarinen kaikkialla, ja sen arvo lähestyy äärettömyydessä  $|x| \rightarrow \infty$  puhdasta mitta

$$A'_\mu \rightarrow -2i\sigma_{\mu\nu}\frac{x^\nu - a^\nu}{|x - a|^2} = g(y)\frac{\partial}{\partial y^\mu}g^{-1}(y). \tag{6.51}$$

Kenttätensoriksi  $F_{\mu\nu}$  saadaan käyttämällä kaavaa (6.32) samassa muodossa tensorille  $\sigma_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = 4i\sigma_{\mu\nu}\frac{\lambda^2}{(|x - a|^2 + \lambda^2)^2}. \tag{6.52}$$

Tämä on itseduaalinen, koska tensori  $\sigma_{\mu\nu}$  on itseduaalinen. Kenttätensori toteuttaa oikean rajaehdon  $F_{\mu\nu} = 0$ , kun  $|x| \rightarrow \infty$ .

Huomioimalla, että  $\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 3((\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 + (\tau^3)^2) = 3\mathbf{1}_{2 \times 2}$ , vaikutukseksi (6.5) voidaan laskea

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2g^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \operatorname{tr}[F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}] \\ &= \frac{48\lambda^4}{g^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \frac{1}{(|x-a|^2 + \lambda^2)^4} \\ &= \frac{8\pi^2}{g^2}. \end{aligned} \tag{6.53}$$

Tämä varmistaa, että löydetty ratkaisu kuuluu homotopialuokkaan  $N = 1$ . Nähdään myös, että parametri  $\lambda$  on vapaa parametri, joka ei muuta vaikutuksen suuruutta. Integroimalla vain avaruuden  $|x-a| \leq \lambda$  yli saadaan  $S_\lambda = (4\pi^2)/g^2 = (1/2)S$ , joten parametri  $\lambda$  kuvaa instantonin kokoa. Lisäksi kentän vaikutus on keskittynyt pisteen  $x = a$  ympäristöön, joten parametri  $a$  kuvaa instantonin paikkaa. Instantoniratkaisulla on kolme muuta vapaata parametria, joita ei näy ratkaisussa. Nämä vastaavat sisäisiä kiertoja avaruudessa  $SU(2)$ . Ratkaisun rakentamiseen käytetty mittafunktio  $g$  on pallosymmetrinen, joten instantonin orientaatioon liittyy kolme globaaliin mittamuunnokseen liittyvää parametria. Yhteensä instantonin määrittelee siis kahdeksan parametria, neljä parametria  $a^\mu$  määräävät instantonin paikan, parametri  $\lambda$  määrää sen koon, ja kolme  $SU(2)$ -avaruuden parametria määräävät instantonin orientaation.

Anti-itseduaalinen instantoniratkaisu saadaan vaihtamalla edellä käydyssä käsittelyssä tensorit  $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$  ja  $\sigma_{\mu\nu}$  keskenään. Mittapotentialiaali  $A'_\mu$  on tällöin

$$A'_\mu(x) = -2i\bar{\sigma}_{\mu\nu} \frac{x^\mu - a^\mu}{|x-a|^2 + \lambda^2} \tag{6.54}$$

$$= g^{-1} \partial_\mu g \frac{|x-a|^2}{|x-a|^2 + \lambda^2}. \tag{6.55}$$

Tällä ratkaisulla on topologinen varaus  $N = -1$ , ja sitä kutsutaan anti-instantoniksi.

Ratkaisu  $N$ -instantonille saadaan käyttämällä funktiota (6.41). Merkitsemällä

$y_i^\mu = x^\mu - a_i^\mu$  mittapotentialiksi (6.35) saadaan nyt

$$\begin{aligned} A_\mu &= i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\nu \left[ \ln \left( 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j^2}{|y_j|^2} \right) \right] \\ &= -2i\bar{\sigma}_{\mu\nu} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2 y_i^\nu}{|y_i|^4} \right) / \left( 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j^2}{|y_j|^2} \right), \end{aligned} \quad (6.56)$$

missä  $\partial_\mu = (\partial/\partial x^\mu) = (\partial/\partial y_i^\mu)$ . Jokaiselle indeksille  $i$  voidaan käyttää yhtälöä (6.46), jolloin

$$A_\mu(x) = \sum_{i=1}^N g^{-1}(y_i)\partial_\mu g(y_i)f_i(x), \quad (6.57)$$

missä

$$f_i(x) = \left( \frac{\lambda_i^2}{|x - a_i|^2} \right) / \left( 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j^2}{|x - a_j|^2} \right) \quad (6.58)$$

Mittapotentialiaali  $A_\mu$  on singulaarinen pisteissä  $x = a_i$ . Funktion  $f$  ja mittapotentialin  $A_\mu$  raja-arvot näissä pisteissä ovat

$$\lim_{x \rightarrow a_i} f_j(x) = \delta_{ij}, \quad (6.59)$$

$$\lim_{x \rightarrow a_i} A_\mu(x) = g^{-1}(y_i)\partial_\mu g(y_i). \quad (6.60)$$

Mittapotentialiaali  $A_\mu$  lähestyy siis puhdasta mittaa pisteissä  $x = a_i$ , ja puhtaan mittan määrittää sama mittafunktio kuin yhden instantonin tapauksessa muuttujalla  $y_i = x - a_i$ .  $N$ -instantonia voi siis ajatella  $N$ :nnänä erillisenä instantonina, joiden koot ovat  $\lambda_i$  ja paikat  $a_i$ .

Singulariteetit voidaan jälleen poistaa mittamuunnoksella. Tarvittava mittafunktio on

$$g_N(x) = \frac{1}{|Z|} (Z^4 + iZ^i\tau^i), \quad (6.61)$$

missä

$$Z^\mu(x) = \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{y_i^\mu}{|y_i|^2} \quad (6.62)$$

ja  $\beta_i$  ovat reaalisia vakioita. Rajalla  $x_i \rightarrow a_i$ , eli  $y_i \rightarrow 0$ , jollekin  $i$ :lle johtava termi suurelle  $Z^\mu$  on

$$Z^\mu(x) \rightarrow \beta_i \frac{y_i^\mu}{|y_i|^2}, \quad (6.63)$$

ja

$$|Z|^2 = Z^\mu Z^\mu = \frac{\beta_i^2}{|y_i|^2}. \quad (6.64)$$

Mittafunktio (6.61) on tällä rajalla

$$g_N(x) \rightarrow \frac{|y_i|}{\beta_i} \left( \beta_i \frac{y_i^4}{|y_i|^2} + i\beta_i \frac{y_i^k}{|y_i|^2} \tau^k \right) = \frac{1}{|y_i|} (y_i^4 + iy_i^k \tau^k) = g(y_i). \quad (6.65)$$

Suorittamalla mittamuunnos mittapotentialiin  $A_\mu$  saadaan asympotoottisesti pisteessä  $x_i = a_i$

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= g_N(x) A_\mu g_N^{-1}(x) + g_N(x) \partial_\mu g_N^{-1}(x) \\ &\rightarrow g(y_i) (g^{-1}(y_i) \partial_\mu g(y_i)) g^{-1}(y_i) + g(y_i) \partial_\mu g^{-1}(y_i) + \text{äärellisiä termejä} \\ &= \partial_\mu (g(y_i) g^{-1}(y_i)) + \text{äärellisiä termejä} \\ &= \text{äärellisiä termejä}, \end{aligned} \quad (6.66)$$

missä äärelliset termit liittyvät suureen määritelmän (6.62) termeihin, joissa  $j \neq i$ . Näiden arvot ja derivaatat pisteessä  $x = a_i$  ovat äärellisiä. Mittapotentialin  $A_\mu$  singulariteetti saatiin siis poistettua pisteistä  $x = a_i$ . Mittamuunnos saattaa kuitenkin luoda uusia singulariteetteja pisteisiin, joissa  $Z^\mu = 0$ . Vakiot  $\beta_i$  on tarkoitus yrittää valita siten, että näitä singulariteetteja ei ole.

Varmistetaan suoraan laskemalla, että mittapotentialin  $A_\mu$  topologinen varaus on  $N$  siinä tapauksessa, että mittapotentialilla  $A'_\mu$  ei ole singulariteetteja. Topologinen varaus on nyt

$$N' = -\frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \text{tr}[F'_{\mu\nu} \star F'_{\mu\nu}], \quad (6.67)$$

missä  $F'_{\mu\nu}$  on määritelty mittapotentialin  $A'_\mu$  kenttätensorina. Integraali on hyvin määritelty, koska mittapotentialiaali  $A'_\mu$  ei ole singulaarinen. Määritellään avaruuden

$\mathbb{R}^4$  osa  $V_\epsilon = \mathbb{R}^4 \setminus \cup_{i=1}^N B(a_i, \epsilon)$ , missä  $B(a_i, \epsilon)$  on  $\epsilon$ -säteinen pallo pisteessä  $x = a_i$ . Kaikilla  $\epsilon > 0$  joukko  $V_\epsilon$  määrittelee avaruuden osan, jossa alkuperäinen mittapotentiaali  $A_\mu$  ei ole singulaarinen. Tässä kenttätensori  $F_{\mu\nu}$  on hyvin määritelty, joten

$$\mathrm{tr}[F'_{\mu\nu} \star F'_{\mu\nu}] = \mathrm{tr}[F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}], \quad x \in V_\epsilon \quad (6.68)$$

Tämän perusteella voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} N' &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \mathrm{tr}[F'_{\mu\nu} \star F'_{\mu\nu}] \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \mathrm{tr}[F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}] \right). \end{aligned} \quad (6.69)$$

Tämä voidaan kirjoittaa samaan tapaan kuin kaava (6.21) muotoon

$$N' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{S_\infty^3} dS_\mu j^\mu - \int_{\sigma_1} d\sigma_\mu j^\mu - \int_{\sigma_2} d\sigma_\mu j^\mu - \dots - \int_{\sigma_N} d\sigma_\mu j^\mu \right), \quad (6.70)$$

missä

$$j^\mu = -\frac{1}{8\pi^2} \mathrm{tr}[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (A_\nu \partial_\alpha A_\beta + A_\nu A_\alpha A_\beta)]. \quad (6.71)$$

Mittapotentiaali  $A_\mu$  on äärettömyydessä asympotoottisesti kaavan (6.57) perusteella muotoa

$$A_\mu = \sum_{i=1}^N g^{-1}(y_i) \partial_\mu g(y_i) \frac{\lambda_i^2}{|y_i|^2} \propto \frac{1}{|y_i|^3}, \quad (6.72)$$

mikä pienenee tarpeeksi nopeasti, jotta integraali  $\int_{S_\infty^3} dS_\mu j^\mu$  häviää. Kun  $\epsilon$  on pieni, pinnoilla  $\sigma_i$  potentiaali lähestyy puhdasta mittaa  $g^{-1}(x - a_i) \partial_\mu g(x - a_i)$ , joka liittyy mittafunktioon  $g^{-1}(x - a_i)$ . Nämä integraalit ovat muotoa (6.24). Mittafunktioon  $g^{-1}(x - a_i)$  liittyvä topologinen aste on  $-1$ , joten saadaan

$$N' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (0 - (-1) - (-1) - \dots - (-1)) = N. \quad (6.73)$$

Ratkaisujen topologinen varaus on siis todella  $N$ . Ratkaisut ovat itseduaalisia, joten niiden vaikutus on  $S = 8\pi N/g^2$ . Erityisesti huomataan, että vaikutuksen arvo ei riipu instantonien etäisyydestä toisistaan. Anti-instantoniratkaisut saadaan jälleen korvaamalla tensori  $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$  tensorilla  $\sigma_{\mu\nu}$ .

### 6.3 Instantonien käyttö fysiikassa

Instantonien hyödyllisyys tulee esille kvanttitunneloitumisessa. Tunneloitumista voi esiintyä esimerkiksi eri tyhjiöiden välillä tai hiukkasprosesseissa. Instantoni kuvaa siirtymää minimistä toiseen. Jos tämän siirtymän vaikutus on äärellinen, sillä on fyysikaalinen merkitys kvanttikenttäteoriassa. Esimerkiksi degeneroituneen tyhjiön tapauksessa fyysikaalinen tyhjiö on jonkinlainen superpositio kaikista tyhjiöistä. Tämän tyhjiön ominaisuudet ovat erilaisia kuin yksittäisen tyhjiön ominaisuudet. Instantoniratkaisu näiden tyhjiöiden välillä on oleellinen osa fyysikaalisen tyhjiön rakenteen kuvaamisessa [6].

Erityisesti kvanttikromodynamiikassa (KKD) instantonit ovat tärkeitä. Instantonien avulla on selitetty ja kvantitatiivisesti laskettu KKD:n tyhjiön ja hadronien ominaisuuksia. Eräs instantoneita hyödyntävä malli on instantoninestemalli [42], joka kehitettiin selittämään KKD:n tyhjiön ja hadronien rakennetta [42, 43]. Instantoninestemallissa avaruus on täynnä toistensa kanssa vuorovaikuttavia instantoneita. Mallin tekee tehokkaaksi se, että instantonit liittyvät oleellisesti fermionisiin nollamoodeihin, jotka ovat tärkeitä kevyiden kvarkkien vuorovaikutuksen ja kiraalisen symmetrian rikkoutumisen kuvaamisessa [44]. Instantoninestemallin avulla on laskettu myös hadroneihin liittyviä korrelaatiofunktioita ja useat tulokset ovat vastanneet kokeista ja simulaatioista saatuja arvoja hyvällä tarkkuudella, vaikka malli ei ota huomioon kaikkia KKD:n puolia [45–47].

## 7 Solitonien kvantisointi

Solitonien kvantisoinnissa keskitytään tässä matriisielementtien, energiatasojen ja transitoamplitudin määrittämiseen alimmassa asteessa. Energiatasojen ja matriisielementtien laskemisessa seurataan lähdettä [6] ja transitoamplitudin laskemisessa seurataan lähdettä [48] ja käytetään apuna lähdettä [49]. Kvantisointi tehdään käyt-

tämällä funktionaali-integraaliformalismia. Kvantisointi suoritetaan skalaarikentälle  $(1 + 1)$ -ulotteisessa avaruusajassa. Solitoni on tässä tapauksessa luvussa 3 käsitelty kinkki. Tämä yksinkertainen esimerkki näyttää tärkeimmät ideat solitonien kvantisoinnissa. Aluksi käydään lyhyesti läpi funktionaali-integraalien määrittäminen epärelativistisessä kvanttimekaniikassa yhden hiukkasen tapauksessa. Kvanttimekaniikan käsittelyssä seurataan lähdettä [50]. Menetelmä yleistetään sitten kenttäteoriaan.

## 7.1 Kvanttimekaniikka

Epärelativistisen hiukkasen Lagrangen funktio on

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \quad (7.1)$$

ja Hamiltonin operaattori on

$$H = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + V(q), \quad (7.2)$$

missä  $\hat{p} = -i\partial/\partial q$  on liikemääräoperaattori.

Transitioamplitudi  $K(q_b, T; q_a, 0)$  sille, että hiukkanen joka on ajanhetkellä  $t = 0$  paikassa  $q_a$  päättyy ajanhetkellä  $t = T$  paikkaan  $q_b$  on

$$K(b, a) \equiv K(q_b, T; q_a, 0) = \langle q_b | \exp(-iHT) | q_a \rangle. \quad (7.3)$$

Polkuintegraaliformalismissa ideana on esittää tämä amplitudi kaikkien mahdollisten polkujen amplitudien summana. Tarkastellaan polkuja  $q(t)$ , jotka toteuttavat reunaehdot  $q(t_a) = q_a$  ja  $q(t_b) = q_b$ . Olkoon  $\{q(t)\}_{q_a, q_b}$  näiden polkujen joukko. Polun  $q(t)$  amplitudi  $\Psi[q(t)]$  on muotoa

$$\Psi[q(t)] = \text{vakio} \times e^{iS[q(t)]} \quad (7.4)$$

missä  $S[q(t)]$  on polun  $q(t)$  vaikutus ja vakio, joka on sama kaikille poluille, määritellään transitioamplitudin  $K(b, a)$  normalisoinnista. Transitioamplitudi on nyt muo-

dollisesti summa

$$K(b, a) = \sum_{\{q(t)\}_{q_a, q_b}} \Psi[q(t)]. \quad (7.5)$$

Polkuintegraalimenetelmän idea perustuu kvanttimekaniikan superpositioperiaatteen, jossa kaikkien mahdollisten polkujen amplituidit interferoivat toistensa kanssa vaiheidensa kautta. Polkuintegraalimuodossa transiioamplitudi  $K(b, a)$  on

$$K(b, a) = \int D[q(t)]_{q_a, q_b, T} \exp(iS[q(t)]), \quad (7.6)$$

missä  $S[q(t)]$  on klassinen vaikutus

$$S[q(t)] = \int L dt = \int \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q) dt. \quad (7.7)$$

Funktionaali-integraali  $\int D[q]_{q_a, q_b, T}$  tarkoittaa integraalia kaikkien polkujen

$$q : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(0) = q_a, \quad q(T) = q_b \quad (7.8)$$

yli. Funktionaali-integraali voidaan määritellä raja-arvona, kun jaetaan aikaväli  $[0, T]$   $\epsilon$ -pituisiksi osiksi siten, että  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = \epsilon, \dots, t_N = N\epsilon$ ,  $t_i - t_{i-1} = \epsilon$  ja  $T = N\epsilon$ . Lisäksi  $q(0) = q_a$ ,  $q(T) = q_b$  ja  $q(t_i) = q_i$ . Vaikutus  $S[q(t)]$  muuttuu tällöin integraalista summaksi

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{(q_i - q_{i-1})^2}{2\epsilon} - V\left(\frac{q_i + q_{i-1}}{2}\right) \epsilon \right), \quad (7.9)$$

ja funktionaali-integraali (7.6) saadaan raja-arvona [50]

$$K(q_b, T; q_a, 0) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty \\ N\epsilon = T}} \left\{ B_N(T) \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \int_{-\infty}^{\infty} dq_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_{N-1} \right. \\ \left. \times \exp \left[ i \sum_{i=1}^N \left( \frac{(q_i - q_{i-1})^2}{2\epsilon} - V\left(\frac{q_i + q_{i-1}}{2}\right) \epsilon \right) \right] \right\}, \quad (7.10)$$

missä kerroin  $B_N(T)$  on normalisointikerroin, joka pitää integraalin äärellisenä ja normalisoi todennäköisyysjakauman  $P(b, a) = |K(b, a)|^2$ . Normalisointikertoimeksi voidaan tässä tapauksessa laskea  $B_N(T) = (2\pi T)^{-N/2}$  [50].

Transitioamplitudien määritelmät (7.3) ja (7.6) voidaan osoittaa ekvivalenteiksi. Vaikutus  $S[q(x)]$  voidaan jakaa summaksi  $S[q_1(t)] + S[q_2(t)]$ , missä polku  $q(t)$  on leikattu kahteen osaan jonkin ajanhetken  $t_c$  kohdalta. Polkuintegraali voidaan nyt kirjoittaa määritelmän (7.10) perusteella muodossa

$$\begin{aligned} K(b, a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int D[q_1(x)]_{q_a, 0; q_c, t_c} \exp((i/\hbar)S[q_1(t)]) \right. \\ &\quad \left. \times \int D[q_2(x)]_{q_c, t_c; q_b, T} \exp((i/\hbar)S[q_2(t)]) \right) dq_c \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(b, c)K(c, a) dq_c \end{aligned} \quad (7.11)$$

missä  $q_c$  on ajanhetkeä  $t_c$  vastaava piste. Koska piste  $q_a$  on tässä mielivaltainen, ja aaltofunktio  $\psi(x, t)$  voidaan ajatella transitioamplitudina, jonka alkupistettä ei määritellä, tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\psi(q, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y, 0)K(q, T; y, 0)dy. \quad (7.12)$$

Sijoittamalla identiteetti  $\int dy |y\rangle \langle y|$ , voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} |\psi(T)\rangle &= e^{-iHT} |\psi(0)\rangle \\ \Leftrightarrow |\psi(T)\rangle &= \int dy e^{-iHT} |y\rangle \langle y|\psi(0)\rangle \\ \Leftrightarrow \langle q|\psi(T)\rangle &= \int dy \langle q| e^{-iHT} |y\rangle \langle y|\psi(0)\rangle \\ \Leftrightarrow \psi(q, T) &= \int dy \langle q| e^{-iHT} |y\rangle \langle y|\psi(0)\rangle. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Vertaamalla tätä kaavaan (7.12) saadaan

$$\langle q| e^{-\frac{i}{\hbar}HT} |y\rangle = \int D[q(t)]_{q, y, T} \exp(iS[q(t)]). \quad (7.14)$$

Asetetaan  $q_a = q_b = q_0$  ja määritellään jälki

$$G(T) \equiv \text{tr} [e^{-iHT}]. \quad (7.15)$$

Jäljessä  $G(T)$  lasketaan jälki kaikkien periodisten polkujen yli alkupisteet mukaanlukien. Jäljen voi laskea paikka- tai energiaominaistilojen kautta. Näiden avulla saadaan

$$G(T) = \sum_n e^{-iE_n T} \quad (7.16)$$

$$= \int dq_0 \langle q_0 | \exp(-iHT) | q_0 \rangle \quad (7.17)$$

$$= \int dq_0 \int D[q(t)]_{q_0, q_0, T} \exp(iS[q(t)]). \quad (7.18)$$

Ominaisenergiat  $E_n$  voidaan määrittää funktionaali-integraalista, kun se muokataan ensimmäisen rivin muotoon semiklassisia approksimaatioita käyttämällä. Approksimaationa käytetään tässä stationääriseen vaiheen approksimaatiota.

Tarkastellaan integraalia, joka on muotoa

$$\int dq_1 \int dq_2 \cdots \int dq_N g(\mathbf{q}) e^{-if(\mathbf{q})}, \quad (7.19)$$

missä funktio  $f(\mathbf{q})$  on stationäärinen pisteessä  $\mathbf{q} = \mathbf{a}$  ja funktio  $g(\mathbf{q})$  on hitaasti muuttuva tämän pisteen ympärillä. Funktion  $f(\mathbf{q})$  Taylorin hajotelma tässä pisteessä on

$$f(\mathbf{q}) = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} y_i A_{ij} y_j + O(y^3), \quad (7.20)$$

missä  $y_i = q_i - a_i$ , ja lineaarinen termi on nolla oletuksen perusteella. Stationääriseen vaiheen approksimaatiossa oletetaan, että  $f(\mathbf{q})$  on tarpeeksi nopeasti muuttuva muualla kuin pisteen  $\mathbf{q} = \mathbf{a}$  ympärillä. Tällöin termi  $\exp(-if(\mathbf{q}))$  oskilloi nopeasti kaukana pisteestä  $\mathbf{q} = \mathbf{a}$ , mikä johtaa integraalin (7.19) häviämiseen melkein kokonaan muualla kuin pisteen  $\mathbf{q} = \mathbf{a}$  lähetyvillä. Integraaliin vaikuttaa siis lähinnä alue, jossa koordinaatit  $y_i$  ovat pieniä, jolloin  $f(\mathbf{q}) \approx f(\mathbf{a}) + (1/2)y_i A_{ij} y_j$ . Integraali (7.19) on siis

$$\int dq_1 \int dq_2 \cdots \int dq_N g(\mathbf{q}) e^{-if(\mathbf{q})} \quad (7.21)$$

$$\approx g(\mathbf{q}) e^{-if(\mathbf{a})} \int dq_1 \int dq_2 \cdots \int dq_N e^{-i\frac{1}{2}y_i A_{ij} y_j}. \quad (7.22)$$

Jäljelle jäävä integraali on Gaussinen, joten tulos on

$$\int dq_1 \int dq_2 \cdots \int dq_N g(\mathbf{q}) e^{-if(\mathbf{q})} \quad (7.23)$$

$$\approx g(\mathbf{q}) e^{-if(\mathbf{a})} \left(\frac{2\pi}{i}\right)^{N/2} (\det(A))^{-1/2}. \quad (7.24)$$

Koska polkuintegraali on ääretön määrä tavallisia integraaleja, yllä oleva tulos yleistyy myös polkuintegraaleihin. Vaikutusfunktionaali voidaan kirjoittaa Taylorin hajotelmana muodossa

$$\begin{aligned} S[q(t)] &= S[q_{\text{kl}}(t)] + \left. \frac{dS[q_{\text{kl}}(t) + \epsilon y(t)]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 S[q_{\text{kl}}(t) + \epsilon y(t)]}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} + \dots \\ &= S[q_{\text{kl}}(t)] + \frac{1}{2} \int_0^T dt y(t) O(t) y(t) + \dots \end{aligned} \quad (7.25)$$

missä  $q_{\text{kl}}$  on klassinen ratkaisu liikeyhtöille, jolloin  $(dS[q_{\text{kl}}(t) + \epsilon y(t)]/d\epsilon)|_{\epsilon=0} = 0$ , funktio  $y(t)$  on  $y(t) = q(t) - q_{\text{kl}}(t)$ ,  $y(0) = y(T) = 0$ , ja operaattori  $O(t)$  on

$$O(t) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right|_{q=q_{\text{kl}}(t)}. \quad (7.26)$$

Oletetaan yhä, että  $q_a = q_b = q_0$ . Käyttämällä stationääriseen vaiheen approksimaatiota, saadaan [6]

$$\begin{aligned} &\int D[q(t)]_{q_0, q_0, T} \exp(iS[q(t)]) \\ &\approx B(T) \exp(iS[q_{\text{kl}}(t)]) \int D[q(t)]_{q_0, q_0, T} \exp\left(\frac{i}{2} \int_0^T dt y(t) O(t) y(t)\right) \\ &= B'(T) \exp(iS[q_{\text{kl}}(t)]) [\det(O(t))]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

missä vakioon  $B'(T)$  on sisällytetty kaavan (7.24) kerrointa  $(2\pi/i)^{N/2}$  vastaava kerroin. Jos vaikutuksella  $S$  on useita kaukana toisistaan olevia klassisia ratkaisuja, jokaiselle muodostetaan yllä oleva approksimaatio ja nämä summataan yhteen. Jos ratkaisut ovat lähellä toisiaan, approksimaatio ei toimi yleisesti.

## 7.2 Staattinen kinkki

Tarkastellaan skalaarikenttäteoriaa luvusta 3. Teorian vaikutus on

$$S[\phi(x, t)] = \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{L} \quad (7.28)$$

missä Lagrangen tiheys  $\mathcal{L}$  on

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} \left( \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2. \quad (7.29)$$

Merkitään

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left( \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2. \quad (7.30)$$

Mahdolliset reunaehdot kenttäkonfiguraatioille ovat

$$\phi(\infty, t) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \quad \phi(-\infty, t) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \quad (7.31)$$

Kirjoitetaan kenttä  $\phi(x, t)$  muodossa  $\phi(x, t) = \phi_{\text{kl}}(x) + y(x, t)$ , missä kenttäkonfiguraatio  $\phi_{\text{kl}}(x)$  on staattinen klassinen ratkaisu kenttäyhtälöille, ja  $y(x, t)$  kuvaa kvanttioskillaatiota klassisen ratkaisun ympärillä. Sijoittamalla tämä vaikutukseen ja jakamalla vaikutus termeihin funktion  $y(x, t)$  asteen perusteella saadaan

$$\begin{aligned} S[\phi_{\text{kl}}(x) + y(x, t)] &= \int_0^T dt \int dx \left( \frac{1}{2} (\partial_t \phi_{\text{kl}}(x) + \partial_t y(x, t))^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\partial_x \phi_{\text{kl}}(x) + \partial_x y(x, t))^2 - U(\phi_{\text{kl}}(x) + y(x, t)) \right) \\ &= \int_0^T dt \int dx \left( -\frac{1}{2} (\partial_x \phi_{\text{kl}})^2 - U(\phi_{\text{kl}}) \right) \\ &\quad + \int_0^T dt \int dx (-\partial_x \phi_{\text{kl}} \partial_x y - U'(\phi_{\text{kl}}) y) \\ &\quad + \int_0^T dt \int dx \left( \frac{1}{2} (\partial_t y)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x y)^2 - \frac{1}{2} U''(\phi_{\text{kl}}) y^2 \right) + O(y^3) \\ &= - \int_0^T dt V[\phi_{\text{kl}}] - \int_0^T dt \int dx (-\partial_x^2 \phi_{\text{kl}} + U'(\phi_{\text{kl}})) y \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T dt \int dx y \left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - U''(\phi_{\text{kl}}) \right) y + O(y^3) \\ &= - V[\phi_{\text{kl}}] T + \frac{1}{2} \int_0^T dt \int dx y \left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - U''(\phi_{\text{kl}}) \right) y \\ &\quad + O(y^3), \end{aligned} \quad (7.32)$$

missä käytettiin osittaisintegrointia, kenttäyhtälöä (3.7) ja kirjoitettiin potentiaali  $U$  sarjana perturbaation  $y$  suhteen. Lisäksi merkittiin

$$V[\phi_{kl}] = \int dx \left( \frac{1}{2} (\partial_x \phi_{kl})^2 + U(\phi_{kl}) \right). \quad (7.33)$$

Koska kentältä  $\phi$  vaaditaan tietyt reunaehdot, jotka funktio  $\phi_{kl}$  toteuttaa jo, funktion  $y$  täytyy toteuttaa reunaehdot  $y(\pm\infty, t) = 0$ . Lausekkeen (7.32) toisen termin integrandissa esiintyvä operaattori on vaikutuksen toinen variaatio. Kirjoitetaan tämä operaattori muodossa  $O(x, t) = O(t) + O(x)$ . Operaattori  $-O(x)$  on staattisen kenttäkonfiguraation energiaoperaattorin toinen variaatio. Jotta kehitettävä kvantttila olisi stabiili, operaattorin  $-O(x)$  ominaisarvojen täytyy olla ei-negatiivisia.

Teorian tyhjiölle  $\phi_{kl}(x) = m/\sqrt{\lambda}$  ominaisarvoyhtälö on

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U''(m/\sqrt{\lambda}) \right) \eta_r(x) &= \omega_r^2 \eta_r(x) \\ \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2m^2 \right) \eta_r(x) &= \omega_r^2 \eta_r(x). \end{aligned} \quad (7.34)$$

Tällä on ominaisarvot  $\omega_r^2 = k_r^2 + 2m^2$  ja ominaisfunktiot  $e^{ik_r x}$ . Nyt  $\omega_r = \sqrt{k_n^2 + 2m^2}$  on teorian mesonin energia alimmassa asteessa. Tässä  $k_n$  on mesonin liikemäärä ja  $\sqrt{2}m$  on mesonin massa.

Siirrytään seuraavaksi teorian solitonisektoriin. Sijoittamalla staattisen kinkin ratkaisu (3.22) potentiaalin  $U(\phi)$  toiseen derivaattaan saadaan ominaisarvoyhtälö

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U''(\phi_{kl}) \right) \eta_r(x) &= \omega_r^2 \eta_r(x) \\ \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 + 3m^2 \tanh^2 \left( \frac{m}{\sqrt{2}} x \right) \right) \eta_r(x) &= \omega_r^2 \eta_r(x). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Vaihdetaan muuttujaksi  $z = mx/\sqrt{2}$ , jolloin saadaan

$$\left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 3 \tanh^2(z) - 1 \right) \tilde{\eta}_r(z) = \frac{\omega_r^2}{m^2} \tilde{\eta}_r(z). \quad (7.36)$$

Tälle tunnetaan ratkaisut [51]

$$\omega_0^2 = 0 \quad \tilde{\eta}_0(z) = \frac{1}{\cosh^2(z)} \quad (7.37)$$

$$\omega_1^2 = \frac{3}{2}m^2 \quad \tilde{\eta}_1(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh^2(z)} \quad (7.38)$$

$$\omega_q^2 = m^2 \left( \frac{1}{2}q^2 + 2 \right) \quad \tilde{\eta}_q(z) = e^{iqz} (3 \tanh^2(z) - 1 - q^2 - 3iq \tanh(z)), \quad (7.39)$$

missä kaksi ensimmäistä ovat diskreettejä tiloja, ja viimeinen määrittelee jatkuvan spektrin tiloja. Tässä ominaisarvo  $\omega_0^2 = 0$  liittyy teorian translaatiosymmetriaan. Kinkillä on yksi viritystila, ja tällä on ominaisarvo  $\omega_1^2$ . Jatkuva spektri  $\omega_q^2$  liittyy kinkistä siroaviin mesoneihin. Rajalla  $z \rightarrow \pm\infty$  ominaisfunktiot  $\tilde{\eta}_q(z)$  ovat asympotoottisesti muotoa

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_q(z) &= e^{iqz} (3(\pm 1)^2 - 1 - q^2 - 3iq(\pm 1)) \\ &= e^{iqz} (2 - q^2 \pm (-3iq)) \\ &= \sqrt{(2 - q^2)^2 + (3q)^2} e^{i(qz \pm \frac{1}{2}\delta(q))}, \end{aligned} \quad (7.40)$$

missä käytettiin kaavaa

$$e^{i \tan^{-1}(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{ix}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad (7.41)$$

ja merkittiin

$$\delta(q) = -2 \tan^{-1} \left( \frac{3q}{2 - q^2} \right). \quad (7.42)$$

Tässä funktio  $\delta(q)$  on mesonin vaihesiirto, kun se siroaa kinkistä. Ominaisfunktiot  $\eta_r(x)$  saadaan sijoittamalla  $z = mx/\sqrt{2}$  funktioihin  $\tilde{\eta}_r(z)$ .

### 7.2.1 Solitonisektorin energiatasot

Lasketaan kinkin energiatasot yhtälöstä

$$G(T) \equiv \int D[\phi(x, t)] \exp(iS[\phi(x, t)]) = \sum_n \exp(-iE_n T). \quad (7.43)$$

Kirjoitetaan vaikutuksen hajotelmassa (7.32) esiintyvä funktio  $y(x, t)$  muodossa

$$y(x, t) = \sum_r c_r(t) \eta_r(x), \quad (7.44)$$

missä funktiot  $\eta_r(x)$  ovat operaattorin  $O(x)$  ominaisfunktiot ja valitaan ne siten, että ne toteuttavat normalisointiehdon

$$\int dx \eta_r(x) \eta_k(x) = \delta_{rk}. \quad (7.45)$$

Funktioilta  $c_r(t)$  vaaditaan reunaehdot  $c_r(0) = c_r(T)$ . Sijoittamalla hajotelma (7.44) vaikutukseen (7.32), saadaan se muotoon

$$\begin{aligned} S[\phi(x, t)] &= -V[\phi_{kl}]T \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T dt \int dx \sum_r c_r(t) \eta_r(x) \left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - U''(\phi_{kl}) \right) \sum_k c_k(t) \eta_k(x) \\ &= -V[\phi_{kl}]T \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T dt \int dx \sum_{r,k} (-c_r(t) \ddot{c}_k(t) \eta_r(x) \eta_k(x) - \omega_k^2 c_r(t) c_k(t) \eta_r(x) \eta_k(x)) \\ &= -V[\phi_{kl}]T \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{r,k} \int_0^T dt \left( -c_r(t) \ddot{c}_k(t) \int dx (\eta_r(x) \eta_k(x)) \right. \\ &\quad \quad \quad \left. - \omega_k^2 c_r(t) c_k(t) \int dx (\eta_r(x) \eta_k(x)) \right) \\ &= -V[\phi_{kl}]T + \sum_r \int_0^T dt \left( -\frac{1}{2} c_r \ddot{c}_r - \frac{1}{2} \omega_r^2 c_r^2 \right) \\ &= -V[\phi_{kl}]T + \sum_r \int_0^T dt \left( \frac{1}{2} \dot{c}_r^2 - \frac{1}{2} \omega_r^2 c_r^2 \right), \end{aligned} \quad (7.46)$$

missä käytettiin ortonormaalisuomionaisuutta (7.45) ja osittaisintegrointia ajan suhteen huomioiden, että  $c_r(0) = c_r(T)$ . Tässä

$$S_{\text{osk}}[c(t)] \equiv \int_0^T dt \left( \frac{1}{2} \dot{c}^2 - \frac{1}{2} \omega^2 c^2 \right) \quad (7.47)$$

on klassisen oskillaattorin vaikutus. Solitonin kvantisointi on siis redusoitunut äärettömän määrän oskillaattoreita kvantisoinniksi. Funktionaali-integraalin mittaan

tehdään muutokset

$$\begin{aligned} & \int D[\phi_0(x)] \int D[\phi(x, t)]_{\phi_0, \phi_0, T} \\ & \rightarrow \int D[y_0(x)] \int D[y(x, t)]_{y_0, y_0, T} \\ & \rightarrow \prod_r \int_{-\infty}^{\infty} dc_{r0} \int D[c_r(t)]_{c_{r0}, c_{r0}, T}. \end{aligned}$$

Funktionaali-integraaliksi saadaan nyt

$$G(T) = \exp(-iV[\phi_{kl}]T) \prod_r G_{\text{osk},r}(T), \quad (7.48)$$

missä

$$G_{\text{osk},r}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} dc_{r0} \int D[c_r(t)]_{c_{r0}, c_{r0}, T} \exp \left\{ i \int_0^T dt \left( \frac{1}{2} \dot{c}_r^2 - \frac{1}{2} \omega_r^2 c_r^2 \right) \right\} \quad (7.49)$$

on oskillaattoria  $r$  vastaava funktionaali-integraali, jossa vaikutus on samaa muotoa kuin yhtälössä (7.7), kun valitaan potentiaaliksi  $V(c_r) = (1/2)\omega_r^2 c_r^2$ . Olkoon  $c_{kl}(t)$  vaikutusta (7.47) vastaava klassinen ratkaisu, joka toteuttaa reunaehdot  $c_{kl}(0) = c_{kl}(T) \equiv c_{r0}$ . Nyt potentiaalın toinen derivaatta on  $V''(c_{kl}) = \omega_r^2$ . Yhtälön (7.27) perusteella saadaan staattisen vaiheen approksimaation jälkeen

$$G_{\text{osk},r}(T) \approx B(T) \int_{-\infty}^{\infty} dc_{r0} \exp(iS_{kl}[c_{r0}, c_{r0}, T]) [\det(O(t))]^{-1/2}, \quad (7.50)$$

missä

$$O(t) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V''(c_{kl}) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega_r^2. \quad (7.51)$$

Operaattorin determinantti saadaan kertomalla sen ominaisarvot. Operaattori  $O(t)$  toteuttaa ominaisarvoyhtälön

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega_r^2 \right) \sin \left( \frac{n\pi t}{T} \right) = \left( \frac{n^2 \pi^2}{T^2} - \omega_r^2 \right) \sin \left( \frac{n\pi t}{T} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.52)$$

missä ominaisfunktiot ovat valittu siten, että ne toteuttavat ehdon  $f(0) = f(T) = 0$ .

Determinatiksi saadaan nyt

$$\begin{aligned}
\left(\det \left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega_r^2 \right]\right)^{-1/2} &= \left( \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 \pi^2}{T^2} - \omega_r^2 \right) \right)^{-1/2} \\
&= \left( \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{T^2} \left( 1 - \frac{\omega_r^2 T^2}{n^2 \pi^2} \right) \right)^{-1/2} \\
&= \left( \prod_{n'=1}^{\infty} \frac{n'^2 \pi^2}{T^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\omega_r^2 T^2}{n^2 \pi^2} \right) \right)^{-1/2} \\
&= K(T) \left( \frac{\sin(\omega_r T)}{\omega_r T} \right)^{-1/2}, \tag{7.53}
\end{aligned}$$

missä määriteltiin  $K(T) = [(\pi^2/T^2) \prod_{n=1}^{\infty} n^2]^{-1/2}$ , ja käytettiin identiteettiä  $\sin(x)/x = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^2/(n^2 \pi^2))$ . Sijoittamalla edellinen lauseke ja klassisen ratkaisun vaikutus

$$S_{\text{kl}}[c_{r0}, c_{r0}, T] = -2\omega_r c_{r0}^2 \frac{\sin^2(\omega_r T/2)}{\sin(\omega_r T)} \tag{7.54}$$

lausekkeeseen (7.50), saadaan

$$\begin{aligned}
G_{\text{osk,r}}(T) &\approx B(T)K(T) \int_{-\infty}^{\infty} dc_{r0} \exp \left( -2i\omega_r c_{r0}^2 \frac{\sin^2(\omega_r T/2)}{\sin(\omega_r T)} \right) \left( \frac{\omega_r T}{\sin(\omega_r T)} \right)^{1/2} \\
&= B(T)K(T) \left( \frac{\pi \sin(\omega_r T)}{2i\omega_r \sin^2(\omega_r T/2)} \right)^{1/2} \left( \frac{\omega_r T}{\sin(\omega_r T)} \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2i \sin(\omega_r T/2)} B(T)K(T)(2\pi T)^{1/2} \tag{7.55}
\end{aligned}$$

missä käytettiin Gaussisen integraalin kaavaa. Huomioimalla, että

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i \sin(\omega_r T/2)} &= \frac{1}{e^{i\frac{1}{2}\omega_r T} - e^{-i\frac{1}{2}\omega_r T}} \\
&= e^{-i\frac{1}{2}\omega_r T} \frac{1}{1 - e^{-i\omega_r T}} = e^{-i\frac{1}{2}\omega_r T} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-i\omega_r T})^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega_r T}, \tag{7.56}
\end{aligned}$$

saadaan

$$G_{\text{osk,r}}(T) \approx B(T)K(T)(2\pi T)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[ -i \left( n + \frac{1}{2} \right) \omega_r T \right]. \tag{7.57}$$

Skalaarikentälle  $\phi(x, t)$  saadaan siis

$$G(T) \approx \exp(-iV[\phi_{\text{kl}}]T) \prod_r B(T)K(T)(2\pi T)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-i\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_r T\right]. \quad (7.58)$$

Suureen  $G(T)$  määritelmän mukaan

$$G(T) = \sum_n e^{-iE_n T}, \quad (7.59)$$

joten kerroin  $\prod_r B(T)K(T)$  valitaan siten, että

$$\prod_r B(T)K(T) = \prod_r (2\pi T)^{-1/2}. \quad (7.60)$$

Lopulta saadaan siis

$$\begin{aligned} G(T) &\approx \exp(-iV[\phi_{\text{kl}}]T) \prod_r \sum_{n_r=0}^{\infty} \exp\left[-i\left(n_r + \frac{1}{2}\right)\omega_r T\right] \\ &= \sum_{\{n_r\}} \exp\left[-iT\left(V[\phi_{\text{kl}}] + \sum_r \omega_r \left(n_r + \frac{1}{2}\right)\right)\right], \end{aligned} \quad (7.61)$$

Missä summa  $\sum_{\{n_r\}}$  on summa kaikkien indeksien  $\{n_0, n_1, n_2, \dots\}$  yli. Tästä voidaan lukea kinkin energiatasot  $E_n$  semiklassisessa approksimaatiossa. Ne ovat

$$\begin{aligned} E_{\{n_r\}} &\approx V[\phi_{\text{kl}}] + \sum_r \omega_r \left(n_r + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} + \left(N_1 + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{3}{2}}m + m \sum_{q_n} \left(N_{q_n} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}q_n^2 + 2\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (7.62)$$

Energia koostuu siis kinkin klassisesta energiasta, kinkin viritystilan energiasta ja mesonien energiasta.

Huomioitavaa tässä on, että energiaspektri on osittain jatkuva, joten summa on tässä oikeastaan laatikossa olevan kinkin spektrin yli. Jatkuvan spektrin saa rajalla, jossa laatikon koko on ääretön. Oletetaan siis, että avaruus on laatikko, jonka pituus on  $L$ . Koordinaatissa  $z$  laatikon pituus on  $L_z = mL/\sqrt{2}$ . Vaaditaan, että laatikon reunoilla  $-L_z/2$  ja  $L_z/2$  ominaisfunktioiden  $\tilde{\eta}_{q_n}(z)$  arvot ovat samat eli

$\tilde{\eta}_{q_n}(L_z/2) = \tilde{\eta}_{q_n}(-L_z/2)$ . Suurella  $L$  ominaisfunktioiden vaiheille voidaan kirjoittaa yhtälön (7.40) perusteella yhtälö

$$\begin{aligned} \left( q_n \frac{mL}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \delta(q_n) \right) &= \left( -q_n \frac{mL}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \delta(q_n) \right) + 2n\pi \\ \Leftrightarrow \quad q_n \frac{mL}{\sqrt{2}} + \delta(q_n) &= 2n\pi, \end{aligned} \quad (7.63)$$

missä  $n$  on kokonaisluku. Tämä kiinnittää sallitut energiat  $q_n$ . Ratkaisemalla yhtälöstä (7.63)  $n$  voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} 1 = (n+1) - n &= \frac{1}{2\pi} \left( (q_{n+1} - q_n) \frac{mL}{\sqrt{2}} + \delta(q_{n+1}) - \delta(q_n) \right) \\ \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left( dq \frac{mL}{\sqrt{2}} + \frac{\partial \delta(q)}{\partial q} dq \right). \end{aligned} \quad (7.64)$$

Tämän avulla voidaan kirjoittaa

$$\sum_{q_n} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \left( \frac{mL}{\sqrt{2}} + \frac{\partial \delta(q)}{\partial q} \right). \quad (7.65)$$

Korvaamalla energian lausekkeessa (7.62) summa tällä integraalilla saadaan jatkuvan spektrin energia. Huomioitava asia on, että energia on ääretön. Ensinnäkin tästä energiasta pitäisi erottaa tyhjiöenergia. Lisäksi jäljelle jäävä ääretön energia täytyy kumota tavallisilla renormalisaatiomenetelmillä. Näin saadaan energia kinkkisektorissa alimmassa asteessa.

Tässä saatiin laskettua kinkin kvantttilojen energiat alimmassa asteessa, mutta tapa on lähinnä muodollinen, koska ominaisarvoista  $\omega_r$  yksi on nolla. Tämä translaatiosymmetriasta johtuva ominaisarvo aiheuttaa ongelmia, kun lasketaan korkeampia korjaustermejä, jotka ovat astetta  $O(\lambda)$ , mutta alimmassa asteessa ongelmia ei tule, koska translaatiomoodiin liittyvä energia on alimmassa asteessa nolla [6].

## 7.2.2 Kinkkisektorin muototekijät

Kinkin matriisialkiot voidaan määrittellä neljän postulaatin avulla. Nämä ovat [6]

(i) Teorian Hilbertin avaruudessa on tyhjiösektorin lisäksi solitonisektori, jonka viittää ominaistilat

- (a)  $|P\rangle$ , joka on tila, jossa on yksi kinkki, jolla on liikemäärä  $P$  ja energia  $E = \sqrt{P^2 + M^2}$ , missä  $M$  on kinkin massa.
- (b)  $|P^*\rangle$ , joka on virittyneen kinkin tila. Liikemäärä on  $P$  ja energia  $E = \sqrt{P^2 + M^{*2}}$ , missä  $M^*$  on virittyneen kinkin massa.
- (c)  $|P, k_1, k_2, \dots, k_m\rangle$ , joka on sirontatila, jossa on yksi kinkki ja  $m$  mesonia. Näiden asymptoottiset liikemäärät ovat  $P, k_1, k_2, \dots, k_m$ .
- (d)  $|P^*, k_1, k_2, \dots, k_m\rangle$ , joka on sirontatila, jossa on yksi virittynyt kinkki ja  $m$  mesonia. Näiden asymptoottiset liikemäärät ovat  $P, k_1, k_2, \dots, k_m$ .
- (ii) Solitonisektori on ortogonaalinen tyhjiösektoriin, ja ei ole olemassa lokaalia operaattoria, joka yhdistää solitonisektorin tyhjiösektoriin. Tämä johtaa siihen, että kvantisoitu kinkki ei voi hajota mesoneiksi.
- (iii) Kvanttikinkin massa  $M$  on heikon kytkennän rajalla  $\lambda/m^2 \rightarrow 0$ ,  $M \propto 1/\lambda$ .
- (iv) Kenttäoperaattorin  $\Phi(x, t)$  matriisielementit ovat heikon kytkennän rajalla

$$\langle P' | \Phi | P \rangle \sim O(1/\sqrt{\lambda}) \quad (7.66)$$

$$\langle P' | \Phi | P, k \rangle \quad \text{ja} \quad \langle P' | \Phi | P^* \rangle \sim O(1) \quad (7.67)$$

ja yleisesti

$$\langle P', k'_1, k'_2, \dots, k'_l | \Phi | P, k_1, k_2, \dots, k_m \rangle_y \sim O(\lambda^{(l+m-1)/2}). \quad (7.68)$$

missä alaindeksi  $y$  viittaa matriisielementin yhtenäiseen osaan, eli osaan jossa kaikki mesonit ovat osana vuorovaikutusta.

Tässä määriteltiin vain ensimmäinen kinkin viritystila  $|P^*\rangle$ , koska korkeammat viritystilat ovat epästabiileja ja hajoavat kinkiksi ja mesoneiksi. Tämä johtuu siitä, että mesonin massa on  $\sqrt{2}m$ , joka on kinkin kahden ensimmäisen viritystilan välissä,  $\sqrt{\frac{3}{2}}m^2 < \sqrt{2}m < 2\sqrt{\frac{3}{2}}m^2$ . Postulaatin (ii) ideana on yleistää kenttäkonfiguraatioiden topologinen lajittelu kvanttiteoriaan.

Fourier-muunnoksen avulla voidaan määritellä funktiot  $f_1(x)$ ,  $f_2(x, k)$  ja  $f_2^*(x)$

kaavoilla

$$\langle P|\Phi(x,0)|P'\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(P-P')a} f_1(x-a) \quad (7.69)$$

$$\langle P,k|\Phi(x,0)|P'\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(P+k-P')a} f_2(x-a,k) \quad (7.70)$$

ja

$$\langle P^*|\Phi(x,0)|P'\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(P-P')a} f_2^*(x-a). \quad (7.71)$$

Kenttäyhtälö on operaattorimuodossa

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 \right) \Phi(x,t) = -\lambda \Phi^3(x,t). \quad (7.72)$$

Lasketaan oikean ja vasemman puolen matriisialkiot kinkkitilojen  $|P\rangle$  ja  $|P'\rangle$  välillä ajanhetkellä  $t = 0$ . Otetaan huomioon vain johtava termi  $O(1/\sqrt{\lambda})$ . Huomioimalla, että  $\Phi(x,t) = \exp(-iHt)\Phi(x,0)\exp(iHt)$ , missä  $H$  on Hamiltonin operaattori, saadaan vasemman puolen ensimmäisestä termistä

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle P|\exp(-iHt)\Phi(x,t)\exp(iHt)|P'\rangle \right)_{t=0} \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle P|\exp(-iE_P t)\Phi(x,t)\exp(iE_{P'} t)|P'\rangle \right)_{t=0} \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \exp(-i(E_P - E_{P'})t) \langle P|\Phi(x,t)|P'\rangle \right)_{t=0} \\ &= -(E_P - E_{P'})^2 \langle P|\Phi(x,0)|P'\rangle. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Koska energia  $E_P$  on approksimatiivisesti  $E_P = \sqrt{P^2 + M^2} \approx M + P^2/(2M)$ , ja massa on postulaatin (iii) mukaan  $O(1/\lambda)$ , saadaan

$$(E_P - E_{P'})^2 = \left( \frac{P^2 - P'^2}{2M} + \dots \right)^2 = O(\lambda^2). \quad (7.74)$$

Postulaatin (i) mukaan kokonaisuudessaan derivaattatermi on astetta  $O(\lambda^{3/2})$ . Tämä on korkeampaa astetta kuin johtava termi, joten tätä termiä ei tarvitse ottaa huomioon alimmassa asteessa. Loput vasemman puolen termeistä voidaan kirjoittaa määritelmän (7.69) avulla muotoon

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 \right) e^{i(P-P')a} f_1(x-a) \quad (7.75)$$

Yhtälön oikea puoli voidaan kirjoittaa kaksi identiteettiä lisäämällä muotoon

$$-\lambda \sum_{n,n'} \langle P|\Phi(x,0)|n\rangle \langle n|\Phi(x,0)|n'\rangle \langle n'|\Phi(x,0)|P'\rangle, \quad (7.76)$$

missä tilat  $|n\rangle$  sisältävät kaikki postulaatissa (i) määritellyt tilat. Postulaatin (iv) perusteella alimmassa asteessa vain kinkkitilat  $|P\rangle$  ovat merkittäviä. Saadaan siis

$$-\lambda \sum_{P'',P'''} \langle P|\Phi(x,0)|P''\rangle \langle P''|\Phi(x,0)|P'''\rangle \langle P'''\Phi(x,0)|P'\rangle. \quad (7.77)$$

Sijoittamalla tähän (7.69) ja käyttämällä identiteettiä  $\sum_k e^{ik(a-a')} = 2\pi\delta(a-a')$  saadaan

$$\begin{aligned} & -\lambda \sum_{P'',P'''} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(P-P'')a} f_1(x-a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da'}{2\pi} e^{i(P''-P''')a'} f_1(x-a') \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da''}{2\pi} e^{i(P'''-P')a''} f_1(x-a'') \\ & = -\lambda \sum_{P'',P'''} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dada'da''}{(2\pi)^3} e^{iPa} e^{iP''(a'-a)} e^{iP'''(a''-a')} e^{-iP'a''} \\ & \quad \times f_1(x-a) f_1(x-a') f_1(x-a'') \\ & = -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dada'da''}{2\pi} \delta(a'-a) \delta(a''-a') e^{i(Pa-P'a'')} \\ & \quad \times f_1(x-a) f_1(x-a') f_1(x-a'') \\ & = -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(P-P')a} f_1^3(x-a). \end{aligned} \quad (7.78)$$

Yhdistämällä (7.78) ja (7.75) saadaan alimmassa asteessa yhtälö

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 \right) e^{i(P-P')a} f_1(x-a) = -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(P-P')a} f_1^3(x-a). \quad (7.79)$$

Tämän täytyy toteutua kaikilla  $P$  ja  $P'$ , joten saadaan

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 \right) f_1(x-a) = -\lambda f_1^3(x-a). \quad (7.80)$$

Tämä on klassisen kinkin staattinen kenttäyhtälö, jonka ratkaisu on solitonisektorissa tuttu kinkkiratkaisu

$$f_1(x-a) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left( \frac{m}{\sqrt{2}}(x-a) \right) \equiv \phi_K(x-a). \quad (7.81)$$

Yhtälö (7.69) voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\langle P|\Phi(x,0)|P'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(P-P')a} \phi_K(x-a) + \text{korkeamman asteen termit.} \quad (7.82)$$

Tästä nähdään klassisen ratkaisun yhteys kinkin ympärille rakennettuun kvanttitiilaan. Klassinen ratkaisu liittyy läheisesti kvanttitiilan matriisialkioihin. Lisäksi yhtälön integraali voidaan tulkita siten, että matriisialkioon pisteessä  $x$  vaikuttaa koko funktioperhe  $\phi_K(x-a)$ . Integraali tekee suureesta myös translaatioinvariantin, mikä on odotettavaa translaatioinvariantilta teorialta.

Yhtälö (7.82) voidaan myös kääntää toisinpäin käänteisellä Fourier muunnoksella. Tehdään muunnokset  $P \rightarrow P+Q$ ,  $P' \rightarrow P$  ja  $a \rightarrow -a$ . Kirjoittamalla yhtälö (7.82) pisteessä  $x=0$ , saadaan

$$\langle P+Q|\Phi(0,0)|P\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{-iQa} \phi_K(a) + \text{korkeamman asteen termit.} \quad (7.83)$$

Merkitsemällä  $a=x$  ja kääntämällä yhtälö, saadaan

$$\phi_K(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dQ e^{iQx} \langle P+Q|\Phi(0,0)|P\rangle + \text{korkeamman asteen termit.} \quad (7.84)$$

Tästä nähdään, että klassinen kinkkiratkaisu  $\phi_K(x)$  on alimmassa asteessa kenttäoperaattorin  $\Phi$  muototekijä.

Muototekijän yhtälö (7.84) voidaan yleistää myös muille operaattoreille samassa muodossa alimmassa asteessa. Esimerkiksi Hamiltonin tiheydelle

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\lambda}{4}\left(\Phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2, \quad (7.85)$$

missä  $\Pi(x,t) = \partial\Phi(x,t)/\partial t$ , saadaan energiatihedden muototekijä

$$\mathcal{E}(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d(P-P') e^{i(P-P')x} \langle P|\mathcal{H}(0,0)|P'\rangle, \quad (7.86)$$

missä on palattu alkuperäisiin liikemääriin  $P$  ja  $P'$ . Yhtälössä (7.86) esiintyvä matriisialkio voidaan määrittää samalla tavalla kuin kenttäoperaattorin matriisialkio las-

kettiin yhtälöissä (7.76)-(7.78). Käyttämällä näitä ja yhtälöä (7.82) saadaan staattiselle osalle

$$\begin{aligned}
& \langle P | \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \left( \Phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 | P' \rangle_{x=0, t=0} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(P-P')a} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_K(-a)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \left( \phi_K^2(-a) - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(P-P')a} \mathcal{E}_{\text{kl}}(-a), \tag{7.87}
\end{aligned}$$

missä  $\mathcal{E}_{\text{kl}}$  on klassinen energiatiheys kinkille. Ajasta riippuvalle osalle Hamiltonin tiheydessä saadaan samalla tavalla kuin kaavajonossa (7.73)

$$\begin{aligned}
\langle P | \frac{1}{2} \Pi^2(0,0) | P' \rangle &= \frac{1}{2} \langle P | \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 | P' \rangle_{x=0, t=0} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{P''} \frac{\partial}{\partial t} (\langle P | \exp(-iHt) \Phi(x,t) \exp(iHt) | P'' \rangle)_{x=0, t=0} \\
&\quad \times \frac{\partial}{\partial t} (\langle P'' | \exp(-iHt) \Phi(x,t) \exp(iHt) | P' \rangle)_{x=0, t=0} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{P''} \langle P | \Phi(0,0) | P'' \rangle \langle P'' | \Phi(0,0) | P' \rangle \\
&\quad \times (E_P - E_{P''})(E_{P''} - E_{P'}). \tag{7.88}
\end{aligned}$$

Tämä on postulaatin (*iv*) ja energian aiemman tarkastelun perusteella  $O(\lambda)$ , kun taas staattinen osa (7.87) on  $O(1/\lambda)$ . Derivaattatermi voidaan siis jättää pois alimmassa asteessa. Sijoittamalla yhtälö (7.87) yhtälöön (7.86) saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} d(P - P') e^{i(P-P')x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(P-P')a} \mathcal{E}_{\text{kl}}(-a) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d(P - P') e^{i(P-P')(x-(-a))} \mathcal{E}_{\text{kl}}(-a) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} 2\pi \delta(x - (-a)) \mathcal{E}_{\text{kl}}(-a) \\
&= \mathcal{E}_{\text{kl}}(x), \tag{7.89}
\end{aligned}$$

eli kvanttitalan energiatiheyden muototekijä on alimmassa asteessa klassisen kinkin energiatiheys. Kentän ja energiatiheyden muototekijät ovat klassisen teorian perusteella lokalisoituja, mikä tukee ideaa, että kvanttiteoriassa kinkisektorin perustila

on laajennettu hiukkanen.

Yhtälössä (7.70) määritelty funktio  $f_2(x - a, k)$  voidaan määrittää laskemalla yhtälön (7.72) molempien puolien matriisialkiot tilojen  $|P'\rangle$  ja  $|P, k\rangle$  välillä eli ratkaisemalla funktio  $f_2(x - a, k)$  yhtälöstä

$$\langle P, k | \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 \right) \Phi(x, t) | P' \rangle = -\lambda \langle P, k | \Phi^3(x, t) | P' \rangle. \quad (7.90)$$

Ajasta riippuvalle osalle saadaan kuten aikaisemmin

$$\langle P, k | \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} | P' \rangle_{t=0} = \langle P, k | - (E_P + \omega_k - E_{P'})^2 \Phi(x, 0) | P' \rangle, \quad (7.91)$$

missä vasemman puolen energiassa on nyt myös mesonin energia  $\omega_k$ . Koska energia  $E_P - E_{P'}$  on  $O(\lambda)$ , tästä jää alimmassa asteessa jäljelle vain termi

$$\langle P, k | -\omega_k^2 \Phi(x, 0) | P' \rangle, \quad (7.92)$$

joka on  $O(\lambda^0)$  postulaatin (iv) mukaan. Yhtälön (7.90) vasemmasta puolesta jää jäljelle siis

$$\begin{aligned} & \langle P, k | \left( -\omega_k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 \right) \Phi(x, t) | P' \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(P+k-P')a} \left( -\omega_k^2 - m^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f_2(x - a, k), \end{aligned} \quad (7.93)$$

joka on postulaatin (iv) mukaan  $O(\lambda^0)$ . Yhtälön (7.90) oikeasta puolesta saadaan samaan tapaan kuin yhtälösarjassa (7.78)

$$\begin{aligned} & -3\lambda \sum_{P'', P'''} \langle P, k | \Phi(x, 0) | P'' \rangle \langle P'' | \Phi(x, 0) | P''' \rangle \langle P''' | \Phi(x, 0) | P' \rangle \\ &= -3\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(P+k-P')a} \phi_K^2(x - a) f_2(x - a, k), \end{aligned} \quad (7.94)$$

missä on lisätty kerroin 3, koska mesonin voi emittoida mikä tahansa kolmesta kenttäoperaattorista  $\Phi$ . Sijoittamalla lausekkeet (7.93) ja (7.94) yhtälöön (7.90) saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} & \left( -\omega_k^2 - m^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f_2(x - a, k) = -3\lambda \phi_K^2(x - a) f_2(x - a, k) \\ & \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 + 3\lambda \phi_K^2(x - a) \right) f_2(x - a, k) = \omega_k^2 f_2(x - a, k). \end{aligned} \quad (7.95)$$

Tämä on edellisessä luvussa johdetun yhtälön (7.35) jatkuvan spektrin osuus. Ominaisfunktio  $f_2(x, k)$  on siis verrannollinen edellisessä luvussa määriteltyyn ominaisfunktioon  $\eta_k(x)$ . Funktiolle  $f_2(x, k)$  valitaan normalisointi

$$f_2(x, k) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \eta_k(x). \quad (7.96)$$

Funktio  $f_2^*(x)$  voidaan laskea samaan tapaan. Huomioimalla, että nyt

$$\begin{aligned} (E_{P^*} - E_{P'})^2 &= (\sqrt{P^2 + M^{*2}} - \sqrt{P'^2 + M^2})^2 \approx \left( M^* - M + \frac{P^2}{2M^*} - \frac{P'^2}{2M} \right)^2 \\ &\approx (M^* - M)^2 \end{aligned} \quad (7.97)$$

saadaan samaan tapaan kuin edellisessä tapauksessa

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 + 3\lambda\phi_K^2(x-a) \right) f_2^*(x-a, k) = \omega_1^2 f_2^*(x-a, k), \quad (7.98)$$

missä  $\omega_1 = M^* - M$ . Tämä on yhtälön (7.35) diskreetti osuus. Funktio  $f_2^*(x)$  määritellään normalisaatiolla

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega_1}} \eta_1(x). \quad (7.99)$$

Matriisielementit voidaan määritellä samaan tapaan myös muille teorioille [52]. Yleisesti matriisielementit määritellään ottaen kaikki teorian hiukkaset huomioon. Fermionien käsittely vaatii enemmän muokkauksia, ja mittateorioissa täytyy ottaa huomioon mitan kiinnittäminen.

### 7.3 Kinkin transitioamplitudi funktionaali-integraalina

Määritellään transitioamplitudi Hamiltonin formalismissa. Hamiltonin funktio on

$$H = \int_{\mathbb{R}} dx \mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}} dx \left( \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + U(\phi) \right), \quad (7.100)$$

missä liikemäärän konjugaatti  $\pi$  on  $\pi = \dot{\phi}$ . Transitioamplitudi alkutilan  $|\Psi_a\rangle$  ja lopputilan  $|\Psi_l\rangle$  välillä on Hamiltonin formalismissa [48]

$$\begin{aligned} S_{la} &= \langle \Psi_l | e^{-iH(t_l-t_a)} | \Psi_a \rangle \\ &= \int D[\phi(x, t)] D[\pi(x, t)] \bar{\Psi}_l[\phi(x, t_l)] \Psi_a[\psi(x, t_a)] \\ &\quad \times \exp \left( i \int_{t_a}^{t_l} dt \int_{\mathbb{R}} dx [\pi \dot{\phi} - \mathcal{H}(\pi, \phi)] \right). \end{aligned} \quad (7.101)$$

Funktionaali-integraalissa kentät  $\phi$  ja  $\pi$  ovat kiinnitetty alkuhetkellä  $t_a$  ja loppuhetkellä  $t_l$ . Transitioamplitudia  $S_{la}$  ei voida määrittää tässä muodossa perturboimalla kenttää  $\phi$  klassisen kinkkiratkaisun ympärillä translaatiomoodin takia. Koska translaatiomoodin ominaisarvo on nolla, se johtaisi divergenssiin. Ongelma ratkaistaan tässä kollektiivisten koordinaattien avulla. Kollektiivisten koordinaattien menetelmässä symmetriaan liittyvää vapaata parametria käsitellään dynaamisena muuttujana [48]. Sijoitetaan transitioamplitudiin (7.101) identiteetit

$$\int \prod_t \{ D[p(t)] \delta(p(t) + P) \}_t = 1, \quad P = \int_{\mathbb{R}} \pi \phi' dx \quad (7.102)$$

$$\int \prod_t \left\{ D[X(t)] \delta(Q[\pi(x + X(t), t), \phi(x + X(t), t)]) \frac{\partial Q}{\partial X} \right\}_t = 1, \quad (7.103)$$

missä ensimmäinen identiteetti on rajoite, jossa esiintyvän deltafunktion merkitys on määritellä suure  $p(t)$  kenttäkonfiguraation liikemääräksi  $-P$ . Toisessa identiteetissä esiintyvä suure  $X(t)$  tulee olemaan translaatiosymmetriaan liittyä dynaaminen parametri, ja funktionaali  $Q$  on vielä tällä hetkellä mielivaltainen. Funktionaali  $Q$  on kenttien  $\pi$  ja  $\phi$  funktionaali vain paikka-avaruuden kautta ja funktio ajan suhteen. Tehdään seuraavaksi muunnokset

$$\phi(x, t) = \tilde{\phi}(x - X(t), t) \equiv \tilde{\phi}(\rho, t) \quad (7.104)$$

$$\pi(x, t) = \tilde{\pi}(x - X(t), t) \equiv \tilde{\pi}(\rho, t) \quad (7.105)$$

$$\rho = x - X(t). \quad (7.106)$$

Ensimmäisen muunnoksen perusteella  $\dot{\phi}(x, t) = \dot{\tilde{\phi}}(\rho, t) - \dot{X}(t)\tilde{\phi}'(\rho, t)$  ja  $\tilde{\phi}' = \phi'$ .

Tämän avulla saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} dx [\pi \dot{\phi} - \mathcal{H}(\pi, \phi)] &= \int_{\mathbb{R}} dx [\tilde{\pi}(\dot{\tilde{\phi}} - \dot{X}\tilde{\phi}') - \mathcal{H}(\tilde{\pi}, \tilde{\phi})] \\ &= -\dot{X} \int_{\mathbb{R}} dx \pi \phi' + \int_{\mathbb{R}} d\rho [\tilde{\pi} \dot{\tilde{\phi}} - \mathcal{H}(\tilde{\pi}, \tilde{\phi})] \\ &= p(t)\dot{X} + \int_{\mathbb{R}} d\rho [\tilde{\pi} \dot{\tilde{\phi}} - \mathcal{H}(\tilde{\pi}, \tilde{\phi})]. \end{aligned} \quad (7.107)$$

Aaltofunktionaalit  $\Psi_{a,l}$  muuntuvat yhtälön [48]

$$\Psi_{a,l}[\phi] = e^{ip_{a,l}X(t_{a,l})} \Psi_{a,l}[\tilde{\phi}] \quad (7.108)$$

mukaan.

Sijoittamalla identiteetit (7.102) ja (7.103) transiioamplitudiin (7.101) saadaan

$$\begin{aligned} S_{la} &= \int \prod_t D[p(t)] \prod_{t'} D[X(t')] D[\tilde{\phi}] D[\tilde{\pi}] e^{-ip_l X_l} \bar{\Psi}_l[\tilde{\phi}] e^{ip_a X_a} \Psi_a[\tilde{\phi}] \\ &\quad \times \exp \left[ i \int_{t_a}^{t_l} p \dot{X} dt + i \int_{t_a}^{t_l} dt \int_{\mathbb{R}} dx \left( \tilde{\pi} \dot{\tilde{\phi}} - \mathcal{H}(\tilde{\pi}, \tilde{\phi}) \right) \right] \\ &\quad \times \delta(p(t) + P) \delta(Q) \frac{\partial Q}{\partial X} \\ &= \int \prod_t D[p(t)] D[X(t)] e^{-i \int_{t_a}^{t_l} p \dot{X} dt} D[\tilde{\phi}] D[\tilde{\pi}] \bar{\Psi}_l[\tilde{\phi}] \Psi_a[\tilde{\phi}] \\ &\quad \times \exp \left[ i \int_{t_a}^{t_l} dt \int_{\mathbb{R}} dx \left( \tilde{\pi} \dot{\tilde{\phi}} - \mathcal{H}(\tilde{\pi}, \tilde{\phi}) \right) \right] \delta(p(t) + P) \delta(Q) \frac{\partial Q}{\partial X}, \end{aligned} \quad (7.109)$$

missä käytettiin osittaisintegrointia. Tässä vain ensimmäinen termi riippuu funktios-  
ta  $X(t)$ , joten  $X(t)$ -integraali voidaan suorittaa. Käyttämällä määritelmää (7.10)

$X(t)$ -integraaliin ja kirjoittamalla  $\int dt \dot{p}X = \int dpX$  saadaan

$$\begin{aligned}
& \int D[X(t)] e^{-i \int_{p_a}^{p_l} dpX} \\
& \sim \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^N dX((t_n + t_{n-1})/2) e^{-i(p(t_n) - p(t_{n-1}))X((t_n + t_{n-1})/2)} \\
& \sim \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \delta(p(t_n) - p(t_{n-1})) \\
& = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \delta(p(t_n) - p(t_a)) \\
& = \lim_{N \rightarrow \infty} \delta(p(t_l) - p(t_a)) \prod_{n=1}^{N-1} \delta(p(t_n) - p(t_a)), \tag{7.110}
\end{aligned}$$

missä jätettiin kirjoittamatta integraalin mittaan ja deltafunktioon liittyvät va-  
kiot, sillä ne voidaan sisällyttää transiioamplitudin muihin mittoihin ja ratkais-  
ta myöhemmin. Integraali funktioiden  $p(t)$  yli voidaan nyt suorittaa, jolloin saadaan  
 $p(t) \equiv p = p_a = p_l$  kaikilla ajanhetkellä  $t$  yhtälön (7.110) perusteella. Transiio-  
amplitudiksi saadaan siis

$$\begin{aligned}
S_{la} &= \delta(p_l - p_a) \int \prod_t D[\tilde{\phi}] D[\tilde{\pi}] \tilde{\Psi}_l[\tilde{\phi}] \Psi_a[\tilde{\phi}] \\
& \times \exp \left[ i \int_{t_a}^{t_f} dt \int_{\mathbb{R}} dx \left( \tilde{\pi} \dot{\tilde{\phi}} - \mathcal{H}(\tilde{\pi}, \tilde{\phi}) \right) \right] \delta(p + P) \delta(Q) \frac{\partial Q}{\partial X}. \tag{7.111}
\end{aligned}$$

Eksponentin stationäärinen piste saadaan vaikutuksesta

$$\int_{t_a}^{t_l} dt \left[ \int_{\mathbb{R}} d\rho (\tilde{\pi} \dot{\tilde{\phi}} - \mathcal{H}) - \alpha(t)(p + P) \right], \tag{7.112}$$

missä funktio  $\alpha(t)$  on Lagrangen kerroin. Ratkaisemalla Euler-Lagrangen yhtälöt  
saadaan ratkaisuksi [48]

$$\tilde{\phi}_{kl}(\rho) = \phi_K \left( \sqrt{1 + \frac{p^2}{M_0^2}} (\rho - a) \right) \tag{7.113}$$

ja

$$\tilde{\pi}_{kl}(\rho) = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + M_0^2}} \partial_\rho \tilde{\phi}_{kl}, \tag{7.114}$$

missä  $\tilde{\phi}_{\text{kl}}(\rho)$  on relativistisen kinkin ratkaisu uudessa koordinaatissa  $\rho$ , ja vakio  $a$  on parametri, jonka ehto  $\delta(Q)$  kiinnittää.

Tavoitteena nyt on tehdä transiioamplitudin (7.111) deltafunktioiden argumenteista lineaarisia kentissä  $\tilde{\phi}$  ja  $\tilde{\pi}$ . Valitaan funktionaaliksi  $Q$  [48]

$$Q[\phi(x + X(t), t)] = \int_{\mathbb{R}} dx f(x) \phi(x + X(t), t) = \int_{\mathbb{R}} d\rho f(\rho) \tilde{\phi}(\rho, t), \quad (7.115)$$

jolloin

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = \int_{\mathbb{R}} dx f(x) \phi'(x + X, t) = \int_{\mathbb{R}} d\rho f(\rho) \tilde{\phi}'(\rho, t), \quad (7.116)$$

missä funktio  $f(x)$  on mielivaltainen funktio, joka on normalisoitu siten, että

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx = 1. \quad (7.117)$$

Tehdään kenttään  $\tilde{\pi}(\rho, t)$  muunnos

$$\tilde{\pi}(\rho, t) = -f(\rho) \frac{p + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\pi}(\rho', t) (\tilde{\phi}'(\rho', t) - f(\rho') c) d\rho'}{\int_{\mathbb{R}} f(\rho') \tilde{\phi}'(\rho', t) d\rho'} + \tilde{\pi}(\rho, t), \quad (7.118)$$

missä  $c$  on vakio. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} \delta \left( p + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\pi} \tilde{\phi}' d\rho \right) &= \delta \left( p + \int_{\mathbb{R}} d\rho \left[ -f \frac{p + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\pi} (\tilde{\phi}' - fc) d\rho'}{\int_{\mathbb{R}} f \tilde{\phi}' d\rho'} \tilde{\phi}' + \tilde{\pi} \tilde{\phi}' \right] \right) \\ &= \delta \left( p + \int_{\mathbb{R}} d\rho \left[ -\frac{pf \tilde{\phi}'}{\int_{\mathbb{R}} f \tilde{\phi}' d\rho'} - \frac{f \tilde{\phi}' \int_{\mathbb{R}} \tilde{\pi} (\tilde{\phi}' - fc) d\rho'}{\int_{\mathbb{R}} f \tilde{\phi}' d\rho'} + \tilde{\pi} \tilde{\phi}' \right] \right) \\ &= \delta \left( p - p - \int_{\mathbb{R}} \tilde{\pi} (\tilde{\phi}' - fc) d\rho + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\pi} \tilde{\phi}' d\rho \right) \\ &= \delta \left( c \int_{\mathbb{R}} f(\rho) \tilde{\pi}(\rho, t) d\rho \right) \end{aligned} \quad (7.119)$$

Muunnoksen (7.118) Jakobiaaniin tarvitaan derivaatta

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tilde{\pi}(\rho, t)}{\delta \tilde{\pi}(\rho', t')} &= \delta(t - t') \left[ -f(\rho) \frac{\int_{\mathbb{R}} \delta(\rho'' - \rho') (\tilde{\phi}'(\rho'') + f(\rho'') c) d\rho''}{\int_{\mathbb{R}} f \tilde{\phi}' d\rho''} + \delta(\rho - \rho') \right] \\ &= \delta(t - t') \left[ \delta(\rho - \rho') - \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} f \tilde{\phi}' d\rho''} f(\rho) (\tilde{\phi}'(\rho') - f(\rho') c) \right]. \end{aligned} \quad (7.120)$$

Mielivaltaisen funktion  $M(x, x')$  determinantti  $\det[M(x, x')]$  voidaan kirjoittaa muodossa [53]

$$\begin{aligned}
& \det[M(x, x')] \\
&= \exp(\operatorname{tr} \ln(M(x, x'))) \\
&= \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \int_{\mathbb{R}^k} dx_1 dx_2 \cdots dx_k [M(x_1, x_2) - \delta(x_1 - x_2)] \right. \\
&\quad \left. \times [M(x_2, x_3) - \delta(x_2 - x_3)] \cdots [M(x_k, x_1) - \delta(x_k - x_1)]\right). \tag{7.121}
\end{aligned}$$

Merkitään  $A = \int_{\mathbb{R}} f \tilde{\phi}' d\rho$ . Käyttämällä kaavaa (7.121) ja normalisointia (7.117) saadaan esimerkiksi muuttujasta  $\rho_1$  riippuvan osan integraaliksi

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} d\rho_1 \left[ -\frac{1}{A} \left( f(\rho_1) \tilde{\phi}'(\rho_2) - cf(\rho_1)f(\rho_2) \right) \right] \left[ -\frac{1}{A} \left( f(\rho_k) \tilde{\phi}'(\rho_1) - cf(\rho_k)f(\rho_1) \right) \right] \\
&= \left( -\frac{1}{A} \right)^2 \left[ Af(\rho_k) \tilde{\phi}'(\rho_2) - cf(\rho_k) \tilde{\phi}'(\rho_2) - cAf(\rho_k)f(\rho_2) + c^2 f(\rho_k)f(\rho_2) \right] \\
&= -\frac{A-c}{A} \left( -\frac{1}{A} \right) \left[ f(\rho_k) \tilde{\phi}'(\rho_2) - cf(\rho_k)f(\rho_2) \right]. \tag{7.122}
\end{aligned}$$

Siis jokainen integraali antaa  $c/A - 1$  ja lausekkeen (7.120) determinantiksi saadaan siten

$$\begin{aligned}
\det \left[ \frac{\delta \tilde{\pi}(\rho, t)}{\delta \tilde{\pi}(\rho', t')} \right] &= \prod_t \exp \left[ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left( \frac{c}{A} - 1 \right)^k \right] \\
&= \prod_t \exp \left[ \ln \left( \frac{c}{\int_{\mathbb{R}} f \tilde{\phi}' d\rho} \right) \right] \\
&= \prod_t c \left( \int_{\mathbb{R}} f \tilde{\phi}' d\rho \right)^{-1}, \tag{7.123}
\end{aligned}$$

missä tulo kaikkien ajanhetkien  $t$  yli tulee Diracin deltafunktion  $\delta(t - t')$  determinantista. Tämä kumoaa transitoamplitudissa termin (7.116). Käyttämällä normalisointia (7.117) ja ottamalla huomioon deltafunktion (7.119) saadaan Hamiltonin

funktioksi

$$\begin{aligned} H(\tilde{\pi}, \tilde{\phi}) &= \int_{\mathbb{R}} d\rho \left[ \frac{1}{2} \tilde{\pi}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\phi}'^2 + U(\tilde{\phi}) \right] \\ &= \frac{\left( p + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\pi}(\tilde{\phi}' - cf) d\rho \right)^2}{2 \left( \int_{\mathbb{R}} f \tilde{\phi}' d\rho \right)^2} + \int_{\mathbb{R}} d\rho \left[ \frac{1}{2} \tilde{\pi}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\phi}'^2 + U(\tilde{\phi}) \right]. \end{aligned} \quad (7.124)$$

Funktionaalin  $Q$  valinnan (7.115) perusteella termi  $\int_{\mathbb{R}} f \dot{\tilde{\phi}} d\rho = \partial_t \int_{\mathbb{R}} f \tilde{\phi} d\rho$  häviää, joten transitionamplitudissa (7.111) termiksi  $\int_{\mathbb{R}} \tilde{\pi} \dot{\tilde{\phi}} d\rho$  saadaan

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\pi} \dot{\tilde{\phi}} d\rho = \int_{\mathbb{R}} \dot{\tilde{\pi}} \tilde{\phi} d\rho. \quad (7.125)$$

Transitioamplitudi (7.111) on siis nyt

$$\begin{aligned} S_{la} &= \delta(p_l - p_a) \int D[\tilde{\phi}] D[\tilde{\pi}] \bar{\Psi}_l[\tilde{\phi}] \Psi_a[\tilde{\phi}] \times \delta \left( \int_{\mathbb{R}} f \tilde{\pi} d\rho \right) \delta \left( \int_{\mathbb{R}} f \dot{\tilde{\phi}} d\rho \right) \\ &\quad \times \exp \left[ i \int_{t_a}^{t_l} dt \int_{\mathbb{R}} dx \left( \tilde{\pi} \dot{\tilde{\phi}} - \mathcal{H}(\tilde{\pi}, \tilde{\phi}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.126)$$

Deltafunktioiden argumentit ovat nyt lineaarisia kentissä  $\tilde{\pi}$  ja  $\tilde{\phi}$ . Seuraavaksi voidaan muodostaa pertubaatiot klassisten ratkaisujen ympärille. Tarkkoja tuloksia varten täytyy käyttää ratkaisuja (7.113) ja (7.114). Alimmassa asteessa voidaan kuitenkin käyttää perturbaatioita staattisen ratkaisun ympärille eli kirjoitetaan

$$\tilde{\phi}(\rho, t) = \phi_K(\rho) + \zeta(\rho, t), \quad \tilde{\pi}(\rho, t) = \chi(\rho, t), \quad (7.127)$$

missä kentät  $\zeta(\rho, t)$  ja  $\chi(\rho, t)$  ovat pienet perturbaatiot. Valitaan

$$f(\rho) = \frac{\phi'_K}{\sqrt{M_0}} \quad \text{ja} \quad c = \sqrt{M_0}. \quad (7.128)$$

Hamiltonin funktioksi (7.124) saadaan kinkin kenttäyhtälöä (3.7) käyttämällä

$$\begin{aligned} H &= M_0 + \frac{\left( p + \int_{\mathbb{R}} \chi \zeta' d\rho \right)^2}{2M_0 \left( 1 + \frac{\xi}{M_0} \right)^2} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} d\rho \left[ \frac{1}{2} \chi^2 + \frac{1}{2} \zeta'^2 + \left( \frac{3\lambda}{2} \phi_K^2 - \frac{1}{2} m^2 \right) \zeta^2 + \lambda \phi_K \zeta^3 + \frac{\lambda}{4} \zeta^4 \right] \end{aligned} \quad (7.129)$$

missä määriteltiin  $\xi = \int \phi'_K \zeta' d\rho$ . Transitioamplitudi  $S_{la}$  on nyt

$$S_{la} = \delta(p_l - p_a) \int D[\zeta] D[\chi] \bar{\Psi}_l[\tilde{\phi}] \Psi_a[\tilde{\phi}] \delta \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi'_K}{\sqrt{M_0}} \chi d\rho \right) \delta \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi'_K}{\sqrt{M_0}} \zeta d\rho \right) \\ \times \exp \left[ i \int_{t_a}^{t_l} \left( dt \int_{\mathbb{R}} dx \left( \chi \dot{\zeta} \right) - H \right) \right]. \quad (7.130)$$

Hamiltonin funktion (7.129) kvadraattisen osan ominaisarvoyhtälön

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + (3\lambda \phi_K^2 - m^2) \right) \eta_n = \omega_n^2 \eta_n \quad (7.131)$$

ratkaisut ovat annettu yhtälöissä (7.37)-(7.39). Sijoittamalla funktioiden  $\zeta(\rho, t)$  ja  $\chi(\rho, t)$  hajotelmat

$$\zeta(\rho, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \eta_n(\rho), \quad \chi(\rho, t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t) \eta_n(\rho) \quad (7.132)$$

transitioamplitudin deltafunktioihin ja käyttämällä ominaisfunktioiden  $\eta_n$  ortonormaaliusominaisuutta (7.45) saadaan tulokseksi  $\delta(c_0(t))$  ja  $\delta(d_0(t))$  eli deltafunktioit poistavat translaatiomoodin pertrubaatioiden hajotelmasta. Heikon kytkennän tapauksessa transitioamplitudiin (7.132) voidaan nyt soveltaa pertrubaatioteoriaa ilman nollamoodin aiheuttamia ongelmia [54].

Tässä esitelty kollektiivisten koordinaattien menetelmä soveltuu myös muiden teorioiden solitoneihin. Monimutkaisemmissa teorissa on enemmän symmetrioita, kuten rotaatiosymmetrioita tai mittasymmetrioita, ja jokaiseen symmetriaan liittyy nollamoodi. Jokainen nollamoodi täytyy huomioida käyttämällä joko kollektiivisia koordinaatteja tai jotakin muuta menetelmää [55, 56]. Funktionaali-integraalin sijaan voidaan käyttää myös kanonista kvantisointia [55].

## 8 Yhteenveto

Joissakin kenttäteorioissa esiintyy topologisesti epätriviaaleja kenttäkonfiguraatioita. Nämä kenttäkonfiguraatiot sisältävät pysyviä ja lokalisoituneita hiukkasmaisia olioita eli topologisia solitoneita, ja kenttäkonfiguraatiot voidaan luokitella kokonaisluvun, topologisen varauksen, perusteella ekvivalenssiluokkiin. Kenttäkonfiguraatio

ei voi siirtyä ekvivalenssiluokasta toiseen äärellisellä energialla, mikä tekee topologisista solitoneista erityisen stabiileja. Topologisia solitoneja esiintyy useissa kenttäteorioissa, ja ne ovat oleellisia systeemien tarkassa tuntemisessa.

Vorteksit kuvaavat tärkeää ilmiötä suprajohteissa. Vorteksit lukkivat suprajohteen läpäisevän magneettikentän ohuisiin putkiin, jolloin putkien ulkopuolinen osa säilyy suprajohtavana. Tämä ominaisuus on suprajohteiden sovelluksissa tärkeä. Magneettisia monopoleja esiintyy monissa kosmologisissa teorioissa. Ne ovat hypoteettisia, mutta kysymys niiden olemassaolosta on tärkeä. Jos magneettisia monopoleja satuttaisiin löytämään, ne auttaisivat löytämään maailmankaikkeutta parhaiten kuvaavan teorian. Toisaalta jos ollaan varmoja, että niitä ei löydy tietyltä energiaväliltä, antaa sekin hyödyllisiä rajoituksia teorioille. Instantonit ovat avaruuden lisäksi ajassa lokalisoituneita topologisia solitoneita. Instantonit ovat tärkeitä erityisesti kvanttikromodynamiikassa, jossa niitä tarvitaan kuvaamaan muunmuassa teorian tyhjiön ja hadronien ominaisuuksia.

Solitonin kvantisoinnissa kenttäteoria kvantisoidaan samoilla menetelmillä kuin kenttäteoriat yleensä, mutta tyhjiön sijaan teoria kvantisoidaan klassisessa kenttäkonfiguraatiossa, jossa on solitoni. Kvantisoinnista tulee kuitenkin vaikeampaa, koska solitonien nollamoodit johtavat divergointeihin, jos niitä ei oteta kvantisoinnissa huomioon. Yleinen metodi nollamoodien käsittelemiseen on käyttää kollektiivisiä koordinaatteja, jossa nollamoodiin liittyvä vapaa parametri muunnetaan dynaamiseksi muuttujaksi. Solitonien kvantisoinnissa oleellisia suureita ovat esimerkiksi solitonin energiatilat ja transitioamplitudit tilojen välillä. Kvantisointi tehtiin tässä tutkielmassa pääasiassa funktionaali-integraalimenetelmää käyttämällä, mutta menetelmä solitonien kvantisointiin on kehitetty myös kanonisessa kvantisoinnissa.

## Viitteet

- [1] M. A. Ablowitz ja P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (Cambridge University Press, 1991).
- [2] H. A. Haus ja W. S. Wong, *Reviews of Modern Physics* **68**, 423 (1996).
- [3] M. Nakahara, *Geometry, topology, and physics* (Institute of Physics Publishing, 2003).
- [4] N. Manton ja P. P. M. Sutcliffe, *Topological solitons* (Cambridge University Press, 2004).
- [5] G. H. Derrick, *J.Math.Phys.* **5**, 1252 (1964).
- [6] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons, Volume 15* (North Holland, 1987).
- [7] S. Gustafson ja I. Sigal, *Communications in Mathematical Physics* **212**, 257 (2000).
- [8] C. H. Taubes, *Commun.Math.Phys.* **72**, 277 (1980).
- [9] M. Cyrot, *Reports on Progress in Physics* **36**, 103 (1973).
- [10] V. N. Gladilin *et al.*, *New Journal of Physics* **17**, 063032 (2015).
- [11] S. Hasegawa *et al.*, *Physical Review B* **43**, 7631 (1991).
- [12] J. Ge *et al.*, *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics* **88**, 174503 (2013).
- [13] N. E. Mavromatos ja V. A. Mitsou, *Int.J.Mod.Phys.A* **35**, 2030012 (2020).
- [14] J. Beringer *et al.*, *Physical Review D* **86**, 010001 (2012).
- [15] P. A. M. Dirac, *Proc.Roy.Soc.Lond.A* **133**, 60 (1931).
- [16] G. t. Hooft, *Nuclear Physics B* **190**, 455 (1981).
- [17] V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields* (Princeton University Press, 2002).
- [18] B. Julia ja A. Zee, *Physical Review D* **11**, 2227 (1975).
- [19] B. Acharya *et al.*, *Physical Review Letters* **123**, 021802 (2019).
- [20] G. Aad *et al.*, *Physical Review Letters* **124**, 031802 (2020).
- [21] B. Acharya *et al.*, *Physical Review Letters* **126**, 071801 (2021).
- [22] B. Acharya *et al.*, *Nature* **602**, 63 (2022).
- [23] A. Albert *et al.*, *JHEAp* **34**, 1 (2022).

- [24] R. Abbasi *et al.*, Physical Review Letters **128**, 051101 (2022).
- [25] G. Lazarides ja Q. Shafi, Physics Letters B **94**, 149 (1980).
- [26] Y. M. Cho ja D. Maison, Physics Letters B **391**, 360 (1997).
- [27] J. Ellis *et al.*, Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics **756**, 29 (2016).
- [28] S. Arunasalam ja A. Kobakhidze, The European Physical Journal C **77**, 444 (2017).
- [29] P. De Fabritiis ja J. A. Helayël-Neto, The European Physical Journal C 2021 81:9 **81**, 1 (2021).
- [30] J. Schwinger, Physical Review **82**, 664 (1951).
- [31] O. Gould *et al.*, Physical Review D **100**, 015041 (2019).
- [32] O. Gould *et al.*, Physical Review D **104**, 015033 (2021).
- [33] W. Y. Song ja W. Taylor, J.Phys.G **49**, 045002 (2022).
- [34] R. Pasechnik ja M. Šumbera, Universe **7**, 330 (2021).
- [35] Y. B. Zeldovich ja M. Y. Khlopov, Phys.Lett.B **79**, 239 (1978).
- [36] H. Fanchiotti *et al.*, Int.J.Mod.Phys.A **32**, 1750202 (2017).
- [37] J. T. Reis ja W. K. Sauter, Phys.Rev.D **96**, 075031 (2017).
- [38] L. M. Abreu *et al.*, Eur.Phys.J.Plus **135**, 543 (2020).
- [39] N. D. Barrie *et al.*, Nucl.Phys.B **972**, 115564 (2021).
- [40] D. L. Ho ja A. Rajantie, Physical Review D **103**, 115033 (2021).
- [41] C. G. Callan *et al.*, Physics Letters B **63**, 334 (1976).
- [42] E. V. Shuryak, Nuclear Physics B **203**, 93 (1982).
- [43] E. V. Shuryak, Nuclear Physics B **203**, 116 (1982).
- [44] G. 'T Hooft, Physical Review D **14**, 3432 (1976).
- [45] E. V. Shuryak ja J. J. Verbaarschot, Nuclear Physics B **410**, 37 (1993).
- [46] E. V. Shuryak ja J. J. Verbaarschot, Nuclear Physics B **410**, 55 (1993).
- [47] T. Schäfer *et al.*, Nuclear Physics B **412**, 143 (1994).
- [48] J. L. Gervais *et al.*, Physics Reports **23**, 281 (1976).

- [49] M. Chaichian ja A. Demichev, *Path Integrals in Physics* (CRC Press, Boca Raton, 2001).
- [50] A. R. H. Richard P. Feynman, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-HillNew York, 1965).
- [51] P. M. P. M. Morse ja H. Feshbach, (1953).
- [52] R. Jackiw, *Reviews of Modern Physics* **49**, 681 (1977).
- [53] H. Kleinert, *Particles and Quantum Fields* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2016).
- [54] J. L. Gervais *et al.*, *Physical Review D* **12**, 1038 (1975).
- [55] N. H. Christ ja T. D. Lee, *Physical Review D* **12**, 1606 (1975).
- [56] J. Baacke ja H. J. Rothe, *Nuclear Physics B* **125**, 108 (1977).