



**TURUN  
YLIOPISTO**

PARETO-OPTIMAALISUUDEN HAVAINNOLLISTAMINEN  
EPÄLINEAARISESSA MONITAVOITEOPTIMOINNISSA

Jenni Leinonen

Pro gradu -tutkielma  
2023

Tarkastajat:  
Prof. Marko Mäkelä  
Dos. Yury Nikulin

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

JENNI LEINONEN: Pareto-optimaalisuuden havainnollistaminen epälineaarisessa monitavoiteoptimoinnissa  
Pro gradu -tutkielma, 39 s.  
Sovellettu matematiikka  
Toukokuu 2023

---

Tässä Pro gradu tutkielmassa tutkitaan, millä erilaisilla tavoilla Pareto-optimaalista ratkaisua voidaan havainnollistaa monitavoiteoptimoinnissa. Monitavoiteoptimoinnissa saadaan usein monia eri Pareto-optimaalisia ratkaisuja. Matemaatikolla ei välttämättä ole kaikkea tarvittavaa tietoa valita näistä tehtävälleen paras Pareto-optimaalinen ratkaisu, koska matemaatikolle kaikki Pareto-optimaaliset ratkaisut ovat samanarvoisia. Jotta Pareto-optimaalisista ratkaisuksista saadaan valittua tehtävälle paras, on mukana usein päätöksentekijä. Päätöksentekijä on henkilö, ryhmä ihmisiä tai kone, jolla on tietoa alkuperäisestä tehtävästä. Päätöksentekijää tarvitaan päättämään, mikä monitavoiteoptimointiongelman Pareto-optimaalisista ratkaisuisista otetaan käyttöön. Päätöksentekijä voi olla mukana ongelmanratkaisussa kolmella eri tapaa. Hän voi olla mukana joko ongelman ratkaisemisen jälkeen (A Posteriori), ennen ongelman ratkaisua (A Priori) tai monessa eri kohtaa ongelmanratkaisua (Interactive). Tutkielmassa käydään läpi monenlaisia tapoja ja algoritmeja näille kolmelle tavalle.

Koska päätöksentekijällä ei välttämättä ole matemaattista osaamista, on hänelle hyvä tehdä graafisia havainnollistuksia Pareto-optimaalisista ratkaisuksista helpottamaan valintaa, mikä Pareto-optimaalinen ratkaisu valitaan. Tutkitaan, millaisia tapoja kirjallisuudessa on käytetty havainnollistamaan Pareto-optimaalisia pisteitä sekä Pareto-pintoja. Käydään läpi myös, miten a posteriori, a priori ja interaktiivisia menetelmiä on havainnollistettu, sekä miten niitä voidaan havainnollistaa.

Asiasanat: Pareto-optimaalisuus, Pro gradu -tutkielma, Monitavoiteoptimointi, Havainnollistus.



# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Määritelmiä</b>	<b>3</b>
2.1	Monitavoiteoptimointi . . . . .	3
2.2	Pareto-optimaalisuus . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Päätöksentekijä monitavoiteoptimoinnissa</b>	<b>6</b>
3.1	A posteriori menetelmät . . . . .	6
3.1.1	Painokerroinmenetelmä . . . . .	7
3.1.2	Rajoiteyhtälömenetelmä . . . . .	9
3.2	A priori menetelmät . . . . .	10
3.2.1	Hyötyfunktioimenetelmä . . . . .	11
3.2.2	Leksikaalinen optimointi . . . . .	11
3.2.3	Tavoiteoptimointi . . . . .	12
3.3	Interaktiivisia menetelmiä . . . . .	14
3.3.1	ISWT menetelmä . . . . .	14
3.3.2	Referenssipistemenetelmä . . . . .	16
3.3.3	NIMBUS-menetelmä . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Graafinen havainnollistaminen</b>	<b>21</b>
4.1	Erlaisia havainnollistamiskeinoja . . . . .	21
4.2	A posteriori menetelmien havainnollistaminen . . . . .	29
4.3	A priori menetelmien havainnollistaminen . . . . .	29
4.4	Interaktiivisten menetelmien havainnollistaminen . . . . .	31
4.5	WWW-NIMBUS esimerkki . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Loppupäätelmät</b>	<b>37</b>
	<b>Lähteet</b>	<b>38</b>



# 1 Johdanto

Monitavoiteoptimointi on optimointia, jossa halutaan minimoida tai maksimoida useaa asiaa samaan aikaan samoilla ehdoilla. Tällaisista tehtävistä harvoin saadaan kaikkien tavoitteiden suhteen optimaalista ratkaisua, joten tarvitaan Pareto-optimaalinen ratkaisu. Pareto-optimaalisuudella tarkoitetaan parasta mahdollista kompromissia. Jos jokin piste on Pareto-optimaalinen, ei ole olemassa toista pistettä, joka parantaisi yhden kohdefunktion arvoa ilman, että yhdenkään toisen kohdefunktion arvo ei huononisi. Yhdestä monitavoiteoptimointiongelmaasta voi tulla useita Pareto-optimaalisia ratkaisuja, joten jonkun on tehtävä päätös, mikä näistä ratkaisuista valitaan. Tämän takia monitavoiteoptimointiongelmissa tarvitaan päätöksentekijää, joka tekee päätöksen, mikä Pareto-optimaalinen piste valitaan. Päätöksentekijä voi olla ihminen, ryhmä ihmisiä tai kone. Tästä eteenpäin tutkielmassa oletetaan päätöksentekijän olevan yksi ihminen.

Tutkielman kolmannessa kappaleessa käsitellään erilaisia tapoja, miten päätöksentekijä voi olla mukana monitavoiteoptimointiongelman ratkaisemisessa. On olemassa erilaisia tapoja, miten päätöksentekijä tekee päätöksen. Matemaatikko voi laskea hänelle kaikki Pareto-optimaaliset ratkaisut valmiiksi, ja päätöksentekijä valitsee niistä hyötyfunktionsa mukaisen ratkaisun. Näitä kutsutaan a posteriori menetelmiksi ja esimerkiksi painokerroinmenetelmä on yksi tällaisista menetelmistä. Päätöksentekijä voi ilmaista ennen ongelman ratkaisemista matemaatikolle, millaiset ehdot hän haluaa ratkaisuun. Tällöin matemaatikko laskee ratkaisun näillä ehdoilla päätöksentekijälle. Tällaista tapaa kutsutaan a priori menetelmäksi. Tutkielmassa käydään läpi kolme tällaista menetelmää. Kolmas tapa on, että päätöksentekijä ja matemaatikko tekevät kokoaikaista yhteistyötä. Päätöksentekijältä kysytään mielipidettä ennen ongelman muodostamista sekä ratkaisuprosessin aikana ja lopuksi hän valitsee Pareto-optimaalisista pisteistä lopullisen ratkaisun. Tällaisia menetelmiä kutsutaan interaktiivisiksi.

Kun monitavoiteoptimointiongelmaan on saatu ratkaisuja, ja käytetään sellaista menetelmää, että ne esitetään päätöksentekijälle, pitää ottaa huomioon hänen matemaattinen osaamisensa. Päätöksentekijän päätöksentekoa helpottamaan voidaan tuottaa erilaisia visualisointeja ja havainnollistuksia. Päätöksentekijällä ei välttämättä ole matemaattista osaamista, jolloin hän tarvitsee apua Pareto-optimaalisten ratkaisujen tulkitsemisessa. Graafinen kaavio on yksi hyvä tapa tukea päätöksentekijää. Kirjallisuudessa on esitetty monia eri tapoja havainnollistaa Pareto-optimaalisuutta. Näitä tapoja esitellään tutkielman luvussa neljä. Mikä havainnollistustapa valitaan, riippuu suurilta osin päätöksentekijästä ja paljonko Pareto-optimaalisia ratkaisuja ollaan saatu. Graafisen havainnollistamisen toimivuus riippuu paljon myös päätöksentekijästä itsestään. Jotta kaaviot ovat toimivia, on niiden oltava selkeitä ja sisällettävä kaikki tarpeellinen tieto. Eri menetelmille voidaan tuottaa erilaisia graafisia havainnollistuksia. Tutkielmassa käsitellään kirjallisuudessa esitetyjä kuvia ja kaavioita, joilla Pareto-optimaalisia ratkaisuja on havainnollistettu.

Neljännessä kappaleessa esitetään epälineaarisen monitavoiteoptimoinnin esimerkki. Esimerkki on saatu WWW-NIMBUS ohjelmistosta. Ohjelmistosta saadaan valmiita havainnollistuksia ongelmasta. Havainnollistuksien avulla verrataan, miten ongelman Pareto-optimaaliset ratkaisut muuttuvat, kun muutetaan menetelmän sisäl-

täviä luokkia ja arvoja.

Havainnollistukset ovat hyvä tapa varmistaa päätöksentekijän ymmärrys Pareto-optimaalisista pisteistä. Näin saadaan varmemmin päätöksentekijän tavoittelema ratkaisu. On olemassa muitakin tapoja ratkaista monitavoiteoptimointiongelma ja havainnollistaa siitä saatuja ratkaisuja kuin ne, jotka tässä tutkielmassa esitellään. Tutkielman päälähteenä on toiminut Kaisa Miettisen kirja *Nonlinear Multiobjective Optimization* [11].



## 2 Määritelmiä

Käsitellään aluksi määritelmiä ja merkintöjä Miettisen (1999 [11]) mukaisesti. Aloitetaan määrittelemällä konvekssi funktio ja joukko (Miettinen, 1999 [11]).

Funktio  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on *konvekssi*, jos kaikille  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  pätee

$$f(\delta x_1 + (1 - \delta)x_2) \leq \delta f(x_1) + (1 - \delta)f(x_2), \text{ kaikilla } 0 \leq \delta \leq 1.$$

Joukko  $S$  on konvekssi, jos  $x_1, x_2 \in S$  ja  $\delta x_1 + (1 - \delta)x_2 \in S$  kaikille  $0 \leq \delta \leq 1$ .

Seuraavaksi määritellään funktion differentioituvuus (Miettinen, 1999 [11]).

Funktio  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on *differentioituva* pisteessä  $x^*$ , jos

$$f(x^* + d) - f(x^*) = \nabla f(x^*)^T d + \|d\| \epsilon(x^*, d),$$

missä  $\nabla f(x^*)$  on gradientti  $f$ :lle pisteessä  $x^*$  ja  $\epsilon(x^*, d) \rightarrow 0$  kun  $\|d\| \rightarrow 0$ .

Funktio  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on *kahdesti differentioituva* pisteessä  $x^*$  jos

$$f(x^* + d) - f(x^*) = \nabla f(x^*)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + \|d\|^2 \epsilon(x^*, d),$$

missä  $\nabla f(x^*)$  on gradientti ja symmetrinen  $n \times n$  matriisi  $\nabla^2 f(x^*)$  on *Hessen matriisi* funktiosta  $f$  pisteessä  $x^*$  ja  $\epsilon(x^*, d) \rightarrow 0$  kun  $\|d\| \rightarrow 0$ . Hessen matriisi kahdesti differentioituvasta funktiosta sisältää toisen asteen osittaisderivaatat, eli Hessen matriisi saa muodon:

$$\nabla^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Funktio  $f$  on *kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva* pisteessä  $x^*$ , jos kaikki sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia pisteessä  $x^*$ . Symmetrinen  $n \times n$  matriisi on *positiividefiniitti*, jos  $x^T M x > 0$  kaikille  $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ . (Miettinen, 1999 [11])

Funktio  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on *vahvasti vähenevä*, jos  $x^1$  ja  $x^2 \in \mathbb{R}^n$  sekä  $x_j^1 \leq x_j^2$  kaikille  $j = 1, \dots, n$  ja  $x_l^1 < x_l^2$  jollekin  $l$  pätee  $f(x^1) < f(x^2)$  (Miettinen, 1999 [11]).

### 2.1 Monitavoiteoptimointi

Monitavoiteoptimointi on yksi optimoinnin monista aloista. Monitavoiteoptimoinnissa optimoidaan samalla kertaa vähintään kahta eri kohdefunktiota. Ongelmaan kuuluu kohdefunktiot ja ehdot, jotka kohdefunktioiden täytyy toteuttaa. Monitavoiteoptimointiongelma muodostetaan seuraavalla tavalla (Miettinen, 1999 [11]):

$$\begin{aligned} & \text{minimoi } \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\} & (1) \\ & \text{sitte, että } x \in S, \end{aligned}$$

kun  $k > 1$  ja kohdefunktiot  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Joukko  $S$  on päätösvektori  $x$ :n epätyhjä sallittu alue.

Monitavoiteoptimointiongelmassa yleensä joko minimoidaan tai maksimoidaan kaikkia kohdefunktioita. Ongelmaan voidaan löytää ratkaisu, joka on optimaalinen kaikille kohdefunktiolle. Tällaisen ratkaisun löytäminen on kuitenkin erittäin harvinaista. Jos näin ei käy, etsitään Pareto-optimaaliset (*Pareto optimality*) ratkaisut.

Monitavoiteoptimointiongelma voi olla lineaarinen tai epälineaarinen. Epälineaariseksi ongelman tekee se, että vähintään yksi kohdefunktio on epälineaarinen. Monitavoiteoptimointiongelma on lineaarinen silloin, kun kaikki kohdefunktiot ovat lineaarisia. Monitavoiteoptimointiongelma on konvekksi, jos kaikki kohdefunktiot ja sallittu alue ovat konvekseja. (Miettinen, 1999 [11])

## 2.2 Pareto-optimaalisuus

Yhden tavoitteen optimoinnissa on vain yksi kohdefunktio, jolloin sille usein löydetään vähintään yksi optimaalinen ratkaisu. Monitavoiteoptimoinnissa on monta kohdefunktiota, jolloin harvemmin löydetään edes yhtä optimaalista ratkaisua, joka kävisi kaikille kohdefunktiolle. Siksi pyritäänkin löytämään usein Pareto-optimaalinen ratkaisu. Pareto-optimaalisuuden mukaan, jos ratkaisu on Pareto-optimaalinen, ei ole toista ratkaisua, joka parantaisi yhden kohdefunktion arvoa, kun muut kohdefunktiot pysyvät vähintään yhtä hyvinä (Miettinen, 1999 [11]). Seuraavaksi muotoillaan tälle tarkka määritelmä.

**Määritelmä 1.** (Miettinen, 1999 [11]) Päätösvektori  $x^* \in S$  on Pareto-optimaalinen, jos ei ole olemassa toista päätösvektoria  $x \in S$ , joka toteuttaisi ehdon  $f_i(x) \leq f_i(x^*)$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$  ja  $f_j(x) < f_j(x^*)$  vähintään yhdelle indeksille  $j$ .

Määritellään myös varsinainen Pareto-optimaalisuus.

**Määritelmä 2.** (Geoffrion, 1968 [6]) Päätösvektori  $x^*$  on varsinaisesti Pareto-optimaalinen, jos päätösvektori on Pareto-optimaalinen ja jos on olemassa luku  $M > 0$  niin, että jokaiselle  $f_i$  ja jokaiselle  $x \in S$ , jotka toteuttavat ehdon  $f_i(x) < f_i(x^*)$ , on olemassa ainakin yksi  $f_j$  niin, että  $f_j(x^*) < f_j(x)$  ja  $\frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)} \leq M$

Jos Pareto-optimaalisia ratkaisuja on paljon, kuten usein ratkaisujoukoissa on, kutsutaan sitä Pareto-joukoksi (*Pareto set*). Kun avaruudesta  $\mathbb{R}$  siirrytään avaruuteen  $\mathbb{R}^2$ , Pareto-joukkoa kutsutaan Pareto-pinnaksi (*Pareto front*). Monitavoiteoptimoinnissa käytetään myös heikosti Pareto-optimaalisia (*Weakly Pareto optimal*) ratkaisuja, koska niiden tuottaminen on usein helpompaa kuin Pareto-optimaalisten ratkaisujen tuottaminen. Pareto-optimaaliset ratkaisut muodostavat osajoukon heikosti Pareto-optimaalisista ratkaisuista. Varsinaisesti Pareto-optimaaliset ratkaisut muodostavat puolestaan osajoukon Pareto-optimaalisista ratkaisuista. (Miettinen, 1999 [11])

**Määritelmä 3.** (Miettinen, 2003 [12]) Piste  $x^* \in S$  on heikosti Pareto-optimaalinen, jos ei ole olemassa toista sallittua pistettä  $x \in S$  siten, että  $f_i(x) < f_i(x^*)$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$ .

Määritellään apuongelma

$$\text{minimoi } \sum_{i=1}^k f_i(x) \quad (2)$$

siten, että  $f_i(x) \leq f_i(\hat{x})$ , kaikille  $i = 1, \dots, k$ ,  
 $x \in S$ ,

missä  $\hat{x}$  on mikä tahansa vektori  $S$ :ssä. Merkitään optimaalista kohdefunktion arvoa  $\Phi(\hat{x})$ . (Miettinen, 1999 [11])

**Lemma 1.** (Miettinen, 1999 [11]) *Olkoon päätösvektori  $x^* \in S$  annettu. Vektori  $x^*$  on Pareto-optimaalinen, jos ja vain jos se on ratkaisu apuongelmaan (2) niin, että  $\Phi(x^*) = \sum_{i=1}^k f_i(x^*)$ .*

*Toisaalta, olkoon  $x^* \in S$  ratkaisu apuongelmaan (2). Silloin  $x^*$  on Pareto-optimaalinen ja  $f_i(x^*) \leq f_i(\hat{x})$ , kaikille  $i = 1, \dots, k$ .*

**Lemma 2.** (Miettinen, 1999 [11]) *Olkoon päätösvektori  $\hat{x} \in S$  annettu ja  $\Phi(\hat{x}) = -\infty$ . Silloin ratkaisu  $x^* \in S$  on Pareto-optimaalinen, jos ja vain jos apuongelman (2) ja sen duaaliuongelman välillä on duaaliaukko pisteessä  $x^*$ . Jos tällainen aukko on olemassa, optimaalinen ratkaisu apuongelmaan (2) on Pareto-optimaalinen.*

**Määritelmä 4.** (Miettinen, 2003 [13]) *Ideaalin kriteerivektorin (ideal criterion vector)  $z^*$  komponentit saadaan minimoimalla kukin kohdefunktio  $f_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) yksitellen*

$$\begin{aligned} &\text{minimoi } f_i(x) \\ &\text{siten, että } x \in S \end{aligned}$$

ja merkitsemällä kutakin funktion minimiarvoa  $z_i^*$ :llä.

Ideaalin kriteerivektorin avulla löydetään Pareto-optimaalisten ratkaisujen alaraja. Pareto-optimaalisten ratkaisujen ylärajat saadaan nadiirien kriteerivektoreiden  $z^{nad}$  avulla. Nadiiria kriteerivektoria ei yleensä voida laskea tarkasti, mutta sitä voidaan arvioida. Sen arvioimiseen käytetään arvotaulukkoa, joka muodostetaan muiden kohdefunktioiden arvoista pisteissä, jotka saatiin, kun laskettiin ideaalista kriteerivektoria. (Miettinen, 2003 [13])

### 3 Päätöksentekijä monitavoiteoptimoinnissa

Kaikki Pareto-optimaaliset ratkaisut ovat yhtä hyviä matemaattisesti. Silti kaikki ratkaisut eivät tuota yhtä hyvää käytännön tulosta. Silloin olisi hyvä olla olemassa joku, joka päättää, mikä ratkaisu otetaan käyttöön. Häntä kutsutaan päätöksentekijäksi (*Decision maker*). Päätöksentekijä voi olla ihminen tai ryhmä ihmisiä, joilla on tietoa aiheesta, mitä optimoidaan. Päätöksentekijällä oletetaan olevan käytössään skalaariarvoinen hyötyfunktio, jota hän pyrkii maksimoimaan. Hyötyfunktio sisältää hänen mielipiteensä siitä, mitä kohtaa painotetaan ratkaisussa ja mitä ratkaisun halutaan sisältävän.

Yleensä monitavoiteoptimoinnissa saadaan useita Pareto-optimaalisia ratkaisuja. Päätöksentekijällä olisi hyvä olla tietoa, mitä matemaattisella ongelmalla ja ongelmanratkaisijalla ei välttämättä ole. Tarkastellaan esimerkiksi tilannetta, että halutaan kuljettaa 20 ihmistä Turusta Lahteen maksimoiden asiakastytyväisyyttä ja minimoiden aikaa ja kustannuksia. Ongelmaan saadaan Pareto-optimaalisia ratkaisuja niin, että jossain on parempi asiakastytyväisyys, mutta korkeampi kustannus ja aika. Toisessa Pareto-optimaalisessa ratkaisussa voi olla pienempi kustannus ja lyhyempi aika, mutta myös huonompi asiakastytyväisyys. Päätöksentekijällä on tietoa ja taito valita Pareto-optimaalisista ratkaisuista tähän tilanteeseen paras. Näistä kolmesta tavoitteesta päätöksentekijällä on tiedossa, mitä oikeasti halutaan painottaa eniten. Kun ollaan saatu matemaattiset ratkaisut, ja päätöksentekijä on valinnut niistä tilanteelle parhaimman, päästään lopulliseen ratkaisuun (*Final solution*).

Päätöksentekijä voi olla mukana monessa kohtaa ongelmanratkaisutilannetta. Yllä olevassa esimerkissä, päätöksentekijä oli mukana, kun ongelma oli ratkaistu. Tällöin oltiin käytetty a posteriori menetelmiä (*A Posteriori Methods*). Jos päätöksentekijä on mukana ennen ongelmanratkaisua, käytetään a priori menetelmiä (*A Priori Methods*). Päätöksentekijältä voidaan myös kysyä mielipidettä ja tietoa kesken ongelmanratkaisun. Tällöin käytetään interaktiivisia menetelmiä (*Interactive Methods*).

Lopputulokseen on suuri vaikutus sillä, kuka on päätöksentekijänä. Päätöksentekijällä on omien mielipiteiden mukaiset hyötyfunktiot (*value function*), joiden mukaan hän tekee päätökset. Vaikka kahdella eri päätöksentekijällä olisi sama tietämys ja kokemus aiheesta, voi heillä silti olla erilaiset hyötyfunktiot. Tällöin kaksi eri päätöksentekijää samoilla tiedoilla päätyvät eri Pareto-optimaalisiin ratkaisuihin. Lopulliseen ratkaisuun päädytään siis päätöksentekijän mieltymyksen mukaan. (Miettinen, 1999 [11])

#### 3.1 A posteriori menetelmät

A posteriori menetelmissä päätöksentekijä saa Pareto-optimaaliset ratkaisut, jonka jälkeen hän päättää tilanteelle parhaan Pareto-optimaalisen ratkaisun. Koska tutkitaan epälineaarista optimointia, osa menetelmistä antaa Pareto-optimaalisia ratkaisuja vain, jos tehtävät ovat konvekseja. Epäkonvekseja ongelmia niillä ei voida ratkaista.

On olemassa monia eri menetelmiä, joita voidaan käyttää a posteriori menetelmien tapaan. Menetelmiä, joissa ei tarvita päätöksentekijää, voidaan muokata

a posteriori menetelmäksi lisäämällä metriikoihin painokertoimet. Näitä kutsutaan painotetun metriikan menetelmiksi. Voidaan käyttää myös saatavuusfunktioita, jossa liikutetaan referenssipistettä. (Miettinen, 1999 [11]) Näistä löytyy lisätietoa lähteistä Miettinen 1999 [11] tai Miettinen 2003 [13]. Käsitellään seuraavaksi kaksi perusmenetelmää a posteriori menetelmistä.

### 3.1.1 Painokerroinmenetelmä

Gass ja Saaty (1955 [5]) ovat esitelleet painokerroinmenetelmän, jonka ideana on muuttaa monitavoiteoptimointiongelman kohdefunktiot painokertoimen avulla summaksi. Jokaiselle kohdefunktiolle määrätään tietty painokerroin  $w_i$ . Näin ongelma saadaan muutettua yhden tavoitteen optimointiongelmaksi. Ongelma on muotoa

$$\begin{aligned} & \text{minimoi } \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) & (3) \\ & \text{sitte, että } x \in S, \end{aligned}$$

missä  $w_i \geq 0$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$  ja  $\sum_{i=1}^k w_i = 1$ . Ongelma voidaan ratkaista millä tahansa yksitavoitteisen optimoinnin ratkaisumenetelmällä. Painokertoimia  $w_i$  varioimalla voidaan tuottaa erilaisia Pareto-optimaalisia ratkaisuja. Jos kohdefunktioiden arvoja ei skaalata samaan suuruusluokkaan, voi painokertoimen vaikutus heikentyä. (Miettinen, 1999 [11]) Seuraavat lemmat takaavat painokerroinmenetelmän antaman ratkaisun Pareto-optimaalisuuden:

**Lemma 3.** (Miettinen, 1999 [11]) *Ratkaisu painokerroinongelmaan (3) on heikosti Pareto-optimaalinen.*

**Lemma 4.** (Miettinen, 1999 [11]) *Ratkaisu painokerroinongelmaan (3) on Pareto-optimaalinen, jos painokerroin on positiivinen eli  $w_i > 0$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$ .*

**Lemma 5.** (Miettinen, 1999 [11]) *Yksikäsitteinen ratkaisu painokerroinongelmaan (3) on Pareto-optimaalinen.*

Kirjan Miettinen, 1999 [11] sivuilta 78-79 löytyy todistukset yllä oleviin lemmoihin 3, 4 ja 5. Lemman 4 perusteella voidaan todeta, että painokerroinmenetelmän ratkaisu on aina Pareto-optimaalinen, kun  $w_i > 0$ . Menetelmän avulla löydetään kaikki Pareto-optimaaliset ratkaisut, kunhan tehtävät ovat konvekseja. Painokerroinmenetelmällä ei siis aina saada ratkaistua ongelmia, jotka eivät ole konvekseja. Tämä johtuu siitä, että kaikkia Pareto-optimaalisia ratkaisuja ei välttämättä löydetä millään painokertoimilla. (Miettinen, 2003 [13])

**Lemma 6.** (Miettinen, 1999 [11]) *Olko monitavoiteoptimointiongelma konvekksi. Jos  $x^* \in S$  on Pareto-optimaalinen, on olemassa painokertoimet, jolla  $x^*$  on ratkaisu ongelmaan (3).*

Lemman 4 tulosta voidaan parantaa niin, että ratkaisun voidaan osoittaa olevan varsinaisesti Pareto-optimaalinen.

**Lemma 7.** (Miettinen, 1999 [11]) *Ratkaisu painokerroinongelmaan (3) on varsinaisesti Pareto-optimaalinen, jos kaikki painokertoimet ovat positiivisia.*

*Todistus.* (Miettinen, 1999 [11]) Olkoon  $x^* \in S$  ratkaisu painokerroinongelmaan positiivisilla painokertoimilla. Lemmassa 4 todettiin, että ratkaisu on Pareto-optimaalinen. Nyt täytyy osoittaa, että ratkaisu  $x^*$  on varsinaisesti Pareto-optimaalinen parametrilla  $M = (k-1) \max_{i,j} (\frac{w_j}{w_i})$ .

Oletetaan, että  $x^*$  ei ole varsinaisesti Pareto-optimaalinen. Nyt jollekin  $i$  ja  $x \in S$  on voimassa  $f_i(x^*) > f_i(x)$ . Näin ollen pätee

$$f_i(x^*) - f_i(x) > M(f_j(x) - f_j(x^*))$$

kaikille  $j$ , joille  $f_j(x^*) < f_j(x)$ . Nyt voidaan kirjoittaa

$$f_i(x^*) - f_i(x) > (k-1) \frac{w_j}{w_i} (f_j(x) - f_j(x^*)).$$

Kerrotaan molemmat puolet vakiolla  $\frac{w_i}{k-1} > 0$ , saadaan

$$\frac{w_i}{k-1} (f_i(x^*) - f_i(x)) > w_j (f_j(x) - f_j(x^*)) \quad (> 0 \geq w_l (f_l(x) - f_l(x^*))),$$

missä  $l$  on eri kuin indeksit  $i$  ja  $j$ . Tämän jälkeen voidaan summata kaikki  $i \neq j$ . Saadaan

$$w_i (f_i(x^*) - f_i(x)) > \sum_{j=1, j \neq i}^k (w_j (f_j(x) - f_j(x^*))),$$

mikä tarkoittaa, että

$$\sum_{j=1}^k w_j f_j(x^*) > \sum_{j=1}^k w_j f_j(x).$$

Saatiin ristiriita, mikä tarkoittaa sitä, että  $x^*$  on varsinaisesti Pareto-optimaalinen ratkaisu. □

Painokerroinmenetelmä on yksinkertainen menetelmä, jonka avulla saadaan Pareto-optimaalinen ratkaisu. Painokertoimien on tällöin oltava positiivisia tai ratkaisun yksikäsitteinen. Pareto-optimaalisten ratkaisujen joukko saadaan, kun ratkaistaan tehtävää erilaisilla painokertoimilla  $w_i$ . Menetelmän heikkous on, että kaikki Pareto-optimaaliset ratkaisut voidaan löytää vain, jos tehtävä on konvekksi. Päätöksentekijä päättää lopullisen ratkaisun saaduista Pareto-optimaalisista ratkaisuisista. Lopullisen ratkaisun valinta ei ole helppoa, koska useasti Pareto-optimaalisia ratkaisuja tulee paljon. Päätöksentekijänkin voi olla vaikea päättää, mikä ratkaisu valitaan, vaikka hänellä olisikin asiasta tietoutta. (Miettinen, 1999 [11])

### 3.1.2 Rajoiteyhtälömenetelmä

Haines & al esittivät rajoiteyhtälömenetelmän (1971, [7]). Rajoiteyhtälömenetelmän tarkoituksena on valita yksi kohdefunktioista, joka jää ainoaksi kohdefunktioksi. Lopuille kohdefunktioille asetetaan ylärajat, joita merkitään  $\epsilon_j$  ja ne siirretään rajoitteiksi. Kohdefunktioista voi siis valita minkä tahansa. On kuitenkin tärkeää, että lopuille kohdefunktioille onnistutaan löytämään paikkaansapitävät ylärajat. (Miettinen, 1999 [11])

Ongelma saadaan muotoon: (Miettinen, 1999 [11])

$$\begin{aligned} & \text{minimoi } f_l(x) && (4) \\ & \text{sitien, että } f_j(x) \leq \epsilon_j, \text{ kaikilla } j = 1, \dots, k, j \neq l, \\ & x \in S, \end{aligned}$$

missä  $l \in \{1, \dots, k\}$ . Kuten painokerroinmenetelmällä myös rajoiteyhtälömenetelmällä saadaan monitavoiteoptimointiongelma muunnettua yhden tavoitteen optimointiongelmaksi, joka on usein helpompi ratkaista. Ongelman voi ratkaista millä tahansa yhden tavoitteen optimointiongelman ratkaisumenetelmällä. Seuraavien lemmaojen perusteella ratkaisu on Pareto-optimaalinen:

**Lemma 8.** (Miettinen, 1999 [11]) *Ratkaisu rajoiteyhtälöongelmaan (4) on heikosti Pareto-optimaalinen.*

*Todistus.* (Miettinen, 1999 [11]) Olkoon  $x^* \in S$  ratkaisu rajoiteyhtälöongelmaan (4). Oletetaan, että  $x^*$  ei ole heikosti Pareto-optimaalinen. On oltava jokin muu ratkaisu  $x \in S$ , jolle  $f_i(x) < f_i(x^*)$  kaikille  $i = 1, \dots, k$ .

Nyt siis  $f_j(x) < f_j(x^*) \leq \epsilon_j$  kaikille  $j = 1, \dots, k, j \neq l$ . Siis  $x$  on rajoiteyhtälöongelman sallittu ratkaisu. Lisäksi  $f_l(x) < f_l(x^*)$  on ristiriita oletukselle, että  $x^*$  olisi ratkaisu rajoiteyhtälöongelmaan. Siis  $x^*$  on oltava heikosti Pareto-optimaalinen.  $\square$

**Lemma 9.** (Miettinen, 1999 [11]) *Päätösvektori  $x^* \in S$  on Pareto-optimaalinen, jos se on ratkaisu rajoiteyhtälöongelmaan (4) kaikille  $l = 1, \dots, k$ , missä  $\epsilon_j = f_j(x^*)$  kaikilla  $j = 1, \dots, k, j \neq l$ .*

**Lemma 10.** (Miettinen, 1999 [11]) *Piste  $x^* \in S$  on Pareto-optimaalinen, jos se on yksikäsitteinen ratkaisu rajoiteyhtälöongelmaan (4) jollakin  $l$  ja  $\epsilon_j = f_j(x^*)$  kaikilla  $j = 1, \dots, k, j \neq l$ .*

**Lemma 11.** (Miettinen, 1999 [11]) *Yksikäsitteinen ratkaisu rajoiteyhtälöongelmaan (4) on Pareto-optimaalinen mille tahansa annetulle ylärajavektorille  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{l-1}, \epsilon_{l+1}, \dots, \epsilon_k)$ .*

Yllä esiteltyjen lemmaojen 9, 10 ja 11 todistukset löytyvät kirjasta Miettinen 1999 [11]. Päätöksentekijälle tarvitaan Pareto-optimaalisten ratkaisujen joukko. Se saadaan, kun vaihdetaan minimoitavaa kohdefunktiota ja rajoitefunktiota. Joukon laskeminen voi olla hankalaa, koska rajoitteet muuttuvat koko ajan. Lemman 9 mukaan rajoiteyhtälöongelma (4) on ratkaistava  $k$  kertaa. Menetelmä vaatii siis monia eri ongelmia, ja niille monia eri ratkaisuja ennen kuin saadaan Pareto-optimaalisten ratkaisujen joukko.

Rajoiteyhtälömenetelmän hankaluus on valita tarpeeksi hyvät ylärajat kohdefunktiolle. Ongelma pitää muodostaa oikein, jotta menetelmä toimii. Rajoiteyhtälömenetelmä on kuitenkin helpompi hahmottaa kuin painokerroinmenetelmä. Sen takia se on suositumpi, vaikka rajoitteet lisääntyvät ja kohdefunktioiden ylärajoja voi olla hankala löytää.

Käydään vielä läpi kaksi huomautusta, joita tarvitaan myöhemmässä kohtaa tutkielmaa, liittyen rajoiteyhtälömenetelmään. Sallittu alue  $S$  määritellään seuraavasti  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, m\}$ . Huomautuksissa  $g_j$  on epäyhtälörajoitefunktio, joka on aktiivinen pisteessä  $x^*$ , jos  $g_j(x^*) = 0$ . (Miettinen, 1999 [11])

**Huomautus 1.** (Miettinen, 1999 [11]) *Karush-Kuhn-Tuckerin välttämätön optimaalisuusehto rajoiteyhtälöongelmalle.* Olkoon kohdefunktio ja rajoitteet differentioituvia pisteessä  $x^* \in S$ . Oletetaan myös, että piste  $x^*$  on säännöllinen (*regular*), eli kaikkien aktiivisten rajoitteiden gradientit ovat lineaarisesti riippumattomia. Välttämätön ehto sille, että  $x^*$  on rajoiteyhtälöongelman (4) ratkaisu on se, että on olemassa vektorit  $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}^{k-1}$  ja  $0 \leq \mu \in \mathbb{R}^m$  ja seuraavat ehdot toteutuvat

$$1. \nabla f_l(x^*) + \sum_{i=1, i \neq l}^k \lambda_i \nabla(f_i(x^*) - \epsilon_i) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$2. \lambda_i(f_i(x^*) - \epsilon_i) = 0, \text{ kaikille } i \neq l, \mu_j g_j(x^*) = 0, \text{ kaikille } i = 1, \dots, m.$$

**Huomautus 2.** (Miettinen, 1999 [11]) *Toisen kertaluvun riittävä optimaalisuusehto rajoiteyhtälöongelmalle.* Olkoon kohdefunktio ja rajoitteet kahdesti differentioituvia pisteessä  $x^* \in S$ . Oletetaan, että piste  $x^*$  on säännöllinen. Riittävä ehto sille, että  $x^*$  on rajoiteyhtälöongelman (4) ratkaisu on, että on olemassa vektorit  $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}^{k-1}$  ja  $0 \leq \mu \in \mathbb{R}^m$ , joilla huomautuksen 1 optimaalisuusehdot täyttyvät ja Lagrangen funktion Hessen matriisi

$$\nabla^2 f_l(x^*) + \sum_{i=1, i \neq l}^k \lambda_i \nabla^2(f_i(x^*) - \epsilon_i) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla^2 g_j(x^*)$$

on positiividefiniitti joukossa  $\{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_j(x^*)^T d = 0 \text{ kaikille } j \text{ siten, että } \mu_j > 0\}$ .

## 3.2 A priori menetelmät

A priori menetelmissä päätöksentekijä on mukana ratkaisuprosessissa ennen ongelman ratkaisua. Hänen tehtävänä on ilmaista mielipiteet ja toiveet ennen kuin ongelma on muodostettu kokonaan. Matemaatikko, joka laatii ongelman, ottaa päätöksentekijän toiveet huomioon jo tässä vaiheessa. Päätöksentekijällä oletetaan olevan tiedossa hänen hyötyfunktionsa. Ongelmaksi a priori menetelmissä tulee se, että päätöksentekijällä ei ole välttämättä tarpeeksi tietoa ongelmasta ennen ratkaisuprosessin aloittamista. Hän ei tiedä, kuinka ongelma toimii ja miten se ratkaistaan. Näin päätöksentekijä ei välttämättä saa sellaista ratkaisua, mitä aluksi toivoi. (Miettinen, 1999 [11])



### 3.2.1 Hyötyfunktio menetelmä

Hyötyfunktio menetelmässä, jonka esitteli Rosenthal (1985, [18]), päätöksentekijän on tiedettävä, ennen ongelman muodostamista, tarkat matemaattiset ehdot hyötyfunktioille  $U : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ . Tämän jälkeen voidaan muodostaa seuraavanlainen hyötyfunktio-ongelma (Miettinen, 1999 [11]):

$$\begin{aligned} & \text{maksimoi } U(f_1(x), \dots, f_k(x)) & (5) \\ & \text{sitte, että } x \in S. \end{aligned}$$

Ongelma saatiin taas yhden tavoitteen optimointiongelmaksiksi ja se voidaan ratkaista minkä tahansa yhden tavoitteen optimointiongelman tavoin. Lemman 12 perusteella ratkaisut ovat Pareto-optimaalisia (Miettinen, 1999 [11]):

**Lemma 12.** *Olkkoon hyötyfunktio  $U : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  vahvasti vähenevä. Oletetaan  $U$ :n saavuttavan maksimiarvonsa pisteessä  $z^* \in \mathbb{Z}$ . Silloin  $z^*$  on Pareto-optimaalinen.*

Ongelmaksi hyötyfunktio menetelmässä tulee se, että päätöksentekijän hyötyfunktioita ei tunneta eksplisiittisesti. Menetelmä toimii hyvin silloin, kun päätöksentekijä antaa validin hyötyfunktion. (Miettinen, 1999 [11])

### 3.2.2 Leksikaalinen optimointi

Leksikaalinen optimoinnin on esitellyt Fishburn (1974, [4]). Leksikaalisessa optimoinnissa halutaan päätöksentekijältä kohdefunktioiden järjestys niin, että tärkein kohdefunktio on ensimmäisenä. Kohdefunktiot halutaan ehdottomaan tärkeysjärjestykseen. Ratkaisu leksikaaliseen optimointiin haetaan niin, että tärkeintä kohdefunktiota minimoidaan monitavoiteoptimointiongelman alkuperäisillä rajoitteilla. Jos ratkaisu on yksikäsitteinen, pätee sama ratkaisu koko monitavoiteoptimointiongelmaan. Mutta jos ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, joudutaan minimoimaan seuraavaa kohdefunktiota monitavoiteoptimointiongelman rajoitteilla. Näihin rajoitteisiin täytyy lisätä uusi rajoite, jonka avulla varmistetaan ensimmäisen kohdefunktion pysyminen edellä saadussa arvossaan. Ratkaisun ollessa yksikäsitteinen, voidaan siis tyytyä siihen ja jos se ei ole yksikäsitteinen, minimoidaan seuraavaksi tärkeintä kohdefunktiota ja lisätään rajoite. Tätä jatketaan niin pitkään, kunnes löydetään yksikäsitteinen ratkaisu. (Miettinen, 1999 [11])

Leksikaalinen optimointiongelma voidaan muodostaa seuraavanlaisesti (Miettinen, 1999 [11]):

$$\begin{aligned} & \text{lex minimoi } f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x) & (6) \\ & \text{sitte, että } x \in S. \end{aligned}$$

Leksikaalisen optimointiongelman ratkaisu on Pareto-optimaalinen seuraavan lemmän perusteella.

**Lemma 13.** *(Miettinen, 1999 [11]) Leksikaalisella optimoinnilla saatu ratkaisu on Pareto-optimaalinen.*

*Todistus.* (Miettinen, 1999 [11]) Olkoon  $x^* \in S$  ratkaisu leksikaaliseen optimointiongelmaan. Oletetaan, että ratkaisu ei ole Pareto-optimaalinen. Silloin on olemassa sellainen piste  $x \in S$ , että  $f_i(x) \leq f_i(x^*)$  kaikille  $i = 1, \dots, k$  ja vähintään yhdelle  $j$  pätee erisuuruus, eli  $f_j(x) < f_j(x^*)$ .

Olkoon  $i = 1$ . Leksikaalisen menetelmän määritelmän mukaan,  $f_1$  saavuttaa miniminsä pisteessä  $x^*$ . Koska  $f_1(x) \leq f_1(x^*)$  niin ainut mahdollisuus on, että  $f_1(x) = f_1(x^*)$ .

Seuraavaksi joko löydetään yksikäsitteinen ratkaisu, tai optimoidaan leksikaalinen ongelma jokaiselle  $i = 1, \dots, k$ . Kun optimoidaan ongelma  $i = 1, \dots, k$ , huomataan, että  $f_2(x) = f_2(x^*)$ , kuten myös  $f_i(x) = f_i(x^*)$ , kaikille  $i = 1, \dots, k$ . Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että vähintään yksi epäyhtälöstä piti olla aito. Siispä,  $x^*$  on Pareto-optimaalinen. Jos leksikaalinen optimointi lopetetaan ennen kuin kaikki kohdefunktiot on käsitelty, ollaan löydetty yksikäsitteinen ratkaisu  $x^*$  kohdefunktiolle  $f_i$ . Nyt nähdään, että  $f_i(x) = f_i(x^*)$ . Tämä on puolestaan ristiriidassa sen kanssa, että ratkaisun piti olla yksikäsitteinen. Näin ollen  $x^*$  on Pareto-optimaalinen.  $\square$

Jos painokerroinmenetelmässä painokertoimet ovat eri suuruusluokkaa keskenään, vastaa se leksikaalista optimointia. Leksikaalisen optimoinnin haaste on kohdefunktioiden laittaminen tärkeysjärjestykseen. Se on päätöksentekijän ongelma, mutta jos päätöksentekijä ei pysty määrittämään parhainta tärkeysjärjestystä, ei matemaatikko saa ongelmaa ratkaistua. Menetelmässä unohtuu myös helposti kohdefunktioiden merkityksiä. Jos ensimmäisellä kohdefunktiolla saadaan yksikäsitteinen ratkaisu, ei muita kohdefunktioita oteta edes huomioon. (Miettinen, 1999 [11])

### 3.2.3 Tavoiteoptimointi

Tavoiteoptimoinnissa, jonka on esitelleet Charnes & al (1955, [3]), halutaan määrittää kaikille kohdefunktioille tavoitetaso (*target level*). Sillä saadaan osoitettua jokaisen kohdefunktion arvolle haluttu taso. Kohdefunktion  $f_i$  tavoitetasoa merkitään  $\bar{z}_i$ , missä  $i = 1, \dots, k$ . Minimointiongelmien haluttu taso on muotoa:  $f_i(x) \leq \bar{z}_i$ . Maksimointiongelmien haluttu taso on muotoa:  $f_i(x) \geq \bar{z}_i$  (Miettinen, 2003 [13]). Halutaan löytää sallittu piste, joka on niin lähellä tavoitetasoa  $\bar{z}_i$  kuin mahdollista. Tavoitetaso on siis päätöksentekijän valitsema taso, joka on hänen mieltymystensä ja hyötyfunktionsa mukainen.

Jokaista tavoitetasoa vastaa minimoitava poikkeamamuuttuja (*deviational variable*)  $\delta_i$ . Poikkeamamuuttuja on halutun tason  $\bar{z}_i$  ja kohdefunktion  $f_i(x)$  erotus:  $\delta_i = \bar{z}_i - f_i(x)$ . Tehtävästä riippuen, poikkeamamuuttuja voi olla joko positiivinen tai negatiivinen, mutta se on aina reaaliarvoinen. Se voidaan kirjoittaa kahden positiivisen muuttujan erotuksena:  $\delta_i = \delta_i^- - \delta_i^+$ . Näiden kahden yhtälön avulla, voidaan haluttu taso kirjoittaa poikkeamamuuttujien avulla muotoon:  $\bar{z}_i = f_i(x) + \delta_i^- - \delta_i^+$ . Negatiivista poikkeamamuuttujaa merkitään  $\delta_i^-$  ja positiivista poikkeamamuuttujaa merkitään  $\delta_i^+$ . Jos kohdefunktioita minimoidaan on tavoite siis  $f_i(x) \leq \bar{z}_i$ . Tällöin riittää, että minimoidaan positiivista poikkeamamuuttujaa  $\delta_i^+$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$ .

Nyt on saatu monitavoiteoptimointiongelma, jonka kohdefunktiona ovat poikkeamamuuttujat. Ensimmäinen tapa, millä saadaan muunnettua monitavoiteoptimointiongelma yhden tavoitteen optimoinniksi on ottaa painokerroin  $w_i$  kohdefunk-

tioille, tätä kutsutaan painokerroinlähestymistavaksi (*Weighting approach*). Päätöksentekijä valitsee jokaiselle kohdefunktiolle painokertoimen kohdefunktion tärkeyden mukaan. Mitä suurempi painokerroin kohdefunktiolla on, sitä tärkeämpi kohdefunktion arvo on päätöksentekijälle. (Miettinen, 1999 [11]) Kun kaikilla kohdefunktiolla on painokerroin, otetaan termeistä summa ja muodostetaan seuraavanlainen yhden tavoitteen optimointiongelma (Miettinen, 1999 [11]):

$$\text{minimoi } \sum_{i=1}^k w_i |f_i(x) - \bar{z}_i| \quad (7)$$

siten, että  $x \in S$ .

Kun kohdefunktioihin on lisätty poikkeamamuuttujat saadaan yllä oleva ongelma (7) muunnettua painotetuksi tavoiteoptimointiongelmaksi (Miettinen, 1999 [11]):

$$\text{minimoi } \sum_{i=1}^k (w_i^- \delta_i^- + w_i^+ \delta_i^+) \quad (8)$$

siten, että  $f_i(x) + \delta_i^- - \delta_i^+ = \bar{z}_i$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$

$\delta_i^-, \delta_i^+ \geq 0$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$

$x \in S$ .

Kaikkien tavoitteiden ollessa  $f_i(x) \leq \bar{z}_i$ , saadaan ongelma vielä muotoon (Miettinen, 1999 [11]):

$$\text{minimoi } \sum_{i=1}^k w_i^+ \delta_i^+ \quad (9)$$

siten, että  $f_i(x) - \delta_i^+ \leq \bar{z}_i$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$

$\delta_i^+ \geq 0$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$

$x \in S$ ,

missä muuttujia ovat  $x$  ja  $\delta^+$ .

Tavoiteoptimoinnin voi yhdistää myös muihin optimointimenetelmiin. Leksikaalisessa lähestymistavassa (*Lexicographic approach*) päätöksentekijä määrittelee funktioille leksikaalisen tärkeysjärjestyksen tavoitetasojen lisäksi. Tämän jälkeen ongelma ratkaistaan alaluvussa 3.2.2 kuvatulla tavalla.

Kun painokerroin ja leksikaalinen lähestymistapa yhdistetään, saadaan yhdistetty lähestymistapa (*Combined approach*). Siinä useampi kohdefunktio voi kuulua samaan leksikaaliseen tärkeysluokkaan, ja jokaisessa vaiheessa painotettu summa näiden poikkeamamuuttujista minimoidaan. (Miettinen, 1999 [11]) Kaikkien tavoiteoptimointiongelmien ratkaisut ovat Pareto-optimaalisia seuraavan lemmän myötä:

**Lemma 14.** (Miettinen, 1999 [11]) *Painotetulla tai leksikaalisella tavoiteoptimoinnilla saatu ratkaisu on Pareto-optimaalinen, jos joko tavoitetasot muodostavat Pareto-optimaalisen referenssipisteen kaikille poikkeamamuuttujille  $\delta_i^-$  minimointiongelmassa ja  $\delta_i^+$  maksimointiongelmassa tai ratkaisujen arvot ovat positiivisia.*

Päätöksentekijän on siis kerrottava mielipiteensä, mikä on tärkeintä ja mitä painotetaan ennen kuin ongelmaa aletaan muodostamaan. Tavoiteoptimointia sovelletaan usein käytännönläheisiin ongelmiin.

### 3.3 Interaktiivisia menetelmiä

A priori ja a posteriori menetelmissä päätöksentekijä on mukana joko ennen tai jälkeen matemaattisen ongelman ratkaisua. Interaktiivisissa menetelmissä päätöksentekijä on mukana koko ongelmanmuodostus- ja ratkaisuvaiheen ajan. Jos päätöksentekijällä on aikaa ja sitoutuneisuutta ongelmaan, matemaatikko voi antaa monessa eri kohdassa vaihtoehtoja, joista päätöksentekijän on valittava hyötyfunktionsa mukaiset vaihtoehdot.

A posteriori menetelmien huono puoli on se, että niistä tulee todella paljon eri Pareto-optimaalisia ratkaisuja. Päätöksentekijän voi olla hankala löytää niistä itselleen paras vaihtoehto. Interaktiivisissa menetelmissä ei tuoteta niin paljoa Pareto-optimaalisia ratkaisuja, koska päätöksentekijä on mukana koko prosessin ajan. Näin turhia Pareto-optimaalisia ratkaisuja voidaan jättää pois jo kesken ongelmanratkaisun. Jos päätöksentekijän hyötyfunktio muuttuu kesken ongelmanratkaisun, interaktiivisissa menetelmissä sekin voidaan ottaa heti huomioon. A priori menetelmien huono puoli on se, että päätöksentekijällä ei välttämättä tunne tehtävää tarpeeksi tarkasti antaakseen tarvittavat tiedot ennen ratkaisuprosessia. Ongelma poistuu, jos käytetään interaktiivisia menetelmiä, koska päätöksentekijä on mukana koko prosessin ajan.

Päätöksentekijän rooli on interaktiivisissa menetelmissä suuri. Hän on mukana tehtävän laatimisessa ja ratkaisussa. Hänen on ymmärrettävä muuttujien ja parametrien merkitystä ja niiden välisiä yhteyksiä, jotta interaktiivista menetelmää voidaan käyttää. Päätöksentekijä on useimmiten mukana jokaisen ongelmanratkaisun välivaiheessa näyttämässä suuntaa, mihinpäin ratkaisua halutaan viedä. (Miettinen, 1999 [11])

Interaktiivisia menetelmiä on olemassa useita erilaisia. Seuraavaksi käydään läpi kolme interaktiivista menetelmää: ISWT, referenssipistemenetelmä ja NIMBUS menetelmä. Muita menetelmiä on muun muassa GUESS menetelmä, jossa ei tarvita erityisiä oletuksia. Näistä ja muista menetelmistä voi lukea lisää kirjasta Miettinen, 1999 [11] tai artikkelista Miettinen, Hakanen ja Podkopaev, 2016 [12].

#### 3.3.1 ISWT menetelmä

ISWT menetelmän (*Interactive surrogate worth trade-off*) on kehittänyt Chankong ja Haimes (1978, [1], 1983 [2]). Menetelmä on interaktiivinen menetelmä, missä maksimoidaan hyötyfunktioita. Tärkeä osa menetelmää on rajoiteyhtälömenetelmä, jolla aloitetaan ratkaisun hakeminen. Ratkaistava tehtävä on ongelman (4) mukainen. Menetelmän edetessä ratkaistaan monia rajoiteyhtälöongelmia, joiden ratkaisuista päätöksentekijä valitsee sen, joka on eniten hänen hyötyfunktionsa mukainen. Lemmojen 8, 9, 10 ja 11 mukaan tiedetään millaiset ratkaisut ovat Pareto-optimaalisia. Lemma

15 kertoo, millainen yhteys on vaihtosuhteilla ja Karush-Kuhn-Tucker-kertoimien välillä on.

**Lemma 15.** (Miettinen, 1999 [11]) Olkoon  $x^* \in S$  ratkaisu rajoiteyhtälöongelmaan (4), jollekin minimoidulle kohdefunktiolle  $f_l$ ,  $l = 1, \dots, k$ . Olkoot  $\lambda_i = \lambda_{li}$  kaikille  $i = 1, \dots, k$  ja  $j \neq l$ . Karush-Kuhn-Tucker-kertoimet vastaten rajoitteita  $f_i(x) \leq \epsilon_i$  kaikille  $i \neq l$ . Oletetaan, että seuraavat ehdot pätevät:

1.  $x^*$  on säännöllinen piste.
2. Huomautuksen 2 toisen kertaluvun riittävä optimaalisuusehto on voimassa.
3. Pisteessä  $x^*$  ei ole degeneroituja rajoitteita, eli kaikki Karush-Kuhn-Tucker-kertoimet ovat aidosti positiivisia.

Silloin vaihtosuhte (trade-off rate) on  $\frac{\partial f_l(x^*)}{\partial \epsilon_i} = -\lambda_{li}$  kaikille  $i = 1, \dots, k$  ja  $i \neq l$ .

Kun rajoiteyhtälömenetelmästä saadaan Pareto-optimaalisia pisteitä, otetaan käyttöön ISWT algoritmi. Seuraavat oletukset takaavat rajoiteyhtälömenetelmän tuottaman ratkaisun Pareto-optimaalisuuden (Miettinen, 1999 [11]):

1. Taustalla oleva hyötyfunktio  $U : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  on olemassa ja se on implisiittisesti päätöksentekijällä tiedossa. Lisäksi  $U$  on jatkuvasti differentioituva ja vahvasti vähenevä.
2. Kohdefunktio ja tehtävän rajoitefunktioit ovat kaksikertaa jatkuvasti differentioituvia.
3. Sallittu alue  $S$  on epätyhjä ja kompakti niin, että ääreellinen ratkaisu on olemassa jokaiselle mahdolliselle rajoiteyhtälöongelmalle.
4. Kaikkien lemmän 15 ehtojen on täytyttävä.

*ISWT algoritmi* (Miettinen, 1999 [11])

1. Valitaan kohdefunktio  $f_l$ , jota minimoidaan. Annetaan lopuille kohdefunktiioille ylärajat. Olkoon  $h = 1$ .
2. Ratkaistaan valitulle kohdefunktiolle  $f_l$  rajoiteyhtälöongelma (4), ja saadaan Pareto-optimaalinen ratkaisu  $x^h$ . Vaihtosuhteet saadaan Karush-Kuhn-Tucker kertoimen avulla lemmän 15 mukaisesti.
3. Vaihtosuhteita hyödyntäen kysytään päätöksentekijältä, mitä muutoksia kohdefunktioiden arvoissa hän kannattaa.
4. Jos tietyt lopetuskriteerit täytyvät, algoritmi lopetetaan. Päivitetään kohdefunktioiden ylärajoja perustuen päätöksentekijän kohdassa 3 antamiin vastauksiin. Ratkaistaan rajoiteyhtälötehtävä (4) uudestaan ja saadaan uusi Pareto-optimaalinen ratkaisu  $x^{h+1}$ . Asetetaan  $h = h + 1$  ja algoritmi suoritetaan uudestaan kohdasta 3.

Jos päätöksentekijä päättää, että algoritmin käyttö lopetetaan, on se yksi lopeuskriteereistä. Toinen kriteeri, joka lopettaa algoritmin, saadaan silloin kun vaihtosuhteet menevät nollian. Päätöksentekijä voi kuitenkin kumota toisen kriteerin, ja päättää jatkaa algoritmia johonkin toiseen suuntaan.

Algoritmissa päätöksentekijä vastaa kysymyksiin jokaisen iteraation jälkeen hyötyfunktionsa mukaisesti. Jos hän ei hyväksy ratkaisua, muutetaan kohdefunktioiden ylärajoja niin, että saadaan uusi ongelma aikaan.

Menetelmän toimivuudessa on paljon kyse siitä, kuinka päätöksentekijä ymmärtää algoritmin. Jos päätöksentekijän mielipiteet ovat ristiriidassa keskenään, vaikuttaa se tyydyttävän ratkaisun löytämiseen. Päätöksentekijän on siis vastattava algoritmin kysymyksiin jokaisen iteraation jälkeen, että menetelmä toimisi. Jos päätöksentekijä ei ymmärrä algoritmia, ei hän välttämättä kykene vastaamaan kysymyksiin johdonmukaisesti. (Miettinen, 1999 [11])

### 3.3.2 Referenssipistemenetelmä

Referenssipistemenetelmän esitti Wierzbicki (1980, [21]). Referenssipistemenetelmässä (*Reference point method*) päätöksentekijä valitsee jonkun referenssipisteen. Sen jälkeen matemaatikko laskee hänelle referenssipistettä lähimmän sallitun Pareto-optimaalisen ratkaisun. Lisäksi tuotetaan myös  $k$  kappaletta muita Pareto-optimaalisia ratkaisuja referenssipisteen läheltä. Näin varmistetaan, että päätöksentekijä saa kuvan Pareto-optimaalisten ratkaisujen joukosta. Jos päätöksentekijä ei löydä Pareto-optimaalisten ratkaisujen joukosta mieleistään ratkaisua, joutuu hän antamaan uuden referenssipisteen. Algoritmi pyöritetään uudestaan, ja sitä pyöritetään niin kauan kunnes päätöksentekijä löytää mieleisensä Pareto-optimaalisen ratkaisun. (Miettinen, 1999 [11])

Heikosti Pareto-optimaalinen ratkaisu voidaan generoida millä tahansa referenssipisteellä  $\bar{z} \in \mathbb{R}^k$  ratkaisemalla seuraava aputehtävä (Miettinen, 1999 [11]):

$$\begin{aligned} &\text{minimoi } \max_{i=1,\dots,k} [w_i(f_i(x) - \bar{z}_i)] && (10) \\ &\text{sitä, että } x \in S. \end{aligned}$$

Ennen kuin tehtävä ratkaistaan referenssipistealgoritmillä, annetaan päätöksentekijälle lisätietoa ongelmasta. Esitetään ideaalinen kriteerivektori ja nadiirisen kriteerivektorin approksimaatio. Niiden avulla päätöksentekijä saa paremman käsityksen Pareto-optimaalisten ratkaisujen arvojoukosta.

*Referenssipistealgoritmi* (Miettinen, 1999 [11])

1. Esitetään ideaalinen kriteerivektorit ja nadiirisen kriteerivektorin approksimaatio päätöksentekijälle. Asetetaan  $h = 1$ .
2. Pyydetään päätöksentekijää asettamaan referenssipiste  $\bar{z}^h \in \mathbb{R}^k$ , joka koostuu tavoitetasoista jokaiselle kohdefunktiolle.

3. Ratkaistaan aputehtävä (10) ja saadaan heikosti Pareto-optimaalinen ratkaisu  $x^h$  ja sitä vastaava kriteerivektori  $z^h = (f_1(x^h), \dots, f_k(x^h))$ . Esitetään kriteerivektori  $z^h$  päätöksentekijälle.
4. Lasketaan  $k$ :n verran muita Pareto-optimaalisia ratkaisuja. Ne saadaan ratkaisemalla aputehtävä (10) verrokkireferenssipisteellä  $\bar{z}(i) = \bar{z}^h + d^h e^i$ , missä  $d^h = \|\bar{z}^h - z^h\|$  ja  $e^i$  on  $i$ :s yksikkövektori kaikille  $i = 1, \dots, k$ .
5. Vaihtoehdot esitetään päätöksentekijälle. Jos hän hyväksyy yhden  $k+1$  ratkaisusta, vastaava  $x^h$  on lopullinen ratkaisu. Muussa tapauksessa päätöksentekijä määrää uuden referenssipisteen  $\bar{z}^{h+1}$  ja asetetaan  $h = h + 1$  ja toistetaan algoritmi kohdasta 3 eteenpäin. Toistetaan kohtia 3-5 niin pitkään, kunnes päätöksentekijä hyväksyy lopullisen ratkaisun.

Referenssipistemethodelmä on yleensä helposti ymmärrettävissä. Näin päätöksentekijän on helppo olla mukana menetelmän käytössä. Referenssipistemethodelmässä voidaan käyttää muitakin aputehtäviä kuin aputehtävää (10). Jos päätöksentekijä muuttaa hyötyfunktioitaan kesken ratkaisuprosessin, sillä ei ole vaikutusta ratkaisuun.

### 3.3.3 NIMBUS-menetelmä

NIMBUS-menetelmässä (*Nondifferentiable interactive multiobjective Bundle-based optimization system*), jonka on esittäneet Miettinen & Mäkelä (1995, [15]), matemaatikon ja päätöksentekijän kanssakäyminen on yritetty tehdä mahdollisimman helpoksi ja ymmärrettäväksi. Menetelmässä päätöksentekijä tutkii kohdefunktioiden arvoja, jotka on laskettu Pareto-optimaalisessa pisteessä  $x^h$ . Tämän jälkeen päätöksentekijä jakaa kohdefunktiot erilaisiin luokkiin, joita voi olla korkeintaan viisi. Luokat saadaan funktioiden  $f_i$  arvojen mukaan (Miettinen, 1999 [11]):

1. Luokassa on funktiot, joiden arvoja halutaan pienemmäksi, ( $i \in I^<$ ).
2. Luokassa on funktiot, joiden arvot halutaan pienentää tavoitetasolle  $\bar{z}_i^h$ , ( $i \in I^{\leq}$ ).
3. Luokassa on funktiot, joiden arvot ovat riittäviä tällä hetkellä ( $i \in I^=$ ).
4. Luokassa on funktiot, joiden arvot voivat kasvaa ylärajalle  $\epsilon_i^h$  asti ( $i \in I^>$ ).
5. Luokassa funktioiden arvot voivat vaihdella vapaasti ( $i \in I^{\diamond}$ )

Luokassa 2 päätöksentekijän on annettava tavoitetasot  $\bar{z}_i^h$ . Luokassa 2 kriteeri minimoidaan tavoitetasolle asti, jonka päätöksentekijä päättää (Miettinen & al, 2003 [14]). Luokassa 4 päätöksentekijän on annettava ylärajat  $\epsilon_i^h$ .

Luokittelun jälkeen muodostetaan ongelma, joka on skalaarinen optimointiongelma (Miettinen & al, 2003 [14]):

$$\begin{aligned} & \text{minimoi } \max_{i \in I^< j \in I^{\leq}} [w_i^h (f_i(x) - z_i^*), w_j^h \max[f_j(x) - \bar{z}_j^h, 0]] & (11) \\ & \text{sitien, ett\u00e4 } f_i(x) \leq f_i(x^h), \quad i \in I^< \cup I^{\leq} \cup I^= \\ & \quad f_i(x) \leq \epsilon_j^h, \quad i \in I^> \\ & \quad x \in S, \end{aligned}$$

miss\u00e4  $z_i^*$  on ideaalinen kriteerivektori.

Luokassa ( $i \in I^<$ ) merkit\u00e4\u00e4n  $w_i = \frac{1}{|z_i^*|}$  jos  $|z_i^*| > \delta$ , jollekin pienelle positiiviselle skalaarille  $\delta$ . Muuten merkit\u00e4\u00e4n  $w_i = 1$ .

**Lemma 16.** (Miettinen, 1999 [11]) *Skalaarisen optimointiongelman (11) ratkaisu on heikosti Pareto-optimaalinen, jos joukko  $I^<$  on ep\u00e4tyhj\u00e4.*

*Todistus.* (Miettinen, 1999 [11]) Merkit\u00e4\u00e4n skalaarin optimointiongelman (11) kohdefunktiota  $f(x)$ , jota minimoidaan. Sallittua aluetta merkit\u00e4\u00e4n  $\hat{S}$ . Olkoon  $x^*$  skalaarin optimointiongelman (11) optimiratkaisu joukoilla  $I^<$ ,  $I^{\leq}$ ,  $I^=$ ,  $I^>$  ja  $I^\circ$ , miss\u00e4  $I^< \neq \emptyset$ . T\u00e4ll\u00f6in  $f(x^*) \leq f(x)$  kaikille  $x \in \hat{S}$ .

Oletetaan, ett\u00e4  $x^*$  ei ole heikosti Pareto-optimaalinen. Siisp\u00e4 on olemassa sellainen vektori  $x^\circ \in S$ , ett\u00e4  $f_i(x^\circ) < f_i(x^*)$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$ . Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, ett\u00e4 jatkossa kaikki painokertoimet ovat positiivisia. Koska  $x^* \in \hat{S}$ , on  $f_i(x^\circ) < f_i(x^*) \leq f_i(x^h)$  kaikille  $i \in I^< \cup I^{\leq} \cup I^=$  ja  $f_i(x^\circ) < f_i(x^*) \leq \epsilon_i^h$  kaikille  $i \in I^>$ , niin my\u00f6s  $x^\circ \in \hat{S}$ . Koska  $z_i^* \leq f_i(x^\circ) < f_i(x^*)$  kaikille  $i \in I^< \neq \emptyset$ , on  $f_i(x^*) - z_i^* > 0$  kaikille  $i \in I^<$ . Painokerrointen positiivisuudesta seuraa t\u00e4ll\u00f6in, ett\u00e4  $w_i(f_i(x^*) - z_i^*) > 0$  kaikille  $i \in I^<$ .

Nyt

$$f(x^\circ) = \max_{i \in I^> j \in I^{\leq}} [w_i(f_i(x^\circ) - z_i^*), w_j \max[f_j(x^\circ) - \bar{z}_j^h, 0]].$$

Maksimi voidaan saavuttaa joko joukossa  $I^<$  tai joukossa  $I^{\leq}$  tai molemmissa. Joukossa  $I^<$ , jollekin  $i \in I^<$  saadaan

$$f(x^\circ) = w_i(f_i(x^\circ) - z_i^*) < w_i(f_i(x^*) - z_i^*) \leq f(x^*).$$

Joukossa  $I^{\leq}$  on kaksi vaihtoehtoa. Ensimm\u00e4inen on, ett\u00e4 jollekin  $j \in I^{\leq}$  ja kaikille  $i \in I^{\leq}$  p\u00e4tee

$$f(x^\circ) = w_j \max[f_j(x^\circ) - \bar{z}_j^h, 0] = 0 < w_i(f_i(x^*) - z_i^*) \leq f(x^*).$$

Toinen vaihtoehto on, ett\u00e4 jollekin  $j \in I^{\leq}$

$$f(x^\circ) = w_j \max[f_j(x^\circ) - \bar{z}_j^h, 0] = w_j(f_j(x^\circ) - \bar{z}_j^h) < w_j(f_j(x^*) - \bar{z}_j^h) \leq f(x^*).$$

Piste  $x^*$  ei siis voi olla ratkaisu ongelmaan (11). N\u00e4in ollen pisteen  $x^*$  on oltava heikosti Pareto-optimaalinen.  $\square$



Luokittelun jälkeen voidaan muodostaa vaihtoehtoisesti myös vektoriongelma, joka on muotoa (Miettinen, 1999 [11]):

$$\begin{aligned} & \text{minimoi } \{f_i(x) (i \in I^<), \max_{j \in I^{\leq}} [\max[f_j(x) - \bar{z}_j^h, 0]]\} & (12) \\ & \text{sitien, että } f_i(x) \leq f_i(x^h) \text{ kaikille } i \in I^=, \\ & f_i(x) \leq \epsilon_i^h \text{ kaikille } i \in I^>, \\ & x \in S. \end{aligned}$$

Vektoriongelma voidaan ratkaista esimerkiksi rajoiteyhtälömenetelmällä, painokerroinmenetelmällä, tavoiteoptimoinnilla tai leksikaalisella optimoinnilla.

**Lemma 17.** (Miettinen, 1999 [11]) *Pareto-optimaalinen ratkaisu vektoriongelmaan (12) on heikosti Pareto-optimaalinen, jos joukko  $I^<$  on epätyhjä.*

*NIMBUS-algoritmi* (Miettinen, 1999 [11])

1. Valitaan aloituspiste  $x \in \mathbb{R}^n$  ja projisoidaan se sallittuun joukkoon ratkaisemalla apuongelma

$$\begin{aligned} & \text{minimoi } \max[0, g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)] \\ & \text{sitien, että } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Merkitään saatua pistettä  $x^0$ . Seuraavaksi lasketaan sen heikosti Pareto-optimaalinen vastine  $x^1$  asettamalla  $I^< = \{1, \dots, k\}$  ja ratkaisemalla ongelma (11) tai (12). Asetetaan  $h = 1$ .

2. Päätöksentekijää pyydetään jakamaan kohdefunktiot luokkiin  $I^<$ ,  $I^{\leq}$ ,  $I^=$ ,  $I^>$  ja  $I^\circ$  pisteessä  $z^h = (f_1(x^h), \dots, f_k(x^h))$ . Kumpikaan yhdisteistä  $I^< \cup I^{\leq}$  ja  $I^= \cup I^> \cup I^\circ$  eivät ole tyhjiä. Jos jompi kumpi yhdisteistä on tyhjä, voidaan suoraan siirtyä kohtaan 8.
3. Lasketaan  $\hat{x}^h$  ratkaisemalla ongelma (11) tai (12). Jos  $\hat{x}^h = x^h$  kysytään päätöksentekijältä, haluaako hän kokeilla toista luokittelua, jos ei halua siirrytään kohtaan 8. Jos hän haluaa, asetetaan  $x^{h+1} = x^h$ ,  $h = h+1$  ja siirrytään kohtaan 2.
4. Uusi ratkaisu on  $\hat{x}^h$ . Merkitään  $\hat{z}^h = (f_1(\hat{x}^h), \dots, f_k(\hat{x}^h))$ . Päätöksentekijälle esitetään  $\hat{z}^h$  ja  $z^h$ . Jos päätöksentekijä valitsee näistä ratkaisun  $z^h$ , asetetaan  $x^{h+1} = x^h$  ja  $h = h+1$  sekä siirrytään kohtaan 2. Jos päätöksentekijä haluaa vaihtoehdot väliltä  $z^h$  ja  $\hat{z}^h$ , asetetaan  $d^h = \hat{x}^h - x^h$  ja siirrytään kohtaan 6.
5. Päätöksentekijä valitsi vaihtoehdon  $\hat{z}^h$ . Jos  $I^< \neq \emptyset$ , asetetaan  $x^{h+1} = \hat{x}^h$ ,  $h = h+1$  ja siirrytään kohtaan 2. Muuten varmistetaan heikko Pareto-optimaalisuus asettamalla  $I^< = \{1, \dots, k\}$  ja ratkaistaan ongelma (11) tai (12). Olkoon ratkaisu  $\tilde{x}^h$ . Asetetaan  $x^{h+1} = \tilde{x}^h$  ja  $h = h+1$  ja siirrytään kohtaan 2.

6. Päätöksentekijä valitsee haluamansa vaihtoehtojen lukumäärän  $P$ . Lasketaan välipisteet  $x^h + t_j d^h$ ,  $j = 2, \dots, P - 1$ , missä  $t_j = \frac{j-1}{P-1}$  ja varmistetaan niiden heikko Pareto-optimaalisuus, kuten kohdassa 5.
7. Esitetään kaikki  $P$  vaihtoehtoa päätöksentekijälle ja hän valitsee niistä parhaan. Merkitään vastaava päätösvektoria  $x^{h+1}$  ja asetetaan  $h = h + 1$ . Jos päätöksentekijä haluaa vielä jatkaa, siirrytään kohtaan 2.
8. Tarkistetaan  $x^h$ :n Pareto-optimaalisuus ratkaisemalla apuongelma (2), missä  $\hat{x} = x^h$ . Olkoon ratkaisu  $x$ .
9. Algoritmi lopetetaan loppuratkaisuun  $x$ .

Moneen muuhun interaktiiviseen menetelmään verrattuna NIMBUS-menetelmässä päätöksentekijän luokittelu ja parametrien arvojen antaminen ei vaikuta liaksi ratkaisun onnistumiseen. Päätöksentekijä voi vaihtaa luokittelua algoritmin edetessä tai silloin, jos ratkaisu ei ole toivotunlainen. Päätöksentekijän on myös helpompi omaksua NIMBUS-menetelmä, koska kysymykset eivät välttämättä ole niin haastavia. (Miettinen, 1999 [11])

## 4 Graafinen havainnollistaminen

Päätöksentekijällä on tieto asiasta, jota optimoidaan, mutta hän ei välttämättä saa tehtyä päätöstä pelkkien Pareto-optimaalisten ratkaisujen avulla. Matemaatikon olisikin tästä syystä tuotettava Pareto-optimaaliset ratkaisut muotoon, josta päätöksentekijä voi valita lopullisen ratkaisun. Yksi helpoimmista tavoista on tuottaa saaduista Pareto-optimaalisista ratkaisuista graafinen kuva tai kaavio. Ratkaisua voidaan havainnollistaa päätöksentekijälle erilaisten diagrammien avulla.

Havainnollistamista käytetään vain ymmärtämisen helpottamiseksi. Jos päätöksentekijälle annetaan vain lista Pareto-optimaalisista ratkaisuista, voi hän valita erilaisen ratkaisun, kuin alunperin ajatteli. Hänellä on omat tietonsa ja mieltymyksensä, millainen ratkaisun kuuluu olla. Listasta voi jäädä huomaamatta helpommin ratkaisu, joka olisi parempi tai tietämyksen puute voi jättää paremman ratkaisun huomiotta. Kun päätöksentekijälle annetaan ratkaisut graafisessa muodossa, on päätöksentekijän helpompi nähdä kaikkien ratkaisujen keskinäiset suhteet. (Miettinen & Lotov, 2008 [10])

Graafisen havainnollistamisen olisi hyvä olla tehokas. Tarvitaan ehtoja, jotka täyttyessään havainnollistaminen on tehokasta. Miettinen kuvailee ehtoja seuraavasti (Miettinen & Lotov, 2008 [10])

1. Yksinkertaisuus. Havainnollistamisen pitää olla heti ymmärrettävissä.
2. Pysyvyys. Havainnollistuksen pitäisi pysyä katsojan mielessä tarpeeksi pitkään.
3. Valmius. Havainnollistuksessa on näyttävä kaikki tarpeellinen informaatio.

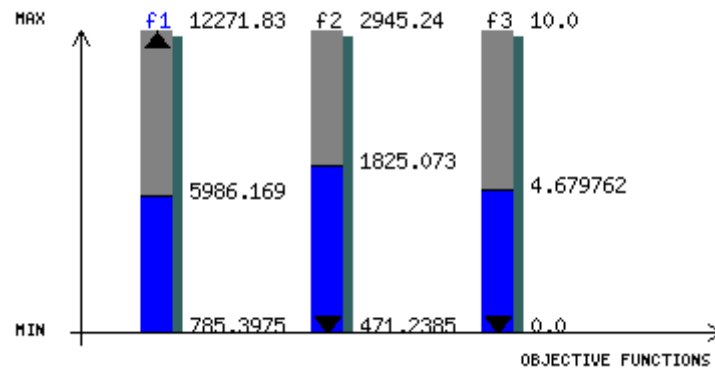
Kun havainnollistus on tehokas, on ratkaisu kiinni vain päätöksentekijän mieltymyksestä. Päätöksentekijä voi tarvittaessa palata havainnollistuksiin. Hänelle on annettu parhaimmat vaihtoehdot valita lopullinen ratkaisu. On monia eri tapoja havainnollistaa Pareto-optimaalisuutta. Havainnollistuksen on oltava päätöksentekijälle helposti ymmärrettävää.

Väreillä voi olla suuri vaikutus havainnollistuksen ymmärtämisessä. Suurikokoisien kaavioiden tulkitsemisessä voi olla hyödyksi, että tärkeimmät asiat ovat korostettuina jollakin värillä. Voidaan myös käyttää useita erilaisia värejä kaavion tekemiseen. Väreillä voi olla myös haittavaikutuksia. Jos päätöksentekijällä on omia mielipiteitä väreistä, esimerkiksi tykkää sinisestä ja kammoksuu punaista, voi tämä vaikuttaa hänen päätökseensä. (Miettinen & Lotov, 2008 [10])

### 4.1 Erilaisia havainnollistamiskeinoja

On monia eri tapoja havainnollistaa Pareto-optimaalisia ratkaisuja ja aluetta. Tässä luvussa käsitellään, millaisia visualisointeja on mahdollista tehdä päätöksentekijälle ja millaisia havainnollistuksia kirjallisuudessa on tehty.

Yksi tapa havainnollistaa Pareto-optimaalista aluetta on käyttää pylväsdiagrammia tai histogrammia (*Bar charts*). Kuvassa 1 nähdään kohdefunktioiden  $f_1$ ,  $f_2$  ja



Kuva 1: Pylväsdiagrammi Pareto-optimaalisesta ratkaisusta. Kuvan lähteenä: [www.nimbus.it.jyu.fi](http://www.nimbus.it.jyu.fi) [17] .

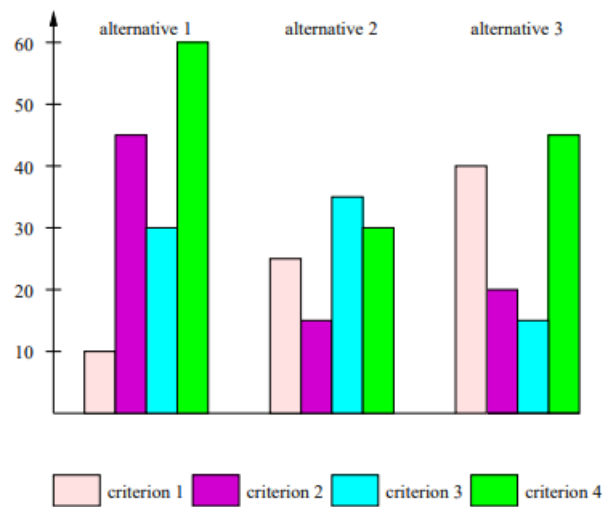
$f_3$  Pareto-optimaaliset alueet, sekä niille ratkaistu yksi Pareto-optimaalinen ratkaisu. Kuvassa 1 nadiirin kriteerivektorin avulla on saatu Pareto-optimaalisten ratkaisujen ylärajat, jotka on  $f_1$ :lle 12271,83,  $f_2$ :lle 2945,24 ja  $f_3$ :lle 10,0. Alarajat ollaan saatu ideaalisen kriteerivektorin avulla, jotka on  $f_1$ :lle 785,3975,  $f_2$ :lle 471,2385 ja  $f_3$ :lle 0. Kuvassa 2 on esitelty neljä kohdefunktiota ja kolme eri Pareto-optimaalista ratkaisua. Jokaisen ratkaisun kohdalla on kohdefunktioiden arvot merkittynä omilla väreillään.

Päätöksentekijälle voidaan antaa pylväsdiagrammeja, joista näkyy Pareto-optimaalisia ratkaisuja. Päätöksentekijä voi tehdä vertailun diagrammien pohjalta, ja antaa lopullisen päätöksensä valittavasta ratkaisusta. Pylväsdiagrammeja voi olla monenlaisia. Kuvissa 1 ja 2 on esitetty kaksi erilaista pylväsdiagrammia. Diagrammit voivat olla myös kolmiulotteisia, vaakatasossa tai sivuittain. Pylväsdiagrammeista voi periaattessa tehdä millaisia vain, tärkeintä kuitenkin on, että pylväsdiagrammit ovat helposti ymmärrettäviä, koska päätöksentekijän on kyettävä tulkitsemaan pylväsdiagrammeja myös itsenäisesti.

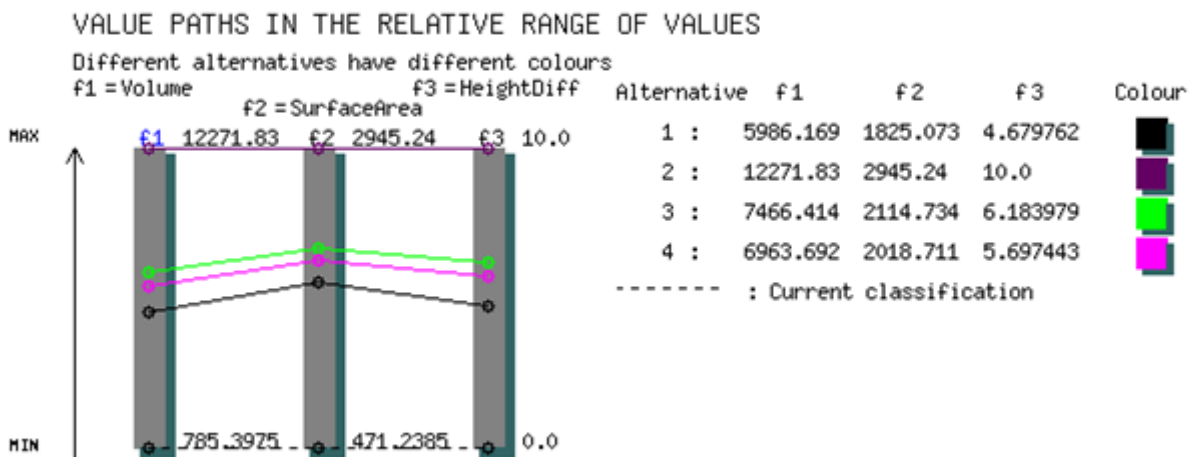
Pylväsdiagrammeihin voi lisätä Pareto-optimaaliset ratkaisut myös niin, että jokainen pylväs kuvaa tietyn kohdefunktion Pareto-optimaalista aluetta. Alueen alaraja on saatu ideaalisen kriteerivektorin avulla ja yläraja on saatu nadiirilla kriteerivektorilla. Reitti, joka käy kaikki nämä pylväät läpi, on tehtävän Pareto-optimaalinen ratkaisu. Tällaisia diagrammeja kutsutaan painoarvoreittikaavioksi (*value path*). Painoarvoreitit on yksi suosituin tapa havainnollistaa Pareto-optimaalisia ratkaisuja päätöksentekijälle (Miettinen, 1999 [11]).

Kuvassa 3 on esitetty kolme kohdefunktiota ja neljä Pareto-optimaalista ratkaisua. Pylväillä havainnollistetaan Pareto-optimaalista aluetta. Pylväiden läpi kulkevat viivat havainnollistavat Pareto-optimaalisia ratkaisuja. Painoarvoreitit ovat hyviä havainnollistamistapoja, koska niihin voi liittää useita Pareto-optimaalisia ratkaisuja samaan diagrammiin. Päätöksentekijän on helppo hahmottaa, mitä kohdefunktiota hän haluaa painottaa eniten. Reitit havainnollistavat eroa kohdefunktioiden arvojen välillä.

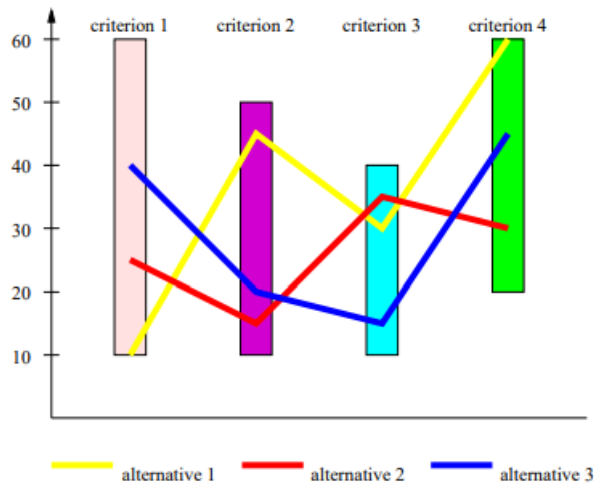
Kuvissa 3 ja 4 on esitelty kaksi erilaista tapaa havainnollistaa painoarvoreittikaaviota. Kuvassa 3 kohdefunktioiden Pareto-optimaaliset alueet on skaalattu samanmittaisiksi. Kuvassa 4 on puolestaan esitetty kohdefunktioiden absoluuttiset



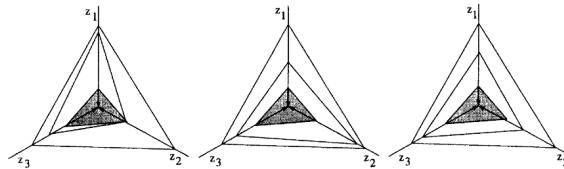
Kuva 2: Pylväsdiagrammi Pareto-optimaalisista ratkaisuksista. Ongelmaan on löydetty kolme Pareto-optimaalista ratkaisua, jotka on havainnollistettu samassa pylväsdiagrammissa. Kuvan lähde: Miettinen, 2012 [16].



Kuva 3: Kolmesta Pareto-optimaalisesta ratkaisusta skaalattu painoarvoreittikaavio. Kaavio on samasta ratkaisusta kuin kuvan 1 pylväsdiagrammi. Kuvan lähde: www-nimbus.it.jyu.fi [17].



Kuva 4: Absoluuttinen painoarvoreittikaavio kolmesta Pareto-optimaalisesta ratkaisusta. Kaavio on havainnollistus samasta ongelmasta kuin kuva 2. Kuvan lähde: Miettinen, 2012 [16].

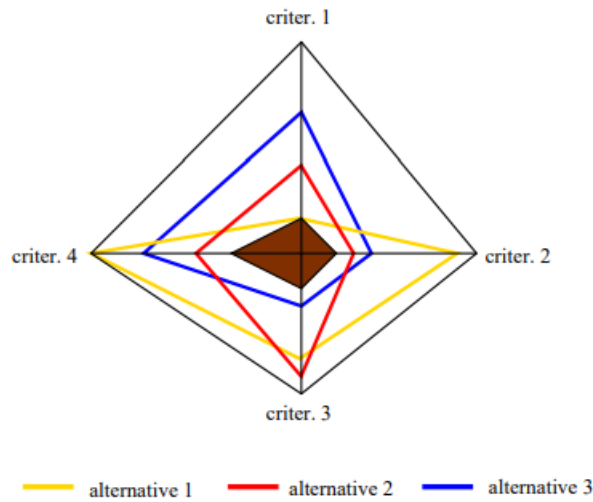


Kuva 5: Hämähäkkiverkkokaavio kolmelle kohdefunktiolle. Jokainen kaavio esittää yhtä Pareto-optimaalista ratkaisua. Kuvan lähde: Miettinen, 1999 [11],

arvoalueet. Molemmissa kuvissa on hyvät ja huonot puolensa päätöksentekijän kannalta. Kuva 4 on selkeämpi kuin kuva 3, mutta kuvassa 4 ei ole merkitty tarkkoja arvoja, mitkä löytyvät taas kuvasta 3. Painoarvoreitit ovat yleensä tehokkaampi havainnollistamistapa kuin pylväsdiagrammit. Pylväsdiagrammeja joutuu yleensä tuottamaan useampia, ja ne täyttyvät helpommin. Näin havainnollistuksen lopputulos ei ole yhtä selkeä. Painoarvoreiteissa pysytään yleensä yhdessä diagrammissa ja se on yleensä helpommin luettavissa, kuin monta erillistä diagrammia. (Miettinen, 1999 [11])

Hämähäkkiverkkokaaviossa (*Spider-Web chart*) jokainen huippu esittää yhtä kohdefunktiota. Kaaviossa huiput esittävät Pareto-optimaalisuuden ylärajaa ja kaikista sisin esittää Pareto-optimaalisuuden alarajaa, eli ideaalista ratkaisua. Kuvassa 5 on esitetty kolme kaaviota, joista jokainen vastaa yhtä Pareto-optimaalista ratkaisua kolmelle kohdefunktiolle  $z_1$ ,  $z_2$  ja  $z_3$ .

Hämähäkkiverkkokaavioita voi myös yhdistää. Yhdistämällä niitä, saadaan helpompilukuisempi kaavio. Kuvassa 6 nähdään ruskealla ideaalinen ratkaisu. Vaihtoehdot 1, 2 ja 3 ovat Pareto-optimaalisia ratkaisuja ongelmalle. Usein ideaalista ratkaisua ei saada käyttöön, koska se ei ole sallittu. Kuvassa 6 on esitelty neljän kohdefunktion hämähäkkiverkkokaavio. On saatu tehtyä vain yksi kaavio, joka näyttää ideaalisen ratkaisun sekä kolme Pareto-optimaalista ratkaisua. Hämähäkkiverkko-



Kuva 6: Yhdistetty hämähäkkiverkkokaavio. Kaaviossa on kolme eri Pareto-optimaalista ratkaisua yhdistetty eri värien avulla. Kaavio on havainnollistettu samasta ongelmasta kuin kuvat 2 ja 4. Kuvan lähde: Miettinen, 2012 [16].

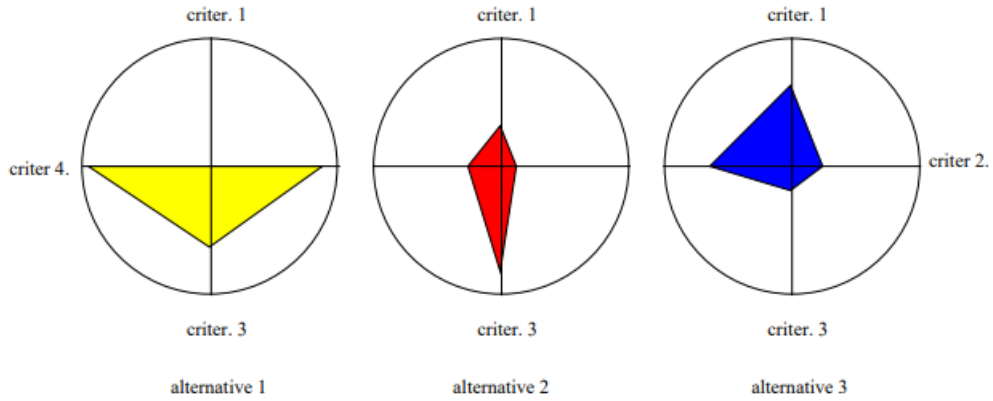
kaaviosta päätöksentekijä näkee helposti, kuinka Pareto-optimaaliset ratkaisut sijoittuvat kohdefunktioiden kesken.

Tähtikoordinaattikaaviossa (*Star Coordinate System*) viivalla merkitään yhtä kohdefunktiota. Kuvassa 7 on neljä kohdefunktiota ja kolme Pareto-optimaalista ratkaisua. Jokainen kaavio esittää yhtä Pareto-optimaalista ratkaisua. Ideana on, että päätöksentekijä näkee mihin suuntaan Pareto-optimaalinen ratkaisu liikkuu, kun painotetaan tiettyjä kohdefunktiota. Myös tähtikoordinaattikaavioita voi yhdistää yhdeksi kokonaisuudeksi. Jos on tarpeeksi vähän Pareto-optimaalisia pisteitä, voidaan kaikki ratkaisut sijoittaa yhteen kaavioon. Tästä päätöksentekijälle havainnollistuu helpoiten eri Pareto-optimaalisten ratkaisujen ero. Tähtikoordinaattikaaviossa keskellä kaaviota on Pareto-optimaalisten ratkaisujen alaraja ja kaavion reunoilla Pareto-optimaalisten ratkaisujen yläraja.

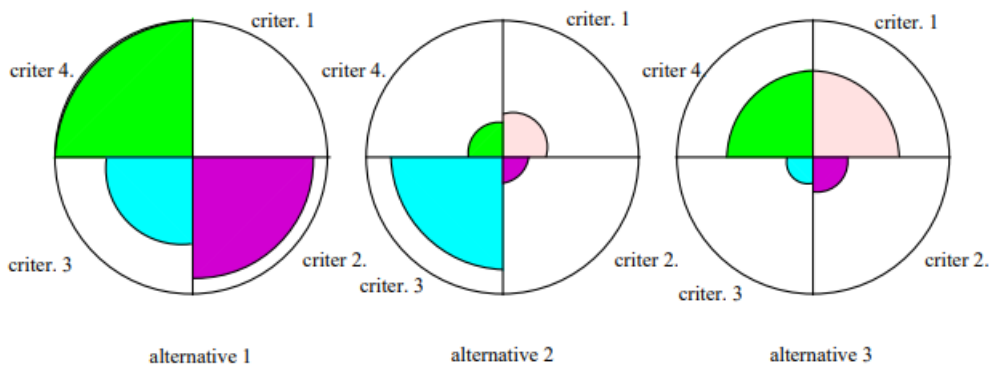
Petaldiagrammeissa ympyrä jaetaan yhtä moneen samansuuruiseen osaan kuin on kohdefunktiota. Ympyrän osaa täytetään sen mukaan, kuinka paljon sen kohdefunktion arvoa vaaditaan Pareto-optimaaliseen ratkaisuun.

Kuvassa 8 on esitetty neljä kohdefunktiota ja niille kolme Pareto-optimaalista ratkaisua. Samoille kohdefunktiolle on siis eri ratkaisut, joista päätöksentekijä voi katsoa painotuksensa mukaan, minkä niistä valitsee. Jos päätöksentekijä haluaa painottaa enemmän esimerkiksi kohdefunktiota 4 kuin kohdefunktiota 1 kannattaa hänen valita vaihtoehto 1. Kuvassa 9 on puolestaan esitetty kolmelle kohdefunktiolle neljä Pareto-optimaalista vaihtoehtoa.

Kuva 1, kuva 3 ja kuva 9 ovat kaikki erilaisia visualisointeja samasta monitaivoiteoptimointiongelman. Niistä nähdään, kuinka monella eri tapaa voidaan havainnollistaa samat Pareto-optimaaliset ratkaisut. Mikä havainnollistus kannattaa valita, on kiinni päätöksentekijästä. Eri päätöksentekijä näkee eri kaaviot eri tavalla. Esimerkiksi jollekin voi olla helpompi lukea hämähäkkiverkkokaaviota ja toiselle taas painoarvoreittikaaviota.

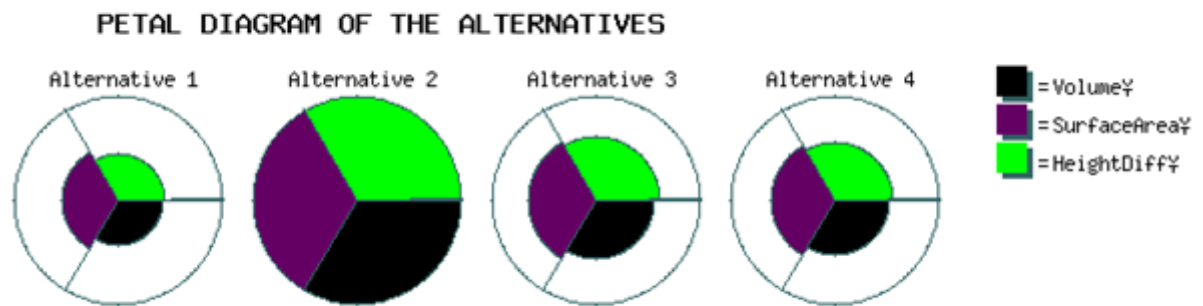


Kuva 7: Tähtikoordinaattikaavio. Jokaisessa kaaviossa on esitetty yksi Pareto-optimaalinen ratkaisu. Kaavio on havainnollistettu samasta ongelmasta kuin kuvat 2, 4 ja 6. Kuvan lähde: Miettinen, 2012 [16].

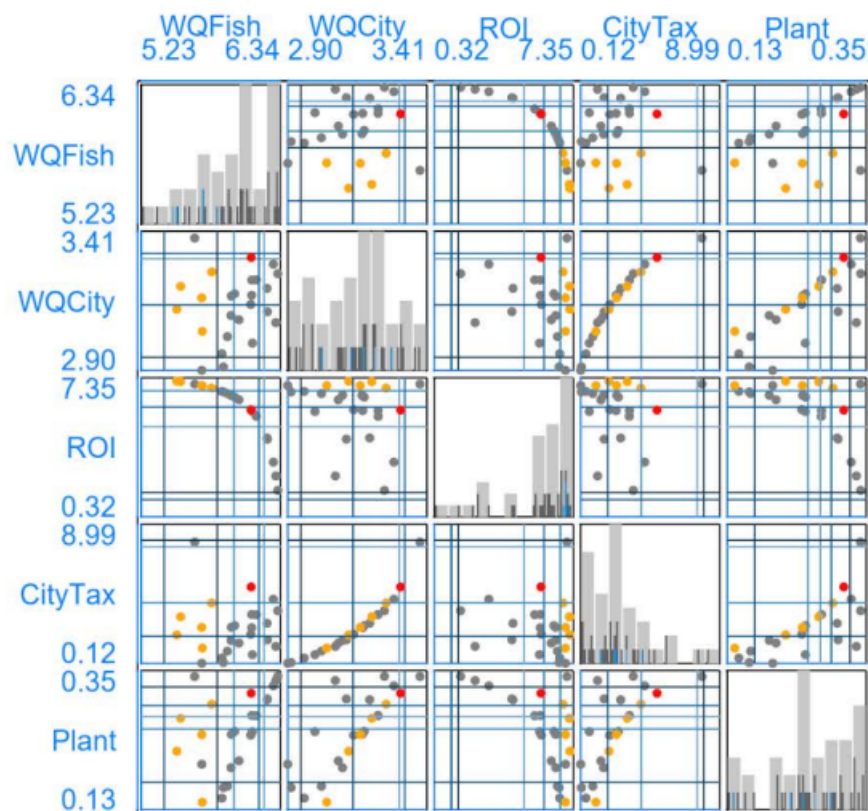


Kuva 8: Petaldiagrammi kolmesta eri Pareto-optimaalisesta ratkaisusta. Kaavio on havainnollistettu samasta ongelmasta kuin kuvat 2, 4, 6 ja 7. Kuvan lähde: Miettinen, 2012 [16].

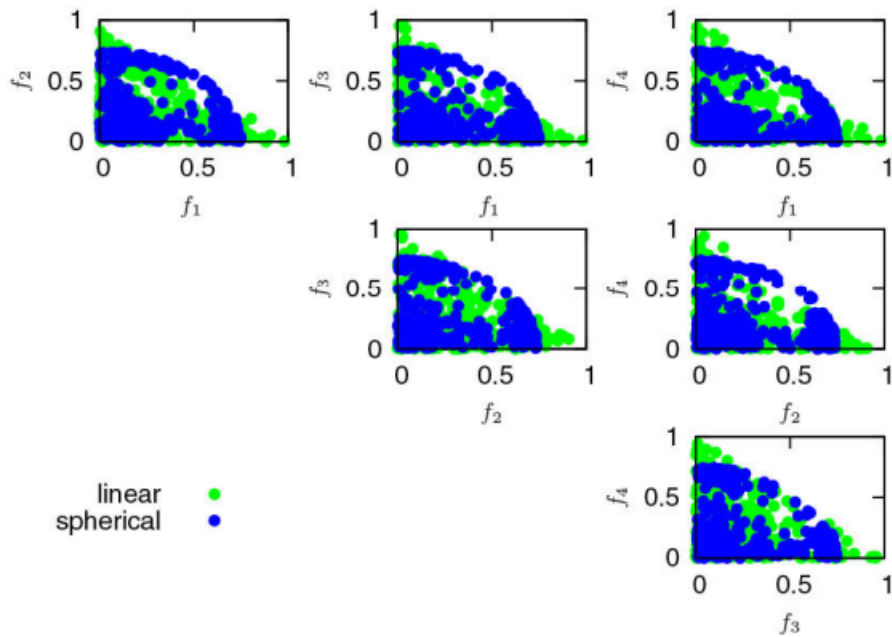




Kuva 9: Petaldiagrammi neljästä eri Pareto-optimaalisesta ratkaisusta. Diagrammi on havainnollistus samasta ongelmasta kuin kuvat 1 ja 3. Kuvan lähde: [www.nimbus.it.jyu.fi](http://www.nimbus.it.jyu.fi) [17].



Kuva 10: Sirontakaaviomatriisi. Matriisissa on esillä monia eri vaihtoehtoja Pareto-optimaaliseksi ratkaisuksi. Kuvan lähde: Miettinen & al, 2022 [8].



Kuva 11: Sirontakaaviomatriisi lineaarisille ja pallomaisille ratkaisuille. Kuvan lähde: Tušar & al, 2014 [20].

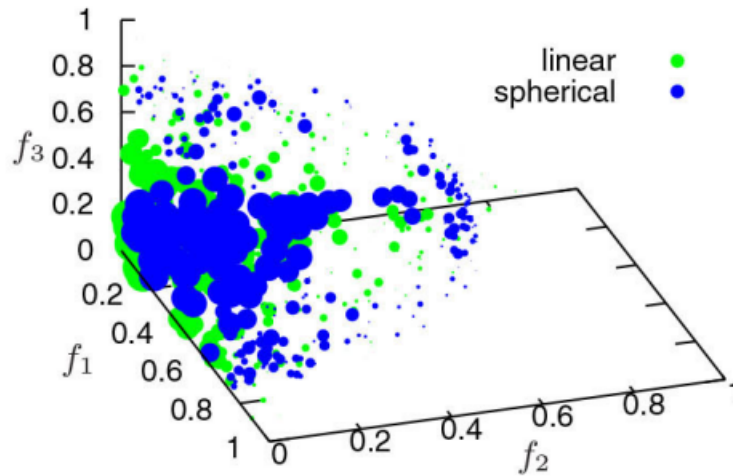
Kuvassa 10 on esitetty sirontakaaviomatriisi (*Scatterplot matrix*). Jokainen neliö vastaa yhtä kohdefunktiota. Kuvassa näkyvät pisteet antavat erilaisia Pareto-optimaalisia ratkaisuja kohdefunktiolle. Pisteet ovat värikoodattuja: Pareto-optimaaliset ratkaisut ovat punaisia ja heikosti Pareto-optimaaliset ratkaisut keltaisia. Kun päätöksentekijä valitsee mieltymyksensä mukaisen pisteen jollekin kohdefunktiolle, löytyy silloin automaattisesti loppujenkin kohdefunktioiden ratkaisut. (Tušar & al, 2014 [20])

Kuvassa 11 on eritavalla koostettu sirontakaaviomatriisi. Kaaviossa on lineaariset ja pallomaiset ratkaisut esitettynä. Kuvassa 11 vihreällä on merkitty lineaarinen Pareto-pinta, eli Pareto-pinnan reuna on lineaarinen. Sinisellä on merkitty pallomainen vaihtoehto, jossa Pareto-pinnan reuna on pallon muotoinen. Sirontakaaviomatriiseja pystytään tuottamaan useita erilaisia. Kaikista löytyy kuitenkin samat tiedot, joiden avulla päätöksentekijä tekee ratkaisunsa eri ongelmissa.

Kuplakaaviolla (*Bubble chart*) saadaan havainnollistettua samat tiedot kuin sirontakaaviomatriisilla, mutta tiedot ovat yhdessä kaaviossa. Kuvassa 12 on havainnollistettu Pareto-optimaalista pintaa lineaarisesti ja pallomaisesti. Sama ongelma havainnollistettiin kuvan 11 sirontamatriisissa.

Lämpömattokaavioissa (*Heat Maps*) sarakkeet ovat kohdefunktioita ja rivit mahdollisia ratkaisuja. Lämpömattokaaviossa esitetään suorat ratkaisut, niitä ei ole muokattu parempaan muotoon visualisointia varten. Kaavioissa on mukana erillinen sarakke, josta näkee, millä värillä mikäkin arvo merkitään. Joihinkin kaavioihin on sisällytetty myös kohdefunktioiden arvot.

Kuvassa 13 näkyvät kohdefunktioiden  $f_1, \dots, f_4$  Pareto-optimaaliset ratkaisut. Kuvassa näkyy kohdefunktioiden  $f_2, f_3$  ja  $f_4$  kohdalla monta riviä, jotka merkitsevät tämän ongelman Pareto-optimaalisia ratkaisuja. Jos kohdefunktio  $f_1$  saa arvokseen



Kuva 12: Kuplakaavio lineaarisessa ja pallomaisessa avaruudesta. Kaavio on havainnollistus samasta ongelmasta kuin kuvassa 11. Kuvan lähde: Tušar & al, 2014 [20].

esimerkiksi 1.0 nähdään värien avulla heti muidenkin kohdefunktioiden arvot. Näin päätöksentekijä voi valita hänen painottamansa kohdefunktion arvoja, ja nähdä heti, millaisia arvoja muut kohdefunktiot näin saavat. Kuvassa 14 on tehty eri ratkaisuille omat lämpömattokaavionsa.

Kuvissa 11, 12 ja 13 on havainnollistettu samaa optimointiongelmaa. Kuvissa 11 ja 12 ongelmaa on havainnollistettu lineaarisesti sekä pallomaisesti.

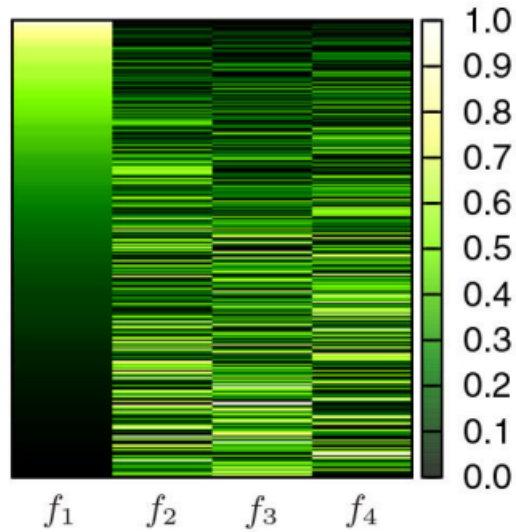
## 4.2 A posteriori menetelmien havainnollistaminen

A posteriori menetelmissä ratkaistiin monitavoiteoptimointiongelma ensin, jonka jälkeen päätöksentekijälle esitetään Pareto-optimaaliset ratkaisut. A posteriori menetelmissä havainnollistaminen on tehokas, koska sen avulla päätöksentekijä näkee Pareto-optimaalisten ratkaisujen eron.

Kaikkia kappaleessa 4.1 esitettyjä havainnollistustapoja käytetään a posteriori menetelmien havainnollistamisessa. Sironnakaaviomatriisia (*Scatter plot matrix*), päätöskarttoja (*Decision map*) ja lämpömattokaavioita (*Heat map*) käytetään usein Pareto-optimaalisten ratkaisujen havainnollistamiseen etenkin, jos kohdefunktioita on enemmän kuin kolme. Näillä havainnollistamismenetelmillä saadaan helpommin luettavia kaavioita, kun kohdefunktioita on paljon. Jos olisi esimerkiksi 20 kohdefunktiota, voisi painoarvokaaviosta tulla iso ja hankalasti tulkittava.

## 4.3 A priori menetelmien havainnollistaminen

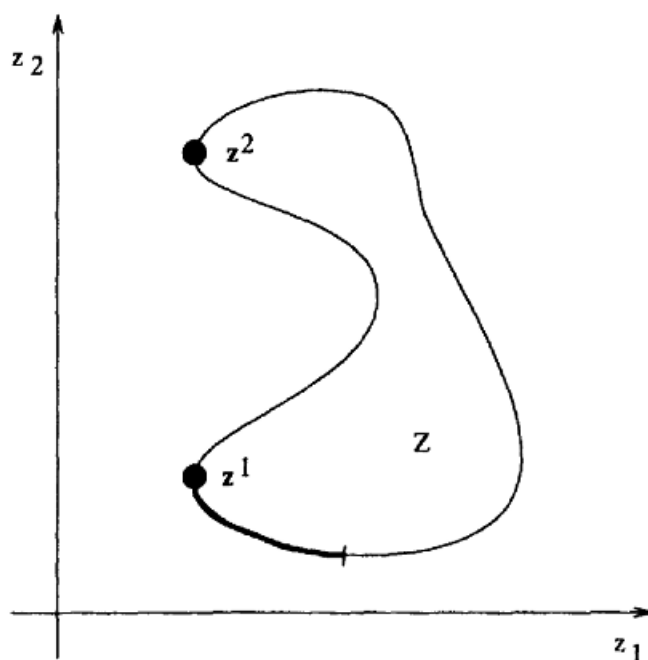
A priori menetelmissä päätöksentekijä kertoo, millaisen vastauksen hän haluaa ennen ongelman ratkaisua. Päätöksentekijälle ei kyetä havainnollistamaan lopullista Pareto-optimaalista ratkaisua. A priori menetelmiä voi havainnollistaa päätöksen-



Kuva 13: Lämpömattokaavio, jossa on esitetty monia Pareto-optimaalisia ratkaisuja samassa kaaviossa. Kaavio on havainnollistus samasta ongelmasta kuin kuvat 11 ja 13. Kuvan lähde: Tušar & al, 2014 [20].



Kuva 14: Lämpömattokaavio kolmelle Pareto-optimaaliselle ratkaisulle. Jokaiselle ratkaisulle on tehty oma kaavionsa. Kuvan lähde: Shavazipour & al, 2021 [19].



Kuva 15: Havinnollistus Pareto-optimaalisesta alueesta. Kuvan lähde: Miettinen, 1999 [11].

tekijälle tekemällä hänelle siitä havainnollistuksen, millaiseen Pareto-optimaaliseen alueeseen kohdefunktiot kuuluvat. Kuvassa 15 havainnollistetaan päätöksentekijälle Pareto-optimaalinen alue. Siinä  $z_1$  ja  $z_2$  ovat kohdefunktioita. Kuvassa 15 on leksikaalisen optimoinnin ongelman (6) Pareto-optimaalinen alue havainnollistettuna. Korhonen ja Wallenius [9] käsittelevät pylväsdiagrammien avulla visualisointia monitavoiteoptimointiongelmaan. Siinä visualisoidaan muun muassa pylväsdiagrammeihin ja viivadiagrammeihin ennen ongelman ratkaisua sitä, millaisesta datasta halutaan Pareto-optimaalinen ratkaisu. Päätöksentekijän on helpompi antaa mielipiteensä siitä, millaisen ratkaisun haluaa, kun hänelle on ensin visualisoitu pohjadataa. Tällöin ratkaisusta saadaan helpommin päätöksentekijän mielenmukainen, koska hänelle on pystytty näyttämään ongelman lähtökohdat.

A priori menetelmissä on hankalampi esittää havainnollistuksia päätöksentekijälle. Näissä menetelmissä havainnollistamisesta ei koeta olevan niin paljon hyötyä, kuin esimerkiksi a posteriori menetelmissä on (Miettinen, 1999 [11]).

#### 4.4 Interaktiivisten menetelmien havainnollistaminen

Interaktiivisissa menetelmissä päätöksentekijä on mukana ratkaisuprosessin useassa vaiheessa. A posteriori ja a priori menetelmissä päätöksentekijä on mukana joko alussa tai lopussa. Interaktiivisissa menetelmissä päätöksentekijältä kysytään mielipidettä alussa, vaihtelevasti ongelmanratkaisuvaiheessa sekä lopussa. Havainnollistamiseen toimiikin kaikki tutkielmassa esitetyt tavat.

Ongelman muodostusvaiheessa päätöksentekijä on jo mukana kertomassa mieli-

pidettään. Hänelle voidaan jo tässä vaiheessa tehdä erilaisia havainnollistuksia datasta. Ennen ongelman ratkaisua, voidaan päätöksentekijälle havainnollistaa myös Pareto-optimaalista aluetta, kuten kuvassa 15. Ongelmaa ratkaistaessa voidaan päätöksentekijälle tehdä erilaisia havainnollistuksia eri kohtaa ratkaisuprosessia. Useasti saadaan monia Pareto-optimaalisia ratkaisuja. Päätöksentekijälle voidaan tehdä havainnollistus niistä. Esimerkiksi kuvassa 13 näkyvä lämpömattokaavio voidaan tehdä päätöksentekijälle. Näin päätöksentekijä voi paremmin varmistua, että ollaan menossa päätöksentekijän haluamaan suuntaan.

Interaktiivisissa menetelmissä voidaan siis käyttää eniten havainnollistamista, koska niissä päätöksentekijä on myös eniten mukana koko prosessissa.

## 4.5 WWW-NIMBUS esimerkki

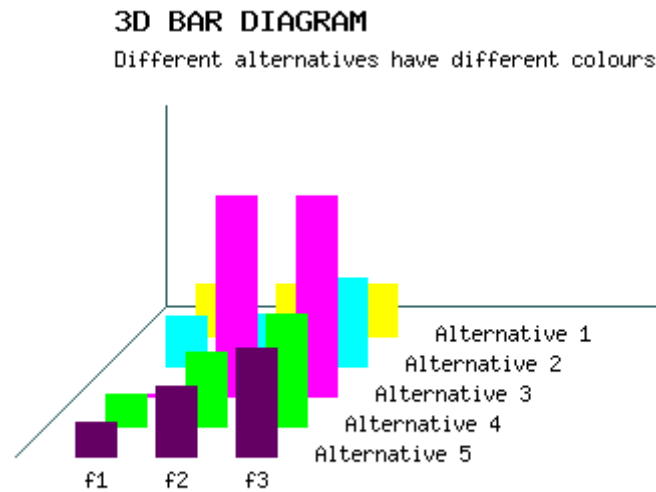
WWW-NIMBUS ohjelmassa [17] on valmiina esimerkkiongelmia. Näistä esimerkeistä valittiin seuraavanlainen ongelma:

$$\begin{aligned} \text{minimoi } f_1 &= 50x_1^4 + 10x_2^4 & (13) \\ \text{minimoi } f_2 &= 30(x_1 - 5)^4 + 100(x_2 - 3)^4 \\ \text{minimoi } f_3 &= 70(x_1 - 2)^4 + 20(x_2 - 4)^4 \\ \text{sitte, että } &(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

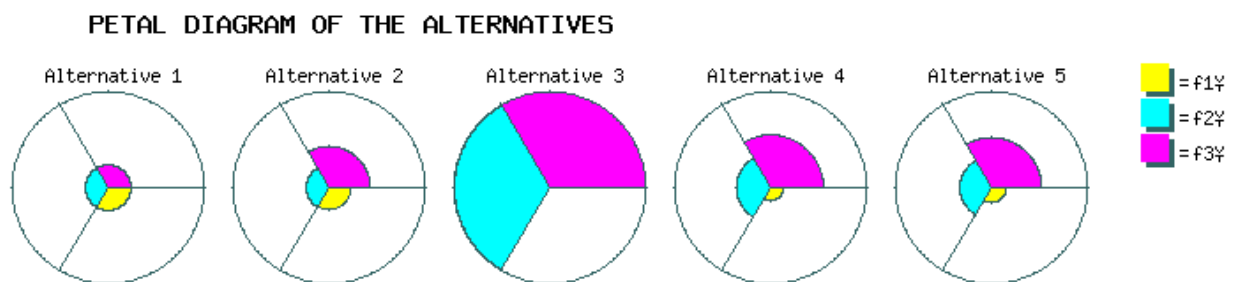
Kohdefunktioiden arvot lähtöpisteessä olivat  $f_1$ :lle 960,  $f_2$ :lle 2530 ja  $f_3$ :lle 320. Ensimmäisessä ratkaisuvaihtoehdossa valittiin kohdefunktiolle seuraavanlaiset luokat:  $f_1$  kuuluu luokkaan  $I^<$ ,  $f_2$  kuuluu luokkaan  $I^{\leq}$ , jonka tavoitetaso oli 2000 ja  $f_3$  kuuluu luokkaan  $I^{\circ}$ . Luokat ovat samat kuin kappaleessa 3.3.3 määritellyt luokat. Näillä luokilla saatiin viisi Pareto-optimaalista ratkaisuvaihtoehtoa. Nämä ollaan saatu NIMBUS-salgoritmin (3.3.3) askeleesta 6, jossa  $P = 5$ . Kohdefunktioiden  $f_1$ ,  $f_2$  ja  $f_3$  arvot näillä luokilla näkyvät kuvassa 18. Kuvat 16, 17 ja 18 ovat kaikki erilaisia havainnollistuksia ongelmasta (13) yllä esitellyillä luokilla. Näistä kuvista löytyy myös tehtävän Pareto-optimaalisten ratkaisujen ylä- ja alarajat.

Kun vaihdetaan kohdefunktioiden luokkia, saadaan erilaiset Pareto-optimaaliset ratkaisut. Toisessa ratkaisuvaihtoehdossa valittiin kohdefunktiolle seuraavanlaiset luokat:  $f_1$  kuuluu luokkaan  $I^>$ , jonka yläraja oli 400,  $f_2$  kuuluu luokkaan  $I^=$  ja  $f_3$  kuuluu luokkaan  $I^<$ . Kun näillä luokilla ratkaistaan ongelma (13) saadaan viisi erilaista Pareto-optimaalista ratkaisua, joiden kohdefunktioiden arvot näkyvät kuvassa 21. Kuvat 19, 20 ja 21 ovat kaikki erilaisia havainnollistuksia ongelmasta (13) yllä esitellyillä luokilla.

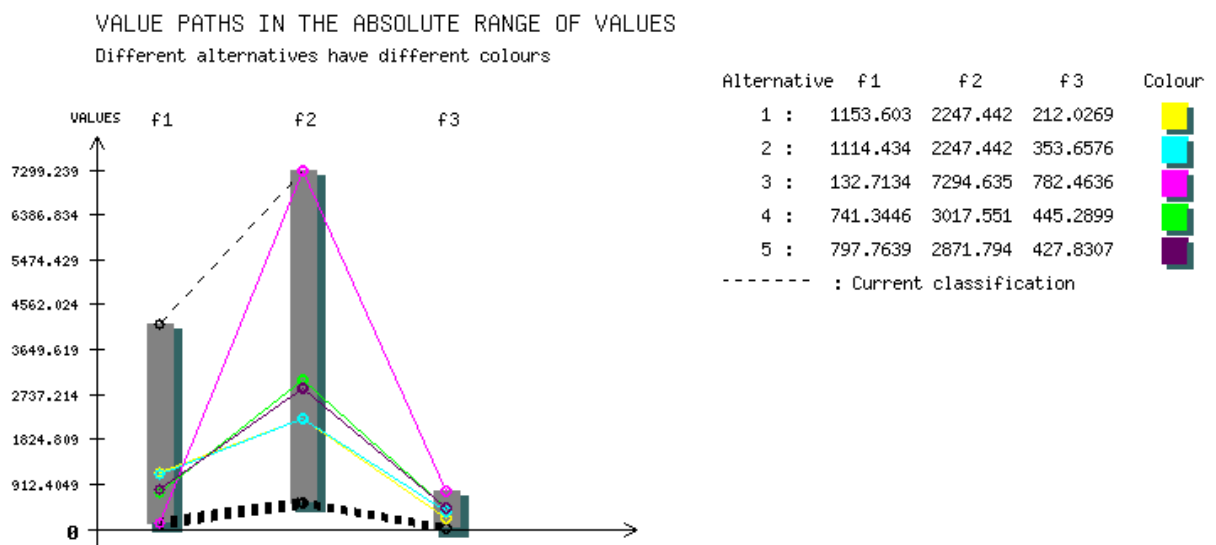
Kun verrataan havainnollistuksia nähdään, että samasta ongelmasta voidaan saada hyvinkin monia erilaisia Pareto-optimaalisia ratkaisuja. Ratkaisuja saadaan paljon, etenkin kun lähdetään muuttamaan kappaleessa 3.3.3 esitettyjä luokkia. Kuvassa 16 on painotettu kohdefunktioiden  $f_2$  ja  $f_3$  arvoja. Kun taas kuvassa 19 on painotettu enemmän kohdefunktion  $f_1$  arvoa. Kaikki esitetyt ratkaisut ovat yhtä hyviä matemaattisesti. Päätöksentekijälle ne eivät kuitenkaan välttämättä ole yhtä hyviä. Kun ratkaisuja havainnollistetaan eri tavoin, on päätöksentekijän helpompaa vertailla ratkaisuja ja hahmottaa niiden välisiä riippuvuusuhhteita. Tämä helpottaa myös lopullisen ratkaisun valintaa.



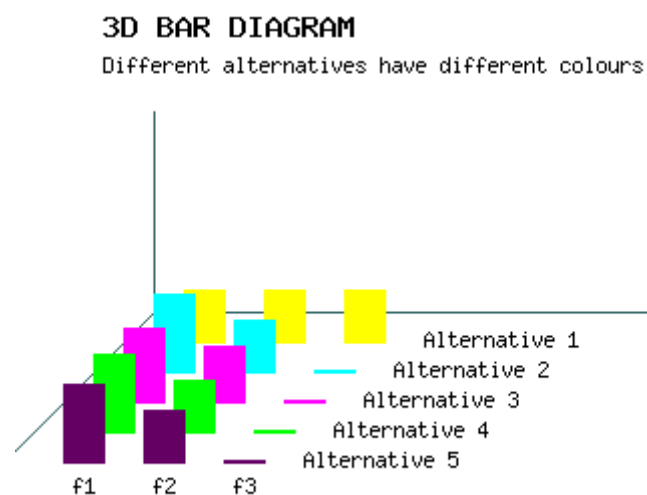
Kuva 16: 3D pylväsdiagrammi ensimmäisistä ratkaisuvaihtoehdoista. Kuvan lähde: [www-nimbus.it.jyu.fi](http://www-nimbus.it.jyu.fi) [17]



Kuva 17: Petaldiagrammi ensimmäisistä ratkaisuvaihtoehdoista. Kuvan lähde: [www-nimbus.it.jyu.fi](http://www-nimbus.it.jyu.fi) [17]

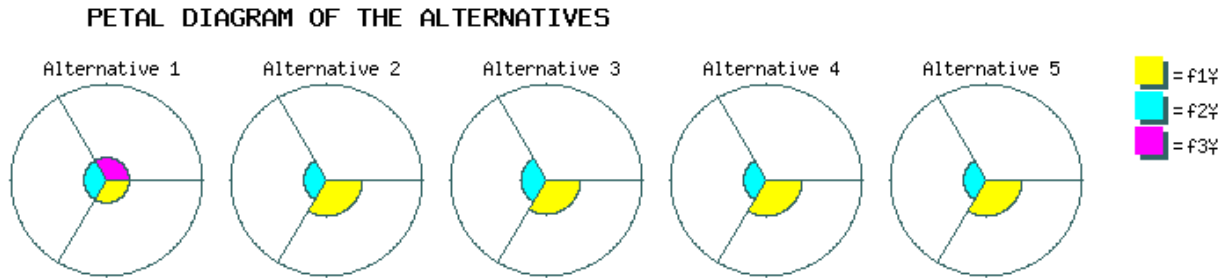


Kuva 18: Painoarvoreittikaavio ensimmäisistä ratkaisuvaihtoehdoista. Kuvan lähde: [www-nimbus.it.jyu.fi](http://www-nimbus.it.jyu.fi) [17]

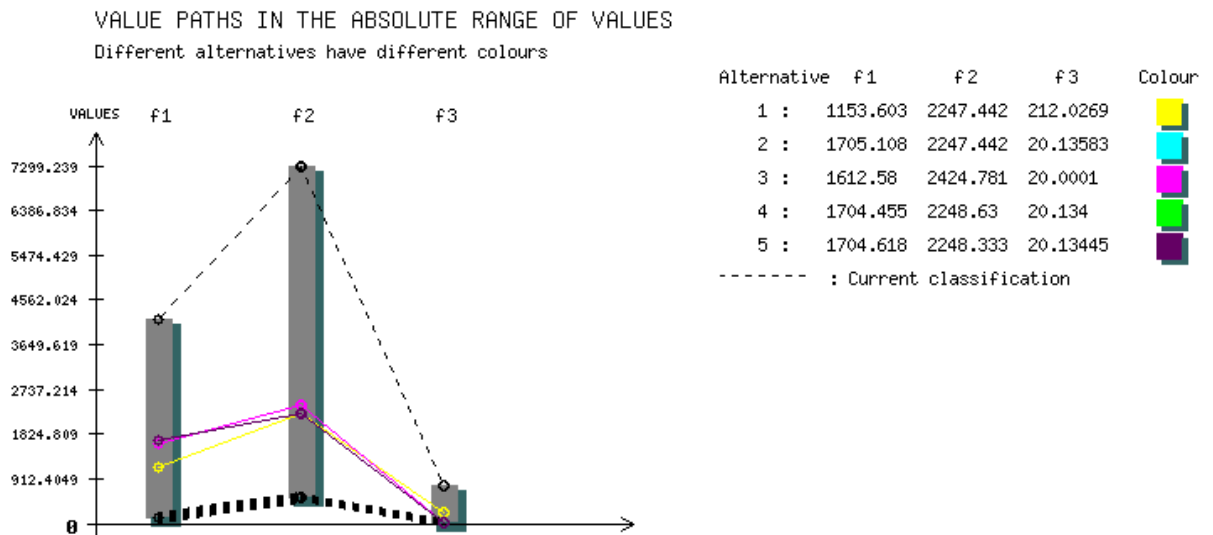


Kuva 19: 3D pylväsdiagrammi toisista ratkaisuvaihtoehdoista. Kuvan lähde: [www-nimbus.it.jyu.fi](http://www-nimbus.it.jyu.fi) [17]





Kuva 20: Petaldiagrammi toisista ratkaisuvaihtoehdoista. Kuvan lähde: [www-nimbus.it.jyu.fi](http://www-nimbus.it.jyu.fi) [17]



Kuva 21: Painoarvoreittikaavio toisista ratkaisuvaihtoehdoista. Kuvan lähde: [www-nimbus.it.jyu.fi](http://www-nimbus.it.jyu.fi) [17]

Kuvissa 16, 17 ja 18 on saman ongelman (13) ratkaisu samalla luokittelulla. Kun kuvia verrataan keskenään, osassa näkyy enemmän tietoa kuin muissa. Painoarvoreittikaaviossa kuvassa 18 näkyy myös kohdefunktioiden arvot sekä niiden ideaaliset kriteerivektorit ja nadiiriset kriteerivektorit. Ideaaliset kriteerivektorit ja nadiiriset kriteerivektorit löytyvät kaikista muistakin kuvista, mutta niille ei ole annettu minkäänlaisia arvoja. Nämä vektorit esittävät Pareto-optimaalisen alueen alaja ylärajoja.

Petaldiagrammeista 17 ja 20 nähdään selkeästi Pareto-optimaalisten ratkaisujen ero, kun luokkia on muutettu. Molemmissa ongelmissa saadaan sama ensimmäinen Pareto-optimaalinen ratkaisu luokasta riippumatta, mutta muut ratkaisut eroavat toisistaan.

Ongelmaan (13) esitetyt havainnollistukset ovat kaikki periaatteessa yhtä hyviä, kuten myös Pareto-optimaaliset pisteetkin. Esimerkkiongelman avulla kyettiin havainnollistamaan monitavoiteoptimointiongelmien laajuutta sekä sitä, kuinka paljon erilaisia Pareto-optimaalisia ratkaisuja on mahdollista saada tietystä ongelmasta.

## 5 Loppupäätelmät

On olemassa monia eri tapoja ratkaista monitavoiteoptimointiongelmiä. Tutkielmassa esiteltiin yhdeksän erilaista tapaa ratkaista tällaisia ongelmia. Millainen ratkaisutapa valitaan, riippuu monista tekijöistä. Se miten päätöksentekijä on mukana ratkaisuprosessissa vaikuttaa valitaanko a posteriori, a priori vai interaktiivinen menetelmä. Tämän valinnan jälkeen on monia erilaisia menetelmiä, joista kaikista saadaan Pareto-optimaalisia ratkaisuja.

Päätöksentekijä on lopullisen ratkaisun löytämisessä keskeisessä roolissa. Hänen tietämystään ja implisiittistä hyötyfunktioita tarvitaan lopullisen Pareto-optimaalisen ratkaisun saavuttamiseksi. Monitavoiteoptimointiongelma saatuja Pareto-optimaalisten ratkaisujen havainnollistaminen päätöksentekijälle voi auttaa merkittävästi häntä valitsemaan lopullisen ratkaisun. Ongelman laajuus vaikuttaa myös siihen, mitä havainnollistamistapaa kannattaa käyttää. Kaikki tavat eivät pysy yhtä selkeinä, jos on todella monta kohdefunktiota. Esimerkiksi petaldiagrammista tulee todella täysi, jos tehtävässä on esimerkiksi kaksikymmentä kohdefunktiota.

Tutkielman edetessä huomattiin, että samasta ongelmasta pystytään tekemään monia eri havainnollistamistapoja. Havainnollistuksia voi suoraan verrata keskenään, koska jokin tapa voi olla tietylle ongelmalle parempi kuin toinen. Ei ole löydetty parasta havainnollistusta, joka toimisi kaikille ongelmille yhtä hyvin. Havainnollistuksen avulla voidaan kuitenkin nopeuttaa päätöksentekijän päätöksentekoprosessia. Päätöksentekijä on usein ihminen, jolloin yksi ja sama havainnollistustapa ei ole yhtä selkeä kaikille päätöksentekijöille. Siksi havainnollistustavan valinnassa tulee ottaa huomioon päätöksentekijä ja hänen kykynsä ymmärtää matemaattista ongelmaa ja erilaisia kaaviota.

Tutkielman lopuksi käytettiin WWW-NIMBUS [17] ohjelmassa olevaa esimerkkiä havainnollistamiseen. Esimerkissä vaihdettiin kohdefunktioiden luokkia ja verrattiin luokan vaihtamisen vaikutusta Pareto-optimaalisiin ratkaisuihin.

## Lähteet

- [1] Chankong V. ja Haimes Y.Y., The Interactive Surrogate Worth Trade-Off Method for Multiobjective Decision-Making. Multiple Criteria Problem Solving, Edited by S.Zionts, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, pp. 42-67, 1978.
- [2] Chankong V. ja Haimes Y.Y., Multiobjective Decision Making Theory and Methodology, Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1983.
- [3] Charnes A., Cooper W.W. ja Ferguson R.O., Optimal Estimation of Executive Compensation by Linear Programming, Management Science, No. 2, pp. 39-54, 1955.
- [4] Fishburn P.C., Lexicographic Orders, Utilities and Decision Rules: A Survey, Management Science, pp. 1442-1471, 1974.
- [5] Gass S ja Saaty T, The Computational Algorithm for the Parametric Objective Function, Naval Research Logistics Quarterly, No. 11, pp. 39-45, 1955.
- [6] Geoffrion, A.M, Proper efficiency and the Theory of Vector Maximization. J. Math. Anal. Appl. 22, No. 3, pp. 613-630, 1968.
- [7] Haimes Y.Y., Ladson L.S. ja Wismer D.A., On a Bicriterion Formulation of the Problems of Integrated System Identification and System Optimization, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics pp. 296-297, 1971.
- [8] Jussi Hakanen, Sanjin Radoš, Giovanni Misitano, Bhupinder S. Saini, Kaisa Miettinen ja Krešimir Matković, Interactivized: Visual Interaction for Better Decisions With Interactive Multiobjective Optimization, teoksessa IEEE Access, vol. 10, pp. 33661-33678, 2022.
- [9] Pekka Korhonen ja Jyrki Wallenius, Visualization in the Multiple Objective Decision-Making Framework, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [10] Alexander V. Lotov ja Kaisa Miettinen, Visualizing the Pareto Frontier, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [11] Kaisa M. Miettinen, Nonlinear Multiobjective Optimization, Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, 1999.
- [12] Kaisa Miettinen, Jussi Hakanen ja Dmitry Podkopaev: Interactive Nonlinear Multiobjective Optimization Methods, teoksessa S. Greco, M. Ehrgott ja J. R. Figueira (Eds.), Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys, pp. 931-980, 2016.
- [13] Kaisa Miettinen: Epälineaarinen Optimointi, Jyväskylän yliopistopaino, Jyväskylä, 2003.

- [14] Kaisa Miettinen, Alexander V. Lotov, George K Kamenev ja Vadim E. Brezkin, Integration of Two Multiobjective Optimization Methods for Nonlinear Problems, *Optimization Methods and Software*, 18:1, pp. 63-80, 2003.
- [15] Kaisa Miettinen ja Marko M. Mäkelä: Interactive Bundle-based Method for Nondifferentiable Multiobjective Optimization: NIMBUS, *Optimization*, 34, pp. 231-246, 1995.
- [16] Kaisa Miettinen, Survey of Methods to Visualize Alternatives in Multiple Criteria Decision Making Problems, *OR Spectrum*, 36, pp. 3–37, 2014.
- [17] Nimbus, <https://wwwnimbus.it.jyu.fi>, luettu 6.4.2023
- [18] Rosenthal R.E., Principles of Multiobjective Optimization, *Decision Sciences*, No. 2, pp. 133-152, 1985.
- [19] Babooshka Shavazipour, Manuel López-Ibáñez ja Kaisa Miettinen, Visualization for Decision Support in Scenario-based Multiobjective Optimization, *Information Sciences*, 578, pp. 1-21, 2021
- [20] Tea Tušar ja Bogdan Filipič, Visualization of Pareto Front Approximations in Evolutionary Multiobjective Optimization: A Critical Review and the Projection Method, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 19:2, pp. 225–245, 2014.
- [21] Wierzbicki A.P., The Use of Reference Objectives in Multiobjective Optimization, *Multiple Criteria Decision Making Theory and Applications*, Edited by G. Fandel ja T. Gal, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, pp. 468-486, 1980.