Ehrhartin teoria kokonaislukupisteille

Nico Kerkola

Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2023

Tarkastajat:
Dos. Ilkka Törmä
FM Pyry Herva

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

NICO KERKOLA: Ehrhartin teoria kokonaislukupisteille
Pro gradu -tutkielma, 43 s.
Matematiikka
Huhtikuu 2023

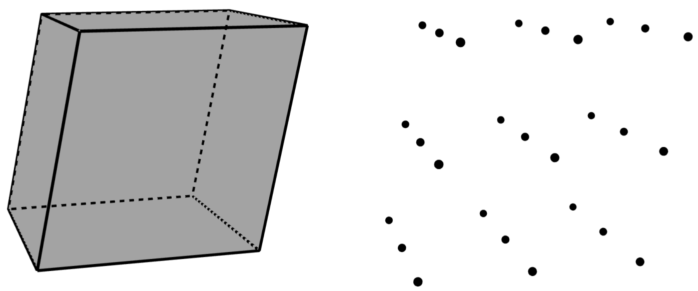
Tutkielma jäsentelee generoivien funktioiden perusominaisuuksia ja näiden avulla johdetaan laskukaavoja kokonaisulukupisteiden laskemiseksi erilaisille monitahokkaille. Kokonaislukupisteiden laskemisella tarkoitetaan sitä, että kuinka paljon näitä pisteitä monitahokkaan sisäpuolella on ja miten tämä lukumäärä muttuu, kun monitahokasta laajennetaan. Luku 2 käsittelee generoivia funktioita ja luku 3 diskreettejä tilavuuksia erilaisille monitahokkaille.

Asiasanat: Ehrhartin teoria, kokonaislukupiste, hilapiste, monitahokas, diskreetti tilavuus, generoiva funktio.

Sisällys

1 Johdanto

Tässä Pro gradu -tutkielmassa tarkastellaan Ehrhartin teoriaa kokonaislukupisteille eli hilapisteille. Matematiikassa diskreetti ja jatkuva matematiikka jaetaan usein eri kategorioihin, mutta tässä tutkielmassa tarkastellaan jatkuvien kappaleiden tilavuuksien ja diskreettien tilavuuksien yhteyttä. Tärkeä matemaattinen apuväline tässä muotoilussa tulee kombinatoriikan puolelta ja se on generoivien funktioiden hyödyntäminen. Tutkielmassa johdetaan erilaisille monitahokkaille $\mathcal{P}$ siihen liittyvä Ehrhartin sarja, jolla saadaan laskettua sen sisällä olevien hilapisteiden lukumäärä. Monitahokkaiden monipuolinen rakenne mahdollistaa Ehrhartin sarjojen monet käyttökohteet. Kuvassa 1 esitetään jatkuvan ja diskreetin tilavuuden ero.



Kuva 1: Jatkuva ja diskreetti tilavuus

Intuitiivisesti voi ajatella, että monitahokkaan $\mathcal{P}$ diskreetti tilavuus on sen sisällä olevien hilapisteiden lukumäärä ja toisaalta jatkuva tilavuus on se, miten ymmärretään perinteisessä mielessä erilaisten kappaleiden tilavuus.

Ehrhartin sarjat on nimetty niiden keksijän Eugène Ehrhartin mukaan. Ehrhart tutki kokonaislukupisteiden teoriaa 1960-luvulla [13]. Pick oli esittänyt lauseensa aiemmin erityistapauksena ja Ehrhart lähti tutkimaan teoriaa laajemmin. Pickin lauseen avulla voidaan laskea monikulmion pinta-ala, kun sen sisältämät kokonaislukupisteet monikulmion sisäpuolella ja sivuilla tunnetaan. Pickin lause esitetään tässä gradussa luvussa 3.6.

Viimeisintä tutkimusta aiheen parissa on esimerkiksi syklisten monikulmioiden tutkimus, jotka ovat tärkeitä monessa eri sovelluksessa. Kokonaislukuisten monikulmioiden tutkimuksessa aiheina ovat diskreetti geometria, kombinatoriikka ja kombinatorinen algebra sekä koodausteoriassa silmukan sisältämien virheiden laskeminen [11] [12]. Kokonaislukupisteiden teoriaa sovelletaan myös kryptografiassa ja monessa sovelletun matematiikan ongelmassa [13].

Luvussa 2 johdetaan tarpeellisia tuloksia, joiden pohjalta saadaan luvussa 3 muotoiltua kokonaislukupisteiden laskemiseen käytettäviä funktioita, joissa käytetään Ehrhartin sarjoja. Näissä sarjoissa generoivat funktiot ovat keskeisessä asemassa ja varsinkin niiden termien z^0 kertoimet. Luvun 2 alussa keskitytään generoivien funktioiden perusteisiin. Näitä ovat generoivan funktion määritelmä, yleinen binomikerroin sekä osamurtokehitelmä. Generoivista funktioista esitetään esimerkkinä se, miten Fibonaccin luvut voidaan esittää generoivien funktioiden avulla. Lopulta laajennetaan aihetta Sylvesterin lauseeseen ja Frobeniuksen vaihtorahaongelmaan, jonka kautta päästään käsiksi työkaluihin, joita luvussa 3 tarvitaan.

Luvussa 3 johdetaan Ehrhartin sarja erilaisille monitahokkaille. Aluksi lähdetään yksinkertaisimmasta tilanteesta, yksikkökuutiosta $\square$ ja siitä, miten hilapisteiden määrä muuttuu, kun yksikkökuutiota laajennetaan jollakin luvulla t. Muut erimuotoiset monitahokkaat, joille johdetaan Ehrhartin sarja, ovat standardi simpleksi Δ, pyramidi ja ristikkäiset monitahokkaat $\diamond$. Pickin lauseen jälkeen esitetään vielä teoria monikulmioille, joiden kärjet ovat rationaaliset ja viimeisenä tuloksena tässä gradussa on Eulerin generoiva funktio yleisille rationaalisille monikulmioille.

2 Generoivat funktiot

Tässä luvussa tarkastellaan tärkeitä generoivien funktioiden ominaisuuksia, joita tarvitaan, kun ratkaistaan kokonaislukupisteitä erilaisille kappaleille. Luku pohjautuu lähteeseen [1]. Lähteenä käytetään myös muita lähteitä, mutta nämä mainitaan erikseen niissä kohdissa, joissa niitä on käytetty. Generoivat funktiot ovat hyviä työkaluja, kun esitetään lukujono paljon tiiviimmässä muodossa ja tällainen muotoilu mahdollistaa myös koko jonon muokkaamisen yhdellä operaatiolla samalla kerralla.

2.1 Mikä on generoiva funktio?

Seuraavana määritellään generoiva funktio.

Määritelmä 1. Lukujonoa $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ voidaan kuvata sitä vastaavalla *generoivalla funktiolla* $f(x)$, joka on muotoa

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

eli lukujonon termi a_n on generoivan funktion termin x_n kerroin. Tässä tutkielmassa tarvitaan myöhemmin termin x^0 kerrointa ja merkitään sitä näissä kaavoissa *vakiona*.

Esimerkki 1. Tässä on muutama yksinkertainen esimerkki generoivista funktioista:

a) Lukujonolla $1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots$ on generoiva funktio

$$1 + x + x^2 + x^3.$$

b) Lukujonolla $1, 4, 6, 4, 1, 0, 0, 0, \ldots$ on generoiva funktio

$$1 + 4x^2 + 6x^2 + 4x^3 + x^4 = (1 + x)^4.$$

c) Lukujonolla $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}x + \ldots, \binom{n}{n}, 0, 0, 0, \ldots$ on generoiva funktio

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \ldots \binom{n}{n}x^n = (1 + x)^n.$$

d) Lukujonolla $1, 1, 1, 1, \ldots$ on generoiva funktio

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i.$$

Generoivia funktiota voi muokata samalla tavalla kuin mitä tahansa muutakin funktiota. Esimerkiksi edellisen esimerkin 1 funktio $f(x)$ voidaan kertoa termillä $1 - x$ ja tuloksena saadaan

$$\begin{aligned}(1-x)f(x) =& (1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots) \\ =& (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots) - (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots) \\ =& 1.\end{aligned}$$

Kun tämä yhtälö $(1-x)f(x) = 1$ jaetaan vielä termillä $1 - x$ saadaan, että funktio $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Seuraavaksi tarkastellaan tuloksia siitä, miten voimme ratkaisa termin x^n kertoimen arvon.

2.2 Yleinen binomikerroin

Tässä alaluvussa esitetään menetelmä termin x^n kertoimen määrittämiseksi. Tässä menetelmässä käytetään apuna binomikertoimia. Exponentin sallitaan olevan negatiivinen ja edellisessä luvussa saatu funktio $f(x) = \frac{1}{(1-x)} = (1-x)^{-1}$. Ensin tarvitaan kuitenkin binomikerroinlausetta.

Lause 1. ***Binomikaava*** *Kaikille luvuilla a ja b, sekä luonnoliselle luvulle n pätee*

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}.$$

Todistus. Tiedetään, että vakiot $a^r b^{n-r}$ lausekkeessa $(a+b)^n$ tarkoittavat sitä, kuinka monta kertaa luku r voidaan valita n määrästä lukuja. Luku a tarkoittaa kertoimia lukuun r asti ja luku b on loput luvut. Binomikertoimen määritelmästä tunnetaan, että $\binom{n}{r}$ tarkoittaa kuinka monella tavalla luku r voidaan valita n määrästä lukuja. □

Kun binomikaavassa $a = x$ ja $b = 1$, saadaan muoto $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$, jota nyt tarkastellaan tarkemmin. Koska funktiossa $f(x) = (1-x)^{-1}$ exponentti n on negatiivinen, tarvitaan määritelmä binomikertoimelle, kun n on negatiivinen.

Määritelmä 2. Yleinen binomikerroin on muotoa

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!},$$

missä $r \geq 0$ ja r on kokonaisluku, mutta n voi olla mikä tahansa reaaliluku.

Huomaa, että tämä määritelmä pitää sisällään tavallisen binomikertoimen määritelmän.

Esimerkki 2. Olkoon $n = -2$ ja $r = 5$. Binomikaavalla saadaan tulokseksi

$$\binom{-2}{5} = \frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)}{5!} = \frac{-720}{120} = -6.$$

Jos n on positiivinen kokonaisluku, saadaan vielä toinen muoto binomikaavalle, jossa käytetään miinusmerkkiä hyväksi uuden muodon esittämiseksi.

Lause 2. *Jos n on positiivinen kokonaisluku, niin*

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}.$$

Todistus. Koska n on positiivinen kokonaisuluku, saadaan binomikaava merkittyä toiseen muotoon, kun käytetään miinusmerkkiä luvun n edessä. Muoto on

$$\binom{-n}{r} = \frac{-n(-n-1)\dots(-n-r+1)}{r!}.$$

Otetaan yhtälön oikealta puolelta jokaisesta termistä yhteiseksi tekijäksi luku (-1) ja saadaan

$$\frac{(-1)^r n(n+1)\dots(n+r-1)}{r!}.$$

Lausekkeen osoittajan loppuosa voidaan esittää kertomien avulla toisessa muodossa, joka on

$$(n+r-1)(n+r-2)\dots n = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}.$$

Tästä saadaan muotoiltua binomikaavaksi

$$(-1)^r \frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{r!} = (-1)^r \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r},$$

mikä todistaa väitteen. □

Seuraavaksi voidaankin muodoilla yleinen binomikaava, jossa n voi olla mikä tahansa reaaliluku.

Lause 3 (Yleinen binomikaava)**.** *Kaikille $n \in \mathbb{R}$ pätee*

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r.$$

Esimerkki 3. Tarkistetaan, että kaava antaa saman tuloksen, joka saatiin esimerkissä 1 kohdassa d. Funktio $f(x) = (1-x)^{-1} = (1+y)^{-1}$, kun merkitään $y = -x$. Yleisen binomikaavan mukaan termin y^r kerroin on

$$\binom{-1}{r} = (-1)^r \binom{1+r-1}{r} = (-1)^r,$$

koska $\binom{r}{r} = 1$. Tämä on termin y^r kerroin ja tarvitaan vielä termin x^r kerroin. Tämä saadaan muotoiltua

$$y^r = (-x)^r = (-1)^r x^r,$$

joten saadaan muoto

$$(-1)^r y^r = (-1)^{2r} x^r = 1^r x^r = x^r.$$

Eli termin x^r kertoimeksi saatiin luku 1 aivan kuten funktiolla $f(x)$ pitikin olla, joten kaava pätee tässä esimerkissä.

Ratkaistaan vielä toinen esimerkki aiheesta.

Esimerkki 4. Ratkaistaan lausekkeen $(1 + x)^{-3}$ kertoimet. Nyt täytyy selvittää $\binom{-3}{r}$ arvot eri luvun r arvoille. Lauseesta 2 saadaan

$$\binom{-3}{r} = (-1)^r \binom{3 + r - 1}{r} = (-1)^r \binom{r + 2}{r} = (-1)^r \frac{(r + 2)(r + 1)}{2}.$$

Lasketaan ensimmäiset kertoimet. Kun $r = 0$, saadaan $(-1)^0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ ja kun $r = 1$, saadaan $(-1)^1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{2} = -3$. Kun $r = 2$, saadaan $(-1)^2 \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$. Yleisesti nähdään, että

$$(1 + x)^{-3} = 0 - 3x + 6x^2 - \ldots + (-1)^n \frac{(n + 2)(n + 1)}{2} x^n + \ldots$$

2.3 Osamurtokehitelmä

Jos generoiva funktio on muotoa $\frac{1}{(1+ax^i)^j}$, voidaan käyttää yleistä binomikaavaa, jolla selvitetään termien x^r kertoimet. Jos generoiva funktio taas on muodoltaan esimerksi $\frac{1}{a+bx+cx^2}$ tai vielä monimutkaisempi, niin miten siinä tilanteessa vastaavat kertoimet voi selvittää?

Yksi vaihtoehto on käyttää osamurtokehitelmiä, joilla päästään haluttuun lopputulokseen. Otetaan osamurtokehitelmän käytöstä esimerkki.

Esimerkki 5. Selvitetään funktion $f(x)$ termin x^r kerroin, kun

$$f(x) = \frac{1 + x}{(-2x^2 - 3x + 2)}.$$

Huomataan, että funktion nimittäjän voi kirjoittaa muistikaavojen avulla muodossa

$$\frac{1 + x}{(-2x^2 - 3x + 2)} = \frac{1 + x}{(1 - 2x)(2 + x)}.$$

Nimittäjässä on nyt tulomuoto, joten generoiva funktio voidaan kirjoittaa kahteen osaan käyttäen tuntemattomia A ja B apuna seuraavasti

$$\frac{1 + x}{(1 - 2x)(2 + x)} = \frac{A}{1 - 2x} + \frac{B}{2 + x}.$$

Kun, funktio paloitellaan tällä tavalla, sitä kutsutaan osamurtoihin jaoksi. Seuraavaksi selvitetään A ja B. Ensin lavennetaan molemmat rationaalilausekkeet samannimisiksi eli ensimmäinen lauseke lavennetaan termillä $2+x$ ja toinen termillä $1-2x$. Näin saadaan muoto, joka voidaan merkitä yhtä suureksi alkuperäisen funktion $f(x)$ kanssa ja saadaan

$$\frac{A(2 + x) + B(1 - 2x)}{(1 - 2x)(2 + x)} = f(x) = \frac{1 + x}{(1 - 2x)(2 + x)}.$$

Selvästi osoittajien tulee olla yhtä suuret eli saadaan

$$A(2+x)+B(1-2x)=1+x.$$

Vakiotermeistä pitää tulla yhtä suuret ja polynomeista luvun x suhteen pitää myös tulla yhtä suuret. Kerrotaan sulut auki ja saadaan $2A+Ax+B-2Bx=1+x$, joten saadaan seuraava yhtälöpari

$$\begin{cases} 2A+B=1 \\ (A-2B)x=x. \end{cases}$$

Ratkaisuksi saadaan $A=\frac{3}{5}$ ja $B=-\frac{1}{5}$. Huomataan, että $2+x$ on vielä hieman ongelmallinen, jotta yleistä binomikaavaa voidaan käyttää, mutta lauseke $2+x$ voidaan kirjoittaa toisella tavalla. Muoto pitäisi olla $(1+ax^i)^j$, joten tarvitaan 1 ja tällä hetkellä lausekkeessa on luku 2. Jotta tästä päästään etenemään, muutetaan funtion $f(x)$ esitystä hieman. Polynomi $2+x$ saadaan kirjoitettua toiseen muotoon

$$2+x=2\left(1+\left(\frac{1}{2}x\right)\right).$$

Tästä saadaan funktiolla $f(x)$ seuraava muoto

$$f(x)=\frac{\frac{3}{5}}{1-2x}-\frac{\frac{1}{10}}{1+(\frac{1}{2}x)}.$$

Käsitellään nyt molempia rationaalilausekkeen termejä erikseen. Ensimmäisestä saadaan

$$\frac{3}{5}(1-2x)^{-1}=\frac{3}{5}(1+2x+(2x)^2+(2x)^3+\ldots),$$

eli ensimmäisen termin kerroin on $(\frac{3}{5}2^r$. Toisesta termistä saadaan

$$\frac{-1}{10}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)x\right)^{-1}=\frac{-1}{10}\left(1-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}x\right)^2-\left(\frac{1}{2}x\right)^3+\ldots\right),$$

joten termin x^r kerroin funktiolla $f(x)$ on $(\frac{3}{5})2^r-\frac{1}{10}(\frac{-1}{2})^r$.

Osamurtoihin jaon voi tehdä mille tahansa generoivalle funktiolla, jossa nimittäjä voidaan jakaa yksinkertaisempiin termeihin. Kuitenkin polynomin, jonka aste on 3 tai yli, osamurtoihin jakaminen on haastavaa.

Lause 4 (Osamurtoihin jako)**.** *Kaikille rationaalifunktioille, jotka ovat muotoa*

$$f(x)=\frac{p(x)}{\prod_{k=1}^{m}(x-a_k)^{e_k}},$$

missä polynomin $p(x)$ aste on pienempi kuin $e_1+e_2+\ldots e_m$ ja luvut a_k ovat erisuuria keskenään, on voimassa osamurtoihin jako

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{c_{k,1}}{x-a_k}+\frac{c_{k,2}}{(x-a_k)^2}+\frac{c_{k,e_k}}{(x-a_k)^{e_k}}\right),$$

joillekin kertoimille $c_{k,i}$.

Todistuksen lähde on [5]. Aluksi tarvitaan pari aputulosta, joita käytetään todistuksessa.

Lemma 1 (Jakoalgoritmi polynomeille)**.** *Olkoon f ja g polynomeja. On olemassa polynomit q ja r, joiden* $\deg r < \deg q$ *ja*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x).$$

Todistusta ei esitetä tässä gradussa. Se löytyy lähteestä [6].

Lemma 2 (Laajennettu Euklideen algoritmi polynomeille)**.** *Olkoon f ja g polynomeja, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Tällöin on olemassa polynomit h ja t, joille*

$$f(x)h(x) + g(x)t(x) = 1.$$

Todistusta ei esitetä tässä gradussa. Se löytyy lähteestä [7] ja [8]. Vielä tarvitaan yksi aputulos, jotta päästään varsinaiseen todistukseen.

Lemma 3. *Olkoon f_1, f_2 ja g polynomeja ja oletetaan, että funktioilla f_1 ja g ei ole yhteisiä tekijöitä ja* $\deg g < \deg f_1 + \deg f_2$. *Tällöin voidaan löytää polynomit g_1 ja g_2, joille*

$$\frac{g(x)}{f_1(x)f_2(x)} = \frac{g_1(x)}{f_1(x)} + \frac{g_2(x)}{f_2(x)}$$

ja $\deg(g_1) < \deg(f_1)$ *sekä* $\deg(g_2) < \deg(f_2)$.

Todistus. Laajennetun Eukleideen algoritmin avulla löydetään polynomit h_1 ja h_2 joille

$$1 = f_1(x)h_2(x) + f_2(x)h_1(x).$$

Tästä saadaan vielä uusi muoto funktion g avulla eli

$$g(x) = f_1(x)(h_2(x)g(x)) + f_2(x)(h_1(x)g(x)).$$

Nyt jakoalgoritmin avulla saadaan muoto

$$h_1(x)g(x) = f_1(x)q(x) + g_1(x),$$

missä $\deg(g_1) < \deg(f_1)$. Olkoon

$$g_2(x) = h_2(x)g(x) + q(x)f_2(x).$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} g(x) =& f_1(x)g_2(x) - f_1(x)f_2(x)q(x) + f_2(x)f_1(x)q(x) + f_2(x)g_1(x) \\ =& f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x) \end{aligned}$$

ja väite saadaan todistettua, sillä nyt

$$\frac{g_1(x)}{f_1(x)} + \frac{g_2(x)}{f_2(x)} = \frac{f_2(x)g_1(x) + f_1(x)g_2(x)}{f_1(x)f_2(x)} = \frac{g(x)}{f_1(x)f_2(x)}.$$

Vielä pitää todistaa, että $\deg(g_2) < \deg(f_2)$. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että $\deg(g_2) \geq \deg(f_2)$. Tästä seuraa, että

$$\deg(f_1 g_2) < \deg(f_1 f_2)$$

ja myös

$$\deg(f_2 g_1) \geq \deg(f_1 f_2).$$

Nyt lausekkeessa $f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x)$ termi $f_1 g_2$ on dominoiva termi, joten

$$\deg(g) = \deg(f_1 g_2 + f_2 g_1) = \deg(f_1 g_2) \geq \deg(f_1 f_2) = \deg f_1 + \deg f_2$$

ja tämä on ristiriita, joten väite on todistettu. $\square$

Todistetaan seuraavaksi varsinainen osamurtoihin jako eli lause 4.

Todistus. Muutetaan alkuperäinen lauseke toiseen muotoon

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{a_r} \frac{g_{ij}(x)}{(f_i(x))^r},$$

jossa g_{ij} on jokin polynomi, jolle $g_{ij} < f_i$. Nyt oletetaan, että f ja g ovat polynomeja ja f voidaan kirjoittaa muotoon $f = f_1^{a_1} \ldots f_r^{a_r}$, jossa f_i ja f_j ei ole yhteisiä tekijöitä kaikille $i \neq j$. Tavoitteena on osoittaa, että $\deg g < \deg f$ ja $g_{ij} < \deg f_i$. Aluksi käytetään lemman 3 tulosta $r - 1$ kertaa ja saadaan muoto

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{h_i(x)}{(f_i(x))^{a_i}},$$

jossa $\deg(h_i) < \deg(f_i^{a_i}) = a_i \deg(f_i)$. Tarkastellaan seuraavaksi summalausekkeen sisälle jäävää osaa

$$\frac{h_i(x)}{f_i(x)^{a_i}}.$$

Jos $a_i = 1$, niin väite pätee suoraan. Oletetaan, että $a_i > 1$. Jakoalgoritmilla saadaan

$$h_i(x) = q(x)f_i(x) + r(x), \tag{1}$$

jossa $\deg r < \deg f_i$. Nyt $\deg f_i = 1$, joten $\deg r < 1$, mistä seuraa, että r on vakio. Seuraavaksi saadaan kirjoitettua muoto

$$\frac{h_i(x)}{f_i(x)^{a_i}} = \frac{q(x)}{f_i(x)^{a_i - 1}} + \frac{r(x)}{f_i(x)^{a_i}}. \tag{2}$$

Nyt joko $q = 0$ tai $q(x)f_i(x)$ on dominoiva termi lausekkeessa (1) ja tässä tapauksessa $\deg h_i = \deg q f_i = \deg q + \deg f_i$. Mutta $\deg h_i < a_i \deg f_i$, joten $\deg q < (a_i - 1)\deg f_i$. Kun toistetaan vaihetta (2) saadaan haluttu osamuroihin jako. Luku i oli valittu mielivaltaiseksi, joten väite pätee. $\square$

2.4 Fibonaccin luvut generoivien funktioiden avulla

Generoivien funktioiden avulla voidaan myös ratkaista ja ilmaista rekursioita, joissa on kokonaisulukukertoimet. Tässä aliluvussa lähteenä on [4]. Generoivilla funktioilla voidaan esittää Fibonaccin luvut, mikä on yksinkertainen esimerkki toisen asteen rekursiosta:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \quad (k \geq 2).$$

Ratkaisuna saadaan Fibonaccin luvut. Esitetään kymmenen ensimmäistä lukua:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_k	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55.

Miten voidaan laskea mikä tahansa F_k Fibonaccin luku, kun $k \geq 2$. Muodostetaan Fibonaccin lukuja vastaava rekursioyhtälö, joka on muotoa

$$f_k = f_{k-1} + f_{k-2}.$$

Seuraavaksi yhtälö muotoillaan generoivien funktioiden avulla. Aloitetaan indeksin k arvosta 2. Tiedetään, että indeksin arvot ovat luvun x potensseja, joten saadaan muoto

$$F(x) = \sum_{k \geq 0} f_k x^k.$$

Tästä saadaan Fibonaccin lukujen rekursioyhtälön avulla muoto

$$\sum_{k \geq 0} f_{k+2} x^k = \sum_{k \geq 0} (f_{k+1} + f_k) x^k = \sum_{k \geq 0} f_{k+1} x^k + \sum_{k \geq 0} + f_k x^k.$$

Yhtälön vasemmasta puolesta saadaan

$$\sum_{k \geq 0} f_{k+2} x^k = \frac{1}{x^2} \sum_{k \geq 0} f_{k+2} x^{k+2} = \frac{1}{x^2} \sum_{k \geq 2} f_k x^k = \frac{1}{x^2}(F(x) - x)$$

ja oikeasta puolesta

$$\sum_{k \geq 0} f_{k+1} x^k + \sum_{k \geq 0} f_k x^k = \frac{1}{x} F(x) + F(x).$$

Yhtälö saadaan nyt muotoon

$$\frac{1}{x^2}(F(x) - x) = \frac{1}{x} F(x) + F(x)$$

tai

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Seuraavaksi muodostetaan osamurtoihin jako. Kirjoitetaan yhtälön nimittäjä tulomuodossa $1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$. Osamurtokehitelmä saadaan muotoon

$$\frac{x}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)} = \frac{A}{1 - \alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x}.$$

Nimittäjän nollakohdat ovat $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, joten osamurtokehitelmä saa muodon

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{B}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}.$$

Ratkaisuksi saadaan

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}.$$

Voidaan myös kirjoittaa toinen muoto

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right) x^k. \end{aligned}$$

Vertailemalla termin x^k kertoimia ja funktion $F(x) = \sum_{k\geq 0} f_k x^k$ määritelmää ja edellistä muotoilua, saadaan vielä suljettu muoto rekursioyhtälölle seuraavasti:

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

Edellä estietty menetelmä rekursion muuttamiseksi ymmärrettävään muotoon osamurtoihin jaon avulla on yksi tärkeistä menetelmistä, joita tarvitaan vielä myöhemmin tässä tutkielmassa.

2.5 Sylvesterin lause

Tässä aliluvussa lähteenä on [4]. Seuraavat ajatukset pohjautuvat Frobeniuksen vaihtorahaongelmaan, jossa vaihdannan välineet on määritelty siten, että kaikkia mahdollisia rahasummia ei ole mahdollista vaihtaa tasan ja kysymyksenä tässä ongelmassa on, mikä on suurin rahasumma, jota ei voi vaihtaa. Oletetaan, että kolikoita vastaa luvut joukossa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_d\}$, joista jokainen a_i on positiivinen kokonaisluku ilman yhteisiä tekijöitä. Miten saadaan kaava suurimmasta arvosta, jota ei voi muodostaa näillä joukon A luvuilla $a_1, a_2, \ldots a_d$? Tätä kutsutaan Frobeniuksen vaihtorahaongelmaksi. Joukko A on siis muotoa

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_d\},$$

jossa $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_d) = 1$ eli suurin yhteinen tekijä on 1. Kutsutaan lukua n edustetuksi (engl. representable), jos se voidaan esittää ei-negatiivisten kokonaislukujen $m_1, m_2, \ldots, m_d$ avulla muodossa

$$n = m_1 a_1 + \ldots + m_d a_d.$$

Kolikkojen tapauksessa tämä tarkottaisi sitä, että rahasumma n on mahdollista muodostaa kolikoista $a_1, a_2, \ldots, a_d$ ja luvut $m_1, m_2, \ldots, m_d$ kuvaavat sitä, kuinka monta kutakin kolikkoa on. Nyt tarvitaan tapa esittää suurin luku, joka ei ole edustettu eli sitä ei voida esittää edellä mainitulla tavalla. Tätä lukua kutstuaan Frobeniuksen luvuksi ja sitä merkitään $g(a_1, a_2, \ldots, a_d)$. Esitetään nyt kaava tapaukselle $d = 2$.

Lause 5. *Jos a_1 ja a_2 ovat positiivisia suhteellisia alkulukuja, niin*

$$g(a_1, a_2) = a_1 a_2 - a_1 - a_2.$$

Tämän kaavan pohjalta Sylvester antoi seuraavan tuloksen.

Lause 6 (Sylvesterin lause)**.** *Oletetaan, että a_1 ja a_2 ovat positiivisia suhteellisia alkulukuja. Täsmälleen puolet luvuista väliltä 1 ja $(a_1 - 1)(a_2 - 1)$ ovat edustettuja.*

Tavoitteena on todistaa molemmat lauseet osamurtokehitelmien avulla. Lähestytään Frobeniuksen vaihtorahaongelmaa rajoitettujen partitioiden funktion avulla. Ensin määritellään, mitä tarkoittaa partitio.

Määritelmä 3. Positiivisen luvun n partitio on multijoukko, jossa sallitaan saman luvun toistuva esiintyminen joukossa $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Tässä joukossa jokainen n_k on positiivinen kokonaisluku, jolle $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Lukuja $n_1, n_2, \ldots, n_k$ kutsutaan partition osiksi.

Nyt päästään rajoitettujen partitioiden funktion määritelmään.

Määritelmä 4. Rajoitettujen partitioiden funktio on muotoa

$$p_A(n) = \#\{(m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \text{jokainen } m_j \geq 0, m_1 a_1 + \ldots + m_d a_d = n\},$$

joka kuvaa partitioiden lukumäärää joukossa n, kun elementteinä käytetään vain joukon A osia. Tällä partitiofunktiolla on siis ominaisuus, että $g(a_1, \ldots a_d)$ on suurin kokonaisluku n, jolle $p_A(n) = 0$.

Rajotettujen partitioden funktiolla on olemassa geometrinen esitystapa, joka alkaa joukolla

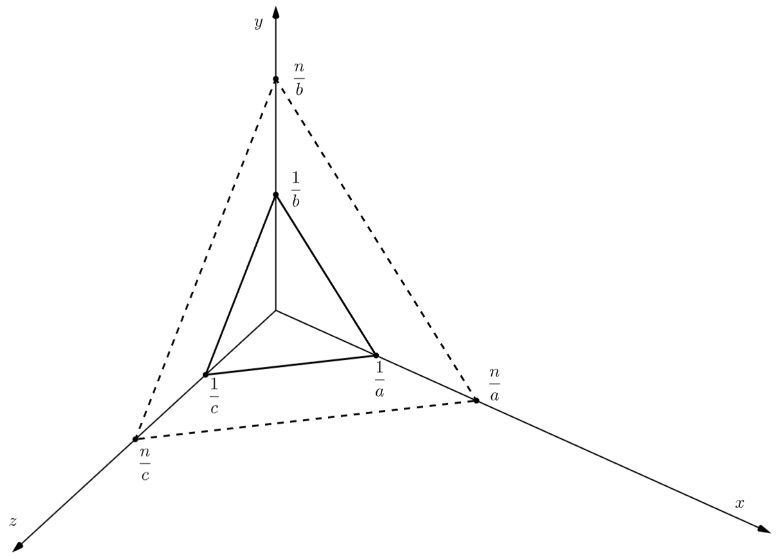
$$\mathcal{P} = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R} \mid \text{kaikilla } x_j \geq 0, x_1 a_1 + \ldots + x_d a_d = 1\}.$$

Joukon $S \subseteq \mathbb{R}^d$ laajennus luvulla n (*eng.* dilate) on muotoa

$$\{(nx_1, nx_2, \ldots, ..., nx_d) \,|(x_1, \ldots, x_d) \in S\}.$$

Funktio $p_A(n)$ laskee tarkasti kaikki kokonaislukupisteet, jotka sijaitsevat joukon $\mathcal{P}$ laajennuksessa luvulla n. Laajennus tarkoittaa tässä sitä, että korvataan yhtälöt $x_1 a_1 + \ldots + x_d a_d = 1$ joukon $\mathcal{P}$ määritelmästä niin, että ne ovat $x_1 a_1 + \ldots + x_d a_d = n$. Joukko $\mathcal{P}$ muodostaa monitahokkaan (engl. polytope). Tilanteesta on helppo piirtää kuva, kun $d \leq 3$. Kuvassa 2 esitetään kolmiulotteinen tilanne. Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa $d = 2$. Rajoitettu partitiofunktio saadaan nyt muotoon

$$p_{\{a,b\}} = \#\{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 \quad | \, k, l \geq 0, ak + bl = n\}.$$



Kuva 2: Monitahokkaan laajennus, kun $d = 3$.

Tässä vaatimuksena on se, että a ja b ovat suhteellisia alkulukuja. Seuraavaksi muotoillaan tilannetta generoivien funktioiden avulla. Aloitetaan kahden geometrisen sarjan tulosta:

$$\left(\frac{1}{1-z^a}\right)\left(\frac{1}{1-z^b}\right) = (1 + z^a + z^{2a} + \ldots)(1 + z^b + z^{2b} + \ldots).$$

Jos sulut kerrotaan auki, saadaan potenssisarja, jossa eksponentit ovat lukujen a ja b lineaarikombinaatiot. Toisaalta termin z^n kerroin kertoo sen, kuinka monella tavalla n voidaan kirjoittaa ei-negatiivisten lukujen a ja b lineaarikombinaationa. Nämä kertoimet kuvaavat myös tarkasti sitä, mitä funktiolla $p_{\{a,b\}}$ saadaan laskettua:

$$\left(\frac{1}{1-z^a}\right)\left(\frac{1}{1-z^b}\right) = \sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0} z^{ak} z^{bl} = \sum_{n\geq 0} p_{\{a,b\}}(n)\, z^n.$$

Eli tämä funktio on generoiva funktio kokonaislukujonolle $\left(p_{\{a,b\}}(n)\right)_{n=0}^{\infty}$. Tarkastellaan vielä tätä funktiota tarkemmin ja esitetään toinen muotoilu edellisen lausekkeen vasemman puolen generoivasta funktiosta. Tämä saadaan kirjoitettua muotoon

$$f(z) = \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)z^n} = \sum_{k\geq 0} p_{\{a,b\}}(k)\, z^{k-n}.$$

Tämä muotoilu ei aivan ole potenssisarja, koska se sisältää negatiivisia eksponentteja. Tällaista sarjaa kutsutaan Laurentin sarjaksi. Potenssisarjalle voisi laskea funktiolle $f(z)$ arvon, kun $z = 0$, mutta, negatiivisten eksponenttien takia näin ei voida tehdä. Jos ensin jaetaan kaikki termit, joissa on negatiivinen eksponentti, saadaan potenssisarja, jonka vakiotermi pysyy samana. Tähän jäljelle jäävään funktioon voidaan sitten sijoittaa $z = 0$. Jotta vakiotermi voidaan laskea, funktio $f(z)$ jaetaan osamurtoihin. Tilanteen monimutkaisuuden takia katsotaan ensin esimerkki yhdessä ulottuvuudessa. Merkitään järjestyksessä luvun 1 juuria a seuraavasti

$$\xi_a = e^{2\pi i/a} = \cos\frac{2\pi}{a} + i\sin\frac{2\pi}{a}$$

ja täten kaikki juuret a ovat $1, \xi_a, \xi_a^2, \xi_a^3, \ldots, \xi_a^{a-1}$.

Esimerkki 6. Etsitään osamurtoihin jako lausekkeelle $\frac{1}{1-z^a}$. Tämän lausekkeen navat (engl. poles) löytyvät ykkösen juurista ξ_a^k kaikille $k = 0, 1, \ldots, a-1$. Osamurroksi saadaan

$$\frac{1}{1-z^a} = \sum_{k=0}^{a-1} \frac{C_k}{z - \xi_a^k}.$$

Käytetään L'Hopitalin sääntöä, jotta löydetään C_k kertoimet ja saadaan

$$C_k = \lim_{z \to \xi_a^k} (z - \xi_a^k) \left(\frac{1}{1-z^a} \right) = \lim_{z \to \xi_a^k} \frac{1}{-az^{a-1}} = -\frac{\xi_a^k}{a}.$$

Yhdistetään edellinen ja saadaan alkuperäinen lauseke muotoon

$$\frac{1}{a - z^a} = -\frac{1}{a} \sum_{k=0}^{a-1} \frac{\xi_a^k}{z - \xi_a^k}.$$

Palataan rajoitettuihin partitiohin ja nyt funktion f navat sijaitsevat kohdassa $z = 0$ ja sen monikerta on n. Vastaavasti kohdassa $z = 1$ monikerta on 2 ja kaikissa muissa kohdissa ξ_a^k tai ξ_b^k monikerta on 1, koska a ja b ovat suhteellisia alkulukuja. Täten osamurtoihin jako saa muodon

$$f(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots + \frac{A_n}{z^n} + \frac{B_1}{z-1} + \frac{B_2}{(z-1)^2} + \sum_{k=0}^{a-1} \frac{C_k}{z - \xi_a^k} + \sum_{j=0}^{b-1} \frac{D_j}{z - \xi_b^j}.$$

Kertoimiksi C_k ja D_j saadaan

$$C_k = -\frac{1}{a(1 - \xi_a^{kb})\xi_a^{k(n-1)}} \text{ ja}$$

$$D_j = -\frac{1}{b(1 - \xi_b^{ja})\xi_a^{j(n-1)}}$$

Lasketaan B_2 kertomalla funktion $f(z)$ molemmat puolet lausekkeella $(z-1)^2$ ja otetaan raja-arvo, kun $z \to 1$ ja saadaan

$$B_2 = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)^2}{(1-z^a)(1-z^b)z^n} = \frac{1}{ab},$$

kun käytetään L'Hopitalin sääntöä kaksi kertaa. L'Hopitalin sääntöä soveltamalla saadaan selvitettyä myös B_1, joka saadaan

$$B_1 = \lim_{z\to 1}(z-1)\left(\frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)z^n} - \frac{\frac{1}{ab}}{(z-1)^2}\right) = \frac{1}{ab} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} - \frac{n}{ab}.$$

Tässä tilanteessa ei tarvitse laskea vakioita $A_1, \ldots, A_n$, koska ne liittyvät vain negatiivisiin eksponentteihin ja ne voidaan jättää huomiotta, sillä ne eivät liity funktion f vakiotermiin. Koska muut vakiot on selvitetty, saadaan vakiotermi Laurentin sarjasta funktiolle f selvittämällä funktion arvo kohdassa $z = 0$. Tämä voidaan ilmaista seuraavasti

$$\begin{aligned} p_{\{a,b\}}(n) =& \left.\left(\frac{B_1}{z-1} + \frac{B_2}{(z-1)^2} + \sum_{k=1}^{a-1} \frac{C_k}{z-\xi_a^k} + \sum_{j=1}^{b-1} \frac{D_j}{z-\xi_b^j}\right)\right|_{z=0} \\ =& - B_1 + B_2 - \sum_{k=1}^{a-1} \frac{C_k}{\xi_a^k} - \sum_{j=1}^{b-1} \frac{D_j}{\xi_b^j}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan tähän B_1, B_2, C_k ja D_j ja saadaan

$$p_{\{a,b\}}(n) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{n}{ab} + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1} \frac{1}{(1-\xi_a^{kb})\xi_a^{kn}} + \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b-1} \frac{1}{(1-\xi_b^{ja})\xi_b^{jn}}.$$

Seuraavaksi muotoillaan edellisen lausekkeen summat hieman eri tavalla. Tähän tarvitaan kaksi uutta määritelmää, lattiafunktio (engl. greatest-integer function) ja murto-osafunktio (engl. fractional-part function). Lattiafunktio $\lfloor x \rfloor$ palauttaa suurimman kokonaisluvun z, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin x. Murto-osafunktio $\{x\}$ palauttaa luvun $x - \lfloor x \rfloor$. Seuraavaksi tarkastellaan tilannetta, jossa $b = 1$. Nyt rajoitettujen partitioden funktio on siis muotoa $p_{\{a,1\}}(n)$, jolla saa laskettua kokonaislukupisteet tietyllä välillä seuraavasti:

$$\begin{aligned} p_{\{a,1\}}(n) =& \#\{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, k, l \geq 0, ak + l = n\} \\ =& \#\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \geq 0, ak \leq n\} \\ =& \#\left\{k \in \mathbb{Z} \,|\, 0 \leq k \leq \frac{n}{a}\right\} \\ =& \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

Näin saadaan toinen muotoilu rajoitettujen partitioiden funktiolle. Tämä on muotoa

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2} + \frac{n}{a} + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1} \frac{1}{(1-\xi_a^k)\xi_a^{kn}} = p_{\{a,1\}}(n) = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + 1.$$

Nyt käytetään murto-osafunktiota $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ ja saadaan kaava, jolla ilmaistaan summa luvun a juurista, jotka ovat yhtä suuria kuin 1:

$$\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1} \frac{1}{(1-\xi_a^k)\xi_a^{kn}} = -\left\{\frac{n}{a}\right\} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}.$$

Voidaan osoittaa, että on olemassa yhtäsuuruus

$$\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{bk})\xi_a^{kn}}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{k})\xi_a^{b^{-1}kn}},$$

missä b^{-1} on kokonaisluku, jolle $b^{-1}b \equiv 1 \mod a$. Tämä saadaan edelleen muotoon

$$\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{bk})\xi_a^{kn}}=\left\{\frac{b^{-1}n}{a}\right\}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}.$$

Viimein päästään tilanteeseen, joka voidaan palauttaa takaisin aikaisempaan funktion $p_{\{a,b\}}$ lausekkeeseen. Tätä muotoa kutsutaan Popoviciuksen lauseeksi.

Lause 7 (Popoviciuksen lause)**.** *Jos a ja b ovat suhteellisia alkulukuja, niin*

$$p_{\{a,b\}}(n)=\frac{n}{ab}-\left\{\frac{b^{-1}n}{a}\right\}-\left\{\frac{a^{-1}n}{b}\right\}+1,$$

missä $b^{-1}b \equiv 1 \mod a$ *ja* $a^{-1}a \equiv 1 \mod b$.

Vielä ennen kuin saadaan Sylvesterin lause 6 ja lause 5 johdettua valmiiksi asti, palataan vielä rajoitettujen partitioiden ongelman $p_{\{a,b\}}(n)$ geometriaan. Kaksiulotteisessa tilanteessa lasketaan janalla sijaitsevat kokonaislukupisteet $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$, joille pätee ehto

$$ax+by=n,$$

jossa $x,y\geq 0$. Kun luvun n arvo kasvaa, janan pituus kasvaa. Voisi ajatella, että todennäköisyys sille, että kokonaislukupiste on janalla kasvaisi, kun janan pituus kasvaa. Todennäköisyyden voisi ajatella kasvavan lineaarisesti, koska jana on yksisuuntainen objekti. Popoviciuksen lauseen muotoilussa $p_{\{a,b\}}(n)$ johtava termi $\frac{n}{ab}$ ja muut termit ovat siihen verrattuna huomattavasti pienempiä ja niiden arvot ovat välillä $[0,1]$. Kuvassa 3 esitetään geometria funktiosta $p_{\{4,7\}}(n)$ ensimmäisille luvun n arvoille. Kuvassa paksumpi jana kuvaa tilannetta, jossa $n = 17 = 4\cdot 7-4-7$. Tämä on janoista viimeinen, joka ei sisällä yhtään kokonaislukupistettä.

Lemma 4. *Jos a ja b ovat suhteellisia alkulukuja ja* $n\in[1,ab-1]$ *ei ole luvun a tai luvun b monikerta, niin*

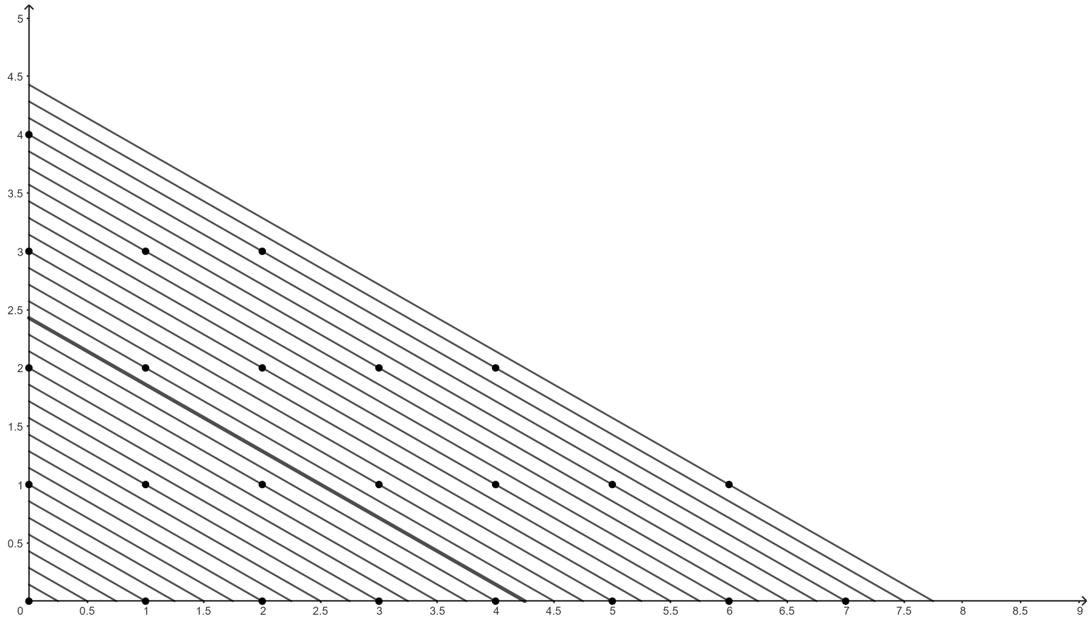
$$p_{\{a,b\}}(n)+p_{\{a,b\}}(ab-n)=1.$$

Toisin sanoen luvulle n, joka on lukujen 1 ja $ab-1$ *välissä ja jotka eivät ole jaollisia luvuilla a ja b, täsmälleen toinen näistä kokonaisluvuista n ja* $ab-n$ *voidaan esittää lukujen a ja b avulla.*

Todistus. Todistus seuraa suoraan Popoviciuksen lauseesta:

$$\begin{aligned}p_{\{a,b\}}(ab-n)=&\frac{ab-n}{ab}-\left\{\frac{b^{-1}(ab-n)}{a}\right\}-\left\{\frac{a^{-1}(ab-n)}{b}\right\}+1\\=&2-\frac{n}{ab}-\left\{\frac{-b^{-1}n}{a}\right\}-\left\{\frac{-a^{-1}n}{b}\right\}\\=&-\frac{n}{ab}+\left\{\frac{b^{-1}n}{a}\right\}+\left\{\frac{a^{-1}n}{b}\right\}\\=&1-p_{\{a,b\}}(n).\end{aligned}$$

Kolmannella rivillä käytetään tietoa, että $\{-x\}=1-\{x\}$, kun $x\notin\mathbb{Z}$ □



Kuva 3: $4x + 7y = n$, $n = 1, 2, \ldots$

Nyt voidaan todistaa lause 5.

Todistus. Pitää osoittaa, että $p_{\{a,b\}}(ab - a - b) = 0$ ja että $p_{\{a,b\}}(n) > 0$ kaikille $n > ab - a - b$. Ensimmäinen väite seuraa lemmasta 4 ja siitä, että $p_{\{a,b\}}(a + b) = 1$. Toisen väitteen todistamiseksi huomataan, että mille tahansa kokonaisluvulle m, $\left\{\frac{m}{a}\right\} \leq 1 - \frac{1}{a}$. Jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle n pätee

$$p_{\{a,b\}}(ab - a - b + n) \geq \frac{ab - a - b + n}{ab} - \left(1 - \frac{1}{a}\right) - \left(1 - \frac{1}{b}\right) + 1 = \frac{n}{ab} > 0.$$

□

Lemman 4 avulla saadaan todistettua myös Sylvesterin lause eli lause 6.

Todistus. Lemman 4 mukaan luvulle n, joka on lukujen 1 ja $ab - 1$ välissä ja joka ei ole jaollinen luvuilla a tai b, täsmälleen yksi luvuista n ja $ab - n$ on edustettuna. Lukujen 1 ja $ab - 1$ välissä on

$$ab - a - b + 1 = (a - 1)(b - 1)$$

kokonaislukua, jotka eivät ole jaollisia luvuilla a tai b. Lopuksi todetaan, että $p_{\{a,b\}}(n) > 0$, jos n on lukuen a tai b monikerta, mikä seuraa suoraan $p_{\{a,b\}}(n)$ määritelmästä. Tästä seuraa, että ei-edustettujen kokonaislukujen määrä on $\frac{1}{2}(a - 1)(b - 1)$. □

2.6 Kolme dimensiota tai enemmän

Jos Frobeniuksen vaihtorahaongelmaan lisätään kolikoita, niin miten ongelma muuttuu? Aloitetaan tarkastelu rajoitettujen partitioiden funktiosta

$$p_A(n) = \#\{(m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d \quad | \text{ jokainen } m_j \geq 0, \quad m_1 a_1 + \ldots m_d a_d = n\},$$

missä $A = \{a_1, \ldots, a_d\}$. Kirjoitetaan funktio $p_A(n)$ generoivien funktoiden avulla:

$$\sum_{n\geq 0} p_A(n) z^n = \left(\frac{1}{1-z^{a_1}}\right)\left(\frac{1}{1-z^{a_2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{1-z^{a_d}}\right).$$

Kirjoitetaan edellinen vielä toiseen muotoon, jossa funktio $p_A(n)$ saadaan esitettyä generoivan funktion ja sen vakiotermin kertoimen avulla, jota merkitään kaavoissa vakiona.

$$p_A(n) = \text{vakio}\left(\frac{1}{(1-z^{a_1})(1-z^{a_2})\ldots(1-z^{a_d})z^n}\right).$$

Oikea puoli laajennetaan osmurtoihin jaon avulla. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että $a_1, \ldots a_d$ ovat pareittain suhteellisia alkulukuja eli millään kahdella luvuista $a_1, a_2, \ldots a_d$ ole yhteisiä tekijöitä. Osamurtokehitelmä saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
f(z) =& \left(\frac{1}{(1-z^{a_1})(1-z^{a_2})\ldots(1-z^{a_d})z^n}\right)\\
=&\frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots + \frac{A_n}{z^n} + \frac{B_1}{z-1} + \frac{B_2}{(z-1)^2} + \ldots + \frac{B_d}{(z-1)^d}\\
&+ \sum_{k=1}^{a_1-1}\frac{C_{1k}}{z-\xi_{a_1}^k} + \sum_{k=1}^{a_2-1}\frac{C_{2k}}{z-\xi_{a_2}^k} + \ldots + \sum_{k=1}^{a_d-1}\frac{C_{dk}}{z-\xi_{a_d}^k}.
\end{aligned}$$

Ratkaisuna saadaan vakion C_{1k} arvoksi

$$C_{1k} = -\frac{1}{a_1(1-\xi_{a_1}^{ka_2})(1-\xi_{a_1}^{ka_3})\ldots(1-\xi_{a_1}^{ka_d})\xi_{a_1}^{k(n-1)}}.$$

Vakioita $A_1, \ldots, A_n$ ei tarvitse selvittää, koska ne eivät vaikuta funktion f vakiotermiin.Vakiot $B_1, \ldots, B_d$ voidaan laskea jonkin symbolisen laskinohjelmiston avulla. Tähän käy esimerkiksi Mathematica. Kun vakiot on laskettu, voidaan laskea funktion f vakiotermi asettamalla funktion $p_A(n)$ arvoksi 0. Näin päädytään muotoon

$$\begin{aligned}
p_A(n) =& \left.\left(\frac{B_1}{z-1} + \ldots + \frac{B_d}{(z-1)^d} + \sum_{k=1}^{a_1-1}\frac{C_{1k}}{z-\xi_{a_1}^k} + \ldots + \sum_{K=1}^{a_d-1}\frac{C_{dk}}{z-\xi_{a_d}^k}\right)\right|_{z=0}\\
=& -B_1 + B_2 - \ldots + (-1)^d B_d - \sum_{k=1}^{a_1-1}\frac{C_{1k}}{\xi_{a_1}^k} - \sum_{k=1}^{a_2-1}\frac{C_{2k}}{\xi_{a_2}^k} - \ldots - \sum_{k=1}^{a_d-1}\frac{C_{dk}}{\xi_{a_d}^k}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan vakion C_{1k} lauseke ja saadaan seuraava summa jaettuna luvulla a_1.

$$\frac{1}{a_1}\sum_{k=1}^{a_1-1}\frac{1}{(1-\xi_{a_1}^{ka_2})(1-\xi_{a_1}^{ka_3})\ldots(1-\xi_{a_1}^{ka_d})\xi_{a_1}^{kn}}.$$

Tämän avulla saadaan muotoiltua Fourier-Dedekind summan määritelmä

$$s_n(a_1, a_2, \ldots, a_m; b) = \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b-1}\frac{\xi_b^{kn}}{(a-\xi_b^{ka_1})(1-\xi_b^{ka_2})\ldots(1-\xi_b^{ka_m})}. \tag{3}$$

Tässä gradussa ei tarkastella näitä summia tarkemmin, mutta Fourier-Dedekindin summan avulla saadaan seuraava tulos.

Lause 8. *Rajoitettujen partitioiden funktio joukolle $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_d\}$, missä kaikki jäsenet a_k ovat pareittain suhteellisia alkulukuja, voidaan laskea*

$$
\begin{aligned}
p_A(n) = & -B_1 + B_2 - \ldots (-1)^d B_d + s_{-n}(a_2, a_3, \ldots a_d; a_1) + s_{-n}(a_1, a_3, a_4, \ldots, a_d; a_2) \\
& + \ldots s_{-n}(a_1, a_2, \ldots, a_{d-1}; a_d).
\end{aligned}
$$

Tässä vakiot $B_1, B_2, \ldots, B_d$ ovat osamurtohaojtelman vakiot.

Esimerkki 7. Ratkaistaan rajoitettujen partitioden funktio, kun $d = 3$ ja kun $d = 4$. Nämä kaavat on osoitettu olevan erittäin hyödyllisiä jaksollisuuden tutkimisessa, mikä on luontainen osa tutkimusta, kun tarkastellaan rajoitettujen partitioiden funktioita $p_A(n)$. Esimerkiksi voidaan visualisoida kuvaajaa funktiolle $p_{a,b,c}(n)$, jonka kuvaajasta tulee "aaltoileva"paraabeli, kuten sen lauseke esittää. Kun $d = 3$ saadaan

$$
\begin{aligned}
p_{a,b,c} = & \frac{n^2}{2abc} + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right) \\
& + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1} \frac{1}{(1-\xi_a^{kb})(1-\xi_a^{kc})\xi_a^{kn}} + \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b-1} \frac{1}{(1-\xi_b^{kc})(1-\xi_b^{ka})\xi_b^{kn}} \\
& + \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{c-1} \frac{1}{(1-\xi_c^{ka})(1-\xi_c^{kb})\xi_c^{kn}}.
\end{aligned}
$$

Kun $d = 4$ rajoitettujen partitioiden funktio saadaan muotoon

$$
\begin{aligned}
p_{a,b,c,d}(n) = & \frac{n^3}{6abcd} + \frac{n^2}{4}\left(\frac{1}{abc} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{bcd}\right) \\
& + \frac{n}{12}\left(\frac{3}{ab} + \frac{3}{ac} + \frac{3}{ad}\frac{3}{bc} + \frac{3}{bd} + \frac{3}{cd} + \frac{a}{bcd} + \frac{b}{acd} + \frac{c}{abd} + \frac{d}{abc}\right) \\
& + \frac{1}{24}\left(\frac{a}{bc} + \frac{a}{bd} + \frac{a}{cd} + \frac{b}{ad} + \frac{b}{ac} + \frac{b}{cd} + \frac{c}{ab} + \frac{c}{ad} + \frac{c}{bd} + \frac{d}{ab} + \frac{d}{ac} + \frac{d}{bc}\right) \\
& - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \\
& + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1} \frac{1}{(1-\xi_a^{kb})(1-\xi_a^{kc})(1-\xi_a^{kd})\xi_a^{kn}} \\
& + \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b-1} \frac{1}{(1-\xi_b^{kc})(1-\xi_b^{kd})(1-\xi_b^{ka})\xi_b^{kn}} \\
& + \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{c-1} \frac{1}{(1-\xi_c^{kd})(1-\xi_c^{ka})(1-\xi_c^{kb})\xi_c^{kn}} \\
& + \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{(1-\xi_d^{ka})(1-\xi_d^{kb})(1-\xi_d^{kc})\xi_d^{kn}}.
\end{aligned}
$$

Nyt ollaan muotoiltu generoivista funktioista lähtien kaikki työkalut, joita tarvitaan seuraavaksi, kun lähdetään johtamaan Ehrhartin sarjoja erilaisille monitahokkaille.

3 Diskreettejä tilavuuksia

Tässä luvussa määritetään monitahokkaiden kokonaislukupisteitä Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^d$, jossa kokonaislukupisteet $\mathbb{Z}^d$ muodostavat hilan. Näitä kokonaislukupisteitä kutsutaan usein hilapisteiksi tai kokonaislukupisteiksi. Tässä luvussa tarkastellaan hilapisteiden matematiikkaa erilaisille monitahokkaille. Luku perustuu lähteeseen [4].

3.1 Monitahokkaat

Monitahokas voidaan määritellä yhdessä ulottuvuudessa $d = 1$ suljetuksi väliksi ja kokonaislukupisteiden määrä välillä $\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right]$ on $\lfloor\frac{c}{d}\rfloor - \lfloor\frac{a-1}{b}\rfloor$. Kahdessa ulottuvuudessa $d = 2$ konveksi monitahokas on konveksi monikulmio, joka on konveksi osajoukko joukolle $\mathbb{R}^2$. Tätä monikulmiota ympäröi suljettu käyrä, jossa on äärellisen monta janaa. Yleinen konveksin monitahokkaan määritelmä, kun ulottuvuus on d, on konveksi verho, jossa on äärellinen määrä pisteitä joukossa $\mathbb{R}^d$. Tarkasti määritelmä muotoillaan seuraavasti.

Määritelmä 5. Äärelliselle pistejoukolle $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{R}^d$, monitahokas $\mathcal{P}$ on pienin konveksi joukko, joka sisältää nämä pisteet. Merkitään

$$\mathcal{P} = \{\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n \quad | \, \lambda_k \geq 0 \text{ ja } \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1\}.$$

Tätä määritelmää kutsutaan joukon $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *konveksiksi verhoksi* ja se kuvaa monitahokkaan $\mathcal{P}$ kärkipisteitä. Sama merkitään lyhyemmin

$$\mathcal{P} = \operatorname{conv}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}.$$

Toisin sanoen se on konveksi verho pisteistä $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Erityisesti monitahokas $\mathcal{P}$ on joukon $\mathbb{R}^d$ suljettu osajoukko. Osaa seuraavaksi tarkasteltavista monitahokkaista ei määritellä näin, vaan ne esitetään rajoitettuina äärellisinä puoliavaruuksina ja hypertasoina. *Hypertaso* on taso, jonka dimensio on $d-1$. Monitahokkaan $\mathcal{P}$ dimensio on affiinin avaruuden dimensio

$$\operatorname{span}\mathcal{P} = \{\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad | \, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{P}, \, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

joka sisältää siis kaikki lineaarikombinaatiot monitahokkaan $\mathcal{P}$ pisteistä. Jos $\mathcal{P}$ on dimensioltaan d merkitään $\dim\mathcal{P} = d$ ja sitä kutsutaan d-monitahokkaaksi. Huomioitavaa on se, että monitahokkaan $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ dimensio ei tarvitse olla d, vaan se voi olla pienempi.

Hypertasoa merkitään $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \, | \, \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b\}$ ja sitä sanotaan *tukevaksi hypertasoksi*, jos $\mathcal{P}$ on yhdellä puolella hypertasoa H. Toisin sanoen $\mathcal{P} \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \, | \, \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \leq b\}$ tai $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \, | \, \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \geq b\}$. Monitahokkaan $\mathcal{P}$ tahkoksi kutsutaan osaa $\mathcal{P} \cap H$, missä H on tukeva hypertaso monitahokkaalle $\mathcal{P}$. Huomioitavaa on, että monitahokas $\mathcal{P}$ on itsensä tahko, koska sen tukeva hypertaso on $\mathbb{R}^d$ ja tyhjä joukko $\varnothing$ on myös monitahokkaan $\mathcal{P}$ tahko ja sitä vastaa tukeva hypertaso, joka ei leikkaa joukkoa $\mathcal{P}$. Kutsutaan $d-1$-ulotteisia tahkoja tahkoiksi, 1-ulotteisia tahkoja reunoiksi ja 0-ulotteisia tahkoja kärjiksi. Konveksilla d-monitahokkaalla on ainakin

$d+1$ kärkeä. Jos konveksilla d-monitahokkaalla on täsmälleen $d+1$ kärkeä, sitä sanotaan d-simpleksiksi (engl. simplex). Jokainen 1-ulotteinen konveksi monitahokas on 1-simpleksi, jota yleensä kutsutaan janaksi. Kahdessa dimensiossa 2-simpleksi on kolmio ja kolmessa dimensiossa 3-simpleksi on tetraedri. Konveksi monitahokas $\mathcal{P}$ on *kokonaislukuinen*, jos kaikki sen kärjet voidaan esittää kokonaislukupisteinä ja *rationaalinen*, jos sen kärjet voidaan esittää rationaalilukupisteinä.

3.2 Yksikkökuutio

Tarkastellaan ensin yksikkökuutiota, jota merkitään d-kuutioksi $\square = [0,1]^d$. Yksikkökuutiolla on yksinkertainen geometria, mutta silti se tarjoaa monia mielenkiintoisia kysymyksiä tarkasteltavaksi. Yksikkökuution kärkipisteiden kuvaus on joukko 2^d kärkipisteitä $\{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \quad | \, x_k = 0 \text{ tai } 1\}$. Kuutio määritellään seuraavasti:

$$\square = \{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \quad | \, 0 \leq x_k \leq 1 \text{ jokaiselle } k = 1, 2, \ldots, d\}.$$

Rajaavia hypertasoja on $2d$ kappaletta ja ne ovat $x_1 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1, \ldots, x_d = 0, x_d = 1$. Jatkossa oletetaan, että kaikki hypertasot ovat sellaisia, että missään joukossa $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad | \, \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b\}$ kaikki pisteet $\mathbf{a}$ eivät ole nollia. Lasketaan seuraavaksi diskreetti tilavuus mille tahansa kokonaislukuiselle yksikkökuution $\square$ laajennukselle. Toisin sanoen lasketaan kuinka monta kokonaislukupistettä on joukossa $t\square \cap \mathbb{Z}^d$ kaikille luvuille $t \in \mathbb{Z}_{>0}$. Nyt $t\mathcal{P}$ tarkoittaa laajennettua monitahokasta

$$\{(tx_1, tx_2, \ldots, tx_d) \quad | \, (x_1, x_2, \ldots x_d) \in \mathcal{P}\},$$

mille tahansa monitahokkaalle $\mathcal{P}$. Miten saadaan laskettua yksikkökuution $\square$ tilavuus? Laajennetaan yksikkökuutiota kokonaisluvulla t, kuten esitetään kuvassa 4 ja saadaan laskettua

$$\#(t\square \cap \mathbb{Z}^d) = \#([0,t]^d \cap \mathbb{Z}^d) = (t+1)^d.$$

Merkitään yleisesti, että *hilapisteiden lukumäärä* monitahokkaan $\mathcal{P}$ laajennuksessa luvulla t on

$$L_{\mathcal{P}}(t) = \#(t\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d).$$

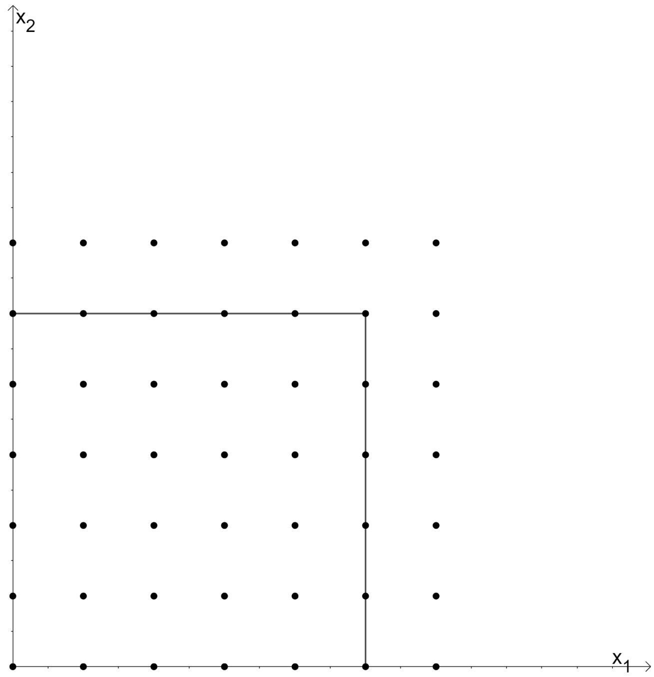
Tämä on hyödyllinen objekti, jota kutsutaan myös monitahokkaan $\mathcal{P}$ *diskreetiksi tilavuudeksi.* Voidaan myös ajatella, että monitahokas $\mathcal{P}$ on vakio ja kutistetaan luvun t avulla kokonaislukujen hilaa ja saadaan hilapisteiden lukumääräksi

$$L_{\mathcal{P}}(t) = \# \left(\mathcal{P} \cap \frac{1}{t} \mathbb{Z}^d \right).$$

Samalla merkintätävalla yksikkökuutiolla $L_{\square}(t) = (t+1)^d$, on polynomi muuttujan t suhteen. Huomataan, että vakiot tässä polynomissa ovat binomikertoimet $\binom{d}{k}$, missä $d \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entä miten määritellään yksikkökuution $\square$ *sisäpuoli* $\square^\circ$? Sisäpisteiden lukumäärä yksikkökuutiossa $t\square^\circ$ on

$$L_{\square^\circ} = \#(t\square^\circ \cap \mathbb{Z}^d) = \#((0,t)^d \cap \mathbb{Z}^d) = (t-1)^d$$

Huomioitavaa on, että tämä polynomi voidaan kirjoittaa myös muodossa $(-1)^d L_{\square}(-t)$, jossa se kuvaa hilapisteiden laskemista negatiivisille kokonaisluvuille. Seuraavaksi määritellään tärkeä työkalu monitahokkaan $\mathcal{P}$ analysointiin. Käytännössä määritetään funktiolle $L_{\mathcal{P}}$ generoiva funktio.



Kuva 4: Viides laajennus yksikkökuutiolle $\square$, kun dimensio on kaksi.

Määritelmä 6. Funktiota $L_{\mathcal{P}}$ vastaava generoiva funktio on

$$\mathrm{Ehr}_{\mathcal{P}}(z) = 1 + \sum_{t \geq 1} L_{\mathcal{P}}(t) z^t.$$

Tätä generoivaa funktiota kutsutaan monitahokkaan $\mathcal{P}$ Ehrhartin sarjaksi.

Muotoillaan seuraavaksi Ehrhartin sarja yksikkökuutiolle $\square$. Ensin tarvitaan Eulerin luvun määritelmä.

Määritelmä 7. *Eulerin luku* $A(d,k)$ määritellään generoivan funktion avulla

$$\sum_{j \geq 0} j^d z^j = \frac{\sum_{k=0}^{d} A(d,k) z^k}{(1-z)^{d+1}}.$$

Polynomi $\sum_{k=0}^{d} A(d,k) z^k$ on rationaalifunktion osoittaja

$$\left(z \frac{d}{dz}\right)^d \left(\frac{1}{1-z}\right) = z \underbrace{\frac{d}{dz} \cdots z \frac{d}{dz}}_{d \text{ kertaa}} \left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Eulerin luvuilla on monia mielenkiintoisia ominaisuuksia. Näitä ovat esimerkiksi

$$\begin{aligned}A(d,k) =&A(d,d+1-k),\\ A(d,k) =&(d-k+1)A(d-1,k-1)+kA(d-1,k),\\ \sum_{k=0}^{d} A(d,k) =&d!,\\ A(d,k) =& \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{d+1}{j}(k-j)^d,\end{aligned}$$

jokaiselle $1 \leq k \leq d$. Ensimmäiset Eulerin luvut $A(d,k)$, kun $0 \leq k \leq d$ ovat

$$\begin{array}{llllllll} d=0: & 0 \\ d=1: & 0 & 1 \\ d=2: & 0 & 1 & 1 \\ d=3: & 0 & 1 & 4 & 1 \\ d=4: & 0 & 1 & 11 & 11 & 1 \\ d=5: & 0 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ d=6: & 0 & 1 & 57 & 302 & 302 & 57 & 1. \end{array}$$

Näiden määritelmien avulla saadaan esitettyä Ehrhartin sarja yksikkökuutiolle $\square$ käyttämällä Eulerin lukuja:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ehr}_{\square}(z) =&1+\sum_{t\geq 1}(t+1)^d z^t = \sum_{t\geq 0}(t+2)^d z^t = \frac{1}{z}\sum_{t\geq 1} t^d z^t\\ =&\frac{\sum_{k=1}^{d} A(d,k)z^{k-1}}{(1-z)^{d+1}}.\end{aligned}$$

Nyt ollaan saatu johdettua seuraava lause.

Lause 9. *Olkoon $\square$ d-yksikkökuutio.*

a) Yksikkökuution $\square$ hilapisteet lasketaan seuraavasti funktiolla

$$L_{\square}(t) = (t+1)^d = \sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}t^k.$$

b) Negatiivisille kokonaisluvulle kokonaislukupisteet saadaan laskettua relaatiosta

$$(-1)^d L_{\square}(-t) = L_{\square^{\circ}}(t).$$

c) Ehrhartin sarja yksikkökuutiolla $\square$ on $\mathrm{Ehr}_{\square}(z) = \frac{\sum_{k=1}^{d} A(d,k)z^{k-1}}{(1-z)^{d+1}}$.

3.3 Standardi simpleksi

Standardi simpleksi Δ, jonka dimensio on d, on $d+1$ pisteen konveksi verho, jotka ovat $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$ ja origo. Tässä $\mathbf{e}_j$ on yksikkövektori $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, jossa on luku 1 kohdassa j. Kuvassa 5 esitetään Δ, kun $d = 3$. Standardi simpleksi Δ voidaan myös muotoilla sen hypertasojen avulla. Tästä saadaan

$$\Delta = \left\{(x_1, x_2 \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \quad | \, x_1 + x_2 + \cdots + x_d \leq 1 \text{ ja } x_k \geq 0\right\}.$$

Kun standardia simpleksiä laajennetaan luvulla t ja merkitään $t\Delta$, saadaan

$$t\Delta = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \quad | \, x_1 + x_2 + \cdots + x_d \leq t \text{ ja } x_k \geq 0\right\}.$$

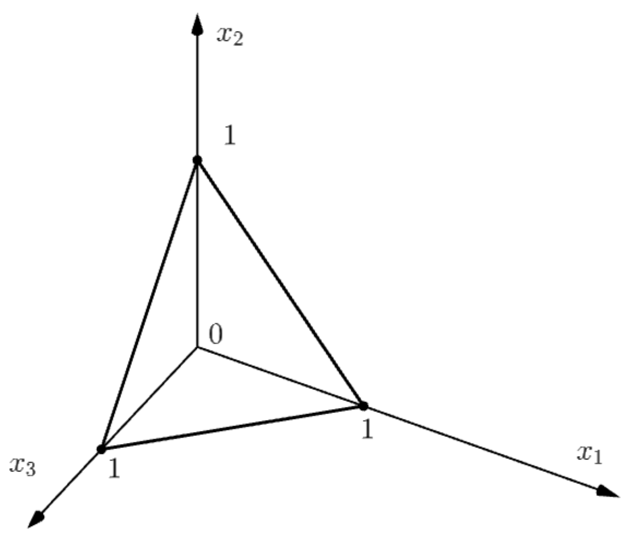
Jotta voidaan laskea standardin simpleksin Δ diskreetti tilavuus, täytyy käyttää hieman erilaista muotoilua, sillä aikaisemmin luvussa 2 funktiot määriteltiin yhtälön avulla ja standardi simpleksi on määritelty epäyhtälön avulla. Tavoitteena on laskea kaikki kokonaislukuratkaisut $(m_1, m_2, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$, joille

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_d \leq t. \tag{4}$$

Muutetaan tämä epäyhtälö, jossa on d muuttujaa yhtälöksi, jossa on $d+1$ muuttujaa. Tähän tarvitaan lisämuuttuja (engl. slack variable) $m_{d+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, joka on yhtälön 4 oikean ja vasemman puolen erotus. Ratkaisut ovat $(m_1, m_2, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ ja yhtälössä 4 ratkaisut ovat $(m_1, m_2, \ldots, m_{d+1}) \in \mathbb{Z}^{d+1}_{\geq 0}$ ja merkitään

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_{d+1} = t.$$

Nyt voidaan käyttää luvun 2 keinoja:



Kuva 5: Standardi simpleksi Δ, kun $d = 3$.

$$\begin{aligned}
\#(t\Delta \cap \mathbb{Z}^d) &= \text{vakio}\left(\left(\sum_{m_1\geq 0} z^{m_1}\right)\left(\sum_{m_2\geq 0} z^{m_2}\right)\cdots\left(\sum_{m_{d+1}\geq 0} z^{m_{d+1}}\right)z^{-t}\right)\\
&= \text{vakio}\left(\frac{1}{(1-z)^{d+1}z^t}\right). \qquad (5)
\end{aligned}$$

Tässä ei nyt tarvita osamurtokehitelmää, vaan voidaan käyttää binomisarjaa

$$\frac{1}{(1-z)^{d+1}} = \sum_{k\geq 0}\binom{d+k}{d}z^k, \qquad (6)$$

kun $d \geq 0$. Jotta löydetään vakiotermin kerroin kaavassa 5 pitää löytää kertoimet z^t binomisarjassa 6, jotka ovat $\binom{d+t}{d}$. Diskreetti tilavuus simpleksille Δ saadaan kaavasta $L_\Delta(t) = \binom{d+t}{d}$. Se on polynomi kokonaislukumuuttujan t suhteen ja sen aste on d. Tämän polynomifunktion kertoimilla on toinen muotoilutapa perinteisemmän kombinatoriikan puolelta:

$$L_\Delta(t) = \frac{1}{d!}\sum_{k=0}^{d}(-1)^{d-k}\,\mathrm{stirl}(d+1,k+1)t^k,$$

missä $\mathrm{stirl}(n,j)$ on ensimmäisen tyypin Stirlingin luku. Nyt huomataan, että kaava 6 on määritelmän mukaisesti standardin simpleksin Δ Ehrhartin sarja. Lasketaan samalla tavalla sisäpisteet Δ° standardille d-simpleksille. Nyt käytetään lisämuuttujaa $m_{d+1} > 0$, jonka avulla epäyhtälömuoto on muutettu yhtälöksi:

$$\begin{aligned}
L_{\Delta^\circ}(t) &= \#\left\{(m_1,m_2,\ldots,m_d)\in\mathbb{Z}^d_{>0} : m_1+m_2+\cdots+m_d < t\right\}\\
&= \#\left\{(m_1,m_2,\ldots,m_{d+1})\in\mathbb{Z}^{d+1}_{>0} : m_1+m_2+\cdots+m_{d+1} = t\right\}.
\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}
L_{\Delta^\circ}(t) &= \text{vakio}\left(\left(\sum_{m_1>0} z^{m_1}\right)\left(\sum_{m_2>0} z^{m_2}\right)\cdots\left(\sum_{m_{d+1}>0} z^{m_{d+1}}\right)z^{-t}\right)\\
&= \text{vakio}\left(\left(\frac{z}{1-z}\right)^{d+1}z^{-t}\right)\\
&= \text{vakio}\left(z^{d+1-t}\sum_{k\geq 0}\binom{d+k}{d}z^k\right)\\
&= \binom{t-1}{d}.
\end{aligned}$$

Voidaan myös osoittaa, että

$$(-1)^d\binom{d-t}{d} = \binom{t-1}{d}. \qquad (7)$$

Nyt ollaan saatu standardin simpleksin hilapisteet ja Ehrhartin sarjan johdettua:

Lause 10. *Olkoon Δ standardi d-simpleksi.*

a) *Standardin simpleksin Δ hilapisteet lasketaan polynomilla $L_\Delta(t) = \binom{d+t}{d}$.*

b) *Negatiivisille kokonaisluvuille saadaan $(-1)^d L_\Delta(-t) = L_{\Delta^\circ}(t)$.*

c) *Ehrhartin sarja standardille simpleksille Δ on $\mathrm{Ehr}_\Delta(z) = \frac{1}{(1-z)^{d+1}}$.*

3.4 Hilapisteiden laskeminen pyramidille Bernoullin polynomien avulla

Bernoullin polynomien ja tiettyjen pyramidien välillä on yhteys. Bernoullin polynomit $B_k(x)$ mutoillaan generoivien funktioiden avulla ja näin saadaan

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k(x)}{k!} z^k.$$

Bernoullin polynomit ovat erittäin tärkeä osa esimerkiksi Riemannin zeta-funktion tutkimisessa ja monissa muissa sovelluksissa ja ne on nimetty Jacob Bernoullin mukaan. Ensimmäiset Bernoullin polynomit ovat

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1, \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x, \\
B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}, \\
B_7(x) &= x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x.
\end{aligned}$$

Bernoullin lukuja merkitään $B_k = B_k(0)$ ja niillä on generoiva funktio

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} z^k.$$

Lemma 5. *Kokonaisluvuille $d \geq 1$ ja $n \geq 2$,*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{d-1} = \frac{1}{d} \left(B_d(n) - B_d \right).$$

Todistus. Muotoillaan generoivaa funktiota $\frac{B_d(n)-B_d}{d!}$ ja saadaan

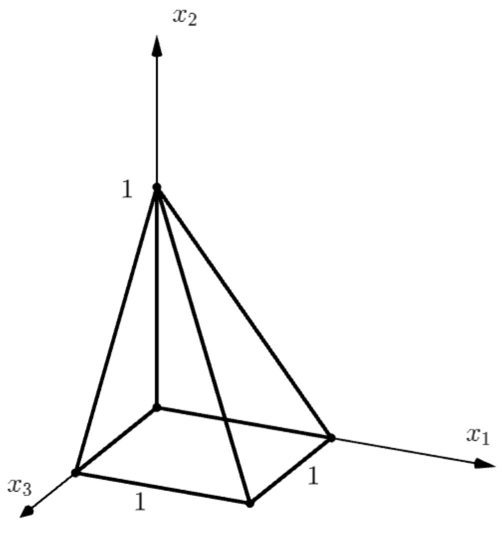
$$\sum_{d\geq 0}\frac{B_d(n)-B_d}{d!}z^d = z\frac{e^{nz}-1}{e^z-1} = z\sum_{k=0}^{n-1}e^{kz} = z\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j\geq 0}\frac{(kz)^j}{j!}$$
$$= \sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1}k^j\right)\frac{z^{j+1}}{j!} = \sum_{j\geq 1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}k^{j-1}\right)\frac{z^j}{(j-1)!}.$$

□

Muotoillaan yksikkökuutio, jonka dimensio on$(d-1)$ ja kiinnitetään se avaruuteen $\mathbb{R}^d$. Muodostetaan d-ulotteinen pyramidi lisäämällä kärki $(0,0,\ldots,0,1)$, kuten esitetään kuvassa 6. Tarkasti määriteltynä tällä objektilla on seuraava hypertasokuvaus:

$$\mathcal{P} = \left\{(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d \quad | \quad 0\leq x_1,x_2,\ldots,x_{d-1}\leq 1-x_d\leq 1\right\}.$$

Määritelmän mukaan tämä monitahokas $\mathcal{P}$ sisältyy d-kuutioon. Sen kärjet ovat oikeastaan alijoukko d-kuution kärkipisteille.



Kuva 6: Pyramidi $\mathcal{P}$, kun dimensio on 3.

Seuraavaksi lasketaan hilapisteet monitahokkaan $\mathcal{P}$ kokonaislukulaajennuksille. Tämä lukumäärä on $\#\left\{(m_1,m_2,\ldots,m_d)\in\mathbb{Z}^d \quad | 0\leq m_k\leq t-m_d\leq t \text{ jokaiselle } k=1,2,\ldots,d-1\right\}$. Tässä tapauksessa lasketaan ratkaisut yhtälöille $0\leq m_k\leq t-m_d\leq t$. Kun valitaan kokonaisluku m_d (lukujen 0 ja t välistä), saadaan $t-m_d+1$ vaihtoehtoa jokaiselle kokonaisluvulle $m_1,m_2,\ldots,m_{d-1}$. Täten saadaan hilapisteet

$$L_{\mathcal{P}}(t) = \sum_{m_d=0}^{t}(t-m_d+1)^{d-1} = \sum_{k=1}^{t+1}k^{d-1} = \frac{1}{d}\left(B_d(t+2)-B_d\right),$$

jotka seuraavat Lemmasta 5. Tämä on selvästi polynomi muuttujan t suhteen. Tarkastellaan seuraavaksi tarkemmin monitahokkaan $\mathcal{P}$ sisäpuolella olevia hilapisteitä, joita merkitään

$$L_{\mathcal{P}} \circ (t) = \# \left\{ (m_1, m_2, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 < m_k < t - m_d < t \\ \text{jokaiselle } k = 1, 2, \ldots, d-1 \end{array} \right\}.$$

Samoilla menetelmillä saadaan muoto

$$L_{\mathcal{P}} \circ (t) = \sum_{m_d=1}^{t-1} (t - m_d - 1)^{d-1} = \sum_{k=0}^{t-2} k^{d-1} = \frac{1}{d} \left(B_d(t-1) - B_d \right).$$

Bernoullin polynomeilla on seuraava symmetrinen muoto

$$B_d(1-x) = (-1)^d B_d(x).$$

Kun tämä tieto yhdistetään siihen, että

$$B_d = 0 \text{ jokaiselle parittomalle } d \geq 3,$$

saadaan relaatio

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{P}}(-t) &= \frac{1}{d} \left(B_d(-t+2) - B_d \right) = \frac{1}{d} \left(B_d(1-(t-1)) - B_d \right) \\ &= (-1)^d \frac{1}{d} \left(B_d(t-1) - B_d \right) = (-1)^d L_{\mathcal{P}\circ}(t). \end{aligned}$$

Seuraavaksi lasketaan Ehrhartin sarja monitahokkaalle $\mathcal{P}$. Tehdään tämä hieman yleisemmän muotoilun avulla. Lasketaan se siis $(d-1)$-monitahokkaalle $\mathcal{Q}$, jolla on kärkipisteet $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Merkitään $\mathrm{Pyr}(\mathcal{Q})$ pyramidia yli monitahokkaan $\mathcal{Q}$. Reunapisteiksi saadaan $(\mathbf{v}_1, 0), (\mathbf{v}_2, 0), \ldots, (\mathbf{v}_m, 0), (0, \ldots, 0, 1)$. Ylempänä määritelty d-monitahokas $\mathcal{P}$ on yhtä kuin $\mathrm{Pyr}(\square)$, kun käytetään monitahokkaana $(d-1)$-kuutiota $\square$. Kokonaislukupisteiden lukumäärä pyramidissa $t\,\mathrm{Pyr}(\mathcal{Q})$ on

$$L_{\mathrm{Pyr}(\mathcal{Q})}(t) = 1 + L_{\mathcal{Q}}(1) + L_{\mathcal{Q}}(2) + \cdots + L_{\mathcal{Q}}(t) = 1 + \sum_{j=1}^{t} L_{\mathcal{Q}}(j),$$

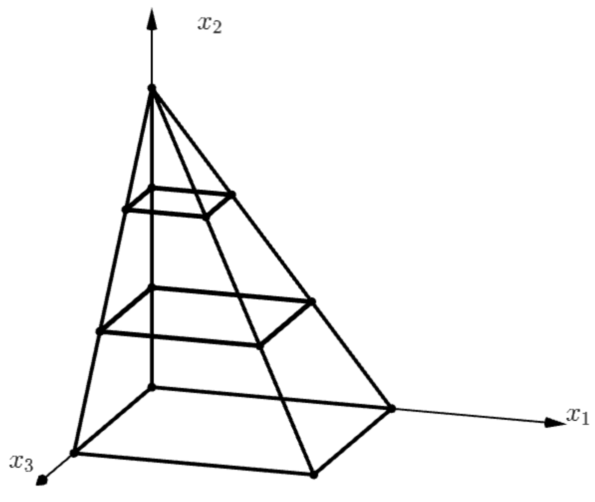
koska pyramidissa $t\,\mathrm{Pyr}(\mathcal{Q})$ on yksi hilapiste, jossa x_d-koordinaatti on t , $L_{\mathcal{Q}}(1)$ kappaletta x_d-koordinaatteja hilapisteille $t-1$, $L_{\mathcal{Q}}(2)$ kappaletta x_d-koordinaatteja hiilapisteille $t-2$, jne., kunnes saavutetaan $L_{\mathcal{Q}}(t)$, jossa hilapisteen koordinaatti on $x_d = 0$. Kuvassa 7 esitetään tilanne, jossa $t = 3$ pyramidille, jonka pohjana on neliö. Tämän $L_{\mathrm{Pyr}(\mathcal{Q})}(t)$ muotoilun avulla saadaan laskettua Ehrhartin sarja pyramidille $\mathrm{Pyr}(\mathcal{Q})$ käyttämällä Ehrhartin sarjaa monitahokkaalle $\mathcal{Q}$.

Lause 11. *Ehrhartin sarja monitahokkaalle $\mathcal{Q}$ on* $\mathrm{Ehr}_{\mathrm{Pyr}(\mathcal{Q})}(z) = \frac{\mathrm{Ehr}_{\mathcal{Q}}(z)}{1-z}$.

Todistus.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ehr}_{\mathrm{Pyr}(\mathcal{Q})}(z) &= 1 + \sum_{t\geq 1} L_{\mathrm{Pyr}(\mathcal{Q})}(t) z^t = 1 + \sum_{t\geq 1}\left(1 + \sum_{j=1}^{t} L_{\mathcal{Q}}(j)\right) z^t \\
&= \sum_{t\geq 0} z^t + \sum_{t\geq 1}\sum_{j=1}^{t} L_{\mathcal{Q}}(j) z^t = \frac{1}{1-z} + \sum_{j\geq 1} L_{\mathcal{Q}}(j) \sum_{t\geq j} z^t \\
&= \frac{1}{1-z} + \sum_{j\geq 1} L_{\mathcal{Q}}(j) \frac{z^j}{1-z} = \frac{1 + \sum_{j\geq 1} L_{\mathcal{Q}}(j) z^j}{1-z}.
\end{aligned}$$

□



Kuva 7: Hilapisteiden laskeminen pyramidille $t\,\mathrm{Pyr}(\mathcal{Q})$, kun $t = 3$.

Nyt pyramidi $\mathcal{P}$, joka on tämän aliluvun aiheena, on pyramidi ylitse $(d-1)$-kuution, ja saadaan Ehrhartin sarjaksi

$$\mathrm{Ehr}_{\mathcal{P}}(z) = \frac{1}{1-z} \frac{\sum_{k=1}^{d-1} A(d-1,k) z^{k-1}}{(1-z)^d} = \frac{\sum_{k=1}^{d-1} A(d-1,k) z^{k-1}}{(1-z)^{d+1}}.$$

Tässä vielä yhteenvetona tulokset, jotka saatiin johdettua pyramidille yksikkökuution ylitse.

Lause 12. *Olkoon $\mathcal{P}$ d-pyramidi*

$$\mathcal{P} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \quad | \, 0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_{d-1} \leq 1 - x_d \leq 1\right\}$$

a) Hilapisteiden lukumäärä monitahokkaalle $\mathcal{P}$ lasketaan polynomilla

$$L_{\mathcal{P}}(t) = \frac{1}{d}\left(B_d(t+2) - B_d\right).$$

b) Niiden määrä negatiivisille kokonaisluvuille saadaan $(-1)^d L_{\mathcal{P}}(-t) = L_{\mathcal{P}^\circ}(t)$.

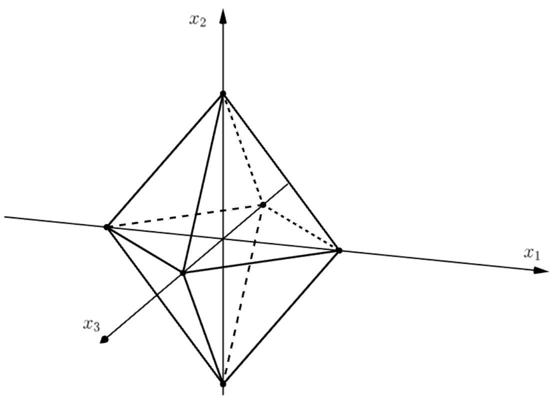
c) Ehrhartin sarja monitahokkaalle $\mathcal{P}$ on $\mathrm{Ehr}_{\mathcal{P}}(z) = \frac{\sum_{k=1}^{d-1} A(d-1,k) z^{k-1}}{(1-z)^{d+1}}$.

3.5 Hilapisteiden laskeminen ristikkäisille monitahokkaille

Tässä aliluvussa käsitellään ristikkäistä monitahokasta $\diamond$ avaruudessa $\mathbb{R}^d$. Ristikkäismonitahokkaalle saadaan hypertasojen kuvaukseksi

$$\diamond = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \quad | \quad |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_d| \leq 1\right\}.$$

Kuvassa 8 esitetään kolmessa ulottuvuudessa $\diamond$, joka on oktaedri. Sen kärkipisteet ovat $(\pm 1, 0, \ldots, 0), (0, \pm 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, \pm 1)$.



Kuva 8: Ristikkäinen monitahokas $\diamond$, kun $d = 3$.

Jotta voidaan laskea diskreetti tilavuus monitahokkaalle $\diamond$, käytetään samankaltaista lähestymistapaa kuin aliluvussa 3.4. Voidaan ajatella, että $(d-1)$-monitahokas $\mathcal{Q}$, jolla on kärkipisteet $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$, määrittelee uuden monitahokkaan $\mathrm{BiPyr}(\mathcal{Q})$. Sitä kutsutaan bipyramidiksi tai kaksoispyramidiksi yli joukon $\mathcal{Q}$, ja se on konveksi verho pisteistä

$$(\mathbf{v}_1, 0), (\mathbf{v}_2, 0), \ldots, (\mathbf{v}_m, 0), (0, \ldots, 0, 1), \text{ ja } (0, \ldots, 0, -1).$$

Esimerkissä ylempänä d-ulotteinen ristikkäismonitahokas on bipyramidi yli $(d-1)$-ulotteisen ristikkäismonitahokkaan. Kokonaislukupisteiden lukumäärä $t\,\mathrm{BiPyr}(\mathcal{Q})$ on

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{BiPyr}(\mathcal{Q})}(t) &= 2 + 2L_{\mathcal{Q}}(1) + 2L_{\mathcal{Q}}(2) + \cdots + 2L_{\mathcal{Q}}(t-1) + L_{\mathcal{Q}}(t) \\ &= 2 + 2\sum_{j=1}^{t-1} L_{\mathcal{Q}}(j) + L_{\mathcal{Q}}(t). \end{aligned}$$

Nyt saadaan laskettua Ehrhartin sarja kaksoispyramidille $\mathrm{BiPyr}(\mathcal{Q})$, kun käytetään lähtötilanteena Ehrhartin sarjaa monitahokkaalle $\mathcal{Q}$. Todistus menee samankaltaisesti kuin lauseen 11 todistus ja sitä ei esitetä tässä gradussa.

Lause 13. *Jos $\mathcal{Q}$ sisältää origon, niin* $\mathrm{Ehr}_{\mathrm{BiPyr}(\mathcal{Q})}(z) = \frac{1+z}{1-z}\,\mathrm{Ehr}_{\mathcal{Q}}(z)$.

Tämän lauseen avulla Ehrhartin sarja ristikkäismonitahokkaalle $\diamond$ saadaan laskettua helposti. Ristikkäismonitahokas $\diamond$, kun $d = 0$, on origo, jonka Ehrhartin sarja on $\frac{1}{1-z}$. Korkeamman ulottuvuuden ristikkäismonitahokkaiden Ehrhartin sarjat saadaan laskettua rekursiivisesti lauseen 13 avulla:

$$\mathrm{Ehr}_\diamond(z) = \frac{(1+z)^d}{(1-z)^{d+1}}.$$

Koska $\mathrm{Ehr}_\diamond(z) = 1 + \sum_{t\geq 1} L_\diamond(t) z^t$, saadaan laskettua myös $L_\diamond(t)$ laajentamalla $\mathrm{Ehr}_\diamond(z)$ potenssisarjaksi, kun $z = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ehr}_\diamond(z) &= \frac{(1+z)^d}{(1-z)^{d+1}} = \frac{\sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} z^k}{(1-z)^{d+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} z^k \sum_{t\geq 0} \binom{t+d}{d} z^t = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \sum_{t\geq k} \binom{t-k+d}{d} z^t \\
&= \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \sum_{t\geq 0} \binom{t-k+d}{d} z^t.
\end{aligned}$$

Viimeisessä välivaiheessa tarvitaan tietoa, että $\binom{t-k+d}{d} = 0$, kun $0 \leq t < k$. Toisaalta

$$1 + \sum_{t\geq 1} L_\diamond(t) z^t = \sum_{t\geq 0} \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \binom{t-k+d}{d} z^t$$

ja siten $L_\diamond(t) = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \binom{t-k+d}{d}$ jokaiselle $t \geq 1$. Tämän alilvun päätteeksi lasketaan monitahokkaalle $t\diamond$ sen sisällä olevien hilapisteiden lukumäärä. Koska t on kokonaisluku, huomataan, että

$$\begin{aligned}
L_{\diamond^\circ}(t) &= \#\left\{(m_1, m_2, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d \quad \middle| \; |m_1| + |m_2| + \cdots + |m_d| < t\right\} \\
&= \#\left\{(m_1, m_2, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d \quad \middle| \; |m_1| + |m_2| + \cdots + |m_d| \leq t-1\right\} \\
&= L_\diamond(t-1).
\end{aligned}$$

Voidaan käyttää apuna kaavaa 7 ja saadaan muoto

$$\begin{aligned}
L_\diamond(-t) &= \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \binom{-t-k+d}{d} = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} (-1)^d \binom{t-1+k}{d} \\
&= (-1)^d \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{d-k} \binom{t-1+d-k}{d} \\
&= (-1)^d L_\diamond(t-1).
\end{aligned}$$

Kahta edellistä laskelmaa vertailemalla huomataan, että $(-1)^d L_\diamond(-t) = L_{\diamond^\circ}(t)$. Yhteenvetona tässä aliluvussa saatiin tulokseksi:

Lause 14. *Olkoon $\diamond$ ristikkäismonitahokas avaruudessa $\mathbb{R}^d$.*

a) Hilapisteiden lukumäärä monitahokkaalle $\diamond$ lasketaan polynomilla

$$L_\diamond(t) = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \binom{t-k+d}{d}.$$

b) Negatiivisille kokonaisluvuille se lasketaan $(-1)^d L_\diamond(-t) = L_\diamond(t)$.

c) Ehrhartin sarja monitahokkaalle $\mathcal{P}$ *on* $\mathrm{Ehr}_\diamond(z) = \frac{(1+z)^d}{(1-z)^{d+1}}$.

3.6 Pickin lause

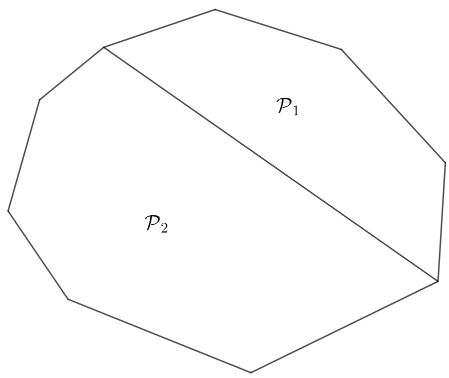
Palataan perustulosten äärelle ja otetaan huomioon kaikki $L_\mathcal{P}$ jokaiselle konveksille kokonaislukuiselle monikulmioille $\mathcal{P}$ tasossa $\mathbb{R}^2$. Kokonaislukupisteiden määrää monikulmion $\mathcal{P}$ sisällä merkitään luvulla I, ja sen sivuilla olevia kokonaislukupisteitä merkitään luvulla B. Seuraavaa tulosta kutsutaan Pickin lauseeksi, jonka on keksinyt Georg Alexander Pick (1859−1942). Lauseen avulla saadaan laskettua monikulmion $\mathcal{P}$ pinta-ala A, kun tiedetään edellä mainittujen lukujen I ja B suuruudet.

Lause 15. *(Pickin lause). Monikulmiolle, jonka kärkipisteet ovat kokonaislukupisteitä, on voimassa*

$$A = I + \frac{1}{2}B - 1,$$

missä I on monikulmion $\mathcal{P}$ sisällä olevien hilapisteiden lukumäärä ja B on monikulmion $\mathcal{P}$ sivuilla olevien kokonaislukupisteiden lukumäärä.

Todistus. Aloitetaan todistamalla, että Pickin identiteetillä on additiivinen luonne eli sitä voidaan soveltaa monikulmiossa pienempiin osiin ja yhdistämällä nämä pienet osat päästään samaan lopputulokseen kuin kokonaiselle monikulmiolle. Jaetaan $\mathcal{P}$ kahden monikulmion $\mathcal{P}_1$ ja $\mathcal{P}_2$ unioniin luomalla jana monikulmion $\mathcal{P}$ kahden kärjen välille. Tämä idea esitetään kuvassa 9.



Kuva 9: Monikulmion $\mathcal{P}$ jakaminen monikulmioiksi $\mathcal{P}_1$ ja $\mathcal{P}_2$.

Väite on, että Pickin identiteetti monikulmiolle $\mathcal{P}$ seuraa monikulmioiden $\mathcal{P}_1$ ja $\mathcal{P}_2$ identiteeteistä suoraan nämä yhdistämällä. Merkitään monikulmion $\mathcal{P}_k$ pinta-alaa A_k, sisäpisteiden lukumäärää I_k ja sivujen sisältämiä kokonaislukupisteitä B_k.

Selvästi pinta-alaksi saadaan

$$A = A_1 + A_2.$$

Merkitään monikulmioiden $\mathcal{P}_1$ ja $\mathcal{P}_2$ yhteisten hilapisteiden luumäärää luvulla L. Nyt saadaan

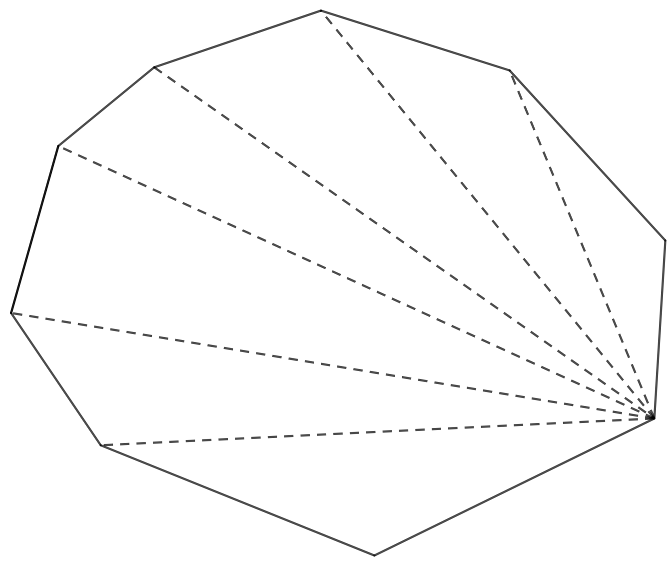
$$I = I_1 + I_2 + L - 2 \quad \text{ja} \quad B = B_1 + B_2 - 2L + 2.$$

Näiden avulla saadaan muoto

$$\begin{aligned} I + \frac{1}{2}B - 1 &= I_1 + I_2 + L - 2 + \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 - L + 1 - 1 \\ &= I_1 + \frac{1}{2}B_1 - 1 + I_2 + \frac{1}{2}B_2 - 1. \end{aligned}$$

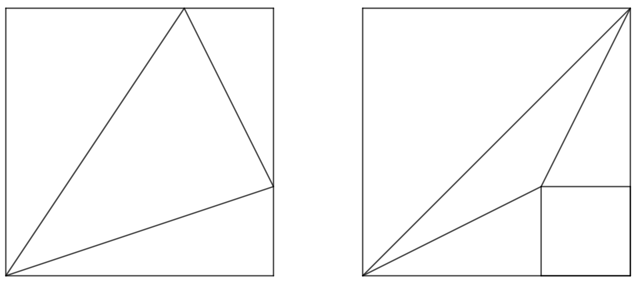
□

Tämä todistaa väitteen. Huomioitavaa on, että tämä todistaa samalla myös Pickin identiteetin monikulmiolle $\mathcal{P}_1$, kun tunnetaan identiteetit monikulmioille $\mathcal{P}$ and $\mathcal{P}_2$.



Kuva 10: Monikulmion jakaminen kolmioihin.

Mikä tahansa konveksi monikulmio voidaan jakaa kolmioihin, jotka jakavat yhteiset kärkipisteet. Tämä idea esitetään kuvassa 10. Vaikka monikulmio ei olisi konveksi, se voidaan silti jakaa kolmioihin. Tämä periaate löytyy lähteestä [10] lauseesta 3.1. Nyt riittää tehdä todistus Pickin lauseelle kolmioiden osalta. Kuvassa 11 esitetään minkä tahansa kolmion upottaminen suorakulmioon. Vasemmanpuoleinen kuva esittää tilanteen, jossa suorakulmion sivuilla on kolme suorakulmaista kolmiota, joiden kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaise ja keskelle jää yksi kolmio. Oikeanpuoleisessa kuvassa on myös kolme suorakulmaista komiota ja yksi suorakulmio, sekä keskelle jäävä kolmio. Jos tiedetään, että Pickin lause pätee koordinaattiakselien suuntaisille suorakulmioille sekä kolmioille, joiden kaksi kylkeä ovat koordinaattiakselien suuntaiset, voidaan siten selvittää kuvassa 11 keskellä olevan kolmion pinta-ala. Vastaava päättely pätee siten mille tahansa kolmiolle, jonka kärkipisteet ovat hilapisteitä.



Kuva 11: Kolmion upottaminen suorakulmioon. Vain hilapisteet ovat sallittuja.

Todistetaan Pickin lause suorakulmioille, joiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Todistuksen lähteenä on [9].

Todistus. Olkoon R suorakulmio, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Pinta-ala suorakulmiolle lasketaan sen kannan ja korkeuden tulona. Olkoon kanta m ja korkeus n, joten pinta-ala $A(R) = mn$. Ilmaistaan suorakulmion pinta-ala Pickin identiteetin lukujen avulla. Nyt $I = (m-1)(n-1)$ ja $B = 2m + 2n$. Pickin identiteetiksi saadaan nyt

$$\begin{aligned} I + \frac{B}{2} - 1 =& (m-1)(m-1) + \frac{2(m+n)}{2} - 1 \\ =& (mn - m - n + 1) + (m+n) - 1 \\ =& mn. \end{aligned} \tag{8}$$

□

Vastaavasti voidaan laatia todistus kolmioille, joiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Todistuksen lähteenä on [9].

Todistus. Olkoon T suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Olkoon kateetit m ja n, joten pinta-ala $A(T) = \frac{mn}{2}$. Hypotenuusalla olevien hilapisteiden määrä voi muuttua hyvin paljon sen mukaan, miten kolmio on asettunut tasoon. Merkitään näiden pisteiden määrää luvulla k ja koko kolmion sivuilla olevien pisteiden määrä on $m+n+k+1$. Suorakulmaista kolmiota vastaavan suorakulmion sisäpisteet saatiin $(m-1)(n-1)$. Nyt vähennetään tästä vielä k pisteet ja jaetaan suorakulmio kahteen osaan, saadaan $((m-1)(n-1)-k)/2$. Pickin identiteetti saa nyt muodon

$$\begin{aligned}
I+\frac{B}{2}-1 =&\frac{(m-1)(n-1)-k}{2}+\frac{m+n+1+k}{2}-1\\
=&\frac{mn}{2}-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}-\frac{k}{2}+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}+\frac{k}{2}-1\\
=&\frac{mn}{2}=A(T)
\end{aligned}$$

□

Yleinen todistus Pickin lauseelle löytyy lähteestä [9]. Pickin lause mahdollistaa hilapisteiden laskemisen monikulmion $\mathcal{P}$ sisäpuolelta, mutta myös kaikkien monikulmioon liittyvien hilapisteiden lukumäärän. Tämä saadaan laskemalla

$$I+B=A-\frac{1}{2}B+1+B=A+\frac{1}{2}B+1. \tag{9}$$

Tästä identiteetistä saadaan hilapisteiden lukumäärän laskeva generoiva funktio $L_{\mathcal{P}}$.

Lause 16. *Olkoon $\mathcal{P}$ hilapisteistä koostuva konveksi monikulmio, jonka pinta-ala on A ja sen sivujen sisältämät pisteet ovat B.*

a) Monikulmion $\mathcal{P}$ hilapisteiden laskemiseen käytettävä generoiva funktio on polynomi

$$L_{\mathcal{P}}(t)=At^2+\frac{1}{2}Bt+1.$$

b) Hilapisteet negatiivisille kokonaisluvuille saadaan funktiosta

$$L_{\mathcal{P}}(-t)=L_{\mathcal{P}}(t).$$

c) Ehrhartin sarja monikulmiolle $\mathcal{P}$ on

$$\mathrm{Ehr}_{\mathcal{P}}(z)=\frac{\left(A-\frac{B}{2}+1\right)z^2+\left(A+\frac{B}{2}-2\right)z+1}{(1-z)^3}.$$

Huomaa, että Ehrhartin sarjassa vakiota z^2 vastaa $L_{\mathcal{P}^\circ}(1)$, ja vakiota z vastaa $L_{\mathcal{P}}(1)-3$.

Todistus. Väite (a) seuraa kaavasta 9, jos voidaan osoittaa, että monikulmion $t\mathcal{P}$ pinta-ala on At^2, ja sen sivuilla olevat pisteet ovat Bt. Tämä on mahdollista todistaa, mutta sitä ei esitetä tässä gradussa. Väite (b) seuraa siitä, että $L_{\mathcal{P}^\circ}(t)=L_{\mathcal{P}}(t)-Bt$. Lopuksi Ehrhartin sarjaksi saadaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ehr}_{\mathcal{P}}(z)&=1+\sum_{t\geq 1}L_{\mathcal{P}}(t)z^t\\
&=\sum_{t\geq 0}\left(At^2+\frac{B}{2}t+1\right)z^t\\
&=A\frac{z^2+z}{(1-z)^3}+\frac{B}{2}\frac{z}{(1-z)^2}+\frac{1}{1-z}\\
&=\frac{\left(A-\frac{B}{2}+1\right)z^2+\left(A+\frac{B}{2}-2\right)z+1}{(1-z)^3}.
\end{aligned}$$

□

3.7 Monikulmiot, joilla on rationaaliset kärjet

Tässä aliluvussa tarkastellaan sitä, miten voidaan laskea kokonaislukupisteiden lukumäärä mille tahansa rationaalilukupisteistä muodostetulle monikulmiolle ja sen kokonaislukulaajennuksille.

Luonnollinen ensimmäinen askel on rajata ongelma monikulmiosta $\mathcal{P}$ rationaalukuisille kolmioille, koska monikulmiota käsittelevät ongelmat saadaan aina jaettua kolmioihin. Tähän yksinkertaistukseen liittyy muutamia huomioita. Kun hilapisteet on laskettu kolmioille, täytyy niistä yhdistää alkuperäinen monikulmio uudestaan. Tällöin pitää ottaa huomioon se, ettei lasketa uudelleen kohdakkain olevilla sivuilla olevia pisteitä. Hilapisteiden laskeminen rationaalisilla janoilla on helppoa, mutta niitä varten on myös mahdollista luoda generoiva funktio, kuten Popoviciuksen lauseessa 7 sanotaan.

Kun monikulmio $\mathcal{P}$ on jaettu kolmioihin, voidaan edelleen yksinkertaistaa kuvaa 11 upottamalla mielivaltainen rationaalinen kolmio rationaaliseen suorakulmioon. Jotta kolmion hilapisteet voidaan laskea, lasketaan ensin hilapisteet suorakulmiossa, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Tämän jälkeen vähennetään niiden pisteiden lukumäärä, jotka ovat koordinaattiakselien suuntaisissa kolmioissa ja vielä mahdollisesti yksi suorakulmio kuten kuvassa 11. Suorakulmoita on helppo käsitellä, joten ongelma palautuu vain siihen, että yritetään löytää kaava suorakulmaiselle kolmiolle, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.

Muokataan ja laajennetaan generoivia funktioita, joita ollaan tähän mennessä käytetty, sellaiseen muotoon, että ne pätevät suorakulmaisille kolmioille. Merkitään tällaista kolmiota $\mathcal{T}$, joka on alijoukko tasosta $\mathbb{R}^2$. Kolmio $\mathcal{T}$ koostuu pisteistä (x, y) ja toteutuu

$$x \geq \frac{a}{d}, y \geq \frac{b}{d}, ex + fy \leq r$$

joillekin kokonaisluville a, b, d, e, f, r (pitää olla voimassa $ea + fb \leq rd$, koska muuten kolmio olisi tyhjä). Koska hilapisteiden määrä on muuttumaton, vaikka akselit x- ja y käännettäisi tai jos x- ja y-akseli vaihdettaisi keskenään tai jos kolmiota siirretään tasossa, voidaan olettaa, että $a, b, d, e, f, r \geq 0$ ja $a, b < d$. Näin päädytään kolmioon $\mathcal{T}$, joka esitetään kuvassa 12.

Voidaan vielä tehdä laskuista hieman helpompia ja oletetaan, että luvut e ja f ovat suhteellisia alkulukuja. Olkoon

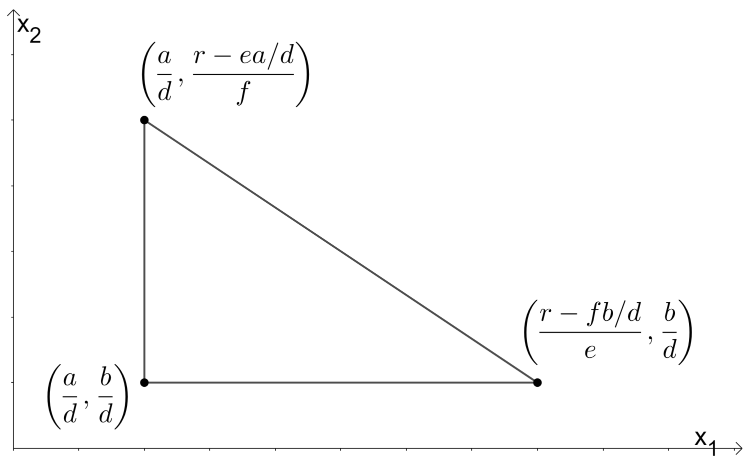
$$\mathcal{T} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \, x \geq \frac{a}{d}, y \geq \frac{b}{d}, ex + fy \leq r \right\}. \tag{10}$$

Jotta saadaan muotoiltua kaava

$$L_{\mathcal{T}}(t) = \# \left\{ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \quad | \, m \geq \frac{ta}{d}, n \geq \frac{tb}{d}, em + fn \leq tr \right\},$$

tarvitaan samanlaisia metodeja kuin luvussa 2. Aivan kuten aliluvussa 5 käytetään lisävakiota s ja saadaan

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{T}}(t) &= \# \left\{ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \quad | \, m \geq \frac{ta}{d}, n \geq \frac{tb}{d}, em + fn \leq tr \right\} \\ &= \# \left\{ (m, n, s) \in \mathbb{Z}^3 \quad | \, m \geq \frac{ta}{d}, n \geq \frac{tb}{d}, s \geq 0, em + fn + s = tr \right\} \end{aligned}$$



Kuva 12: Suorakulmainen rationaalinen kolmio.

Tätä funktiota varten tulkitaan taas sen olevan termin z^{tr} kerroinvakio funktiossa

$$\left(\sum_{m\geq \frac{ta}{d}} z^{em}\right)\left(\sum_{n\geq \frac{tb}{d}} z^{fn}\right)\left(\sum_{s\geq 0} z^{s}\right).$$

Summamerkinnässä (tässä tapauksessa, $m \geq \frac{ta}{d}$) tarkoittaa "summa kaikkien niiden kokonaislukujen yli, jotka toteuttavat ehdon." Esimerkiksi ensimmäisessä summassa aloitetaan pienimmästä kokonaisluvusta, joka on suurempi tai yhtäsuuri kuin $\frac{ta}{d}$, jonka voi ilmaista myös funktiona $\lceil \frac{ta}{d} \rceil$ (ja tämä on yhtäsuuri kuin $\lfloor \frac{ta-1}{d} \rfloor + 1$). Yläpuolella oleva generoiva funktio saadaan nyt kirjoitettua muotoon

$$\begin{aligned}\left(\sum_{m\geq \lceil \frac{ta}{d} \rceil} z^{em}\right)\left(\sum_{n\geq \lceil \frac{tb}{d} \rceil} z^{fn}\right)\left(\sum_{s\geq 0} z^{s}\right) &= \frac{z^{\lceil \frac{ta}{d} \rceil e}}{1-z^e}\frac{z^{\lceil \frac{tb}{d} \rceil f}}{1-z^f}\frac{1}{1-z} \\ &= \frac{z^{u+v}}{(1-z^e)(1-z^f)(1-z)}, \qquad (11)\end{aligned}$$

missä on yksinkertaistuksen takia otettu käyttöön notaatio

$$u = \left\lceil \frac{ta}{d} \right\rceil e \quad \text{ja} \quad v = \left\lceil \frac{tb}{d} \right\rceil f. \qquad (12)$$

Jotta saadaan termin z^{tr} kerroinvakio talteen generoivasta funktiosta 11, käytetään tuttuja menetelmiä. Kuten tavallista, merkitään tätä kerrointa kaavassa vakiona:

$$\begin{aligned}L_{\mathcal{T}}(t) &= \text{vakio}\left(\frac{z^{u+v-tr}}{(1-z^e)(1-z^f)(1-z)}\right) \\ &= \text{vakio}\left(\frac{1}{(1-z^e)(1-z^f)(1-z)z^{tr-u-v}}\right).\end{aligned}$$

Ennen kuin sovelletaan osamurtokehitelmää tähän funktioon, varmistetaan, että kyseessä on todella rationaalinen funktio ja että funktion kokonaisasteelle pätee

$$u + v - tr - e - f - 1 < 0.$$

Seuraaksi laajennetaan tämä osamurtokehitelmäksi. Oletetaan tässä, että luvuilla e ja f ei ole yhteisiä tekijöitä. Saadaan osamurtokehitelmäksi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1-z^e)\left(1-z^f\right)(1-z)z^{tr-u-v}} \\ &\quad = \sum_{j=1}^{e-1} \frac{A_j}{z-\xi_e^j} + \sum_{j=1}^{f-1} \frac{B_j}{z-\xi_f^j} + \sum_{k=1}^{3} \frac{C_k}{(z-1)^k} + \sum_{k=1}^{tr-u-v} \frac{D_k}{z^k}. \end{aligned}$$

Nyt termeihin D_k liittyvät kertoimet eivät liity haluttuun vakiotermiin, joten saadaan muoto

$$L_{\mathcal{T}}(t) = -\sum_{j=1}^{e-1} \frac{A_j}{\xi_e^j} - \sum_{l=1}^{f-1} \frac{B_l}{\xi_f^l} - C_1 + C_2 - C_3. \tag{13}$$

Kun lasketaan osamurtokehitelmän arvot, saadaan

$$\begin{aligned} A_j &= -\frac{\xi_e^{j(v-tr+1)}}{e\left(1-\xi_e^{jf}\right)\left(1-\xi_e^j\right)}, \\ B_l &= -\frac{\xi_f^{l(u-tr+1)}}{f\left(1-\xi_f^{le}\right)\left(1-\xi_f^l\right)}, \\ C_1 &= -\frac{(u+v-tr)^2}{2ef} + \frac{u+v-tr}{2}\left(-\frac{1}{ef} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{f} - 1\right), \\ C_2 &= -\frac{u+v-tr+1}{ef} + \frac{1}{2e} + \frac{1}{2f} \text{ ja} \\ C_3 &= -\frac{1}{ef}. \end{aligned}$$

Kun nämä sijoitetaan paikoilleen funktioon $L_{\mathcal{T}}(t)$ eli kaavaan 13 saadaan seuraava kaava hilapisteiden määrän laskemiseen.

Lause 17. *Rationaaliselle suorakulmaiselle kolmiolle $\mathcal{T}$, joka määritellään kaavassa 10, jossa e ja f ovat suhteellisia alkulukuja,*

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{T}}(t) = &\frac{1}{2ef}(tr-u-v)^2 + \frac{1}{2}(tr-u-v)\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{ef}\right) \\ &+ \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{f}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{e}{f} + \frac{f}{e} + \frac{1}{ef}\right) \\ &+ \frac{1}{e}\sum_{j=1}^{e-1} \frac{\xi_e^{j(v-tr)}}{\left(1-\xi_e^{jf}\right)\left(1-\xi_e^j\right)} + \frac{1}{f}\sum_{l=1}^{f-1} \frac{\xi_f^{l(u-tr)}}{\left(1-\xi_f^{le}\right)\left(1-\xi_f^l\right)}. \end{aligned}$$

Tämä identiteetti voidaan muotoilla myös Fourier-Dedekindin summien avulla, jotka esiteltiin aiemmin kaavassa 3. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{T}}(t) = &\frac{1}{2ef}(tr-u-v)^2 + \frac{1}{2}(tr-u-v)\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{ef}\right) \\ &+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{e}{f}+\frac{f}{e}+\frac{1}{ef}\right) \\ &+ s_{v-tr}(f,1;e) + s_{u-tr}(e,1;f). \end{aligned}$$

Keskitytään seuraavaksi tarkemmin funktion $L_{\mathcal{T}}$ luonteeseen luvun t funktiona ja määritellään *kvasipolynomi* Q, joka on muotoa $Q(t) = c_n(t)t^n + \cdots + c_1(t)t + c_0(t)$, jossa $c_0, \ldots, c_n$ ovat jaksollisia funktioita luvun t suhteen. Funktion Q aste on n ja sen jakso määräytyy funktioiden $c_0, \ldots, c_n$ jaksojen mukaan. Pienin yhteinen jakso näiden funktioiden välillä on kvasipolynomin Q jakso. Funktio $L_{\mathcal{T}}$ on toisen asteen polynomi ja luku t ilmenee vain eksponenttina ykkösen juurille termeissä ξ_e ja ξ_f. Funktio luvun t suhteen, ξ_e^t on jaksollinen ja sen jakso on e. Samaten funktio ξ_f^t on jaksollinen ja sen jakso on f. Luvut u ja v kaavasta 12 ovat myös luvun t funktioita ja ne voidaan kirjoittaa paloittain määriteltynä funktiona, kvasipolynomina. Jokaiselle kvasiolynomille Q on olemassa kokonaisluku k ja polynomit $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$, joille pätee

$$Q(t) = \begin{cases} Q(t) = p_0(t), & \text{jos } t \equiv 0 \bmod k \\ Q(t) = p_1(t), & \text{jos } t \equiv 1 \bmod k \\ \vdots & \\ Q(t) = p_{k-1}(t), & \text{jos } t \equiv k-1 \bmod k. \end{cases}$$

Pienin luku k on polynomin Q jakso ja tätä lukua k vastaavat polynomit $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$ ovat kvasipolynomin Q tekijät.

Jakamalla monikulmio kolmioihin ja sisällyttämällä se suorakulmioon, kuten tämän aliluvun alussa kuvaillaan, voidaan muotoilla rakenteellinen tulos rationaalisille monikulmioille.

Lause 18. *Olkoon $\mathcal{P}$ mikä tahansa rationaalinen monikulmio. Funktio $L_{\mathcal{P}}(t)$ on kvasipolynomi, jonka aste on 2. Sen johtava kerroin on monikulmion $\mathcal{P}$ pinta-ala.*

Todistus. Väitteen voi todistaa lauseen 17 yleisen todistuksen avulla, jossa todistetaan tämä lause rationaalisille suorakulmioille ja suorakulmaisille kolmioille, joiden sivut ovat akselien suuntaiset. Käyttämällä additiivisuutta molemmissa toisen asteen kvasipolynomeissa ja pinta-aloissa, saadaan väite todistettua, kun käytetään myös Popoviciuksen lausetta 7 apuna. Varsinaista todistusta ei esitetä tässä gradussa. □

3.8 Eulerin generoiva funktio yleisille rationaalisille monikulmioille

Tähän mennessä lasketut generoivat funktiot on tehty aina tiettyä tilannetta varten. Tässä aliluvussa muotoillaan generoiva funktio, jolla lasketaan hilapisteet mille tahansa rationaaliselle monitahokkaalle. Tällainen monitahokas määritellään sen hypertasojen kuvausten avulla ja niiden ja puoliavaruuksien leikkausten avulla. Puoliavaruudet määritellään algebrallisesti lineaaristen epäyhtälöiden avulla. Jos monitahokas on rationaalinen, epäyhtälöiden kertoimet voidaan kuitenkin valita kokonaisluvuiksi. Jotta saadaan nämä molemmat yhtenäistettyä, käytetään lisämuuttujia, joilla vaihdetaan epäyhtälöt yhtälöiksi. Lisäksi siirtämällä monitahokas avaruuden ei-negatiiviseen osaan (aina voidaan siirtää monitahokasta ilman, että sen hilapisteiden määrä muuttuu), voidaan olettaa, että kaikilla monitahokkaan pisteillä on epänegatiiviset koordinaatit. Yhteenvetona voidaan siis esittää mikä tahansa rationaalinen monitahokas $\mathcal{P}$, kun sille on tehty jonkin kokonaisluvun pituinen siirto. Voidaan olettaa

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_{\geq 0} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \right\} \tag{14}$$

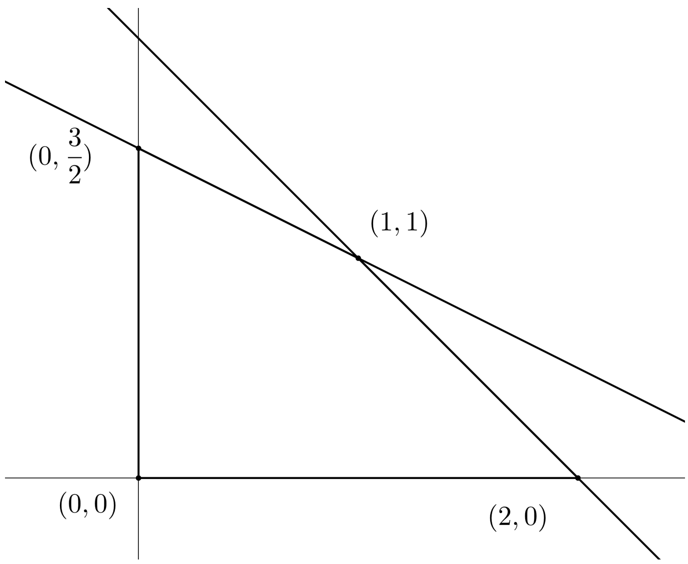
jollekin kokonaislukumatriisille $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times d}$ ja jollekin kokonaislukuiselle vektorille $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ siinä mielessä, että tällä muodolla ja alkuperäisellä monitahokkaalla $\mathcal{P}$ on sama L-funktio. (Huomaa, että d ei välttämättä ole sama kuin monitahokkaan $\mathcal{P}$ ulottuvuus.) Jotta voidaan kuvata t:s laajennus monitahokkaalle $\mathcal{P}$, täytyy skaalata piste $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ luvulla $\frac{1}{t}$. Se voidaan vaihtoehtoisesti myös kertoa luvulla t, mistä seuraa muoto

$$t\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_{\geq 0} \mid \mathbf{A}\frac{\mathbf{x}}{t} = \mathbf{b} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_{\geq 0} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = t\mathbf{b} \right\}.$$

Joten nyt hilapisteiden laskemiseen käytettävä funktio monitahokkaalle $\mathcal{P}$ on

$$L_{\mathcal{P}}(t) = \# \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0} : \mathbf{A}\mathbf{x} = t\mathbf{b} \right\}.$$

Esimerkki 8. Olkoon $\mathcal{P}$ nelikulmio, jonka kärjet ovat$(0,0), (2,0)$, $(1,1)$, ja $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ kuten näkyy kuvassa 13.



Kuva 13: Monikulmion jakaminen kolmioihin.

Puoliavaruuksien epäyhtälöt tälle monitahokkaan $\mathcal{P}$ kuvaukselle ovat

$$\mathcal{P} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1, x_2 \geq 0, \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{array} \right\}.$$

Tästä saadaan funktioksi

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{P}}(t) &= \# \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, x_1, x_2 \geq 0, \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 \leq 3t \\ x_1 + x_2 \leq 2t \end{array} \right\} \\ &= \# \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 \,|\, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3t \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2t \end{array} \right\} \\ &= \# \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^4_{\geq 0} \,|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Käytetään samoja menetelmiä, kuin edellisissä luvuissa ja luodaan generoiva funktio tälle laskentafunktiolle $L_{\mathcal{P}}(t)$. Aiemmin hilapisteitä kuvattiin vain yhdellä epätriviaalilla lineraarisella yhtälöllä. Nyt tilanteeseen liittyy lineaarinen yhtälöryhmä eli muuten lähestymistapa on sama, mutta kun lineaariset yhtälöt muutetaan geometrisiksi sarjoiksi, tarvitaan enemmän kuin yksi muuttuja. Kun laajennetaan funktiota

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(1 - z_1 z_2)(1 - z_1^2 z_2)(1 - z_1)(1 - z_2) z_1^{3t} z_2^{2t}}$$

geometrisiksi sarjoiksi, saadaan

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \left(\sum_{n_1 \geq 0} (z_1 z_2)^{n_1} \right) \left(\sum_{n_2 \geq 0} \left(z_1^2 z_2\right)^{n_2} \right) \left(\sum_{n_3 \geq 0} z_1^{n_3} \right) \left(\sum_{n_4 \geq 0} z_2^{n_4} \right) \frac{1}{z_1^{3t} z_2^{2t}} \\ &= \sum_{n_1, \ldots, n_4 \geq 0} z_1^{n_1 + 2n_2 + n_3 - 3t} z_2^{n_1 + n_2 + n_4 - 2t}. \end{aligned}$$

Kun lasketaan vakiona pysyvää termiä (sekä luvun z_1 suhteen ja luvun z_2 suhteen), lasketaan ratkaisut $(n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{Z}^4_{\geq 0}$ yhtälöille

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Nyt vakiotermi funktiolle $f(z_1, z_2)$ laskee kokonaislukupisteet monitahokkaassa $\mathcal{P}$:

$$L_{\mathcal{P}}(t) = \text{vakio} \frac{1}{(1 - z_1 z_2)(1 - z_1^2 z_2)(1 - z_1)(1 - z_2) z_1^{3t} z_2^{2t}}.$$

Vakio-osaa kuvaavaksi termiksi saadaan laskettua

$$\frac{7}{4}t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{7 + (-1)^t}{8}.$$

Palataan yleiseen monitahokkaaseen $\mathcal{P}$ kaavasta 14 Nyt merkitään matriisin $\mathbf{A}$ pystyrivejä $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_d$. Käytetään lyhyempää merkintää $\mathbf{z}^{\mathbf{c}} := z_1^{c_1} z_2^{c_2} \cdots z_m^{c_m}$ vektoreille $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ ja $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_m) \in \mathbb{Z}^m$. Olkoon $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$ ja laajennetaan funktiota

$$\frac{1}{(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_1})(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_2})\cdots(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_d})\,\mathbf{z}^{t\mathbf{b}}}. \tag{15}$$

Tämä sama geometristen sarjojen avulla on

$$\left(\sum_{n_1\geq 0} \mathbf{z}^{n_1\mathbf{c}_1}\right)\left(\sum_{n_2\geq 0} \mathbf{z}^{n_2\mathbf{c}_2}\right)\cdots\left(\sum_{n_d\geq 0} \mathbf{z}^{n_d\mathbf{c}_d}\right)\frac{1}{\mathbf{z}^{t\mathbf{b}}}.$$

Jos kaikki kerrotaan auki, termit ovat muotoa

$$n_1\mathbf{c}_1 + n_2\mathbf{c}_2 + \cdots + n_d\mathbf{c}_d - t\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{n} - t\mathbf{b},$$

missä $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$. Kun otetaan generoivan funtion 15 vakiotermi, niin lasketaan kokonaislukuvektorit $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$, jotka toteuttavat

$$\mathbf{A}\mathbf{n} - t\mathbf{b} = 0, \quad \text{josta saadaan} \quad \mathbf{A}\mathbf{n} = t\mathbf{b}.$$

Tämä vakiotermi laskee täsmälleen hilapisteiden lukumäärän $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ monitahokkaalle $t\mathcal{P}$.

Lause 19. *(Eulerin generoiva funktio). Olkoon $\mathcal{P}$ rationaalinen monitahokas, kuten kaavassa 14. Silloin Ehrhartin kvasipolynomi monitahokkaalle $\mathcal{P}$ voidaan laskea seuraavasti:*

$$L_{\mathcal{P}}(t) = \text{vakio}\left(\frac{1}{(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_1})(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_2})\cdots(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_d})\,\mathbf{z}^{t\mathbf{b}}}\right)$$

Muotoillaan vielä uudelleen vakiotermin identiteetti Ehrhartin sarjojen avulla.

Seuraus 1. *Olkoon $\mathcal{P}$ rationaalinen monitahokas, kuten kaavassa 14. Ehrhartin sarja monitahokkaalle $\mathcal{P}$ voidaan laskea*

$$\mathrm{Ehr}_{\mathcal{P}}(x) = \ \textit{vakio}\ \left(\frac{1}{(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_1})(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_2})\cdots(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_d})\left(1-\frac{x}{\mathbf{z}^{\mathbf{b}}}\right)}\right).$$

Todistus. Todistus lauseen 19 avulla. Saadaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ehr}_{\mathcal{P}}(x) &= \sum_{t\geq 0} \text{vakio}\left(\frac{1}{(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_1})(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_2})\cdots(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_d})\,\mathbf{z}^{t\mathbf{b}}}\right)x^t \\
&= \text{vakio}\left(\frac{1}{(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_1})(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_2})\cdots(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_d})}\sum_{t\geq 0}\frac{x^t}{\mathbf{z}^{t\mathbf{b}}}\right) \\
&= \text{vakio}\left(\frac{1}{(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_1})(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_2})\cdots(1-\mathbf{z}^{\mathbf{c}_d})}\frac{1}{1-\frac{x}{\mathbf{z}^{\mathbf{b}}}}\right).
\end{aligned}$$

□

Viitteet

[1] *Combinatorics*, Joy Morris, University of Lethbridge, e-kirja, 2022 versio 2.1, Luku 7, https://open.umn.edu/opentextbooks/textbooks/494

[2] *Combinatorics*, Vilenkin, N, 1971, Elsevier Science & Dictionary, e-kirja, Luku 7, http://ebookcentral.proquest.com/lib/kutu/detail.action?docID=1901635

[3] *A Course in Enumeration*, Martin Aigner, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007, Luku 3

[4] *Computing the contiunous discretely*, Matthias Beck, Sinai Robins, Springer, New York, 2007, Luku 1 ja 2

[5] *Partial Fractions*, Marni Mishna, Karen Yeats, Simon Fraser University, department of mathematics, 2011, luentomoniste, http://people.math.sfu.ca/~kyeats/teaching/math343/3-343.pdf, luettu 6.12.2022

[6] *ABSTRACT ALGEBRA: THEORY AND APPLICATIONS*, Thomas W. Judson, Robert A. Beezer, 1997–2020, Luku 2.2, nettilähde, https://math.libretexts.org/Bookshelves/Abstract_and_Geometric_Algebra/Abstract_Algebra:_Theory_and_Applications_(Judson)/02:_The_Integers/2.02:_The_Division_Algorithm, luettu 12.1.2023

[7] *The Extended Euclidean Algorithm*, Bruce Ikenaga, 2019, nettilähde, https://sites.millersville.edu/bikenaga/number-theory/extended-euclidean-algorithm/extended-euclidean-algorithm.pdf, luettu 12.1.2023

[8] *Extended Euclid's Algorithm via Backward Recurrence Relations*, S. P. Glasby, Mathematics Magazine Vol. 72, No. 3, 1999, sivut 228-230, https://www.jstor.org/stable/2690887

[9] *Pick's Theorem*, Tom Davis, 2003, nettilähde, http://www.geometer.org/mathcircles/pick.pdf, luettu 18.3.2023

[10] *Computational Geometry*, Mark de Berg, Otfried Cheong Marc van Kreveld, Mark Overmars, Sinai Robins, Springer, Berlin, 2008, Luku 3

[11] *The General Formula for the Ehrhart Polynomial of Polytopes with Applications*, Fatema A. Sadiq, Shatha A. Salman, Raghad I. Sabri, International Journal of Mathematics and Computer Science, 2021, artikkeli, http://ijmcs.future-in-tech.net/16.4/R-ShathaASalman.pdf

[12] *Deriving Formulae to Count Solutions to Parameterized Linear Systems using Ehrhart Polynomials: Applications to the Analysis of Nested-Loop Programs*, Philippe Clauss, Vincent Loechner, Doran Wilde, Universite Louis Pasteur de Strasbourg, 1997, luentomoniste, https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=889516AFEB3B700A3986C6F2E669802A?doi=10.1.1.52.459&rep=rep1&type=pdf, luettu 17.4.2023

[13] *The many aspects of counting lattice points in polytopes*, Jesús A. De Loera, Springer-Verlag, 2005