TURUN YLIOPISTO

Muckenhouptin painofunktioiden yleistys

Vertti Hietanen

Pro gradu -tutkielma
Kesäkuu 2023

Tarkastajat:
Dos. Petteri Harjulehto
Prof. Peter Hästö

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

VERTTI HIETANEN: Muckenhouptin painofunktioiden yleistys
Pro gradu -tutkielma, 35 s.
Matematiikka
Kesäkuu 2023

Tässä työssä tutkitaan Muckenhouptin painofunktiota varioivan eksponentin Lebesgue-avaruudessa. Erityisesti osoitetaan kyseisessä avaruudessa riittävä ehto Muckenhoupt-luokalle, jolla Hardyn-Littlewoodin maksimaalioperaattori on rajoitettu.

Työn alkuosassa esitellään taustateoriaa, johon sisältyy työssä tarvittavia määritelmiä, varioivan eksponentin avaruuden ominaisuuksia, log-Hölder-ehdot eksponentille p ja Muckenhouptin painofunktioiden klassinen teoria.

Neljännessä luvussa määritellään yleistetty Muckenhoupt-luokka ja osoitetaan luokalle vastaavia perusominaisuuksia kuin klassisessa tapauksessa.

Viidennessä luvussa yleistetään Muckenhouptin painojen parantuvuusominaisuus yleisimmille joukkoperheille Lebesgue-avaruudessa ja todistetaan rajoittuneisuustulos maksimaalioperaattorille, joka on määritelty spesifin joukkoperheen yli. Nämä tulokset ovat keskeisiä Muckenhoupt-ehdon riittävyyden todistuksessa, jota käsittelee tutkielman kuudes ja viimeinen luku.

Asiasanat: ehdon riittävyys, varioivan eksponentin Lebesgue-avaruus, Pro gradu -tutkielma, Muckenhouptin painofunktiot, parantuvuusominaisuus.

Sisällys

1 Johdanto

Varioivan eksponentin avaruudet esiintyivät kirjallisuudessa ensimmäisen kerran jo vuonna 1931 julkaistussa artikkelissa [12], jonka on kirjoittanut W. Orlicz. Orlicz ei kuitenkaan jatkanut kyseisten avaruuksien tutkimista vaan keskittyi toisenlaisten funktioavaruuksien tutkimiseen, jotka nyt kantavat hänen nimeään. Vasta tultaessa 1990-luvulle varioivan eksponentin avaruuksia alettiin tutkia enemmän. Vuonna 1991 julkaistussa artikkelissa [13], O. Kováĉik and J. Rákosník todistivat monia avaruuden perusominaisuuksia. Vielä 1990-luvulla tutkimuksen kehitys oli varsin hidasta, mutta vuosituhannen vaihteessa avaruuksia alettiin tutkia intensiivisesti ja systemaattisemmin. Varioivan ekspontin avaruuksille löydettiin yhteys integraaleja koskeviin varioimisongelmiin epästandardilla kasvulla [17]. Tämä liitti avaruudet vahvasti yhteen osittaisdifferentiaaliyhtälöiden tutkimukseen. Lisäksi tutkimuksen kiihtymiseen vaikutti omalta osaltaan teorialle löydetyt sovellukset, jotka koskevat esimerkiksi elektroreologisten nesteiden mallinnusta ([14], [15], [16]). Tässä työssä keskitytään funktioavaruuksien teoriaan liittyviin aspekteihin.

Varioivan eksponentin avaruuksien teoriassa Hardyn-Littlewoodin maksimaalioperaattori on osoittautunut keskeiseksi työkaluksi. Osittain sen takia, että sen rajoittuneisuudesta seuraa myös monien muiden tärkeiden integraalioperaattoreiden rajoittuneisuus. Rajoittuneisuudella tarkoitetaan, että operattori kuvaa funktioavaruuden funktion funktioavaruuteen itseensä. L. Diening on osoittanut artikkelissa [9], että maksimaalioperaattori on rajoitettu avaruudessa $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Samassa artikkelissa on myös osoitettu eksponentin log-Hölder ehtojen tärkeys rajoittuneisuudelle sekä ehtojen geometrinen merkitys.

Tärkeä kysymys painotettujen funktioavaruuksien teoriassa on, että miten painofunktiot tulisi määritellä, jotta Hardyn-Littlewoodin maksimaalifuntkio olisi rajoitettu kyseisessä funktioavaruudessa? Vuonna 1972 B. Muckenhoupt onnistui määrittelemään luokan painofunktioita A_p, joilla Hardyn-Littlewoodin maksimaalifunktio M on rajoitettu painotetussa Lebesgue-avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^n, \omega)$ [5]. Tätä luokkaa A_p, jolla maksimaalifunktio on rajoitettu, kutsutaan Muckenhoupt-luokaksi. Vuonna 2011 D. Cruz-Uribe, L. Diening ja P. Hästö määrittelivät artikkelissa [18] Muckenhoupt-luokalle riittävän ja välttämättömän ehdon painotetussa varioivan eksponentin Lebesgue-avaruudessa $L^{p(\cdot)}(\Omega, \omega)$. Heidän lähestymistavassa painoja ω käsiteltiin kertoimina. Tässä tutkielmassa esitellään heidän antaman ehdon kanssa ekvivalentti Muckenhoupt-ehto luokalle $A_{p(\cdot)}$ ja todistetaan itsenäisesti, että kyseinen ehto on riittävä ehto maksimaalioperaattorin rajoittuneisuudelle. Tämän työn lähestymistavassa painoa ω käsitellään mittana. Työssä käytettävä lähestymistapa on suoraviivaisempi ja sen käytön taustamotivaationa on, että vastaavalla lähestymistavalla Muckenhoupt-ehto voitaisiin yleistää edelleen yleistettyyn Orlicz-avaruuteen, mikä on yhä avoin ongelma. Tämän tutkielman varioivan eksponentin osuus perustuu P. Hästön ja L. Dieningin julkaisemattomaan artikkeliin [10].

Luvussa 2 esitellään työssä tarvittavia esitietoja, käytettäviä merkintöjä ja keskeisiä määritelmiä. Luku 3 alkaa klassisen Muckenhoupt-ehdon esittelyllä ja sen perusominaisuuksien todistamisella. Luvun lopussa todistetaan klassinen tapaus maksimaalioperaattorin M rajoittuneisuudelle painotetussa Lebesgue-avaruudessa $L^p(\Omega, \omega)$.

Luvussa 4 määritellään Muckenhoupt-luokka $A_{p(\cdot)}$ varioivan eksponentin tapauksessa. Kappaleessa keskitytään vastaavien perusominaisuuksien todistamiseen kuin edellisessä luvussa vakioeksponentin tapauksessa. Seuraavassa luvussa 5 yleistetään luvussa 3 esitetty Muckenhoupt-luokan parantuvuusominaisuus (lemma 13) yleisemmille joukkoperheille ja osoitetaan riittävyyden todistuksen kannalta keskeinen rajoittuneisuustulos maksimaalioperaattorille $M_{\mathcal{B}}$, joka on määritelty spesifin joukkoperheen $\mathcal{B}$ yli. Lopulta luvussa 6 todistetaan Muckenhoupt-ehdon riittävyys. Toisin sanoin, jos $\omega \in A_p$, niin maksimaalioperaattori on tällöin rajoitettu avaruudessa $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \omega)$.

2 Esitietoja

Tässä luvussa esitetään tarvittavia esitietoja. Varioivan eksponentin Lebesgue-avaruuden $L^{p(\cdot)}(\Omega, \omega)$ perusominaisuudet ja määritelmä ovat kirjasta [1].

Määritelmiä ja merkintöjä

Symbolilla Ω tarkoitetaan aina avaruuden $\mathbb{R}^n$ avointa osajoukkoa. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kuulille käytetään merkintää B ja sen kuutioille merkintää Q. Kuutioilla tarkoitetaan aina sellaista kuutioita, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Joukon Ω Lebesguen mitalle käytetään merkintää $|\Omega|$. Merkinnällä $f \lesssim g$ tarkoitetaan, että $f \leqslant cg$, jollakin vakiolla c. Sanotaan, että $f \approx g$, jos $f \lesssim g \lesssim f$. Merkinnät c ja C tarkoittavat geneerisiä vakioita, joiden arvo saatta vaihdella kesken todistuksenkin. Funktion kantajalla tarkoitetaan joukkoa $\overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$. Maksimaalifunktiossakin esiintyvälle integraalikeskiarvolle käytetään tässä työssä usein merkintää $\fint_\Omega := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f$.

Olkoon X, Y normiavaruuksia. Merkinnällä $X \hookrightarrow Y$ tarkoitetaan, että on olemassa sellainen vakio $C_1 > 0$, että $\|x\|_Y \leq C_1 \|x\|_X$ kaikilla $x \in X$. Tällöin sanotaan, että avaruus X on jatkuvasti upotettu avaruuteen Y. Vakiota C_1 kutsutaan *upotusvakioksi.*

Mitallista funktiota $p : \Omega \to [1, \infty)$ kutsutaan *varioivaksi eksponentiksi* ja merkinnällä $\mathcal{P}(\Omega)$ tarkoitetaan niiden muodostamaa joukkoa. Käytetään joukon $A \subset \Omega$ kanssa seuraavia merkintöjä:

$$p_A^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in A} p(x), \quad p_A^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in A} p(x), \quad p^+ := p_\Omega^+ \quad ja \quad p^- := p_\Omega^-$$

.

Oletetaan aina, että $p^+ < \infty$. Määritellään konjugaattieksponentti $p' : \Omega \to [1, \infty]$ pisteittäin yhtälön $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ mukaan.

1 Määritelmä. Olkoon $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Hardyn-Littlewoodin maksimaalioperaattori M määritellään niin, että

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy.$$

Edellisen määritelmän maksimaalifunktiota kutsutaan usein keskitetyksi maksimaalifunktioksi.

Voidaan määritellä myös ei-keskitetty versio maksimaalifunktiostavoidavastaavasti niin, että

$$Mf(x) = \sup_{B_x \ni x} \frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(y)| dy,$$

missä supremum otetaan kaikista kuulista $B_x \ni x$.
Keskitetyn ja ei-keskitetyn maksimaalifunktion rajoittuneisuus seuraa toisistaan.

Maksimaalifunktio Mf voidaan määritellä myös kuutioiden avulla niin, että

$$M_Q f(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(y)| dy,$$

missä supremum otetaan vastaavasti kaikista kuutioista $Q_x \ni x$.

Seuraavan lemman mukaan määritelmät ovat verrattavissa, joten on selvää, että molempien maksimaalioperaattoreiden rajoittuneisuudet ovat ekvivalentit toistensa kanssa.

1 Lemma. *Olkoon $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin $Mf \approx M_Q f$ eli on olemassa sellaiset vakiot c ja C, että*

$$cMf(x) \leq Mf_Q(x) \leq CMf(x).$$

Vakiot c ja C riippuvat vain dimensiosta n.

Todistus. Ensin todetaan, että jokainen z-keskinen kuutio $Q(z,l)$ sisältyy johonkin kuulaan $B(z,r)$, missä l on kuution sivun pituus ja r kuulan säde. Nyt $Q(z, \frac{2r}{\sqrt{n}}) \subset B(z,r)$, sillä jos $x \in Q(z, \frac{2r}{\sqrt{n}})$, niin $|x_i - z_i| \leq \frac{r}{\sqrt{n}}$ ja

$$|x - z| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(n(\frac{r}{\sqrt{n}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq r.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(Q(z, \frac{2r}{\sqrt{n}}))} \int_{Q(z, \frac{2r}{\sqrt{n}})} |f(y)| dy &\leq \frac{m(B(z,r))}{m(Q(z, \frac{2r}{\sqrt{n}}))} \frac{1}{m(B(z,r))} \int_{B(z,r)} |f(y)| dy \\ &= C \frac{1}{m(B(z,r))} \int_{B(z,r)} |f(y)| dy.\end{aligned}$$

Seurauksena saamme, että $M_Q f(x) \leq CMf(x)$, missä

$$C = \frac{m(B(z,r))}{m(Q(z, \frac{2r}{\sqrt{n}}))} = \frac{\Omega_n r^n}{(\frac{2}{\sqrt{n}})^n r^n} = \frac{\Omega_n}{(\frac{2}{\sqrt{n}})^n} \quad , (\Omega_n = m(B(0,1))).$$

Seuraavaksi näytämme, että jokainen kuula $B(z,r)$ kuuluu johonkin kuutioon $Q(z,l)$. Nyt $B(z, \frac{l}{2\sqrt{n}}) \subset Q(z,l)$, sillä jos $x \in B(z, \frac{l}{2\sqrt{n}})$, niin $|x_i - z_i| \leq \frac{l}{2\sqrt{n}} \leq \frac{l}{2}$. Tällöin

$$\frac{m(B(z, \frac{l}{2\sqrt{n}}))}{m(Q(z,l))} \frac{1}{m(B(z, \frac{l}{2\sqrt{n}}))} \int_{B(z, \frac{l}{2\sqrt{n}})} |f(y)| dy \leq \frac{1}{m(Q(z,l))} \int_{Q(z,l)} |f(y)| dy.$$

Joten $cMf(x) \leq M_Q f(x)$, missä

$$c = \frac{m(B(z, \frac{l}{2\sqrt{n}}))}{m(Q(z,l))} = \frac{\Omega_n (\frac{l}{2\sqrt{n}})^n}{l^n} = \frac{\Omega_n}{(2\sqrt{n})^n}.$$

Siis $cMf(x) \leq M_Q f(x) \leq CMf(x)$. □

Logaritminen Hölder-jatkuvuus

2 Määritelmä. Funktio $p : \Omega \to \mathbb{R}$ toteuttaa *lokaalin* log-*Hölder-jatkuvuusehdon*, jos on olemassa sellainen vakio $c_1 > 0$, että

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c_1}{\log(\mathrm{e} + 1/|x-y|)}$$

on voimassa kaikilla $x, y \in \Omega$ ja $x \neq y$. Jos on olemassa sellaiset vakiot $p_\infty \in [1, \infty)$ ja $c_2 > 0$, että

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{c_2}{\log(\mathrm{e} + |x|)}$$

kaikilla $x \in \Omega$, niin p toteuttaa log *-Hölder-häivytysehdon* avaruudessa Ω.

Luokkaan $\mathcal{P}^{\log}(\Omega)$ kuuluvat kaikki varioivat eksponentit, jotka toteuttavat lokaalin log-Hölder-jatkuvuusehdon ja myös log-Hölder-häivytysehdon. Usein tämä luokka on liian heikko ja tarvitaan vahvempaa luokkaa $\mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\Omega)$, johon kuuluvat kaikki $p \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$, joilla $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. Vakiota c log-Hölder jatkuvuusehdossa ja arvoja p^+ ja p^- kutsutaan eksponentin p ominaisluvuiksi.

Seuraava lemma antaan lokaalille log-Hölder-jatkuvuudelle geometrisen karakterisoinnin.

2 Lemma. (Lemma 4.1.6) [1]) *Olkoon $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva, ja $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:*

(i) p on lokaalisti log-*Hölder-jatkuva.*

(ii) Kaikilla kuulilla B on voimassa $|B|^{p_B^- - p_B^+} \leq c$.

Tästä lemmasta seuraa, käytettäessä pieniä kuulia, että eksponentti kuulan säteessä voidaan vaihtaa mihin tahansa toiseen suurusluokaltaan polynomiaaliseen eksponettiin.

3 Lemma. *Olkoon p lokaalisti* log-*Hölder-jatkuva. Tällöin $|B|^{p_B^-} \approx |B|^{p(x)} \approx |B|^{p_B^+}$ kaikilla kuulilla $B \ni x$, joiden säde $r \leq C$.*

Todistus. Nyt $p_B^- \leq p(x) \leq p_B^+$. Olkoon B kuula, jonka säteelle r on voimassa $r \leq C$. Tällöin saadaan

$$\sup_{x,y \in B} |B|^{|p(x)-p(y)|} \leq \max\{1, |B|^{p_B^+ - p_B^-}\} \leq c,$$

josta seuraa

$$|B|^{p_B^+} \lesssim |B|^{p(x)} \lesssim |B|^{p_B^-}.$$

Nyt lemmasta 2 saadaan

$$\sup_{x,y\in B} |B|^{-|p(x)-p(y)|} \le \max\{1, |B|^{p_B^- - p_B^+}\} \le c,$$

josta seuraa

$$|B|^{p_B^-} \lesssim |B|^{p(x)} \lesssim |B|^{p_B^+}.$$

Siis $|B|^{p_B^-} \approx |B|^{p(x)} \approx |B|^{p_B^+}$. □

Eksponentin p harmonista keskiarvoa yli joukon B merkitään

$$p_B := \left(\frac{1}{|B|}\int_B \frac{1}{p(x)}dx\right)^{-1}.$$

4 Lemma. *Olkoon* $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$. *Tällöin* $|B|^{p_B} \approx |B|^{\langle p\rangle_B}$ *kaikilla kuulilla* $B \subset \mathbb{R}^n$, *missä* $\langle p\rangle_B = \fint_B p(x)dx$.

Todistus. Sillä $p_B^- \le p_B \le p_B^+$ ja $p_B^- \le \langle p\rangle_B \le p_B^+$, niin edellisestä lemmasta saadaan, että $|B|^{p_B} \approx |B|^{\langle p\rangle_B}$ kaikilla kuulilla B, joiden säteelle on voimassa $r \le 1$. Oletetaan nyt, että kuulan B säde $r > 1$. Sillä p on rajoitettu, niin riittää osoittaa, että $r^{\frac{\langle p\rangle_B}{p_B}-1} \approx 1$. Arvioidaan tätä varten

$$\left|\frac{\langle p\rangle_B}{p_B} - 1\right| = \left|\fint_B\fint_B \frac{p(x)-p(y)}{p(y)}dx\,dy\right| \le \fint_B\fint_B |p(x)-p(y)|dx\,dy \le 2\fint_B |p(x)-p_\infty|dx.$$

Nyt log-*Hölder häivytysehdosta* saadaan

$$\begin{aligned}\left|\frac{\langle p\rangle_B}{p_B} - 1\right| &\lesssim \fint_B \frac{1}{\log(e+|x|)}dx \le \fint_{B(0,r)} \frac{1}{\log(e+|x|)}dx \\ &= \fint_{B(0,1)} \frac{1}{\log(e+r|z|)}dz = \frac{c}{\log(e+r)}\int_0^1 \frac{s^{n-1}\log(e+r)}{\log(e+rs)}ds.\end{aligned}$$

Nyt integrandi viimeisessä vaiheessa on enintään 1 kaikilla $s \in [0,1]$, joten $\log(e+r)\left|\frac{\langle p\rangle_B}{p_B} - 1\right| \le c$. Tästä seuraa, että $r^{\frac{\langle p\rangle_B}{p_B}-1} \approx 1$. □

Varioivan eksponentin Lebesgue-avaruus

Merkinnällä ω tarkoitetaan aina lokaalisti integroituvaa painofunktiota, joka saa arvoja väliltä $(0,\infty)$.

3 Määritelmä. Olkoon $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. Määritellään funktio

$$\varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}\omega(x)dx$$

kaikilla $f \in L^0(\Omega)$. Funktiota ϱ kutsutaan *modulaariksi*.

Painotettu varioivan eksponentin Lebesgue-avaruus $L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega)$ määritellään modulaarin avulla:

$$L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega) = \{f \in L^0(\Omega,\mu) : \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega)}(\lambda f) < \infty \text{ , jollakin } \lambda > 0\}.$$

Tämä avaruus on varustettu Luxemburg-normilla

$$||f||_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Varioivan eksponentin painotettu Lebesgue-avaruus voidaan määritellä myös normin avulla

$$L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega) = \{f \in L^0(\Omega,\mu) : ||f||_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega)} < \infty\}.$$

Näiden avaruuksien perusominaisuudet on esitetty kirjassa [1].

Normin ja modulaarin välille löydetään kirjan [1] lemman 3.2.5 mukainen karkea, mutta hyödyllinen yhteys.

$$\begin{aligned} \min&\left\{\varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega)}(f)^{\frac{1}{p^-}}, \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega)}(f)^{\frac{1}{p^+}}\right\} \\ &\leq ||f||_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega)} \leq \max\left\{\varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega)}(f)^{\frac{1}{p^-}}, \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega)}(f)^{\frac{1}{p^+}}\right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Toinen hyödyllinen perustulos normille ja modulaarille on niin sanottu yksikköpallo-ominaisuus.

5 Lemma. *(Lemma 3.2.4 [1]) Jos $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, niin epäyhtälö $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ on ekvivalentti sen kanssa, että $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$. Tällöin myös funktiolle $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ saadaan*

(i) Jos $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, niin $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$.

(ii) Jos $1 < \|f\|_{p(\cdot)}$, niin $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \varrho_{p(\cdot)}(f)$.

Hölderin epäyhtälö on voimassa avaruuden $L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega)$ funktioille seuraavassa muodossa.

6 Lemma. (Lemma 3.2.20, [1])
Olkoon $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)$, $g \in L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)$ ja $p,q,s : \Omega \to [1,\infty)$ mitallisia sekä $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$. Tällöin

$$||fg||_{L^{s(\cdot)}(\Omega,\omega)} \leq 2||f||_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)}||g||_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)}.$$

Lokaalista-Globaaliin-menetelmä

Jonoavaruus l^p määritellään niin, että siihen kuuluvat kaikki reaalilukujonot $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, joilla normi $\|x\|_{l^p} = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p} < \infty$. Lebesgue-avaruudessa normille on voimassa ominaisuus:

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left\|\|f\|_{L^p(Q_i)}\right\|^p_{l^p} = \sum_i \|f\|^p_{L^p(\Omega_i)},$$

kun (Ω_i) on avaruuden $\mathbb{R}^n$ ositus mitallisiin joukkoihin Ω_i. Osituksella tarkoitetaan, että joukot Ω_i ovat erillisiä ja peittävät avaruuden siten, että $|\mathbb{R}^n \setminus \cup_i \Omega_i| = 0$. Tämän hyödyllisen ominaisuuden avulla voidaan saavuttaa haluttuja tuloksia globaalisti summaamalla lokaaleja tuloksia.

Tutkielmassa [7] Hästö osoitti, että varioivan eksponentin Lebesgue-avaruudessa normille saadaan vastaavanlainen ominaisuus, kun $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ ja joukot Ω_i ovat samankokoisia kuutioita. Seuraava lause on hyvin keskeinen tässä tutkielmassa.

4 Määritelmä. *Järjestetty ositus* avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on ositus (Q_j) samankokoisiin kuutioihin, jotka on järjestetty siten, että $i > j$ jos $\operatorname{dist}(0, Q_i) > \operatorname{dist}(0, Q_j)$.

1 Lause. (Lause 2.4,[7])
Olkoon $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ ja (Q_i) määritelmän 4 mukainen ositus. Tällöin

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} \approx \left\| \|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_i,\omega)} \right\|_{l^{p_\infty}}.$$

Huomataan, että edellinen lause vastaa Lebesgue-avaruuden normin ominaisuutta, kun p on vakio.

Sanotaan, että painolla ω on enintään polynomiaalista kasvua, jos on olemassa sellainen q, että $\omega(B(0,r)) := \|\omega\|_{L^1(B(0,r))} \lesssim r^q$, kun $r > 1$. Seuraava hyödyllinen tulos sanoo, että jos painolla ω on enintään polynomiaalista kasvua ja funktio f on sopivasti rajoitettu, niin voidaan helposti liikkua varioivan - ja vakioeksponentin avaruuden välillä. Tulos on yleistys tutkielman [7] Lemmasta 5.1 ja tutkielman [8] Lemmasta 4.5, jotka käsittelevät tapauksen $\beta = 0$. Tämä tulos on myös esitelty artikkelissa [10], jossa näytettiin vain todistuksen toinen suunta. Seuraava todistus osoittaa molemmat suunnat yhtäaikaisesti.

7 Lemma. *Olkoon $p \in \mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{R}^n)$, $\beta \in \mathbb{R}$ ja $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ sellainen funktio, jolle $|f(x)| \lesssim (1+|x|)^\beta$. Tällöin jos painolla ω on enintään polynomista kasvua, niin $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} \approx \|f\|_{L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n,\omega)}$.*

Todistus. Jaetaan todistus kolmeen tapaukseen. Oletetaan ensin, että
$\|f\|_{L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n,\omega)} = 0$, josta seuraa, että $f = 0$ melkein kaikkialla, joten myös
$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} = 0$.

Oletetaan seuraavaksi toista tapausta varten, että $0 < \|f\|_{L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n,\omega)} < \infty$. Normin homogeenisuuden nojalla voidaan olettaa vielä, että $\|f\|_{L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n,\omega)} = 1$. Jos määritellään, että

$$\frac{1}{r_1(x)} := \max\left\{0, \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right\} = \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{\max\{p(x), p_\infty\}} \quad \text{ja}$$

$$\frac{1}{r_2(x)} := \max\left\{0, \frac{1}{p_\infty} - \frac{1}{p(x)}\right\} = \frac{1}{\min\{p(x), p_\infty\}} - \frac{1}{p(x)},$$

niin Hölderin epäyhtälöstä (Lemma 6) seuraa, että

$$L^{\max\{p(\cdot),p_\infty\}}(\mathbb{R}^n,\omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega) \hookrightarrow L^{\min\{p(\cdot),p_\infty\}}(\mathbb{R}^n,\omega),$$

jos $\|1\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^n,\omega)} < \infty$ sekä $\|1\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^n,\omega)} < \infty$. Huomataan, että jos määritellään $\frac{1}{s} = \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right|$, niin $s \leq r_1$ ja $s \leq r_2$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin jos on olemassa sellainen $\lambda \in (0,1)$, jolla $\varrho_{L^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)}(\lambda) < \infty$, niin modulaarin määritelmän nojalla

$\varrho_{L^{r_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)}(\lambda) \leq \varrho_{L^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)}(\lambda) < \infty$ ja $\varrho_{L^{r_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)}(\lambda) \leq \varrho_{L^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)}(\lambda) < \infty$. Tällöin myös $\|1\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^n,\omega)} < \infty$ ja
$\|1\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^n,\omega)} < \infty$. Riittää siis osoittaa, että $\varrho_{L^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)}(\lambda) < \infty$, niin upotukset ovat voimassa.
Nyt log-Hölder-häivytysehdosta seuraa $\frac{1}{s} = \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right| \leq |p(x) - p_\infty| \leq \frac{c}{\log(e+|x|)}$, jolloin $s \geq c\log(e+|x|)$. Jos painolla on enintään polynomiaalista kasvua, niin on olemassa sellainen luku q, jolla $\omega(B(0,r)) \leq r^q$ kun $r > 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\varrho_{L^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)}(\lambda) &\leq \sum_j \int_{B(0,j+1)\setminus B(0,j)} \lambda^{s(x)}\omega(x)dx \\
&\leq \sum_j \lambda^{c\log(e+j)} \int_{B(0,j+1)\setminus B(0,j)} \omega(x)dx \\
&\leq \sum_j (e+j)^{c\log\lambda}\omega(B(0,j+1)) \\
&\leq \sum_j (e+j)^{c\log\lambda+q} < \infty,
\end{aligned}$$

kun valitaan sellainen λ, että $\lambda < e^{-(\frac{q+1}{c})}$.
Siis $L^{\max\{p(\cdot),p_\infty\}}(\mathbb{R}^n,\omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega) \hookrightarrow L^{\min\{p(\cdot),p_\infty\}}(\mathbb{R}^n,\omega)$.
Nyt sillä $|f(x)| \lesssim (1+|x|)^\beta$ ja $p_\infty \geq \min\{p_\infty, p\}$, niin saadaan

$$|f(x)|^{p_\infty} = (1+|x|)^{\beta p_\infty}\left(\frac{|f(x)|}{(1+|x|)^\beta}\right)^{p_\infty} \lesssim (1+|x|)^{\beta(p_\infty - \min\{p_\infty,p(x)\})}|f(x)|^{\min\{p,p_\infty\}}.$$

Nyt log-Hölder-häivytysehdosta saadaan, että

$$(1+|x|)^{(p_\infty - \min\{p_\infty,p(x)\})} \leq e^{\log(e+|x|)(p_\infty - \min\{p_\infty,p(x)\})} \leq e^c = C.$$

Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\min\{p_\infty,p\}}\omega(x)dx \gtrsim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_\infty}\omega(x)dx = \|f\|^{p_\infty}_{L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n,\omega)} = 1.$$

Koska p on rajoitettu, niin $\|f\|_{L^{\min\{p_\infty,p\}}(\mathbb{R}^n,\omega)} \geq C$. Tästä ja upotuksesta
$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega) \hookrightarrow L^{\min\{p(\cdot),p_\infty\}}(\mathbb{R}^n,\omega)$ seuraa, että $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} \geq C$. Nyt ollaan löydetty alaraja. Yläraja löytyy vastaavasti. Koska $p_\infty \leq \max\{p_\infty, p\}$, niin saadaan

$$\begin{aligned}
|f(x)|^{\max\{p,p_\infty\}} = (1+|x|)^{\beta\max\{p,p_\infty\}} &\left(\frac{|f(x)|}{(1+|x|)^\beta}\right)^{\max\{p,p_\infty\}} \\
&\lesssim (1+|x|)^{\beta(\max\{p,p_\infty\}-p_\infty)}|f(x)|^{p_\infty}.
\end{aligned}$$

Taas log-Hölder-häivytysehdosta saadaan, että $(1+|x|)^{(\max\{p_\infty,p(x)\}-p_\infty)} \leq C$.
Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\max\{p_\infty,p\}}\omega(x)dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_\infty}\omega(x)dx = \|f\|^{p_\infty}_{L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n,\omega)} = 1.$$

Koska p on rajoitettun, niin $\|f\|_{L^{\max\{p_\infty,p\}}(\mathbb{R}^n,\omega)} \leq C$. Tästä ja upotuksesta $L^{\max\{p(\cdot),p_\infty\}}(\mathbb{R}^n,\omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)$ seuraa, että $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} \leq C$.
Siis $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} = C$.

Kolmatta ja viimeistä tapausta varten oletetaan, että $\|f\|_{L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n,\omega)} = \infty$. Olkoon (f_i) sellainen kasvava jono ei-negatiivisia funktiota, että $f_i \to |f|$ ja $\|f_i\|_{L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n,\omega)} < \infty$. Tällöin toisen tapauksen mukaan $\|f_i\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} < \infty$. Nyt kirjan [1] lauseen 2.3.17 (*Fatou property*) nojalla $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} = \lim_i \|f_i\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} \approx \lim_i \|f_i\|_{L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n,\omega)} = \infty$.

□

3 Klassinen tapaus

Painofunktioiden luokkaa, jolla Hardyn-Littlewoodin maksimaalioperaattori M on rajoitettu avaruudessa $L^p(\Omega,\omega)$ kutsutaan Muckenhoupt-luokaksi ja sille käytetään merkintää A_p. Osoittautuu, että tämä luokka voidaan karakterisoida seuraavan määritelmän mukaisesti.

5 Määritelmä. Olkoon $1 < p < \infty$. Jos ei-negatiiviselle painofunktiolle $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ on voimassa

$$||\omega||_{A_p} := \sup_{B\in\mathcal{B}} |B|^{-p}||\omega||_{L^1(B)}||\frac{1}{\omega}||_{L^{p'/p}(B)} < \infty,$$

missä $\mathcal{B}$ on kaikkien kuulien $B \subset \mathbb{R}^n$ muodosta perhe, niin $\omega \in A_p$.

Arvoa $||\omega||_{A_p}$ kutsutaan funktion ω A_p-vakioksi. Merkitään arvoa $||\omega||_{L^1(B)} =: \omega(B)$. Tässä mielessä käsittelemme painoa ω mittana.

Tämän luvun tavoitteena on siis osoittaa, että Hardyn-Littlewoodn maksimaalioperaattori M on rajoitettu painotetussa Lebesgue-avaruudessa, kun paino määritellään niin kuin edellä. Kyseisen tuloksen todistamiseen käytettävän strategian pääpiirteet ovat samankaltaiset kuin Coifmanin ja Feffermanin vuonna 1974 julkaistussa artikkelissa [4], jossa esiteltiin yksinkertaisempi todistus maksimaalifunktion rajoittuneisuudelle kuin alkuperäisessä B. Muckenhouptin työssä vuodelta 1972. Luvun perustuloksissa ja lemmoissa viitataan lähteisiin [2] ja [3].

Määritellään vielä luokat A_∞ ja A_1.

6 Määritelmä. Luokka A_∞ saadaan kaikkien luokkien A_p yhdisteenä

$$A_\infty = \bigcup_p A_p.$$

Luokkaan A_1 kuuluvat kaikki funktiot $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, joilla $M\omega \lesssim \omega$.

Painolle ω voidaan määritellä duualipaino $\omega'(y) := \omega(y)^{1-p'}$, jolla on seuraava ominaisuus.

8 Lemma. *Olkoon $\omega \in A_p$. Tällöin $\|\omega\|_{A_p} = \|\omega'\|^{p-1}_{A_{p'}}$, ja näin ollen $\omega \in A_p$, jos ja vain jos $\omega' \in A_{p'}$.*

Todistus. Suoraviivaisella laskulla nähdään, että

$$\begin{aligned}
\|\omega'\|_{A_{p'}}^{p-1} &= \sup_{B\in\mathcal{B}} \left(|B|^{-p'}\omega'(B)||\frac{1}{\omega'}||_{L^{p/p'}(B)} \right)^{p-1} \\
&= \sup_{B\in\mathcal{B}} |B|^{-p'(p-1)} \left(\int_B \omega^{1-p'} dx \right)^{p-1} \int_B \omega^{-(1-p')p/p'} dx \\
&= \sup_{B\in\mathcal{B}} |B|^{-p} \left(\int_B \omega^{-p'/p} dx \right)^{p-1} \omega(B) = \|\omega\|_{A_p}.
\end{aligned}$$

□

Seuraavat kaksi lemmaa on esitetty kirjassa [3]. Ensimmäinen antaa luokalle A_p vaihtoehtoisen määritelmän, jonka avulla on seuraavan lemman mukaan helppo näyttää mitan ω tuplautuvuus.

9 Lemma. *Olkoon $1 < p < \infty$. Tällöin $\omega \in A_p$ jos ja vain jos epäyhtälö*

$$\omega(B) \lesssim \left(\frac{1}{|B|} \int_B f dx \right)^{-p} \int_B f^p \omega dx \tag{2}$$

on voimassa kaikille mitallisille $f \geq 0$ ja kuulille $B \subset \mathbb{R}^n$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $\omega \in A_p$. Sillä

$$\frac{1}{|B|} \int_B f dx = \frac{1}{|B|} \int_B f\omega^{1/p}\omega^{-1/p} dx,$$

niin Hölderin epäyhtälöstä eksponenteilla p ja p' saadaan

$$\frac{1}{|B|} \int_B f dx \leq \frac{1}{|B|} \left(\int_B f^p \omega dx \right)^{1/p} \left(\int_B \omega^{-p'/p} dx \right)^{1/p'}.$$

Nyt oletuksen nojalla

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B f dx \right)^p \leq |B|^{-p} ||\frac{1}{\omega}||_{L^{p'/p}(B)} \left(\int_B f^p \omega dx \right) \leq \frac{||\omega||_{A_p}}{\omega(B)} \left(\int_B f^p \omega dx \right),$$

josta saadaan edelleen

$$\omega(B) \lesssim \left(\frac{1}{|B|} \int_B f dx \right)^{-p} \int_B f^p \omega dx.$$

Oletetaan seuraavaksi, että epäyhtälö (2) on voimassa. Jos asetetaan $f = \omega^{-p'/p}$, niin saadaan että $f^p\omega = \omega^{-p'+1} = \omega^{-p'/p} = f$ ja epäyhtälö (2) tulee muotoon

$$\begin{aligned}
\omega(B) &\leq c \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega^{-p'/p} dx \right)^{-p} \int_B \omega^{-p'+1} dx \\
&= c|B|^{-p} \left(\int_B \omega^{-p'/p} dx \right)^{-p+1}.
\end{aligned}$$

Tästä nähdään suoraan, että

$$|B|^{-p}\omega(B)\left(\int_B \omega^{-p'/p}dx\right)^{p-1} \leq c < \infty,$$

joten $||\omega||_{A_p} < \infty$ ja $\omega \in A_p$. □

Seuraava lemma osoitta, että ω on mittana tuplautuva. Kuulalle, jolla on sama keskipiste kuin kuulalla B ja kaksinkertainen säde, käytetään merkintää $2B$.

2 Lause. *Olkoon $1 < p < \infty$ ja $\omega \in A_p$. Tällöin ω on tuplautuva eli on olemassa sellainen vakio c, että $\omega(2B) \leq c\omega(B)$ kaikilla kuulilla $B \subset \mathbb{R}^n$.*

Todistus. Käytetään lemman 9 epäyhtälöä kuulalle $2B$ ja funktiolle $f = \chi_B$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\omega(2B) &\leq c\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}\chi_B dx\right)^{-p}\int_{2B}(\chi_B)^p\omega dx\\ &= c\left(\frac{|B|}{|2B|}\right)^{-p}\omega(B)\\ &= c2^{np}\omega(B).\end{aligned}$$

□

Huomataan, että lemmoissa 9 ja 2 oltaisiin voitu käyttää yhtä hyvin kuutioita kuulien sijaan. Tästä syystä loppu luvussa siirrytään käyttämään kuutiota. Tällöin saadaan käyttöön seuraava hyvin hyödyllinen Calderónin-Zygmundin peitelemma.

10 Lemma. *(Lause 1.12 [2]) Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $t > 0$. Tällöin on olemassa sellainen perhe sisäpistevieraita kuutioita $\{Q_j\}$, joka muodostuu niistä maksimaalisista dyadisista kuutioista, joilla $⨍_{Q_j}|f|dx > t$. Tälle perheelle on voimassa:*

(i) Jokaisella Q_j on voimassa $t < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|dx \leq 2^n t$.

(ii) Melkein kaikilla $x \notin \cup_j Q_j$ on voimassa $|f(x)| \leq t$.

Todistus. Olkoon D_k joukko dyadisia kuutioita, joiden sivun pituus on 2^{-k} ja niiden kärkipisteet hilalla $\Lambda_k = 2^{-k}\mathbb{Z}^n$. Olkoon $D = \bigcup_{-\infty}^{\infty} D_k$ kaikkien näiden dyadisten kuutioiden muodostama joukko.

Nyt jos $Q, Q' \in D$ ja $|Q'| \leq |Q|$, niin $Q' \subset Q$ tai $\mathrm{int}Q' \cup \mathrm{int}Q = \emptyset$. Siis jokainen $Q \in D_k$ on yhdiste 2^n sisäpistevieraita kuutioita $Q' \in D_{k+1}$.

Olkoon joukko C_t muodostettu suurimmista kuutioista $Q \in D$, jotka toteuttavat:

$$t < \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx. \tag{3}$$

Tällöin jokainen $Q \in D$, joka toteuttaa epäyhtälön (3), sisältyy johonkin $Q' \in C_t$. Nyt kuutiot $Q \in C_t$ ovat sisäpistevieraita edellä määritellyn mukaan. Olkoon $Q' \in$

D_{k-1} ainoa kuutio, joka sisältää kuution Q. Nyt jos $Q \in D_k$ kuuluu joukkoon C_t, niin

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f(x)|dx \leq t,$$

ja edelleen relaatiosta $|Q'| = 2^n|Q|$ seuraa, että

$$\frac{1}{|Q|}\int_{Q} |f(x)|dx \leq \frac{2^n}{|Q'|}\int_{Q'} |f(x)|dx \leq 2^n t.$$

Olemme nyt löytäneet perheen kuutioita $C_t = \{Q_j\}$, joille:

$$t < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|dx \leq 2^n t. \tag{4}$$

Olkoon nyt $x \notin \cup_j Q_j$. Tällöin kaikille dyadisille kuutioille $R \ni x$ on voimassa, että $\frac{1}{|R|}\int_R |f(x)|dx \leq t$. Olkoon (R_k) sellainen mitaltaan laskeva jono dyadisia kuutioita, että $\{x\} = \cap_k R_k$. Tällöin jokaiselle R_k on voimassa, että $\frac{1}{|R_k|}\int_{R_k} |f(x)|dx \leq t$. Nyt Lebesguen differentoituvuuslauseesta (esim. [6], Lause 2.23) seuraa, että melkein kaikilla $x \notin \cup_j Q_j$ on voimassa

$$|f(x)| = \left|\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|R_k|}\int_{R_k} |f(x)|dx\right| \leq t.$$

□

Seuraava lemma antaa vaihtoehtoisen määritelmän luokalle A_∞.
([2] s.403 korollaari)

11 Lemma. *Olkoon $\omega \in A_p$. Tällöin jokaiselle $0 < \alpha < 1$ on olemassa sellainen $\beta < 1$, että kun mitalliselle joukolle A, joka sisältyy kuulaan B, on voimassa $|A| \leq \alpha|B|$, niin $\omega(A) \leq \beta\omega(B)$.*

Todistus. Käytetään lemmaa 9 tällä kertaa funktiolle $f = \chi_{B\setminus A}$ ja kuulalle B, jolloin

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \chi_{B\setminus A}dx\right)^p \leq \frac{c}{\omega(B)}\int_B (\chi_{B\setminus A})^p \omega dx.$$

Sillä $A \subset B$ ja $|A| \leq \alpha|B|$, niin edellisestä epäyhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned}(1-\alpha)^p \leq \left(1 - \frac{|A|}{|B|}\right)^p &= \left(\frac{1}{|B|}\int_B \chi_{B\setminus A}dx\right)^p \\ &\leq \frac{c}{\omega(B)}\int_B (\chi_{B\setminus A})^p\omega dx \\ &= \frac{c}{\omega(B)}\int_B (\chi_B - \chi_A)\omega dx \\ &= \frac{c}{\omega(B)}(\omega(B) - \omega(A)).\end{aligned}$$

Näin ollen kun valitaan $\beta = c^{-1}(c - (1-\alpha)^p)$, saadaan $\omega(A) \leq \beta\omega(B)$. □

Seuraavaksi todistetaan käänteinen Hölderin epäyhtälö.

12 Lemma. *(Lemma 2.5 [2]) Olkoon $\omega \in A_p$. Tällöin on olemassa sellaiset vakiot $\varepsilon > 0$ ja C, että*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx\right), \tag{5}$$

kaikilla kuutioilla Q. Vakiot C ja $\varepsilon > 0$ eivät riipu joukosta Q.

Todistus. Olkoon $Q \subset \Omega$ jokin kiinnitetty dyadinen kuutio. Halutaan siis osoittaa, että on olemassa sellainen kuutiosta Q riippumaton $\varepsilon > 0$, että

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1+\varepsilon}dx \lesssim \left(\frac{\omega(Q)}{|Q|}\right)^{1+\varepsilon}.$$

Olkoon $\alpha < 1$. Määritellään kasvava lukujono (λ_k) rekursiolla $\lambda_{k+1} = 2^n\alpha^{-1}\lambda_k$ ja asetetaan jonon ensimmäiseksi jäseneksi $\lambda_0 = \frac{1}{|Q|}\omega(Q)$. Tehdään seuraavaksi jokaisella λ_k lemman 10 mukainen hajotelma kuutiolle Q ja funktiolle ω. Eli tutkitaan niitä maksimaalisia dyadisia osakuutioita $Q_j \subset Q$, joiden integraalikeskiarvo $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}\omega > \lambda_k$. Merkitään tätä kokoelmaa $\{Q_j^k\}_{j=1,2,\ldots}$. Tällöin lemmasta 10 seuraa, että jokaisella j on voimassa

$$\lambda_k \leq \frac{\omega(Q_j^k)}{|Q_j^k|} \leq 2^n\lambda_k$$

ja melkein kaikilla $x \notin \cup_j Q_j^k$, $\omega(x) \leq \lambda_k$.
Olkoon nyt $D_k = \cup_j Q_j^k$. Koska $\lambda_{k+1} > \lambda_k$, niin $Q_j^{k+1} \subset Q_i^k$ jollakin $i = 1, 2\ldots$ ja $D_{k+1} \subset D_k$. Tutkitaan seuraavaksi kuinka suuri osa kuutiosta Q_i^k voidaan peittää joukolla D_{k+1}. Lemman 10 ominaisuuksien avulla saadaan, että

$$\begin{aligned}\frac{|Q_i^k \cap D_{k+1}|}{|Q_i^k|} &= \frac{1}{|Q_i^k|}\sum_{Q_j^{k+1}\subset Q_i^k}|Q_j^{k+1}| \\ &\leq \frac{1}{|Q_i^k|}\sum_{Q_j^{k+1}\subset Q_i^k}\frac{1}{\lambda_{k+1}}\omega(Q_j^{k+1}) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}}\frac{\omega(Q_i^k)}{|Q_i^k|} \\ &\leq \frac{2^n\lambda_k}{\lambda_{k+1}} = \alpha.\end{aligned}$$

Nyt lemman 11 mukaan on olemassa sellainen vakio β, että $\omega(Q_i^k \cap D_{k+1}) \leq \beta\omega(Q_i^k)$. Tällöin myös $\omega(D_{k+1}) = \sum_i \omega(Q_i^k \cap D_{k+1}) \leq \beta\sum_i \omega(Q_i^k) = \beta\omega(D_k)$, josta seuraa, että $\omega(D_{k+1}) \leq \beta^k\omega(D_0)$. Samoin argumentein $|D_{k+1}| \leq \alpha|D_k|$, ja $|D_k| \leq \alpha^k|D_0$, joiden seurauksena $|\cap_{k=0}^{\infty} D_k| = \lim_{k\to\infty}|D_k| = 0$.

Saadaan

$$
\begin{aligned}
\int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon}dx &= \int_{Q\setminus D_0} \omega(x)^{1+\varepsilon}dx + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{D_k\setminus D_{k+1}} \omega(x)^{1+\varepsilon}dx \\
&\leq \lambda_0^\varepsilon \omega(Q\setminus D_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k+1}^\varepsilon \omega(D_k\setminus D_{k+1}) \\
&\leq \lambda_0^\varepsilon \omega(Q\setminus D_0) + \sum_{k=0}^{\infty} (2^n\alpha^{-1})^{(k+1)\varepsilon}\lambda_0^\varepsilon \beta^k \omega(D_0) \\
&= \lambda_0^\varepsilon \left(\omega(Q\setminus D_0) + (2^n\alpha^{-1})^\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} ((2^n\alpha^{-1})^\varepsilon \beta)^k \omega(D_0) \right).
\end{aligned}
$$

Nyt oikea termi on geometrinen summa, josta saadaan äärellinen kun valitaan tarpeeksi pieni $\varepsilon > 0$ niin,
että $(2^n\alpha^{-1})^\varepsilon \beta < 1$. Muistetaan, että $\lambda_0 = \frac{1}{|Q|}\omega(Q)$, jolloin saadaan

$$
\int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon}dx \leq c\lambda_0^\varepsilon \left(\omega(Q\setminus D_0) + \omega(D_0)\right) = c\lambda_0^\varepsilon \omega(Q) = c\frac{1}{|Q|^\varepsilon}\omega(Q)^{1+\varepsilon}
$$

ja lopulta

$$
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon}dx \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx \right).
$$

□

Seuraava lemma on keskeinen parantuvuusominaisuus painolle ω.

13 Lemma. *Olkoon $1 < p < \infty$ ja $\omega \in A_p$. Tällöin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $\omega \in A_{p-\varepsilon}$.*

Todistus. Olkoon $1 < p < \infty$ ja $\omega \in A_p$. Tällöin lemman 8 mukaan $\omega(x)^{\frac{-1}{p-1}} \in A_{p'}$, missä p' on luvun p Hölder-konjugaatti eli sille on voimassa $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$. Nyt käänteisen Hölderin epäyhtälön (5) mukaan on olemassa sellaiset vakiot ε_0 ja C, että kaikilla kuulille Q on voimassa

$$
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\omega(x)^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{1+\varepsilon_0} dx \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon_0}} \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{\frac{-1}{p-1}}dx \right).
$$

Sillä $\frac{1+\varepsilon_0}{p-1} \geq \frac{1}{p-1}$, niin on olemassa sellainen $0 < \varepsilon < p-1$, että $\frac{1+\varepsilon_0}{p-1} = \frac{1}{p-\varepsilon-1}$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{\frac{-1}{p-\varepsilon-1}}dx \right)^{p-\varepsilon-1} &= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\omega(x)^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{1+\varepsilon_0} dx \right)^{\frac{p-1}{1+\varepsilon_0}} \\
&\leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{\frac{-1}{p-1}}dx \right)^{p-1} \\
&\leq C||\omega||_{A_{p'}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx \right)^{-1},
\end{aligned}
$$

jonka perusteella

$$||\omega||_{A_{p-\varepsilon}} = \sup_Q |Q|^{-(p-\varepsilon)} \left(\int_Q \omega(x)dx \right) \left(\int_Q \omega(x)^{\frac{-1}{p-\varepsilon-1}} dx \right)^{p-\varepsilon-1} \leq C||\omega||_{A_{p'}} < \infty.$$

□

Edellisen lemman seurauksena huomataan, että kun $q < p$, niin jokainen luokka A_p voidaan esittää luokkien A_q yhdisteenä

$$A_p = \bigcup_{q<p} A_q.$$

Ulkomitta μ on Borel-säännöllinen, jos jokaista joukkoa $A \subset \mathbb{R}^n$ kohti on olemassa sellainen Borel-joukko $B \subset \mathbb{R}^n$, että $A \subset B$ ja $\mu(A) = \mu(B)$. Oletetaan lisäksi, että μ on tuplautuva. Määritellään nyt mitan μ avulla maksimaalifunktio

$$M_\mu f := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(x) d\mu(x), \tag{6}$$

missä $Q \subset \mathbb{R}^n$ on kuutio.

Kirjan [2] lauseen 2.6 mukaan $M_\mu f$ on rajoitettu avaruudessa $L^p(\mathbb{R}, \mu)$.

3 Lause. *([2] Lause 2.6)*
Olkoon $1 < p < \infty$. Tällöin on olemassa sellainen vakio C, että kaikilla $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ on voimassa epäyhtälö

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (M_\mu f(x))^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nyt olemme valmiita todistamaan Muckenhouptin painofunktioiden ja maksimaalifunktion välisen yhteyden.

4 Lause. *Olkoon $1 < p < \infty$. Painofunktio $\omega \in A_p$ jos ja vain jos kaikilla $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ on voimassa epäyhtälö*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \omega dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w dx. \tag{7}$$

Todistus. Oletetaan, ensin että epäyhtälö 7 on voimassa. Kiinnittämällä kuution Q huomataan, että

$$Mf(x) \geq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \right) \chi_Q(x).$$

Tämän avulla yhtälöstä 7 saadaan

$$\begin{aligned} C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w dx &\geq \int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \omega dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \right) \chi_Q(x) \right)^p \omega dx \\ &= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \right)^p \omega(Q). \end{aligned}$$

Uudelleen järjestelemällä nähdään, että

$$(f_Q)^p \leq \frac{C}{\omega(Q)} \int_Q f^p \omega dx,$$

missä $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy$. Nyt lemman 2 mukaan $\omega \in A_p$.

Oletetaan sitten vastaavasti toista suuntaa varten, että $\omega \in A_p$. Tällöin lemman 13 mukaan on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $\omega \in A_{p-\varepsilon}$. Nyt lemman 2 mukaan jokaiselle $f \geq 0$ ja kuutiolle Q on voimassa

$$(f_Q)^{p-\varepsilon} \leq \frac{c}{\omega(Q)} \int_Q f^{p-\varepsilon} \omega dx.$$

Ottamalla supremumin puolittain saadaan, että

$$Mf(x) \leq c \left(M_\omega (f^{p-\varepsilon})(x) \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}, \tag{8}$$

missä $M_\omega f := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\omega(Q)} \int_Q f(x) \omega dx$. Lauseen 2 mukaan ω on tuplautuva. Nyt asettamalla $d\mu = \omega dx$ lauseesta 3 seuraa, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\omega f(x))^r \omega dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r \omega dx$$

kaikilla $r > 1$.
Asettamalla $r = \frac{p}{p-\varepsilon}$ ja käyttämällä funktion f tilalla funktiota $f^{p-\varepsilon}$, niin edellisestä epäyhtälöstä saadaan epäyhtälön 8 kanssa, että

$$\begin{aligned} C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)^{p-\varepsilon}|^{\frac{p}{p-\varepsilon}} \omega dx &\geq c \int_{\mathbb{R}^n} (M_\omega f^{p-\varepsilon}(x))^{\frac{p}{p-\varepsilon}} \omega dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p \omega dx. \end{aligned}$$

Uudelleenjärjestelemällä saadaan haluttu tulos

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p \omega dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega dx. \tag{9}$$

□

4 Muckenhoupt luokka $A_{p(\cdot)}$

Määritellään luokka $A_{p(\cdot)}$ siten, että siihen kuuluvat kaikki ne painofunktiot ω, joilla

$$||\omega||_{A_{p(\cdot)}} := \sup_{B \in \mathcal{B}} |B|^{-p_B} ||\omega||_{L^1(B)} ||\frac{1}{\omega}||_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} < \infty,$$

missä $\mathcal{B}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ kaikkien pallojen B muodostama perhe. Jos funktio $p(\cdot)$ on vakiofunktio, niin $A_{p(\cdot)}$ on tavallinen luokka A_p. Luokka $A^{\text{loc}}_{p(\cdot)}$ määritellään vastavaasti, mutta perheeseen $\mathcal{B}$ kuuluu vain kaikki kuulat, joiden säde on alle yhden.

Jos käytetään jotain tiettyä perhettä $\mathcal{B}$, niin käytetään merkintää $A^{\mathcal{B}}_{p(\cdot)}$ ja $||\omega||_{A^{\mathcal{B}}_{p(\cdot)}}$. Luokat $A_{p(\cdot)}(D)$ ja $A^{\mathrm{loc}}_{p(\cdot)}$ määritellään vastaavasti, mutta joukkoperhe on nyt edeltävän tapauksessa kaikki kuulat, jotka kuuluvat joukkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ ja jälkimmäisen tapauksessa kaikki kuulat, joiden säde $r \leq 1$. Luokat A_1 ja A_∞ määritellään samalla tavalla kuin klassisessakin tapauksessa.

14 Lemma. *Olkoon $p, q \in \mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{R}^n)$. Jos $q(x) \leq p(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, niin on olemassa sellainen vakio C_{incl}, että $||\omega||_{A_{p(\cdot)}} \leq C_{\mathrm{incl}}||\omega||_{A_{q(\cdot)}}$. Lisäksi vakio C_{incl} riippu vain eksponettien p ja q* log*-Hölder vakioista.*

Todistus. Sillä $q \leq p$, niin $\frac{q'}{q} \geq \frac{p'}{p}$. Asettamalla $\frac{1}{\alpha} = \frac{p}{p'} - \frac{q}{q'} = p - q \geq 0$, seuraa $\frac{1}{p'/p} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{q'/q}$, jolloin Hölderin epäyhtälöstä (Lemma 6) saadaan

$$\left\|\omega^{-1}\right\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} \leq 2\left\|1\right\|_{L^{\alpha(\cdot)}(B)}\left\|\omega^{-1}\right\|_{L^{q'(\cdot)/q}(B)}.$$

Nyt kirjan [1] lauseen 4.5.7 mukaan $\|1\|_{L^{\alpha(\cdot)}(B)} \approx |B|^{\frac{1}{\alpha_B}}$ myös rajoittamattomalle eksponentille $\alpha \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$.

Huomataan, että $\frac{1}{\alpha_B} = \fint_B \frac{1}{\alpha(x)}dx = \fint p(x) - q(x)dx = \langle p\rangle_B - \langle q\rangle_B$, jolloin lemman 4 avulla saadaan, että

$$\|1\|_{L^{\alpha(\cdot)}(B)} \approx |B|^{\frac{1}{\alpha_B}} = |B|^{\langle p\rangle_B - \langle q\rangle_B \approx |B|^{p_B - q_B}},$$

missä $\langle p\rangle_B = \fint_B p(x)dx$. Yhdistämällä edelliset epäyhtälöt seuraa, että

$$|B|^{-p_B}\left\|\omega^{-1}\right\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} \leq 2c|B|^{-q_B}\left\|\omega^{-1}\right\|_{L^{q'(\cdot)/q}(B)},$$

mikä on yhtä sen kanssa, että $||\omega||_{A_{p(\cdot)}} \leq C_{\mathrm{incl}}||\omega||_{A_{q(\cdot)}}$. □

1 Huomautus. Vakio C_{incl} edellisessä lemmassa riipuu vain epäyhtälön eksponenttien log-Hölder-vakioista. Voidaan huomata, että C_{incl} on riippumaton eksponentista q, jos lemmaa käytetään eksponenteille $p(\cdot)$ ja $q \in (1, \infty)$.

Edellisen lemman perusteella $A_1 \subset A_{p^-} \subset A_{p(\cdot)} \subset A_{p^+} \subset A_\infty$, kun $p \in \mathcal{P}^{\log}_{\pm}$.

15 Lemma. *Olkoon $p \in \mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{R}^n)$. Jos $\omega \in A_{p(\cdot)}$, niin*

$$\omega(B(x,r)) \gtrsim \omega(B(y,R))\left(\frac{r^n}{|x-y|^n + r^n + R^n}\right)^{p^+},$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja $R, r > 0$.

Todistus. Edellisen lemman perusteella jos $\omega \in A_{p(\cdot)}$, niin $\omega \in A_{p^+}$. Sillä p^+ on vakio, niin sille voidaan käyttää klassista maksimaaliepäyhtälöä (lause 4). Saadaan

$$\begin{aligned}\omega(B(x,r)) &= \int_{\mathbb{R}^n}(\chi_{B(x,r)}(z))^{p^+}\omega(z)dz \gtrsim \int_{\mathbb{R}^n}(M\chi_{B(x,r)}(z))^{p^+}\omega(z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\sup_{B_z \ni z}\frac{|B_z \cap B(x,r)|}{|B_z|}\right)^{p^+}\omega(z)dz.\end{aligned}$$

Rajoitetaan z kuulaan $B(y,R)$ ja valitaan $B_z = B(s, \frac{|x-y|+r+R}{2})$, missä s toteuttaa yhtälön $\operatorname{dist}(s, B(x,r)) = \operatorname{dist}(s, B(y,R))$.
Lisäksi $\left(\frac{|x-y|+r+R}{2}\right)^n \leq |x-y|^n + |r+R|^n \leq 2^n(|x-y|^n + |r|^n + |R|^n)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sup_{B_z \ni z} \frac{|B_z \cap B(x,r)|}{|B_z|} \right)^{p^+} \omega(z)dz &\geq \int_{B(y,R)} \left(\frac{|B(x,r)|}{|B(s, \frac{|x-y|+r+R}{2})|} \right)^{p^+} \omega(z)dz \\
&= \omega(B(y,R)) \left(\frac{r^n}{\left(\frac{|x-y|+r+R)}{2}\right)^n} \right)^{p^+} \\
&\gtrsim \omega(B(y,R)) \left(\frac{r^n}{|x-y|^n + r^n + R^n} \right)^{p^+} .
\end{aligned}$$

Siis $\omega(B(x,r)) \gtrsim \omega(B(y,R)) \left(\frac{r^n}{|x-y|^n + r^n + R^n} \right)^{p^+}$, kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja $R, r > 0$. $\square$

2 Huomautus. Tästä voidaan nähdä suoraan, että $\omega(B(x,2r)) \lesssim \omega(B(x,r))$, joten ω on mittana tuplautuva myös varioivan eksponentin tapauksessa.

3 Huomautus. Lemmasta 15 nähdään myös, että painolla ω on enintään polynomiaalista kasvua eli $\omega(B(0,r)) \lesssim r^{p^+}$, kun $r > 1$.

Edellisen lemman avulla voidaan myös näyttää keskeinen yhtäläisyys karakterisen funktion normin ja modulaarin väille, kun $\omega \in A_\infty$.

16 Lemma. *Olkoon $p \in \mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{R}^n)$ ja $\omega \in A_\infty$. Tällöin*

$$\|1\|_{L^{p(\cdot)}(B,\omega)} \approx \omega(B)^{\frac{1}{p_B}} \approx \omega(B)^{\frac{1}{p_B^+}} \approx \omega(B)^{\frac{1}{p_B^-}} \approx \omega(B)^{\frac{1}{p(x)}},$$

kun kuulan B säde $r \leq 1$ ja $x \in B$. Lisäksi $\omega(B)^{\frac{1}{p_B}} \approx \omega(B)^{\frac{1}{p_\infty}}$, kun $r \in (\frac{1}{8\sqrt{n}}, 1]$.

Todistus. Sillä $\omega \in A_\infty$, niin on olemassa sellainen $q \in [1,\infty)$, että $\omega \in A_q$. Oletetaan ensin, että kuulan $B = B(x,r)$ säteelle on voimassa $r \leq 1$. Tällöin lemmasta 15 saadaan, että

$$\left(\frac{r^n}{1+|x|^n} \right)^q \omega(B(0,1)) \lesssim \omega(B) \lesssim (1+|x|^n)^q \omega(B(0,1)). \tag{10}$$

Jolloin

$$\begin{aligned}
\omega(B)^{p_B^- - p_B^+} &\lesssim \omega(B(0,1))^{p_B^- - p_B^+} (1+|x|^n)^{q(p_B^+ - p_B^-)} r^{-nq(p_B^+ - p_B^-)} \\
&\leq \left[1 + \omega(B(0,1))^{p^- - p^+} \right] (1+|x|^n)^{q|p_B^+ - p_\infty| + q|p_B^- - p_\infty|} r^{-nq(p_B^+ - p_B^-)} .
\end{aligned}$$

Nyt ensimmäinen tekijä on vakio. Asetetaan $p(a) := p_B^+$ ja $p(b) := p_B^-$. Nyt $a, b \in \overline{B}$, niin $|x| \leq |a| + 1$ ja $|x| \leq |b| + 1$. Nyt toinen tekijä on rajoitettu, sillä log-Hölder-häivytysehdosta

$$
\begin{aligned}
(1+|x|^n)^{q|p_B^+-p_\infty|+q|p_B^- -p_\infty|} &= e^{q\log(1+|x|^n)c\log(e+|a|)^{-1}}e^{q\log(1+|x|^n)c\log(e+|b|)^{-1}}\\
&\leq e^{qnc\log(1+|x|)\log(e+|a|)^{-1}}e^{qnc\log(1+|x|)\log(e+|b|)^{-1}}\\
&\leq e^{2qnc}\leq\infty.
\end{aligned}
$$

Myös viimeinen tekijä on rajoitettu, sillä lokaalista log-Hölder-jatkuvuusehdosta

$$
\begin{aligned}
r^{-nq(p_B^+-p_B^-)} &\leq e^{-nqc\log(r)(\log(e+1/|a-b|))^{-1}}\\
&\leq e^{nqc\log(1/r)(\log(e+1/r))^{-1}}\\
&\leq e^{nqc}<\infty.
\end{aligned}
$$

Siis $\omega(B)^{p_B^- -p_B^+}\lesssim 1$. Epäyhtälön (10) toisesta puolesta saadaan

$$
\omega(B)^{p_B^- -p_B^+}\gtrsim(1+|x|^n)^{-q(p_B^+-p_B^-)}\omega(B(0,1))^{p_B^- -p_B^+},
$$

joten samoin perusteluin $\omega(B)^{p_B^- -p_B^+}\gtrsim 1$.
Nyt ominaisuuden (1) perusteella on niin, että

$$
\min\left\{\omega(B)^{\frac{1}{p_B^+}},\omega(B)^{\frac{1}{p_B^-}}\right\}\leq\|1\|_{L^{p(\cdot)}(B,\omega)}\leq\max\left\{\omega(B)^{\frac{1}{p_B^+}},\omega(B)^{\frac{1}{p_B^-}}\right\}.
$$

Nyt yläraja on ekvivalentti alarajan kanssa, koska $\omega(B)^{p_B^- -p_B^+}\approx 1$, ja ensimmäinen väite seuraa.

Oletetaan seuraavaksi, että $r\in(\frac{1}{8\sqrt{n}},1]$. Tällöin epäyhtälön (10) vasemmalle puolelle saadaan

$$
\omega(B)\gtrsim\omega(B(0,1))\left(\frac{r^n}{1+|x|^n}\right)^q\geq\omega(B(0,1))\frac{(8\sqrt{n})^{-nq}}{(1+|x|^n)^q}\gtrsim\omega(B(0,1))\,(1+|x|^n)^{-q}.
$$

Tällöin (10) tulee muotoon

$$
(1+|x|^n)^{-q}\,\omega(B(0,1))\lesssim\omega(B)\lesssim(1+|x|^n)^q\omega(B(0,1)),
$$

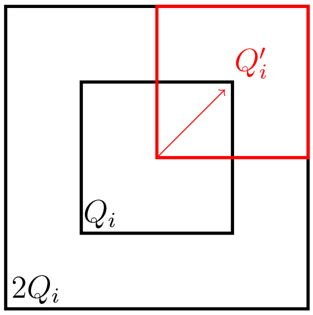
jolloin *häivytysehdosta* seuraa, että $\omega(B)^{\frac{1}{p_B}}\approx\omega(B)^{\frac{1}{p_\infty}}$. □

Seuraavaksi käytetään *Lokaalista-Globaaliin-menetelmää*, jotta edellisestä lemmasta saadaan versio suurille kuulille.
Sanotaan, että mitta on *tuplatuva pienillä kuulilla*, jos mitan tuplautuvuus ehto on voimassa kaikille kuulille, joiden säde $r\leq 1$.

17 Lemma. *Olkoon $p\in\mathcal{P}_\pm^{\log}(\mathbb{R}^n)$. Oletetaan, että ω on tuplautuva pienillä kuulilla sekä että $\|1\|_{L^{p(\cdot)}(B,\omega)}\approx\omega(B)^{\frac{1}{p_\infty}}$ kaikilla kuulilla, joilla $r\in(\frac{1}{8\sqrt{n}},1)$. Tällöin*

$$
\|1\|_{L^{p(\cdot)}(B,\omega)}\approx\omega(B)^{\frac{1}{p_\infty}}
$$

kaikilla kuulilla, joilla $r\geq 1$.



Kuva 1: Osituksen (Q_i') muodostaminen.

Todistus. Olkoon (Q_i) määritelmän 4 mukainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ järjestetty ositus kuutoihin, joiden halkaisijan pituus on $\frac{1}{2}$. Olkoon B kuula, jolle $\operatorname{diam} B \geq 2$. Tavoitteena on käyttää oletusta jokaiselle joukolle $B \cap Q_i$, mutta kyseiset joukot eivät ole kuulia, joten argumenttia täytyy muokata hieman.
Olkoon nyt I niiden indeksien i muodostama indeksijoukko, joille $B \cap Q_i = \emptyset$. Nyt lauseesta 1 ositukselle (Q_i) saadaan, että

$$\|\chi_B\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} \approx \sum_i \|\chi_B\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(Q_i,\omega)} \leq \sum_{i\in I} \|\chi_B\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(2Q_i,\omega)} = \sum_{i\in I} \|1\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(B\cap 2Q_i,\omega)} .$$

Olkoon (Q_i') järjestetty ositus, joka on saatu siirtämällä jokaista kuutiota Q_i puolihalkaisijaa suuntaan $(1, \ldots, 1)$.

Tällöin kuvan 1 perusteella

$$2Q_i = \bigcup_{j\in J_i} Q_j',$$

missä J_i on indeksijoukko, johon kuuluu 2^n alkiota. Nyt voidaan käyttää lausetta 1 uudestaan ja saadaan

$$\sum_{i\in I} \|1\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(B\cap 2Q_i,\omega)} \leq 2^n \sum \|1\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(B\cap Q_i',\omega)} \approx \|\chi_B\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} .$$

Siis

$$\|1\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(B,\omega)} = \|\chi_B\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} \approx \sum_{i\in I} \|1\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(B\cap 2Q_i,\omega)} . \tag{11}$$

Olkoon $i \in I$. Tällöin löydetään sellaiset kuulat B^- ja B^+, että $B^- \subset B \cap 2Q_i \subset 2Q_i \subset B^+$, kun $\operatorname{diam} B^- = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ ja $\operatorname{diam} B^+ = 1$. Tällöin oletuksen nojalla

$$\omega(B^-) \approx \|1\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(B^-,\omega)} \leq \|1\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(B\cap 2Q_i,\omega)} \leq \|1\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(2Q_i,\omega)} \leq \|1\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(B^+,\omega)} \approx \omega(B^+).$$

Nyt mitan ω tuplautuvuudesta pienillä kuulilla seuraa , että $\omega(B^+) \approx \omega(B \cap 2Q_i) \approx \omega(B^-)$. Tällöin $\|1\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(2Q_i,\omega)} \approx \omega(B \cap 2Q_i)$. Tästä, yhdessä arvion 11 kanssa, saadaan

$$\|1\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(B,\omega)} \approx \sum_{i\in I} \omega(B \cap 2Q_i).$$

Koska $|\cap_i 2Q_i| < \infty$ ja kuutioilla $2Q_i$ on äärellinen peite avaruudessa $\mathbb{R}^n$, niin saadaan lopulta

$$\|1\|_{L^{p(\cdot)}(B,\omega)}^{p_\infty} \approx \omega(B).$$

□

Nyt ollaan valmiita todistamaan kuulan karakterisen yhtälön normin ja modulaarin välinen yhteys kaikilla kuulilla $B \subset \mathbb{R}^n$.

1 Seuraus. *Olkoon $p \in \mathcal{P}_\pm^{\log}(\mathbb{R}^n)$ ja $\omega \in A_\infty$. Tällöin $\|1\|_{L^{p(\cdot)}(B,\omega)} \approx \omega(B)^{\frac{1}{p_B}}$ kaikilla kuulilla $B \subset \mathbb{R}^n$. Lisäksi, jos $0 \notin 2B$, niin $\|1\|_{L^{p(\cdot)}(B,\omega)} \approx \omega(B)^{\frac{1}{p(y)}}$ kaikilla $y \in B$.*

Todistus. Lemman 16 perusteella väite on voimassa kuulille, joiden säde $r \leq 1$. Samasta lemmasta seuraa myös, että edellisen lemman 17 oletukset ovat voimassa, joten $\|1\|_{L^{p(\cdot)}(B,\omega)} \approx \omega(B)^{\frac{1}{p_\infty}}$ kaikilla kuulilla, joilla säde $r \geq 1$. Riittää näyttää, että $\omega(B)^{\frac{1}{p_\infty}-\frac{1}{p_B}} \approx 1$ suurille kuulille. Tätä varten voidaan arvioida

$$\left|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}\right| = \left|\fint_B \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty} dx\right| \leq \fint_B |p(x) - p_\infty| dx.$$

Samalla tavalla kuin lemman 4 todistuksessa, edellisestä seuraa $|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}| \lesssim (\log(e + \max\{|x|, r\}))^{-1}$, kun $B = B(x,r)$ ja $r > 1$. Sillä $\omega \in A_\infty$, niin lemmasta 14 seuraa, että on olemassa sellainen $q \in [1, \infty)$, että $\omega \in A_q$. Tällöin lemmasta 15 seuraa, että

$$\left(\frac{r^n}{|x|^n + r^n + 1}\right)^q \omega(B(0,1)) \lesssim \omega(B) \lesssim (|x|^n + 1 + r^n)^q \omega(B(0,1)),$$

josta voidaan arvioida edelleen

$$(|x/r|^n + 1)^{-q}\,\omega(B(0,1)) \lesssim \omega(B) \lesssim (|x|^n + r^n)^q \omega(B(0,1)).$$

Nyt oikeasta puolesta seuraa, että

$$\omega(B)^{|\frac{1}{p_B}-\frac{1}{p_\infty}|} \lesssim (|x|^n + r^n)^{q|\frac{1}{p_B}-\frac{1}{p_\infty}|} \omega(B(0,1))^{|\frac{1}{p_B}-\frac{1}{p_\infty}|}.$$

Nyt ottamalla logaritmi puolittain saadaan

$$\begin{aligned}
\log \omega(B) \left|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}\right| &\lesssim \log\left(|x|^n + r^n\right) q \left|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}\right| + \log \omega(B(0,1)) \left|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}\right| \\
&\lesssim \log\left(|x|^n + r^n\right) q (\log(e + \max\{|x|, r\}))^{-1} + c \\
&\leq \frac{\log\left(2\max(|x|, r)^n\right)}{\log(e + \max\{|x|, r\})} q + c \\
&\leq \frac{n\log(2) + n\log\left(e + \max(|x|, r)\right)}{\log(e + \max\{|x|, r\})} q + c \\
&\leq (n\log(2) + n) q + c \\
&\lesssim 1.
\end{aligned}$$

Vastaavasti yhtälön (4) vasemmasta puolesta saadaan, että

$$\begin{aligned}\log\omega(B)\left|\frac{1}{p_B}-\frac{1}{p_\infty}\right| &\gtrsim \log\left(|x/r|^n+r^n\right)(-q)\left|\frac{1}{p_B}-\frac{1}{p_\infty}\right| + \log\omega(B(0,1))\left|\frac{1}{p_B}-\frac{1}{p_\infty}\right| \\ &\gtrsim -q(n\log(2)+n)+c \\ &\gtrsim 1.\end{aligned}$$

Yhdistämällä edelliset arviot seuraa, että $1 \lesssim \log\omega(B)\left|\frac{1}{p_B}-\frac{1}{p_\infty}\right| \lesssim 1$, mikä on ekvivalenttia sen kanssa, että $\omega(B)^{\frac{1}{p_\infty}-\frac{1}{p_B}} \approx 1$.

Oletetaan seuraavaksi, että $0 \notin 2B$. Tällöin *häivytys-ehdosta* seuraa, että

$$|\frac{1}{p_\infty}-\frac{1}{p(y)}| \leq |p_\infty - p(y)| \lesssim (\log(e+|y|))^{-1} = (\log(e+\max\{|y|,r\}))^{-1},$$

kun $y \in B$. Tällöin väite seuraa vastaavilla arvioilla kuin edellä. □

Määritellään painolle $\omega \in A_{p(\cdot)}$ duualipaino $\omega'(y) := \omega(y)^{1-p'(y)}$. Klassisessa tapauksessa nähtiin, että $\|\omega\|_{A_p} = \|\omega'\|_{A_{p'}}^{p-1}$ ja siten $\omega \in A_p$, jos ja vain jos $\omega' \in A_{p'}$. Seuraavaksi todistetaan vastaava ominaisuus varioivan eksponentin tapauksessa.

18 Lemma. *Olkoon $p \in \mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{R}^n)$ ja $\omega \in A_{p(\cdot)}$. Tällöin $\omega' \in A_{p'(\cdot)}$ ja*

$$|B|^{-p_B}||\omega||_{L^1(B)}||\frac{1}{\omega}||_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} \approx \frac{\omega(B)}{|B|}\left(\frac{\omega'(B)}{|B|}\right)^{p_B-1}.$$

Todistus. Olkoon $\omega \in A_{p(\cdot)}$. Oletetaan ensin, että kuulan $B \subset \mathbb{R}^n$ säde $r \leq 1$. Luokan $A_{p(\cdot)}$ määritelmästä saadaan suoraan, että

$$\frac{\omega(B)}{|B|^{p_B}}\left\|\frac{1}{\omega}\right\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} \leq \|\omega\|_{A_{p(\cdot)}}. \tag{12}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että edellisen epäyhtälön vasen puoli on myös alhaalta rajoitettu.

Nyt käyttämällä ensin Hölderin epäyhtälöä (lemma 6) ja sen jälkeen hyödyntämällä korollaaria 1 saadaan, että

$$\begin{aligned}|B| = \int_B \omega(y)^{\frac{1}{p(y)}}\omega(y)^{-\frac{1}{p(y)}}\,dy &\leq 2\left\|\omega^{\frac{1}{p(\cdot)}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(B)}\left\|\omega^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\right\|_{L^{p'(\cdot)}(B)} \\ &\approx \left\|\omega(B)^{\frac{1}{p_B}}\omega^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\right\|_{L^{p'(\cdot)}(B)}.\end{aligned}$$

Tällöin yksikköpallo-ominaisuudesta 5 seuraa epäyhtälön oikean puolen normia vastaavalle modulaarille, että

$$1 \lesssim \varrho_{L^{p'(\cdot)}(B)}\left(\frac{\omega(B)^{\frac{1}{p_B}}}{|B|}\omega^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\right) = \int_B\left(\frac{\omega(B)^{\frac{1}{p_B}}}{|B|}\right)^{p'(y)}\omega(y)^{-\frac{p'(y)}{p(y)}}\,dy.$$

Nyt lemmasta 16 saadaan, että $\omega(B)^{\frac{1}{p_B}} \approx \omega(B)^{\frac{1}{p(y)}}$, kun $r \leq 1$ ja $y \in B$. Lisäksi lemmasta 3 seuraa, että $|B| \approx |B|^{\frac{p_B}{p(y)}}$. Tällöin

$$1 \lesssim \int_B \left(\frac{\omega(B)^{\frac{1}{p_B}}}{|B|} \right)^{p'(y)} \omega(y)^{-\frac{p'(y)}{p(y)}} dy \approx \int_B \left(\frac{\omega(B)}{|B|^{p_B}} \right)^{\frac{p'(y)}{p(y)}} \omega(y)^{-\frac{p'(y)}{p(y)}} dy$$

$$= \varrho_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} \left(\frac{\omega(B)}{|B|^{p_B}} \frac{1}{\omega} \right).$$

Palaamalla takaisin normiin modulaarista yksikköpallo-ominaisuuden avulla saadaan, että

$$1 \lesssim \left\| \frac{\omega(B)}{|B|^{p_B}} \frac{1}{\omega} \right\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} = \frac{\omega(B)}{|B|^{p_B}} \left\| \frac{1}{\omega} \right\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)},$$

josta yhdessä epäyhtälön (12) kanssa seuraa, että

$$\left\| \frac{1}{\omega} \right\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} \approx \frac{|B|^{p_B}}{\omega(B)}. \tag{13}$$

Tästä taas seuraa käyttämällä lemmoja 3 ja 16, että

$$\left\| \frac{1}{\omega} \right\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)}^{\frac{1}{p_B^+ - 1}} \approx |B|^{\frac{p_B}{p_B^+ - 1}} \omega(B)^{p_B^+ - 1} \approx |B|^{\frac{p_B}{p_B^- - 1}} \omega(B)^{p_B^- - 1} \approx \left\| \frac{1}{\omega} \right\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)}^{\frac{1}{p_B^- - 1}}. \tag{14}$$

Käytetään ominaisuutta (1) $p'(\cdot)/p(\cdot)$-normille ja funktiolle $\frac{1}{\omega}$, jolloin se tulee muotoon

$$\min \left\{ \varrho_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} (\frac{1}{\omega})^{p_B^- - 1}, \varrho_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} (\frac{1}{\omega})^{p_B^+ - 1} \right\} \leq \left\| \frac{1}{\omega} \right\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)}$$

$$\leq \max \left\{ \varrho_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} (\frac{1}{\omega})^{p_B^- - 1}, \varrho_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} (\frac{1}{\omega})^{p_B^+ - 1} \right\}.$$

Nyt yhtälön (13) perusteella ylä- ja alarajat ovat samat. Lisäksi sillä $p_B^- \leq p_B \leq p_B^+$, niin saadaan

$$\|1\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B,\omega')} = \left\| \frac{1}{\omega} \right\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} \approx \left(\varrho_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} (\frac{1}{\omega}) \right)^{p_B - 1} = \omega'(B)^{p_B - 1} \tag{15}$$

kaikille kuulille, joiden säde $r \leq 1$.

Huomataan vielä, että samoin perusteluin yksikköpallo-ominaisuudesta 5 seuraa, että

$$\|\omega\|_{L^{p(\cdot)/p'(\cdot)}(B)} \approx \omega(B)^{\frac{1}{p_B - 1}}. \tag{16}$$

Tutkitaan seuraavaksi duaalisuutta pienillä kuulilla, joten oletetaan yhä, että kuulan B säteelle on voimassa $r \leq 1$. Tällöin korollaarin 1 ja edellisen yhtälön (15) avulla saadaan, että

$$\begin{aligned}
|B|^{-p'_B}||\omega'||_{L^1(B)}||\frac{1}{\omega'}||_{L^{p(\cdot)/p'(\cdot)}(B)} &= |B|^{-p_B}\omega'(B)||1||_{L^{p(\cdot)/p'(\cdot)}(B,\omega)} \\
&\approx |B|^{-p_B}\omega'(B)\omega(B)^{\frac{1}{p_B-1}} \\
&= \left[\frac{\omega(B)}{|B|}\left(\frac{\omega'(B)}{|B|}\right)^{p_B-1}\right]^{\frac{1}{p_B-1}} \\
&\approx \left[\frac{\omega(B)}{|B|^{p_B}}\left\|\frac{1}{\omega}\right\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)}\right]^{\frac{1}{p_B-1}} \le \|\omega\|_{A_{p(\cdot)}}^{\frac{1}{p_B-1}},
\end{aligned}$$

josta nähdään, että $\omega \in A^{\mathrm{loc}}_{p'(\cdot)}$. Tällöin lemmasta 14 seuraa, että $\omega \in A^{\mathrm{loc}}_{\infty}$ ja erityisesti, että ω on mittana tuplautuva pienillä kuulilla. Tällöin voidaan käyttää myös lemmaa 16, jolloin $\omega'(B)^{\frac{1}{p_B}} \approx \omega'(B)^{\frac{1}{p_\infty}}$ kaikilla kuulilla, joiden säde $r \in (\frac{1}{8\sqrt{(n)}}, 1]$. Nyt yhtälö (15) saadaan muotoon

$$\|1\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B,\omega')} \approx \omega'(B)^{p_B-1} \approx \omega'(B)^{p_\infty-1},$$

jolloin lemman 17 oletukset ovat voimassa ja seuraa, että $\|1\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B,\omega')} \approx \omega'(B)^{p_\infty-1}$ on voimassa myös kaikille kuulille B, joiden säde $r > 1$. Samoin perusteluin saadaan arviosta (16), että $\|\omega\|_{L^{p(\cdot)/p'(\cdot)}(B)} \approx \omega(B)^{\frac{1}{p_\infty-1}}$. Tällöin näiden seurauksena saadaan yhdessä korollaarin 1 ja lemman 3 kanssa, että

$$\begin{aligned}
|B|^{-p'_B}||\omega'||_{L^1(B)}||\frac{1}{\omega'}||_{L^{p(\cdot)/p'(\cdot)}(B)} &= |B|^{-p'_B}\omega'(B)||1||_{L^{p(\cdot)/p'(\cdot)}(B,\omega)} \\
&\approx |B|^{-p'_B}\omega'(B)\omega(B)^{\frac{1}{p_B-1}} \\
&\approx |B|^{-p'_\infty}\omega'(B)\omega(B)^{\frac{1}{p_\infty-1}} \\
&= \left[\frac{\omega(B)}{|B|}\left(\frac{\omega'(B)}{|B|}\right)^{p_\infty-1}\right]^{\frac{1}{p_\infty-1}} \\
&\approx \left[\frac{\omega(B)}{|B|^{p_\infty}}\left\|\frac{1}{\omega}\right\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)}\right]^{\frac{1}{p_\infty-1}} \\
&\approx \left[\frac{\omega(B)}{|B|^{p_B}}\left\|\frac{1}{\omega}\right\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)}\right]^{\frac{1}{p_\infty-1}} \le \|\omega\|_{A_{p(\cdot)}}^{\frac{1}{p_\infty-1}},
\end{aligned}$$

kun kuulan B säde $r > 1$. Tällöin ω toteuttaa luokan $A_{p'(\cdot)}$ määritelmän myös suurilla kuulilla, joten $\omega' \in A_{p'(\cdot)}$. Tämän seurauksena voidaan nyt käyttää korollaaria 1 painolle ω', jolloin saadaan, että $\|1\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B,\omega')} \approx \omega'(B)^{p_B-1}$ kaikilla kuulilla $B \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin lopulta saadaan, että

$$|B|^{-p_B}||\omega||_{L^1(B)}||\frac{1}{\omega}||_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B)} = \frac{\omega(B)}{|B|^{p_B}}\|1\|_{L^{p'(\cdot)/p(\cdot)}(B,\omega')} \approx \frac{\omega(B)}{|B|}\left(\frac{\omega'(B)}{|B|}\right)^{p_B-1}.$$

□

Luokka $A_{p(\cdot)}$ voitaisiin vaihtoehtoisesti määritellä edellisen lemman perusteella eli painon ω pitäisi silloin toteuttaa ehto $\sup_B \frac{\omega(B)}{|B|}\left(\frac{\omega'(B)}{|B|}\right)^{p_B-1}$. Tämän määritelmän etuna duaalisuus saataisiin suorana seurauksena, mutta haittana luokan $A_{p(\cdot)}$ kasvavuus eksponentin p suhteen olisi huomattavasti hankalampi tulos saavuttaa. Suurin osa tämän luvun tuloksista pohjautuu edeltävälle tulokselle, joten on järkevämpää pidättäytyä nykyisessä määritelmässä.

5 Parantuvuusominaisuuksia painolle ω

Lemman 13 mukainen parantuvuusominaisuus todistettiin klassisessa tapauksessa, kun luokka A_p määriteltiin kuutioiden avulla. Tässä luvussa on tarkoitus todistaa vastaava ominaisuus, kun luokka $\mathcal{A}_q$ on määritelty erilaisten joukkoperheiden avulla. Seuraavat tulokset on esitelty myös artikkelissa [10].

19 Lemma. *Olkoon $M \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että $\mathcal{B}_1$ ja $\mathcal{B}_2$ ovat joko perhe kuutioita tai kuulia varustettuna sellaisella ominaisuudella, että jokainen joukko $B \in \mathcal{B}_1$ voidaan peittää lukumäärällä M joukkoja $B_i \in \mathcal{B}_2$, joista jokaisen halkaisija on verrattavissa joukon B halkaisijaan. Tällöin jos $\omega \in A_q^{\mathcal{B}_2}$ on tuplautuva, niin $\|\omega\|_{A_q^{\mathcal{B}_1}} \lesssim \|\omega\|_{A_q^{\mathcal{B}_2}}$.*

Todistus. Olkoon $B \in \mathcal{B}_1$, ja olkoon $B_i \in \mathcal{B}_2$ kaikilla $i = 1, \dots, M$ sellainen peite, että $\operatorname{diam} B_i \approx \operatorname{diam} B$, jolloin myös $|B| \approx |B_i|$. Voidaan olettaa lisäksi, että $B \cap B_i \neq \emptyset$ kaikilla i. Tällöin on olemassa sellainen vakio $k > 1$, että $B \subset kB_i$ kaikilla i. Lemman 2 mukaan ω on tuplautuva, niin saadaan $\|\omega\|_{L^1(B)} \lesssim \|\omega\|_{L^1(B_i)}$. Yksinkertaisella arvioinnilla seuraa, että

$$\left\|\frac{1}{\omega}\right\|_{L^{q'/q}(B)} \leq \sum_{i=1}^{M} \left\|\frac{1}{\omega}\right\|_{L^{q'/q}(B_i)} \leq M \sup_i \left\|\frac{1}{\omega}\right\|_{L^{q'/q}(B_i)}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} |B|^{-q} \|\omega\|_{L^1(B)} \left\|\frac{1}{\omega}\right\|_{L^{q'/q}(B)} &\lesssim \inf_{j,k} \sup_i |B_j|^{-q} \|\omega\|_{L^1(B_k)} \left\|\frac{1}{\omega}\right\|_{L^{q'/q}(B_i)} \\ &\leq \sup_i |B_i|^{-q} \|\omega\|_{L^1(B_i)} \left\|\frac{1}{\omega}\right\|_{L^{q'/q}(B_i)} \leq \|\omega\|_{A_q^{\mathcal{B}_2}}. \end{aligned}$$

Nyt väite seuraa, kun otetaan supremum yli kuulien $B \in \mathcal{B}_1$. □

2 Seuraus. *Olkoon $\delta > 0$ ja Q kuula tai kuutio. Olkoon $\mathcal{B}_1$ kaikkien kuutioiden perhe joukossa $(1+\delta)Q$, ja $\mathcal{B}_2$ kaikkien kuulien perhe joukossa Q. Tällöin $\mathcal{A}_\infty \cap \mathcal{A}_q^{\mathcal{B}_1} \subset A_q^{\mathcal{B}_2}$. Sama päätelmä on voimassa, vaikka kuutioiden ja kuulien roolit vaihdettaisiin keskenään.*

Todistus. Olkoon $Q' \in \mathcal{B}_1$ ja $B \in \mathcal{B}_2$. Nyt kuula B voidaan peittää lukumäärällä M kuutioita Q', joilla $\operatorname{diam} B \approx \operatorname{diam} Q'$, kun M valitaan tarpeeksi suureksi. Lemman 2 mukaan $\omega \in A_q^{\mathcal{B}_1}$ on tuplautuva, joten edellisestä lemmasta 19 seuraa, että $\|\omega\|_{A_q^{\mathcal{B}_2}} \lesssim \|\omega\|_{A_q^{\mathcal{B}_1}}$. Tällöin $\mathcal{A}_\infty \cap \mathcal{A}_q^{\mathcal{B}_1} \subset \mathcal{A}_\infty \cap \mathcal{A}_q^{\mathcal{B}_2} \subset A_q^{\mathcal{B}_2}$. Lisäksi sama päätelmä on voimassa, jos kuulien ja kuutioiden roolit vaihdettaisiin. □

Nyt saadaan vastaava parantuvuusominaisuus kuulille kuin kuutioille.

3 Seuraus. *Olkoon $\delta > 0$ ja Q kuula tai kuutio. Jos $\omega \in A_\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_q((1+\delta)Q)$, niin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $\omega \in A_{q-\varepsilon}(Q)$.*

Todistus. Olkoon $\omega \in A_\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_q((1+\delta)Q)$. Tällöin edellisen seurauksen 2 perusteella saadaan, että $\omega \in A_q^{\mathcal{B}}((1+\delta)Q)$, missä $\mathcal{B}$ on kaikkien kuutioiden $Q \in \mathbb{R}^n$ muodostama perhe. Nyt lemman 13 parantuvuusominaisuudesta kuutioille seuraa, että on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $\omega \in A_{q-\varepsilon}^{\mathcal{B}}((1+\delta)Q)$. Käyttämällä uudelleen seurausta 2 saadaan, että $\omega \in A_{q-\varepsilon}(Q)$. □

4 Seuraus. *Olkoon $\delta > 0$ ja joukko D kuula. Olkoon $\mathcal{B}_1$ kaikkien kuutioiden muodostama perhe joukossa $\mathbb{R}^n \setminus D$, ja $\mathcal{B}_2$ kaikkien joukkojen $B \setminus (1+\delta)D$ muodostama perhe, missä kuulien B keskustat kuuluvat joukkoon $\mathbb{R}^n \setminus (1+\delta)D$. Tällöin $\mathcal{A}_\infty \cap \mathcal{A}_q^{\mathcal{B}_1} \subset A_q^{\mathcal{B}_2}$, ja sisältyvyyteen liittyvä upotusvakio on riippumaton joukosta D. Kuutioiden ja kuulien roolit ovat vaihdettavissa.*

Todistus. Voidaan rajoittua tarkastelemaan tilannetta $\delta < \frac{1}{2}$. Oletetaan ensin, että $\mathcal{B}_1$ on perhe kuulia ja $\mathcal{B}_2$ perhe kuutioita. Valitaan perheestä $\mathcal{B}_1$ sellaiset kuulat $B_1', \ldots, B_k'$, joilla $\operatorname{diam} B' = \operatorname{diam} D$ ja jotka sivuavat kuulaa D ulkopuolelta ja peittävät pallokuoren $\partial(1+\delta)D$. Olkoon $p_1, \ldots, p_k$ ne reunajoukon ∂D pisteet, joissa kuulat $B_1', \ldots, B_k'$ sivuavat kuulaa D. Voidaan todeta, että lukumäärä k riippuu luvusta δ, mutta ei kuulasta D valintojen ja symmetrian vuoksi.

Olkoon $Q \in \mathcal{B}_2$. Jos $\operatorname{diam} Q < \operatorname{diam} D$, niin Q voidaan peittää seurauksen 2 tavoin äärellisellä määrällä kuulia perheestä $\mathcal{B}_1$. Olkoon $B_1, \ldots, B_k$ kuulia perheestä $\mathcal{B}_1$, jotka sivuavat kuulaa D ulkopuolelta pisteissä $p_1, \ldots, p_k$ ja joiden halkaisija on yhtä suurta kuin $3 \operatorname{diam} Q$. Sillä $\operatorname{diam} Q \geq \operatorname{diam} D$, niin kuulat $B_1, \ldots, B_k$ peittävät annuluksen $((1 + \frac{\operatorname{diam} Q}{\operatorname{diam} D})D) \setminus ((1+\delta)D)$ ja erityisesti ne peittävät myös joukon Q. Nyt perhe $\mathcal{B}_1$ toteuttaa lemman 19 ehdot, joten väite seuraa. Huomataan, että tässäkin kuutioiden ja kuulien roolit voitaisiin vaihtaa keskenään. □

Nyt seurauksen 3 todistuksen tavoin saadaan lopulta seuraava tulos.

5 Seuraus. *Olkoon $\delta > 0$ ja joukko D kuula. Olkoon $\mathcal{B}$ kaikkien joukkojen $B \setminus (1+\delta)D$ muodostama perhe, missä kuulien B keskustat kuuluvat joukkoon $\mathbb{R}^n \setminus (1+\delta)D$. Jos $\omega \in A_\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_q(\mathbb{R}^n \setminus D)$, niin on olemassa sellainen joukosta D riippumaton $\varepsilon > 0$, että $\omega \in A_{q-\varepsilon}^{\mathcal{B}}$.*

Jotta tämän luvun tuloksia päästäisiin hyödyntämään, niin määritellään seuraavaksi maksimaalioperaattori $M_{\mathcal{B}}$, joka on määritelty mitallisten joukkojen perheen $\mathcal{B}$ yli niin, että

$$M_{\mathcal{B}} f(z) := \sup_{B \in \mathcal{B},\ z \in B} \fint_B |f(x)| dx.$$

Tämän luvun lopuksi osoitetaan kyseiselle maksimaalioperaattorille $M_{\mathcal{B}}$ rajoittuneisuustulos 21, jossa joukkoperhe $\mathcal{B}$ on määritelty tutkielman kannalta hyödyllisellä tavalla.

Määritellään avaruuden $\mathbb{R}^n$ mitalliselle osajoukoulle E indusoitu Muckenhoupt-luokka $\widetilde{A}_q(E)$, johon kuuluvat kaikki painot ω, joille on voimassa

$$\|\omega\|_{\widetilde{A}_q(E)} := \sup_{B\in\mathcal{B}} |B|^{-q} \int_{B\cap E} \omega(x)dx \left(\int_{B\cap E} \omega(x)^{-q'(x)/q(x)} dx \right)^{q-1} < \infty, \tag{17}$$

missä $\mathcal{B}$ on kaikkien kuulien $B \subset \mathbb{R}^n$ muodostama perhe.

Jos määritellään vielä lisäksi indusoitu maksimaalifunktio

$$\widetilde{M}_E f(z) := \sup_{B\in\mathcal{B},\ z\in B} \frac{1}{|B|} \int_{B\cap E} |f(x)|dx,$$

niin saadaan artikkelin [19] proposition 2.8 mukainen maksimaaliepäyhtälön kaltainen estimaatti.

20 Lemma. *(Propositio 2.8 [19])*
Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko, jolle $|E| > 0$. Jos $1 \le q < p$, $\omega \in \widetilde{A}_q(E)$ ja $f \in L^p(E,\omega)$, niin

$$\int_E (\widetilde{M}_E f(x))^p \omega(x)dx \le C \int_E |f|^p \omega(x)dx.$$

Tästä saadaan yhdessä seurauksen 5 kanssa seuraava lemma, jota käytetään Muckenhoupt-ehdon riittävyyden todistamisessa.

21 Lemma. *Olkoon $\rho > 1$ ja $\mathcal{B}$ kaikkien joukkojen $B \setminus B(0,2\rho)$ muodostama perhe, missä kuulien B keskustat kuuluvat joukkoon $\mathbb{R}^n \setminus B(0,2\rho)$. Jos $\omega \in A_\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_q(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\rho))$ ja funktiolla $f \in L^q(\mathbb{R}^n,\omega)$ on kantaja joukossa $\mathbb{R}^n \setminus B(0,\rho)$, niin $\|M_\mathcal{B} f\|_{L^q(\mathbb{R}^n\setminus B(0,2\rho),\omega)} \lesssim \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n\setminus B(0,\rho),\omega)}$.*

Todistus. Olkoon $f \in L^q(\mathbb{R}^n,\omega)$ funktio kantajalla joukossa $\mathbb{R}^n \setminus B(0,\rho)$. Merkitään mitallista joukkoa $E := \mathbb{R}^n \setminus B(0,2\rho)$. Ensimmäiseksi voidaan huomata, että

$$\frac{1}{|B/B(0,2\rho)|} \int_{B/B(0,2\rho)} |f(x)|dx = \frac{|B|}{|B/B(0,2\rho)|} \frac{1}{|B|} \int_{B\cap(\mathbb{R}^n\setminus B(0,2\rho))} |f(x)|dx.$$

Koska kuulien B keskustat kuuluvat joukkoon $\mathbb{R}^n \setminus B(0,2\rho)$, niin $\frac{|B|}{|B/B(0,2\rho)|} \le 2$ ja seuraa, että $M_\mathcal{B} f \lesssim \widetilde{M}_E f$. Huomataan indusoidulle luokalle, että

$$\begin{aligned}\|\omega\|_{\widetilde{A}_r(E)} &= \sup_{B\in\mathcal{B}_1'} |B|^{-r} \int_{B\cap E} \omega(x)dx \left(\int_{B\cap E} \omega(x)^{-r'(x)/r(x)} dx \right)^{r-1} \\ &\lesssim \sup_{B/B(0,2\rho)\in\mathcal{B}_1} |B/B(0,2\rho)|^{-r} \omega(B/B(0,2\rho)) \|\frac{1}{\omega}\|_{L^{r'/r}(B/B(0,2\rho))} = \|\omega\|_{A_r^{\mathcal{B}_1}},\end{aligned}$$

missä $\mathcal{B}_1'$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ kaikkien kuulien muodostama perhe ja $\mathcal{B}_1$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ kaikkien joukkojen $B/B(0,2\rho)$ muodostama perhe. Luokan $A_r^{\mathcal{B}_1}$ ainoa ero luokkaan $A_r^{\mathcal{B}}$ on se, että joukossa $B/B(0,2\rho) \in \mathcal{B}_1$ kuulan B keskusta saa kuulua joukkoon $B(0,2\rho)$. Tällöin joukko $B/B(0,2\rho) \in \mathcal{B}_1$ voidaan peittää äärellisellä määrällä joukkoja $B_i/B(0,2\rho) \in \mathcal{B}$, ja lemmasta 19 saadaan, että $\|\omega\|_{A_r^{\mathcal{B}_1}} \lesssim \|\omega\|_{A_r^{\mathcal{B}}}$. Näin ollen $\|\omega\|_{\widetilde{A}_r(E)} \lesssim \|\omega\|_{A_r^{\mathcal{B}}}$. Seurauksen 5 mukaan on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $\omega \in A_{q-\varepsilon}^{\mathcal{B}}$, jolloin myös $\omega \in \widetilde{A}_{q-\varepsilon}(E)$. Tällöin lemmasta 20 saadaan eksponentilla $q > q - \varepsilon$, että

$$
\begin{aligned}
\|M_{\mathcal{B}} f\|_{L^q(\mathbb{R}^n \setminus B(0,2\rho),\omega)} &\lesssim \left\| \widetilde{M}_E f \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n \setminus B(0,2\rho),\omega)} \\
&\lesssim \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n \setminus B(0,2\rho),\omega)} \le \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\rho),\omega)}.
\end{aligned}
$$

□

6 Ehdon $A_{p(\cdot)}$ riittävyys

Tässä luvussa strategiana on osoittaa ensin painotettu maksimaaliepäyhtälö rajoitetuille maksimaalioperaattoreille.

Määritellään ylhäältä rajoitettu maksimaalioperaattori

$$M_{\le R} f(y) := \sup_{r \le R} \fint_{B(y,r)} |f(x)| dx.$$

Alhaalta rajoitettu maksimaalioperaattori määritellään vastaavasti

$$M_{> R} f(y) := \sup_{r > R} \fint_{B(y,r)} |f(x)| dx.$$

Voidaan huomata, että $Mf(y) \le M_{\le R} f(y) + M_{>R} f(y)$, joten maksimaaliepäyhtälö seuraa sen rajoitetuista versioista.

Aloitetaan tarkastelemalla ylhäältä rajoitettua maksimaalioperaattoria ja todistetaan sille lokaali versio maksimaaliepäyhtälöstä. Seuraavan lemman todistuksessa hyödynnetään Lars Dieningin käyttämää tekniikkaa ei-painotetun avaruuden maksimaaliepäyhtlön todistuksessa [9].

22 Lemma. *Olkoon $p \in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ ja $\omega \in A_{p(\cdot)}$. Tällöin on olemassa sellainen $r_0 \in (0,1)$, joka riippuu vain arvosta $\|\omega\|_{A_{p(\cdot)}}$ ja eksponentin p ominaisluvuista, että*

$$M_{\le R} : L^{p(\cdot)}(2Q,\omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(Q,\omega),$$

missä Q on kuutio, jonka sivun pituus on enintään r_0 ja $R < \frac{1}{2} r_0$.

Todistus. Ensimmäiseksi voidaan todeta, että eksponentin $p(\cdot)$ tasaisen jatkuvuuden perusteella voidaan valita jokaista $\varepsilon > 0$ kohti sellainen $r_0 < \frac{1}{2} n^{-1/2}$, että

$p_{2Q}^+ - \varepsilon < p_{2Q}^-$, kun kuution Q sivun pituus on enintään r_0. Lemman 14 perusteella $\omega \in A_{p_{2Q}^+}(2Q)$, jolloin taas seurauksen 4 mukaan on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $\omega \in A_{p_{2Q}^+ - \varepsilon}(2Q)$. Tällöin voidaan käyttää uudestaan lemmaa 14 ja saadaan, että $\omega \in A_{p_{2Q}^-}(2Q)$, kun valitaan r_0 niin kuin edellä.

Olkoon $f \in L^{p(\cdot)}(2Q, \omega)$ ja oletetaan ensin, että $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(2Q,\omega)} \leq 1$. Merkitään seuraavaksi $q(x) := p(x)/p_{2Q}^-$. Seuraavaksi käytetään Dieningin esittelemää tekniikkaa [9]. Olkoon $y \in Q$ ja $B := B(y, r)$, missä $r \leq R < \frac{1}{2}r_0$. Tällöin Jensenin epäyhtälöstä (esim. Lemma 1.19 [6]) ja yksinkertaisesta estimaatista, joka on voimassa kaikille $\beta > 0$, saadaan

$$\begin{aligned}
\left(\fint_B |f(x)| dx \right)^{q(x)} &\leq \left(\fint_B |f(x)|^{q_B^-} dx \right)^{\frac{q(x)}{q_B^-}} = \left(\fint_B \frac{1}{\beta} \left[|f(x)| \beta^{\frac{1}{q_B^-}} \right]^{q_B^-} dx \right)^{\frac{q(x)}{q_B^-}} \\
&\leq \left(\fint_B \frac{1}{\beta} \left[|f(x)|^{q(x)} \beta^{\frac{q(x)}{q_B^-}} + 1 \right] dx \right)^{\frac{q(x)}{q_B^-}} \\
&= \left(\fint_B |f(x)|^{q(x)} \beta^{\frac{q(x)}{q_B^-} - 1} dx + \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{q(x)}{q_B^-}}.
\end{aligned}$$

Valitaan $\beta := \max\{1, \omega(Q)^{1/p_{2Q}^-}\}$. Koska kuution Q sivu on enintään r_0 ja $y \in Q$, niin $Q \subset B(x, 2r_0)$, kun $x \in B(y, r)$. Lemmasta 15 saadaan tällöin arvio

$$\omega(Q) \leq \omega(B(x, 2r_0)) \lesssim \omega(B(0,1)) \left(|x|^n + 2^n r_0^n + 1 \right)^{p^+} \lesssim (1 + |x|)^{np^+}.$$

Tällöin seuraa, että $\beta^{q(x)/q_B^- - 1} \lesssim (1 + |x|)^{\frac{np^+}{p_{2Q}^- q_B^-}(q(x) - q_B^-)} \leq (1 + |x|)^{C(q(x) - q_B^-)} \leq C$, missä viimeinen epäyhtälö seuraa log-*Hölder-häivytysehdosta* eksponentille q. Sillä $q(x) \geq q_B^-$ ja $\frac{1}{\beta} < 1$, niin edellisen arvion kanssa saadaan

$$\begin{aligned}
\left(\fint_B |f(x)| dx \right)^{q(x)} &\lesssim \left(\fint_B |f(x)|^{q(x)} dx \right)^{\frac{q(x)}{q_B^-}} + \frac{1}{\beta} \qquad (18) \\
&= |B|^{1 - \frac{q(x)}{q_B^-}} \varrho_{L^{q(\cdot)}(B)}(f)^{\frac{q(x) - q_B^-}{q_B^-}} \fint_B |f(x)|^{q(x)} dx + \min\left\{ 1, \omega(Q)^{-\frac{1}{p_{2Q}^-}} \right\}.
\end{aligned}$$

Eksponentin q log-*Hölder*-jatkuvuudesta saadaan, että $|B|^{1 - \frac{q(x)}{q_B^-}} \lesssim 1$. Youngin epäyhtälöstä (esim. Lemma 1.14 [6]) eksponentille p_{2Q}^- saadaan toiselle tekijälle eli modulaarille arvio

$$\begin{aligned}
\varrho_{L^{q(\cdot)}(B)}(f) &= \int_B |f(x)|^{\frac{p(x)}{p_{2Q}^-}} dx = \int_B |f(x)|^{\frac{p(x)}{p_{2Q}^-}} \omega(x)^{-1} \omega(x) dx \\
&\leq \int_B \left(\frac{|f(x)|^{\frac{p(x) p_{2Q}^-}{p_{2Q}^-}}}{p_{2Q}^-} + \frac{\omega(x)^{-p_{2Q}'^-}}{p_{2Q}'^-} \right) \omega(x) dx \\
&\leq \int_B |f(x)|^{p(x)} \omega(x) dx + \int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p_{2Q}^- - 1}} dx.
\end{aligned}$$

Oletuksen $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(2Q,\omega)} \leq 1$ nojalla yksikköpallo-ominaisuudesta 5 saadaan, että $\varrho_{L^{p(\cdot)}(B,\omega)} \leq 1$. Lisäksi sillä $\omega \in A_{p_{2Q}^-}(B)$, niin saadaan

$$\varrho_{L^{q(\cdot)}(B)}(f) \leq 1 + (\|\omega\|_{A_{p_{2Q}^-}(B)} |B|^{p_{2Q}^-} \omega(B)^{-1})^{\frac{1}{p_{2Q}^- - 1}}.$$

Eksponentin q log-*Hölder*-jatkuvuudesta taas seuraa, että $|B|^{p_{2Q}^-(q(x)-q_B^-)} \leq c$, ja lemmasta 16, että $\omega(B)^{-(q(x)-q_B^-)} \leq c$. Tällöin $\varrho_{L^{q(\cdot)}(B)}(f)^{(q(x)-q_B^-)/q_B^-} \leq C$. Nyt epäyhtälö 18 on saatu muotoon

$$\left(\fint_B |f(x)| dx \right)^{q(x)} \lesssim \fint_B |f(x)|^{q(x)} dx + \min \left\{ 1, \omega(Q)^{-\frac{1}{p_{2Q}^-}} \right\}$$

ja ottamalla supremumin yli kuulien $B = B(y,r)$, missä $r < R$, saadaan

$$(M_{\leq R} f(x))^{q(x)} \lesssim M_{<R}(|f|^{q(\cdot)})(x) + \min \left\{ 1, \omega(Q)^{-\frac{1}{p_{2Q}^-}} \right\},$$

kun $x \in Q$. Korottamalla potenssiin p_{2Q}^- (muistetaan, että $q = p/p_{2Q}^-$) ja integroimalla puolittain muuttujan $x \in Q$ suhteen saadaan, että

$$\begin{aligned} \int_Q (M_{r \leq R} f(x))^{p(x)} \omega(x) dx &\lesssim \int_Q \left[M_{<R}(|f|^{q(\cdot)})(x) + \min \left\{ 1, \omega(Q)^{-\frac{1}{p_{2Q}^-}} \right\} \right]^{p_{2Q}^-} \omega(x) dx \\ &\lesssim \int_Q M_{<R}(|f|^{q(\cdot)})(x)^{p_{2Q}^-} \omega(x) dx + \omega(Q) \min \left\{ 1, \omega(Q)^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Nyt sillä $\omega \in A_{p_{2Q}^-}$, $p_{2Q}^- \geq p^- > 1$ ja $R < \frac{1}{2} r_0$, niin lauseesta 4 seuraa, että $M_{<R} : L^{p_{2Q}^-}(2Q, \omega) \hookrightarrow L^{p_{2Q}^-}(Q, \omega)$ ja näin ollen edellisestä saadaan, että

$$\int_Q (M_{r \leq R} f(x))^{p(x)} \omega(x) dx \lesssim \int_{2Q} |f(x)|^{p(x)} \omega(x) dx + 1 \leq 2,$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa yksikköpallo-ominaisuudesta 5. Nyt väite on todistettu tapauksessa $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(2Q,\omega)} \leq 1$. Jos $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(2Q,\omega)} > 1$, niin käytetään äsken saatua tulosta funktiolle $f / \|f\|_{L^{p(\cdot)}(2Q,\omega)}$, jonka normi saa arvon 1. Saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_{L^{p(\cdot)}(2Q,\omega)}} \int_Q (M_{r<R} f(x))^{p(x)} \omega(x) dx &= \int_Q \left(M_{r<R} \left(\frac{f(x)}{\|f\|_{L^{p(\cdot)}(2Q,\omega)}} \right) \right)^{p(x)} \omega(x) dx \\ &\lesssim \int_{2Q} \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{L^{p(\cdot)}(2Q,\omega)}} \right|^{p(x)} \omega(x) dx \\ &\leq \int_{2Q} |f(x)|^{p(x)} \omega(x) dx, \end{aligned}$$

joten väite seuraa kokonaisuudessaan.

$\square$

Edellisen tuloksen avulla saadaan todistettua ylhäältä rajoitetun maksimaaliope-raattorin rajoittuneisuus käyttämällä *lokaalista-globaaliin*-menetelmää.

23 Lemma. *Olkoon* $p \in \mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{R}^n)$ *ja* $\omega \in A_{p(\cdot)}$. *Olkoon* $r_0 > 0$ *niin kuin edellisessä lemmassa 22. Tällöin*

$$M_{\leq R} : L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \omega),$$

kun $R < \frac{1}{2} r_0$.

Todistus. Olkoon (Q_i) määritelmän 4 mukainen ositus avaruudelle $\mathbb{R}^n$, missä kuutioiden sivujen pituus on r_0. Olkoon $R < \frac{1}{2} r_0$. Edellisen lemman 22 mukaan $\|M_{\leq R} f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_i,\omega)} \lesssim \|f\|_{L^{p(\cdot)}(2Q_i,\omega)}$. Tällöin lauseesta 1 saadaan, että

$$\|M_{\leq R} f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} \approx \Big\| \|M_{\leq R} f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_i,\omega)} \Big\|_{l_{p_\infty}} \lesssim \Big\| \|f\|_{L^{p(\cdot)}(2Q_i,\omega)} \Big\|_{l_{p_\infty}}$$

Olkoon nyt (Q'_i) avaruuden $\mathbb{R}^n$ järjestetty ositus, joka on saatu siirtämällä jokaista kuutiota Q_i puolihalkaisijaa suuntaan $(1, \ldots, 1)$ kuvan 1 mukaisesti. Tällöin

$$2Q_i = \bigcup_{j \in J_i} Q'_j,$$

missä J_i on indeksijoukko, johon kuuluu 2^n alkiota. Nyt voidaan käyttää lausetta 1 uudestaan , jolloin

$$\begin{aligned} \Big\| \|f\|_{L^{p(\cdot)}(2Q_i,\omega)} \Big\|^{p_\infty}_{l_{p_\infty}} &= \sum_i \|f\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(2Q_i,\omega)} \\ &\leq 2^n \sum_i \|f\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(Q'_i,\omega)} \approx \|f\|^{p_\infty}_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)}. \end{aligned}$$

Näin ollen $\|M_{\leq R} f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} \lesssim \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)}$.

□

Edellisen lemman seurauksena saadaan seuraava tulos.

6 Seuraus. *Olkoon* $p \in \mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{R}^n)$ *ja* $\omega \in A_{p(\cdot)}$ *sekä* r_0 *niin kuin lemmassa 22. Jos* $\Phi f := f * \chi_{B(0,\frac{1}{2} r_0)}$, *niin*

$$\Phi : L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \omega).$$

Seuraavaksi osoitetaan alhaalta rajoitetun maksimaalioperaattorin rajoittuneisuus.

24 Lemma. *Olkoon* $p \in \mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}$ *ja* $R = \frac{1}{3} r_0$, *missä* r_0 *niin kuin lemmassa 22. Tällöin*

$$M_{>R} : L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \omega).$$

Todistus. Olkoon $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \omega)$. Oletetaan ensin, että $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} \leq 1$. Hölderin epäyhtälön avulla saadaan, että

$$\begin{aligned}\fint_B |f(y)|dy &= \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|\omega(y)^{\frac{1}{p(y)}}\omega(y)^{-\frac{1}{p(y)}}dy \\ &\leq \frac{2}{|B|}\|f\|_{L^{p(\cdot)}(B,\omega)}\left\|\omega^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\right\|_{L^{p'(\cdot)}(B)}\end{aligned}$$

Nyt $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(B,\omega)} \leq 1$ ja $\omega^{-\frac{1}{p(\cdot)}} = \omega^{\frac{1}{p'(\cdot)}-1} = \omega^{\frac{1-p'(\cdot)}{p'(\cdot)}} = \omega'^{\frac{1}{p'(\cdot)}}$, joten edellisestä saadaan yhdessä lemman 18 ja seurauksen 1 kanssa, että

$$\fint_B |f(y)|dy \leq \frac{2}{|B|}\|1\|_{L^{p'(\cdot)}(B,\omega')} \approx \frac{\omega'(B)^{\frac{1}{p'_B}}}{|B|} \lesssim \left(\frac{\|\omega\|_{A_{p(\cdot)}}}{\omega(B)}\right)^{\frac{1}{p_B}}.$$

Kuulalle $B = B(x,r)$, missä $r > \frac{1}{6}r_0$, seuraa lemman 15 perusteella, että $\omega(B) \geq C\omega(B(0,1))(1+|x|)^{-np^+}$. Tällöin

$$M_{>\frac{1}{2}R}f(x) \lesssim (1+|x|)^{np^+/p_B} \leq (1+|x|)^{np^+/p^-}, \tag{19}$$

kun oletettiin, että $R = \frac{1}{3}r_0$.
Olkoon $\mathcal{B}$ perhe kaikista joukoista muotoa $B \setminus B(0,2\rho)$, missä kuulien B keskustat kuuluvat joukkoon $\mathbb{R}^n \setminus B(0,2\rho)$. Eksponentin p log-*Hölder*-häivytysehdon nojalla jokaiselle $\varepsilon > 0$ voidaan valita tarpeeksi suuri $\rho = R_0$ niin, että $p_D^+ - \varepsilon \leq p_\infty$, missä $D := \mathbb{R}^n \setminus B(0,R_0)$. Lemman 14 perusteella $\omega \in A_{p_D^+}(D)$, joten seurauksesta 5 seuraa, että $\omega \in A_{p_D^+-\varepsilon}$ Tällöin aikaisemman päättelyn perusteella lemmasta 14 saadaan, että $\omega \in A^{\mathcal{B}}_{p_\infty}$.
Merkitään $B_k := B(0,(1+k)R_0)$ ja $D_k := \mathbb{R}^n \setminus B_k$ luonnolliselle luvulle $k \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että g on mitallinen funktio, jolla on kantaja joukossa D_1. Jos B on kuula, jonka keskusta on joukossa D_2 ja säde vähintään $\frac{1}{2}R$, niin

$$\fint_B |g|dx = \frac{|B\setminus B_1|}{|B|}\fint_{B\setminus B_1}|g|dx \lesssim \fint_{B\setminus B_1}|g|dx.$$

Nyt kun perhe $\mathcal{B}$ on määritelty niin kuin edellä saadaan, että $M_{>\frac{1}{2}R}g \lesssim M_{\mathcal{B}}g$ joukossa D_1. Aikaisemmin todettiin, että $M_{>\frac{1}{2}R}f(x) \lesssim (1+|x|)^{np^+/p^-}$. Lisäksi painolla ω on enintään polynomiaalista kasvua (Huomautus 3), joten lemman 7 oletukset ovat voimassa ja seuraa, että $\left\|M_{>\frac{1}{2}R}g\right\|_{L^{p(\cdot)}(D_2,\omega)} \approx \left\|M_{>\frac{1}{2}R}g\right\|_{L^{p_\infty}(D_2,\omega)}$. Sillä $\omega \in A^{\mathcal{B}}_{p_\infty}$, niin lemmasta 21 saadaan

$$\left\|M_{>\frac{1}{2}R}g\right\|_{L^{p(\cdot)}(D_2,\omega)} \lesssim \|M_{\mathcal{B}}g\|_{L^{p_\infty}(D_2,\omega)} \lesssim \|g\|_{L^{p_\infty}(D_1,\omega)}, \tag{20}$$

kun $q \in L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n,\omega)$ ja sillä on kantaja joukossa D_1.
Olkoon nyt $\Phi f := |f| * \chi_{B(0,\frac{1}{2}R)}$. Integraalikeskiarvo voidaan esittää konvoluution avulla niin, että

$$\fint_{B(x,r)}|f(y)|dy = \left(\frac{\chi_{B(0,r)}}{|B(0,r)|} * |f|\right)(x).$$

Lisäksi voidaan tehdä arvio

$$
\begin{aligned}
\chi_{B(0,r)}(x) &\lesssim (\chi_{B(0,r)} * \chi_{B(0,R/2)})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(0,r)}(y)\chi_{B(0,R/2)}(x-y)dy \\
&= \int_{B(x,R/2)} \chi_{B(0,r)}(y)dy = |B(x,R/2) \cap B(0,r)| \lesssim \chi_{B(0,r+R/2)}(x),
\end{aligned}
$$

joka on voimassa kaikilla $r > R/2$. Näiden seurauksena saadaan, että

$$
\begin{aligned}
M_{>R}f(x) &= \sup_{r>R} \left(\frac{\chi_{B(0,r)}}{|B(0,r)|} * |f| \right)(x) \\
&\lesssim \sup_{r>R/2} \left(\frac{(\chi_{B(0,r)}) * (\chi_{B(0,R/2)} * |f|)}{|B(0,r)|} \right)(x) = M_{>\frac{1}{2}R}\Phi f(x)
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
M_{>R}f(x) &= \sup_{r>R} \left(\frac{\chi_{B(0,r)}}{|B(0,r)|} * |f| \right)(x) = \sup_{r>R/2} \left(\frac{\chi_{B(0,r+R/2)}}{|B(0,r+R/2)|} * |f| \right)(x) \\
&\gtrsim \sup_{r>R/2} \left(\frac{(\chi_{B(0,r)}) * (\chi_{B(0,R/2)} * |f|)}{|B(0,r)|} \right)(x) = M_{>\frac{1}{2}R}\Phi f(x).
\end{aligned}
$$

Siis $M_{>R}f \approx M_{>\frac{1}{2}R}\Phi f$. Täten epäyhtälöstä 19 seuraa, että $\Phi f(x) \lesssim (1+|x|)^{np^+}$. Avaruus $\mathbb{R}^n$ voidaan kirjoittaa kahden erillisen joukon yhdisteenä, $\mathbb{R}^n = B_2 \cup D_2$, joten epäyhtälöstä (20) funktiolle $g = \Phi f \chi_{D_1}$ saadaan, että

$$
\begin{aligned}
\|M_{>R}f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} &\leq \|M_{>R}f\|_{L^\infty(B_2)} \|1\|_{L^{p(\cdot)}(B_2,\omega)} + \left\| M_{>\frac{1}{2}R}(\Phi f \chi_{D_1}) \right\|_{L^{p(\cdot)}(D_2,\omega)} \\
&\quad + \left\| M_{>\frac{1}{2}R}(\Phi f \chi_{B_1}) \right\|_{L^{p(\cdot)}(D_2,\omega)} \\
&\lesssim \|1\|_{L^{p(\cdot)}(B_2,\omega)} + \|\Phi f\|_{L^{p_\infty}(D_1,\omega)} + \|\Phi f\|_{L^\infty(B_1,\omega)} \|M\chi_{B_1}\|_{L^{p(\cdot)}(D_2,\omega)} \\
&\approx 1 + \|\Phi f\|_{L^{p(\cdot)}(D_1,\omega)} + \|M\chi_{B_1}\|_{L^{p_\infty}(D_2,\omega)},
\end{aligned}
$$

missä viimeinen ekvivalenssi seurasi lemmasta 7.
Seurauksen 6 nojalla $\|\Phi f\|_{L^{p(\cdot)}(D_1,\omega)} \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(D,\omega)} \leq 1$. Olkoon $B' \subset D_2$ saman suuruinen kuula kuin B_1. Nyt sillä $M\chi_{B_1} \approx M\chi_{B'}$, niin saadaan $\|M\chi_{B_1}\|_{L^{p_\infty}(D_2,\omega)} \approx \|M\chi_{B'}\|_{L^{p_\infty}(D_2,\omega)}$. Funktiolla $\chi_{B'}$ on kantaja joukossa D_2, joten $M\chi_{B_1} \lesssim M_{\mathcal{B}}\chi_{B_1}$ joten vastaavanlainen arvio (20) on voimassa myös summan viimeiselle termille $\|M\chi_{B_1}\|_{L^{p_\infty}(D_2,\omega)}$. Tämän perusteella väite seuraa oletuksella $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} \leq 1$ ja kokonaisuudessaan, kun saatua tulosta käytetään taas funktiolle $f/\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)}$. □

5 Lause. *Olkoon $p \in \mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{R}^n)$ ja $\omega \in A_{p(\cdot)}$. Tällöin*

$$
M : L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega). \tag{21}
$$

Todistus. Lemmojen 22 ja 24 nojalla saadaan, että

$$
\|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} \leq \|M_{\leq R}f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} + \|M_{>R}f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)} \lesssim \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\omega)},
$$

kun $R = \frac{1}{3}r_0$, missä r_0 on niin kuin lemmassa 22. □

Viitteet

[1] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö ja M. Ruzicka: *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Mathematics, 2017, Springer-Verlag, Heidelberg, 2011.

[2] J. García-Cuerva ja J. Rubio de Francia: *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Mathematics Studies, **116**. Notas de Matemática (Mathematical Notes), 104. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.

[3] E. Stein: *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Princeton (N.J): Princeton University Press, 1993

[4] R. Coifman ja C. Fefferman: *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math. **51** (1974), 241–250.

[5] B. Muckenhoupt: *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.

[6] J. Kinnunen: *Real Analysis*, Department of Mathematics and Systems Analysis, Aalto University 2020.

[7] P. Hästö: *Local to global results in variable exponent spaces*, Math. Res Letters **16** (2009), no. 2, 263-278

[8] L. Diening ja S. Samko: *Hardy inequality in variable exponent Lebesgue spaces*, Fract. Calc. Appl. Anal. **10** (2007), no. 1, 1–18.

[9] L. Diening: *Maximal function on generalized Lebesgue spaces* $L^{p(\cdot)}$, Math. Inequal. Appl. **7** (2004), no. 2, 245–253.

[10] L. Diening ja P. Hästö: *Muckenhoupt weights in variable exponent spaces*. Preprint, 2008, `https://www.problemsolving.fi/pp/p75_submit.pdf` *(Luettu 16.4.2023)*.

[11] D. Cruz-Uribe, L. Diening ja P. Hästö: *The maximal operator on weighted variable Lebesgue spaces*, Fract. Calc. Appl. Anal. **14** (2011), no. 3, 361–374.

[12] W. Orlicz: *Über konjugierte Exponentenfolgen. Studia Math.*, 3:200–211, 1931.

[13] O. Kováĉik ja J. Rákosník: *On spaces Lp(x) and W 1,p(x)*, Czechoslovak Math. J. **41(116)** (1991), 592–618.

[14] E. Acerbi ja G. Mingione: *Regularity results for stationary electro-rheological fluids*, Arch. Ration. Mech. Anal. **164** (2002), no. 3, 213–259.

[15] K.R. Rajagopal ja M. Ružička: *Mathematical Modeling of Electrorheological Materials*, Contin. Mech. Thermodyn. (2001), no. 13, 59–78.

[16] M. Ružička: *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, Lecture Notes in Mathe- matics, 1748, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[17] E. Acerbi ja G. Mingione: *Regularity results for a class of functionals with non-standard growth*. Arch. Ration. Mech. Anal., 156:121–140, 2001

[18] D. Cruz-Uribe, L. Diening ja P. Hästö: *The maximal operator on weighted variable Lebesgue spaces*, Fract. Calc. Appl. Anal. **14** (2011), no. 3, 361–374

[19] E.–K. Kurki ja C. Mudarra, *On the extension of Muckenhoupt weights in metric spaces*, Nonlinear Analysis **215** (2022).