



**TURUN  
YLIOPISTO**

VEKTORIANALYYSIN SOVELLUKSIA FYSIIKASSA

Siiri Anttonen

Pro gradu -tutkielma  
Elokuu 2023

Tarkastajat:  
Prof. Matti Vuorinen  
Prof. Peter Hästö

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

SIIRI ANTTONEN: Vektorianalyysin sovelluksia fysiikassa  
Pro gradu -tutkielma, 63 s.  
Matematiikka  
Elokuu 2023

---

Tässä pro gradu -tutkielmassa perehdytetään lukija vektoreiden peruslaskutoimituksiin, vektorilaskentaan liittyviin differentiaalioperaattoreihin, vektoriarvoisten funktioiden integroimiseen sekä vektorianalyysin keskeisiin teoreemoihin. Jokaisen aihepiirin osalta käydään läpi matemaattisen tarkastelun lisäksi fysiikan sovelluksia teorian, esimerkkien ja tehtävien avulla. Tutkielma sopii ensisijaisesti oppimateriaaliksi ensimmäisen vuoden fysiikan yliopisto-opiskelijoille. Pohjatiedoiksi lukijalta odotetaan lukion pitkän matematiikan oppimäärää.

Vektorit ja vektorianalyysi ovat vanhoja oppialoja matematiikassa ja fysiikassa, joten oma panostukseni on ollut jäsenellä keskeistä sisältöä suomenkieliseksi oppimateriaaliksi sekä laatia osa esimerkeistä ja tehtävistä. Pääasiallisina lähteinä olen käyttänyt Kalle Väisälän kirjaa *Vektorianalyysi* [3], yliopisto-oppikirjaa *University Physics* [2] ja omia muistiinpanoja laajojen fysiikan sivuaineopintojeni ajalta.

Asiasanat: vektorit, vektorianalyysi, fysiikan matemaattiset apuneuvot.



# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Vektorit ja niiden peruslaskutoimitukset</b>	<b>3</b>
2.1	Merkinnät . . . . .	3
2.2	Pituus . . . . .	3
2.3	Laskutoimituksia . . . . .	4
2.4	Komponenttiesitys . . . . .	6
2.5	Tehtäviä: Peruslaskutoimitukset . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Tulot</b>	<b>10</b>
3.1	Pistetulo . . . . .	10
3.1.1	Pistetulo matematiikassa . . . . .	10
3.1.2	Pistetulo fysiikassa . . . . .	12
3.2	Ristitulo . . . . .	13
3.2.1	Ristitulo matematiikassa . . . . .	13
3.2.2	Ristitulo fysiikassa . . . . .	15
3.3	Kolmitulot . . . . .	17
3.4	Tehtäviä: Tulot . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Differentiaalioperaatiot</b>	<b>21</b>
4.1	Vektoreiden derivointi . . . . .	21
4.2	Vektorikentistä . . . . .	23
4.3	Suunnattu derivaatta ja gradientti . . . . .	24
4.4	Roottori ja divergenssi . . . . .	26
4.5	Tehtäviä: Differentiaalioperaatiot . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Integraalit</b>	<b>29</b>
5.1	Viivaintegraali . . . . .	29
5.2	Pintaintegraali eli vuointegraali . . . . .	33
5.3	Tilavuusintegraali . . . . .	36
5.4	Tehtäviä: Integraalit . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Keskeisiä teoreemoja</b>	<b>37</b>
6.1	Greenin teoreema tasossa . . . . .	38
6.2	Tehtäviä: Greenin teoreema . . . . .	42
6.3	Divergenssilause ja divergenssi . . . . .	42
6.3.1	Divergenssistä . . . . .	43
6.3.2	Divergenssilause . . . . .	46
6.3.3	Gaussin laki fysiikassa . . . . .	49
6.4	Tehtäviä: Divergenssilause . . . . .	52
6.5	Stokesin lause ja roottori . . . . .	53
6.5.1	Roottorista . . . . .	53
6.5.2	Stokesin lause . . . . .	54
6.5.3	Stokesin lause fysiikassa . . . . .	56
6.6	Tehtäviä: Stokesin lause . . . . .	60

7	Loppusanat lukijalle	60
8	Tehtävien vastaukset	61

# 1 Johdanto

Tämän pro gradu -tutkielman tarkoitus on perehdyttää lukija vektorianalyysiin ja erityisesti sen sovelluksiin fysiikassa. Tutkielman kohderyhmä on yliopisto-opintojen alkupuolella olevat fysiikan opiskelijat, sekä matematiikan opiskelijat, jotka haluavat tutustua vektorianalyysin soveltamiseen fysiikassa. Lukion pitkän matematiikan oppimäärä on pohjatieto-oletuksena, mutta kahden ensimmäisen luvun aikana kerrataan pitkälti ne lukiomatematiikan aiheet, jotka vektoreiden osalta ovat tutkielman kannalta oleelliset. Derivointia, integrointia ja geometriaa ei juuri kerrata lukiomatematiikan osalta ja näiden aihepiirien hallinnan onkin hyvä olla varmallalla pohjalla ennen tutkielman lukemista.

Mielenkiintoni vektorianalyysiä kohtaan on ollut suuri aina opintojeni alusta asti, fysiikan laajaa sivuainekokonaisuutta suorittaessani. Pidän vektorianalyysiä hyvin keskeisenä fysiikan opinnoille, ja olen itse valinnut sen tutkielmani aiheeksi. Tutkielmassa käsitellään kustakin aiheesta ensin matemaattista taustaa ja puhtaasti matemaattisia esimerkkejä. Näiden jälkeen käydään läpi kyseistä teemaa tai teoreemaa ilmentäviä fysiikan lakeja ja sovelluksia esimerkkien kanssa. Kunkin aiheen lopussa on tehtäviä matematiikan ja fysiikan aloilta. Vastaukset näihin löytyvät teoksen lopusta.

Vektorianalyysi on vektoriarvoisten muuttujien ja funktioiden teoriaa. Esimerkiksi vektoriarvoisesta funktiosta on varatun hiukkasen muodostama sähkökenttä, joka on kussakin pisteessä vektorimuotoinen, eli sillä on suuruuden lisäksi paikkakoordinaattien ja lähtövakioiden funktiona määräytyvä suunta eli se on ilmaistavissa komponenttimuodossa. Koko tutkielmassa on huomioitu se, että ilmiöitä on usein kannattavaa mallintaa muuhunkin kuin karteesisen koordinaatistoon. Tarvittavissa kohdissa on näytetty, miten kaavat ja laskut toimivat napa-, pallo- ja sylinterikoordinaatistoissa.

Vektorit ovat olleet matematiikassa ja fysiikassa käytössä jo 1700-luvulta alkaen, ja vektorianalyysin keskeiset teoreemat on kehitetty 1800-luvulla. Näiden teoreemojen sovellukset fysiikassa ovat myös tunnettuja yhtä pitkältä ajalta, sillä teoreemat löydettiin usein fysikaalisia ilmiöitä tutkittaessa. Näin ollen tässä tutkielmassa ei ole uutta teoriaa. Oma panokseni on ollut jäsenellä teoria sovelluksineen suomenkieliseksi helposti lähestyttäväksi kokonaisuudeksi, johon liitetyt esimerkit ja tehtävät ovat pitkälti itseni laatimia. Vektorianalyysin teoriaa olen opiskellut ensisijaisesti Kalle Väisälän kirjasta *Vektorianalyysi* [3]. Fysiikan sovelluksia olen koennut pääosin fysiikan opinnoissa käytettävästä, laajalti fysiikan eri osa-alueita käsittelevästä, oppikirjasta *University Physics* [2] ja kurssikohtaisista oppimateriaaleista, kuten *Analytical Mechanics* [1]. Ensimmäisten lukujen tehtäviä ja esimerkkejä olen poiminut mahdollisuuksien mukaan suomenkielisistä vanhoista ylioppilastehtävistä 1990-luvulta ja 2000-luvun alkuvuosilta [4], täydentäen muilla tehtävillä. Hahmotellessani, minkälaisia tehtäviä eri aiheista olisi syytä sisällyttää tutkielmaan, olen tutustunut edellämainittujen oppikirjojen lisäksi fysiikan aineopintojen kurssimonisteisiin ja harjoitustehtäviin. Seuraavaksi esittelen lyhyesti tutkielman rakenteen.

Luvussa 2 käsitellään lyhesti jo entuudestaan lukion matematiikan pitkästä oppimäärästä tuttuja perusasioita vektoreista ja niiden laskutoimituksista. Näiden osaaminen on edellytys tarvittavien käsitteiden ja teoreemojen ymmärtämiselle. Luvussa

on esitelty vektoreiden yhteydessä käytettävät merkinnät, vektorin pituus, yhteenlaskut sekä komponenttiesitys kolmiulotteisessa koordinaatistossa. Fysiikassa näitä tarvitaan vektorisuureita, eli suureita joilla on suuruuden lisäksi suunta, käsiteltäessä.

Luvussa 3 käydään läpi erilaiset vektoreihin liittyvät tulot. Vektorille voidaan skalaarilla kertomisen lisäksi määritellä monenlaisia tuloja ja niiden yhdistelmiä. Luvussa käsitellään erikseen pistetulo eli sisätulo, ristitulo, skalaarikolmitulo ja vektorikolmitulo. Määritelmässä tarvitaan  $3 \times 3$  -matriisin determinantin laskutaito. Näiden tulojen lausekkeet voivat olla skalaarilukuja tai vektoreita. Pistetuloa käytetään tiettyä polkua pitkin tehtyä työtä mallinnettaessa. Ristituloa sovelletaan muun muassa ratanopeutta, pyörimismäärää, varattuun hiukkaseen sähkökentän kohdistamaa voimaa ja voiman vääntömomenttia määritettäessä. Skalaarikolmitulo on ristitulon ja skalaaritulon yhdistelmä, ja sitä sovelletaan esimerkiksi, kun vääntävän voiman vaikutusakselin ja itse voiman määrittämä taso ei ole kohdisuorassa pyörimisakseliin nähden. Vektorikolmitulo sisältää kaksi ristituloa, ja sitä tarvitaan tietyissä tilanteissa pyörivän kappaleen normaalikiiktyvyyttä ja pyörimismäärää laskettaessa.

Luvun 4 aihe on vektoreihin kohdistuvat differentiaalioperaatiot. Ensin esitellään kolmiulotteisiin tilanteisiin tarkoitettu nabla- eli del-operaattori. Nablaa käyttäen määritellään myös gradientti, divergenssi ja roottori. Gradientti on derivaatan yleistyksen useamman muuttujan skalaariarvoisille funktiolle. Gradientti on vektori, jonka komponentit ovat funktion osittaisderivaatat kunkin muuttujan suhteen. Gradientti kuvaa pinnan  $z = f(x, y)$  jokaisessa pisteessä pinnan “jyrkkyyden” pääakselien suhteen. Se on itse siis vektorimuotoinen. Gradientin ja pistetulon avulla voidaan tutkia jyrkkyyttä minkä tahansa suunnan suhteen. Divergenssi on nabla-operaattorin ja vektoriarvoisen funktion pistetulo. Divergenssi itse on skalaarisuure, joka kuvaa pisteestä lähtevän tai siihen päättyvän vektorivuon tiheyttä. Suora käänös englanninkieliselle sanalle *divergence* onkin *lähteisyys*. Divergenssi on huomattavan keskeinen suure fysiikassa erityisesti Gaussin divergenssilauseen kautta. Roottori on nabla-operaattorin ja vektoriarvoisen funktion ristitulo. Sen englanninkielinen termi *curl* tarkoittaa *pyörrettä* tai *pyörteisyyttä*. Se on merkittävä operaattori fysiikassa erityisesti Stokesin lauseen vuoksi. Roottori on vektoriarvoinen, ja se kuvaa kussakin pisteessä pyörteisen kentän aiheuttajien tiheyttä.

Luvussa 5 tutustutaan erilaisiin integraaleihin. Lukion matematiikan pitkä oppimäärä sisältää Riemannin integraalin, jota soveltamalla lasketaan melko yksinkertaisesti rajoitettujen alueiden pinta-aloja ja tilavuuksia. Tässä luvussa erilaisten funktioiden integraaleja lasketaan pintojen ja tilavuuksien yli, jolloin puhutaan vastaavasti pinta- ja tilavuusintegraaleista. Nämä ovat keskeisiä integraaleja fysiikassa, sillä usein suureet, vaikkapa tiheys, määräytyvät paikkakoordinaattien funktiona ja kertymä, tässä esimerkissä massa, voidaan määrittää tilavuusintegraalina kyseisen kappaleen tilavuuden yli. Viivaintegraalissa funktiota integroidaan tietyn polun yli. Viivaintegraali on erityisen keskeinen fysiikassa. Se esiintyy muun muassa useassa sähkö- ja magnetismin laissa: Maxwellin yhtälöissä, Faradayn induktiolaissa, Amperen laissa sekä Biot-Savartin laissa.

Luku 6 sisältää vektorianalyysin keskeiset teoreemat: Greenin teoreema, roottorilause eli Stokesin lause ja divergenssilause eli Gaussin lause. Nämä kolme liittyvät tiiviisti toisiinsa. Edellisten kappaleiden aiheet toimivat pohjana näiden teoreemo-



jen ymmärtämiselle. Greenin teoreema yhdistää tasossa toisiinsa viivaintegraalin yli yksinkertaisen suljetun polun ja kaksinkertaisen integraalin yli kyseisen polun sulkeuman alueen. Se on kaksiulotteinen versio yleisemmästä Stokesin lauseesta. Stokesin lause yhdistää toisiinsa suljetun poluintegraalin ja pintaintegraalin yli kyseisen polun rajaaman avoimen pinnan. Greenin teoreeman ja Stokesin lauseen sovelluksia löytyy erityisen paljon klassisen mekaniikan sekä sähkö- ja magnetismin puolelta. Tällaisia aihepiirejä ovat hitausmomentit ja konservatiiviset voimat, Keplerin laki planeettojen radoista, Maxwellin yhtälöt ja Faradayn laki. Stokesin lausetta kutsutaan myös roottorilauseeksi. Divergenssilause eli Gaussin lause yhdistää toisiinsa pintaintegraalin suljetun pinnan yli ja tilavuusintegraalin yli kyseisen pinnan rajaaman tilavuuden - lauseen mukaan vektorikentän vuo suljetun pinnan läpi on yhtä kuin kentän lähteisyys pinnan sisällä. Fysiikallinen merkitys tälle on muun muassa se, että sähkökentän vuo suljetun pinnan läpi on yhtä kuin pinnan sisäänsä sulkema varaus.

Loppusanoissa pohdin vektorianalyysin osuutta siinä matemaattisten työkalujen paketissa, joita fysiikassa hyödynnetään. Luettelen myös seuraavia aiheita, joihin tutkielman lukenut voi halutessaan seuraavaksi edetä saavuttamiensa tietojen ja taitojen turvin. Tutkielman esimerkit ja tehtävät ovat laskettavissa tavallisen funktiolaskimen avulla, ja rajatakseni tutkielman laajuttua olen jättänyt matemaattisia ohjelmistoja vaativat tehtävyyt pois. Loppusanoissa kerron myös lyhyesti, mitä mahdollisuuksia matemaattiset ohjelmistot tarjoavat vektorianalyysin soveltamiseen. Näin tästä aiheesta kiinnostunut lukija saa käsityksen, mistä voi aloittaa aiheen opiskelun.

## 2 Vektorit ja niiden peruslaskutoimitukset

### 2.1 Merkinnät

Tässä tutkielmassa vektoreita merkitään pääsääntöisesti yleisesti käytössä olevaan tapaan lihavoiduin kirjaimin, esimerkiksi  $\mathbf{A}$  tai  $\mathbf{a}$ . Vektorin komponentteihin viitataan alaindeksin, esimerkiksi  $\mathbf{A}_x$  tarkoittaa vektorin  $\mathbf{A}$   $x$ -komponenttia. Käsin kirjoittaen lihavointi ei ole käytännöllistä, joten silloin lihavointi korvataan piirtämällä kirjaimen yläpuolelle viiva tai eteenpäin osoittava nuoli. On tärkeää jollain tavalla osoittaa, symboloiko kirjain vektoria vai ei. Kursivoidulla kirjaimella viitataan usein vektorin pituuteen, kuten seuraavassa alaluvussa huomaamme. Mikäli vektorin alkupiste ja päätepiste tunnetaan, voidaan vektori nimetä niiden mukaan. Esimerkiksi pisteestä  $O$  pisteeseen  $P$  kulkevaa vektoria kutsutaan usein vektoriksi  $\overrightarrow{OP}$  tai  $\vec{OP}$ . Toinen tapa kyseisen vektorin merkitsemiseksi on  $\mathbf{OP}$ .

### 2.2 Pituus

Vektoria  $\mathbf{A}$  kuvaavan nuolen pituutta kutsutaan vektorin  $\mathbf{A}$  pituudeksi tai suuruudeksi. Tämä kirjoitetaan  $|\mathbf{A}|$  tai  $A$ . Jos ulottuvuuksia on enemmän kuin kolme, puhutaan pituuden sijaan vektorin  $\mathbf{A}$  normista, jota merkitään  $\|\mathbf{A}\|$ . Pythagoraan lauseen nojalla todetaan seuraavat asiat vektorin pituudesta:

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \text{ kahdessa ulottuvuudessa tai} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \text{ kolmessa ulottuvuudessa.}$$

Vektorin suuntakulma saadaan määritettyä trigonometrisesti tangentin avulla, kun vektorin  $x$ - ja  $y$ -komponentit tunnetaan.

**Esimerkki 1.** Voiman  $\mathbf{F}$   $x$ -komponentti on  $4N$  ja  $y$ -komponentti on  $3N$ .

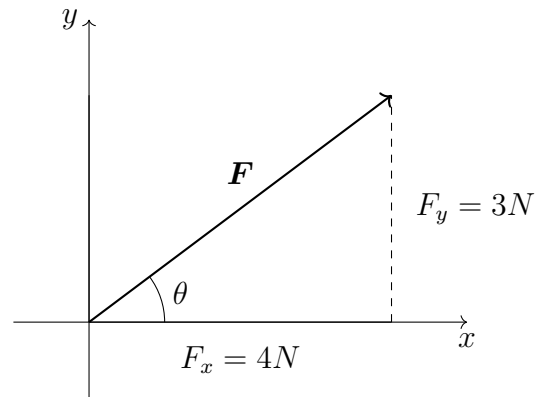
Merkitään (katso kuva 1)

$$F_x = 4N \text{ ja } F_y = 3N,$$

jolloin kaavan (1) mukaan

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{(4N)^2 + (3N)^2} = 5N \text{ ja}$$

$$\theta = \arctan \frac{3}{4}.$$



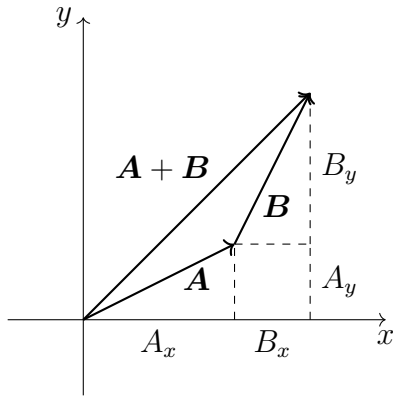
Kuva 1:

## 2.3 Laskutoimituksia

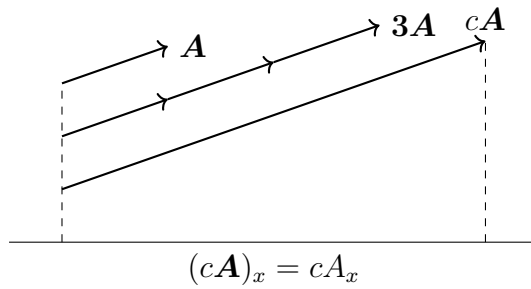
Kahden vektorin summavektorin määrittämiseksi on kaksi tapaa (kuva 2). Graafisesti summa  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  saadaan piirtämällä vektori  $\mathbf{B}$  alkamaan vektorin  $\mathbf{A}$  loppupisteestä ja piirtämällä summavektori vektorin  $\mathbf{A}$  alkupisteestä vektorin  $\mathbf{B}$  loppupisteeseen. Toinen tapa on laskea vektorit komponenteittain yhteen. Summavektorin  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$   $x$ -komponentti on  $A_x + B_x$  ja  $y$ -komponentti on  $A_y + B_y$ . Vastaavat tavat summan määrittämiseksi yleistyvät useammallekin kuin kahdelle vektorille. Vektorien yhteenlasku on kommutatiivinen ja assosiatiiivinen. Vektoreiden yhteenlasku noudattaa siis tavanomaisia algebrallisia laskusääntöjä.

Vektori voidaan kertoa reaalilla tai kompleksisellä vakiolla. Vektorin  $c\mathbf{A}$  pituus on  $c$ -kertainen vektorin  $\mathbf{A}$  pituuteen nähden (kuva 3). Jos kerroin  $c$  on positiivinen,  $c\mathbf{A}$ :n suunta on sama kuin vektorin  $\mathbf{A}$ , ja vastakkainen, jos  $c$  on negatiivinen. Jokaiselle komponentille pätee myös erikseen vastaavat tulokset; kukin komponentti muuttuu  $c$ -kertaiseksi, kun vektori kerrotaan kyseisellä vakiolla (kuva 3). Mikäli kerroin  $c = 0$ , saadaan *nollavektori*, jonka kaikki komponentit ovat nollia ja jolla ei ole suuntaa.

Vektorin vastavektorilla tarkoitetaan vektoria, jonka pituus on sama kuin alkuperäisen vektorin, mutta suunta vastakkainen. Vastavektori saadaan kertomalla vektori luvulla  $-1$ . Vektorit  $\mathbf{B}$  ja  $-\mathbf{B}$  ovat toistensa vastavektoreita. Nyt kahden vektorin välinen erotus  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  saadaan määriteltävä vektorin  $\mathbf{A}$  ja vektorin  $-\mathbf{B}$  summaksi. Näin saadun vektorin jokainen komponentti voidaan laskea vähentämällä vastaavat



Kuva 2:



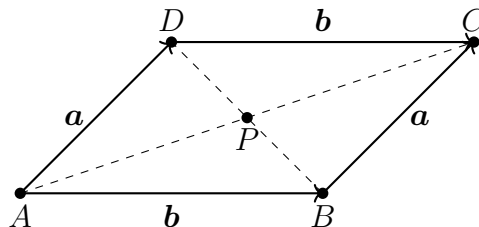
Kuva 3:

komponentit toisistaan, esimerkiksi  $x$ -komponentin osalta  $(A - B)_x = A_x - B_x$ . Yhteenselvityksen tavoin myös vähennyslasku voidaan toimittaa graafisesti. Mikäli vektori vähennetään itsestään, saadaan nollavektori.

Yksikkövektori tarkoittaa vektoria, jonka pituus (tai yli kolmen ulottuvuuden tapauksessa *magnitudi*) on 1. Jos vektorin jakaa pituudellaan, saadaan tulokseksi aina vektorin itsensä suuntainen yksikkövektori. Erittäin monet geometrian tulokset on johdettavissa vektoreiden peruslaskutoimituksia käyttäen.

**Esimerkki 2.** Todistetaan, että suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.

Olkoon piste  $P$  suunnikkaan  $ABCD$  lävistäjien leikkauspiste. Merkitään lyhyemmin sivuja  $AD$  ja  $BC$  vektorilla  $\mathbf{a}$  ja sivuja  $AB$  ja  $DC$  vektorilla  $\mathbf{b}$  (katso kuva 4).



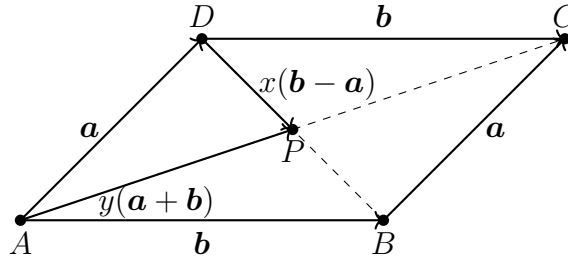
Kuva 4:

Koska  $\mathbf{DB} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$ , niin  $\mathbf{DB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ . Täten  $\mathbf{DP} = x(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ . Vastaavasti  $\mathbf{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  ja  $\mathbf{AP} = y(\mathbf{a} + \mathbf{b})$  (katso kuva 5). Voidaan kirjoittaa  $\mathbf{AD} = \mathbf{AP} + \mathbf{PD} =$

$AP - DP$ , toisin sanoen

$$\mathbf{a} = y(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - x(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (x + y)\mathbf{a} + (y - x)\mathbf{b}.$$

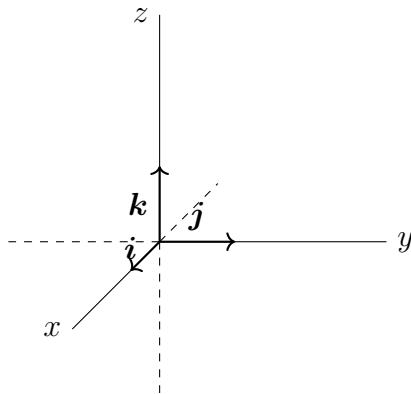
Koska vektorit  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  eivät ole yhdensuuntaisia, on oltava  $x + y = 1$  ja  $y - x = 0$  eli  $x = y = \frac{1}{2}$ . Piste  $P$  sijaitsee näin ollen kummankin lävistäjän puolivälissä.



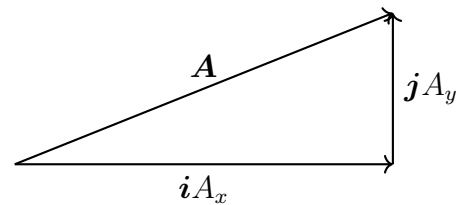
Kuva 5:

## 2.4 Komponenttiesitys

Kartesisen  $x, y, z$ -koordinaatiston akselien suuntaisia yksikkövektoreita merkitään yleensä vastaavassa järjestyksessä  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$  (kuva 6). Näiden avulla vektori  $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$  voidaan kirjoittaa muodossa  $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y$  (kuva 7). Vastaavasti kolmiulotteinen vektori voidaan kirjoittaa  $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z$ .



Kuva 6:



Kuva 7:

Tässä muodossa esitetyjä vektoreita on yksinkertaista summata tai vähentää toisistaan. Tällöin  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y) + (\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y) = \mathbf{i}(A_x + B_x) + \mathbf{j}(A_y + B_y)$ . Tämä tulos on aivan vastaava kuin tavanomaisesti komponentteja yhteenslaskemalla saatu. Yksikkövektorit  $\mathbf{i}$  ja  $\mathbf{j}$  toimivat kätevästi apuna ryhmittelyssä. Piste- paikkavektorilla tarkoitetaan vektoria, joka kulkee origosta kyseiseen pisteeseen. Piste- koordinaatit ovat samat kuin vastaavien yksikkövektoreiden kertoimet paikkavekto- rissa. Seuraava esimerkki valaisee paikkavektoreiden käyttöä.

**Esimerkki 3.** Vektorin  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  alkupiste  $A = (2, 3)$ , vektorin  $\mathbf{u}$  suunta sama kuin vektorin  $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ , ja vektorin  $\mathbf{u}$  pituus on 3. Määritä piste  $B$ . (yo pitkä matematiikka K92:4b)

*Ratkaisu.* Origosta lähtevä pisteen  $A$  paikkavektori on  $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ . Vektorin  $\mathbf{v}$  pituus on 5, joten vektorin  $\mathbf{v}$  suuntainen yksikkövektori

$$\mathbf{v}^0 = \frac{1}{5}(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}),$$

joten vektori

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}).$$

Siten on

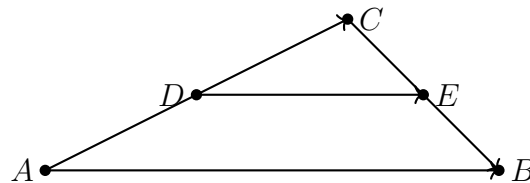
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \frac{3}{5}(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = \frac{22}{5}\mathbf{i} + \frac{6}{5}\mathbf{j}.$$

Koska  $\overrightarrow{OB}$  on pisteen  $B$  paikkavektori, voidaan päätellä, että kysytty piste

$$B = \left( \frac{22}{5}, \frac{6}{5} \right).$$

**Esimerkki 4.** Todista, että kolmion kahden eri sivun keskipisteet yhdistävä jana on yhdensuuntainen kolmannen sivun kanssa ja pituudeltaan puolet kolmannesta sivusta.

*Ratkaisu.* Merkitään sivun  $BC$  keskipistettä kirjaimella  $E$  ja sivun  $AC$  keskipistettä kirjaimella  $D$  (kuva 8).



Kuva 8:

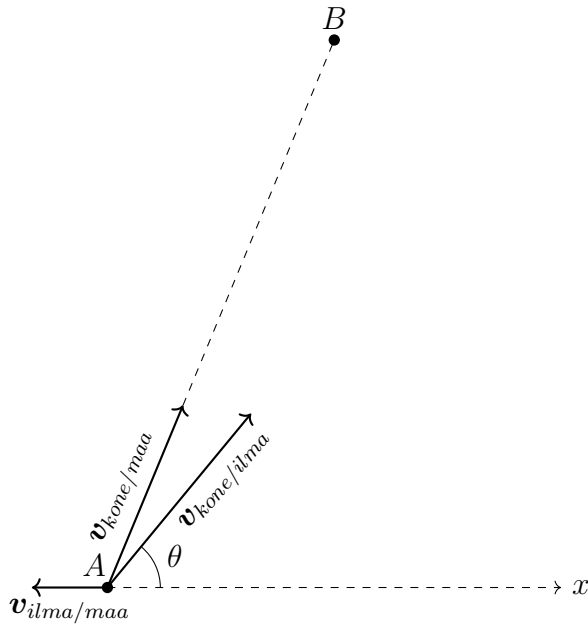
Oheisesta kuvasta nähdään, että  $\mathbf{AC} + \mathbf{CB} = \mathbf{AB}$ . Vektori  $\mathbf{DE}$  yhdistää nyt sivujen  $AC$  ja  $BC$  keskipisteet. Nyt

$$\mathbf{DE} = \mathbf{DC} + \mathbf{CE} = \frac{1}{2}\mathbf{AC} + \frac{1}{2}\mathbf{CB} = \frac{1}{2}(\mathbf{AC} + \mathbf{CB}) = \frac{1}{2}\mathbf{AB}.$$

Täten  $\mathbf{DE}$  on samansuuntainen kuin  $\mathbf{AB}$  ja pituudeltaan puolet siitä.

**Esimerkki 5.** Lentokoneen nopeus täysin tyynellä säällä on  $300 \text{ km/h}$ . Mihin suuntaan koneen on lennettävä, jos idästä tuulee nopeudella  $100 \text{ km/h}$  ja tarkoitus on lentää kone suorinta reittiä kaupungista  $A$  kaupunkiin  $B$ , joka sijaitsee  $400 \text{ km}$  päässä kaupungista  $A$  suunnassa pohjoiskoillinen (pohjoisen ja koillisen välissä)? Kuinka nopeasti kone etenee maanpinnan suhteen näissä olosuhteissa ja kauanko matka tällöin kestää?

*Ratkaisu.* Käytetään ratkaisussa  $xy$ -tason vektoreita  $\mathbf{i}$  ja  $\mathbf{j}$ , sillä ongelma on kaksiulotteinen. Valitaan positiivisen  $x$ -akselin suunnaksi itä ja positiivisen  $y$ -akselin suunnaksi pohjoinen. Kuvassa 9 on esitetty tarvittavat nopeusvektorit koordinaatistossa.



Kuva 9:

Käytetään yksikköinä koko ajan kilometrejä ja tunteja, ja lisätään ne vastaukseen lopussa yhtäöiden yksinkertaistamiseksi.

Ilman nopeus maanpinnan suhteen on  $\mathbf{v}_{ilma/maa} = -100\mathbf{i}$ . Mikäli lentokoneen kärki osoittaa suuntaan, joka muodostaa kulman  $\theta$  positiivisen  $x$ -akselin kanssa, on koneen nopeus ilmaan nähden

$$\mathbf{v}_{kone/ilma} = (300 \cos \theta)\mathbf{i} + (300 \sin \theta)\mathbf{j}.$$

Koneen etenemisnopeus maanpinnan suhteen saadaan nopeuksien summana:

$$\mathbf{v}_{kone/maa} = \mathbf{v}_{kone/ilma} + \mathbf{v}_{ilma/maa} = (300 \cos \theta - 100)\mathbf{i} + (300 \sin \theta)\mathbf{j}. \quad (2)$$

Koneen reitti halutaan suunnata pohjoiskoilliseen, joten reitin suunnan ja positiivisen  $x$ -akselin välisen kulman on oltava

$$\theta = \frac{3}{4} \cdot 90^\circ = 67,5^\circ.$$

Kun merkitään kirjaimella  $v$  koneen todellista etenemisnopeutta maanpinnan suhteen, voidaan kirjoittaa:

$$\mathbf{v}_{kone/maa} = v((\cos 67,5^\circ)\mathbf{i} + (\sin 67,5^\circ)\mathbf{j}). \quad (3)$$

Olemme nyt määritelleet koneen etenemisnopeuden maanpintaan nähden kahdella eri tavalla. Vertaamalla yhtälöissä (2) ja (3) yksikkövektoreiden  $\mathbf{i}$  ja  $\mathbf{j}$  kertoimia saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 300 \cos \theta - 100 = v \cos 67,5^\circ, \\ 300 \sin \theta = v \sin 67,5^\circ. \end{cases}$$

Jakamalla ylempi yhtälö alemmalla saadaan muuttuja  $v$  eliminoitua, ja ristiinkertomisen jälkeen jäljelle jää yhtälö

$$300 \cos \theta \sin 67,5^\circ - 300 \sin \theta \cos 67,5^\circ = 100 \sin 67,5^\circ.$$

Jakamalla yhtälö puolittain luvulla 100 saadaan

$$3 \cos \theta \sin 67,5^\circ - 3 \sin \theta \cos 67,5^\circ = \sin 67,5^\circ.$$

Koska  $\cos(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ , voidaan yhtälö sieventää edelleen muotoon

$$3 \sin(67,5^\circ - \theta) = \sin 67,5^\circ.$$

Lentokoneen on siis suuntauduttava niin, että

$$\theta = 67,5^\circ - \arcsin\left(\frac{1}{3} \sin 67,5^\circ\right) \approx 49,56^\circ.$$

- Kone on suunnattava  $49,56^\circ$  idästä pohjoiseen päin.
- Koneen nopeus maanpinnan suhteen on

$$v = 300 \frac{\sin 49,56^\circ}{\sin 67,5^\circ} \approx 247,15 \frac{km}{h}.$$

- Lento kestää noin

$$\frac{400km}{247,15km/h} \approx 1,618 h \text{ eli } 1 h 37 min.$$

## 2.5 Tehtäviä: Peruslaskutoimitukset

1. Todista, että kolmiossa sivujen mediaanit leikkaavat pisteessä, joka jakaa jokaisen mediaanin suhteessa 2 : 1 kärjestä päin tarkasteltuna.
2. Pisteestä  $P_1 = (10, 0, 0)$  lähetetään valonsäde suuntaan  $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  ja pisteestä  $P_2 = (310, 480, 400)$  suuntaan  $\mathbf{v}_2 = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ . Kohtaavatko valonsäteet toisensa? (yo pitkä matematiikka K93:7a)
3. Olkoon  $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$  ja  $\mathbf{c} = d\mathbf{i} + (d+1)\mathbf{j}$ . Onko sellaisia reaalityyppisiä lukuja  $d$ , joilla vektorit  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  ja  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$  ovat samansuuntaiset? (yo pitkä matematiikka K96:5b)
4. Kulman kärki on pisteessä  $(1, 2)$ , ja pisteet  $(4, 6)$ ,  $(13, -3)$  sijaitsevat sen kyljillä. Laske kulmanpuolittajan suuntainen yksikkövektori. (yo pitkä matematiikka K00:6)
5. Auto ajaa pohjoiseen nopeudella  $50 \text{ km/h}$ . Pieni viiri auton katolla osoittaa ajosuuntaan nähden oikealle eli vaikuttaa tuulevan lännestä. Kun kuski kaksinkertaistaa autonsa nopeuden, osoittaa viiri tuulen puhaltavan luoteesta. Mistä suunnasta todellisuudessa tuulee, ja mikä on tuulen nopeus?
6. Itäänpäin nopeudella  $4 \text{ km/h}$  virtaavan suoran joen leveys on  $400 \text{ m}$ . Soutaja pystyy soutamaan tyynessä vedessä nopeudella  $5 \text{ km/h}$ . Mihin suuntaan hänen on soudettava päätyäkseen vastarannalle, joka on suoraan pohjoisessa hänen lähtöpisteeseensä etelärannalla nähden? Kauanko soutumatka kestää?

## 3 Tulot

Vektorien kertolaskulla voidaan viitata useaan eri tapaan laskea kahden tai useamman vektorin välinen tulo. Kahden vektorin välisiä tuloja ovat pistetulo ja ristitulo. Kolmituloissa lasketaan kolmen vektorin tulo, ja näistä käytetyimpiä ovat skalaari-kolmitulo ja vektorikolmitulo.

### 3.1 Pistetulo

#### 3.1.1 Pistetulo matematiikassa

Kahden vektorin  $\mathbf{A}$  ja  $\mathbf{B}$  välinen pistetulo merkitään  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ . Tulos on yhtä kuin vektorien pituuksien välinen tulo kerrottuna niiden välisen kulman  $\theta$  kosinilla:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta. \quad (4)$$

Tulos on aina skalaari, joten pistetuloa kutsutaan myös skalaarituloksi. Skalaaritulo on kommutatiivinen, eli

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (5)$$

Kaavan (1) perusteella havaitaan, että

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2. \quad (6)$$

Pistetulolle pätevät myös seuraavat kaavat:

$$(p\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = p(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (7)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \text{ ja} \quad (8)$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}. \quad (9)$$

Komponenttimuodossa pistetulo määritellään kolmiulotteisessa avaruudessa seuraavasti:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (iA_x + jA_y + kA_z) \cdot (iB_x + jB_y + kB_z). \quad (10)$$

Distributiivilakien nojalla kaavasta voidaan kertoa sulkeet auki, jolloin saadaan yhdeksän termin summa:  $A_x B_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + A_x B_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$  ja niin edelleen. Skalaaritulon määrittelyn perusteella saadaan:  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{i}| \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$  ja vastaavasti  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$  ja  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ .  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{j}| \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$  ja vastaavasti  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$ . Näin ollen pistetulolle voidaan johtaa seuraava hyödyllinen määritelmä:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (11)$$

Kaksiulotteisessa tapauksessa viimeinen termi eli  $z$ -komponentit jäävät yksinkertaisesti pois. Tällä kaavalla ja pistetulolla on muutamia välittömiä sovelluksia.

#### Kahden vektorin välinen kulma

Eräs tärkeä pistetulon sovellus on vektoreiden välisen kulman selvittäminen. Seuraavassa esimerkissä lasketaan kahden tunnetun vektorin välinen kulma selvittämällä ensin pistetuloa käyttäen kyseisen kulman kosini.



**Esimerkki 6.** Lasketaan vektoreiden  $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$  ja  $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$  välinen kulma.

*Ratkaisu.* Pistetulon määritelmän mukaan

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cdot \cos \theta = 3 \cdot (-2) + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 21.$$

Koska  $|\mathbf{A}| = 3\sqrt{14}$  ja  $|\mathbf{B}| = \sqrt{14}$ , niin  $3\sqrt{14}\sqrt{14} \cos \theta = 21$ ,  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  ja kysytty kulma  $\theta = 60^\circ$ .

## Vektoreiden kohtisuoruus ja yhdensuuntaisuus

Erikoistapauksia vektoreiden välisestä kulmasta ovat kohtisuorat ja yhdensuuntaiset vektorit. Vektoreiden pistetulo saa arvon nolla, jos vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, sillä  $\cos(90^\circ) = 0$ . Jos kaksi vektoria ovat yhdensuuntaiset, pätee vektoreiden komponenteille

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}.$$

Yhdensuuntaiset vektorit voidaan jakaa samansuuntaisiin ja vastakkaissuuntaisiin vektoreihin. Vektorit  $\mathbf{A}$  ja  $\mathbf{b}$  ovat samansuuntaiset, jos löytyy jokin sellainen positiivinen vakio  $r$  siten, että  $\mathbf{A} = r\mathbf{B}$ . Jos vastaavasti voidaan löytää negatiivinen luku  $r$ , jolle  $\mathbf{A} = r\mathbf{B}$ , ovat vektorit  $\mathbf{A}$  ja  $\mathbf{B}$  vastakkaissuuntaiset.

**Esimerkki 7.** Vektorit  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  ovat vastakkaissuuntaiset. Olkoon  $\mathbf{a} = \frac{3}{2}\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$  ja olkoon vektorin  $\mathbf{b}$  pituus 5. Määritä  $\mathbf{b}$ . Mikä on loppupiste, kun  $\mathbf{b}$  asetetaan alkamaan pisteestä  $(4, 3)$ ? (yo pitkä matematiikka K01:3)

*Ratkaisu.* Vektorit  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  ovat vastakkaissuuntaiset, joten  $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$ , missä  $t < 0$ . Koska  $|\mathbf{b}| = 5$ , saadaan  $t$ :lle yhtälö  $|t\mathbf{a}| = 5$ . Edelleen

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Koska  $t < 0$ , on yhtälön ratkaisu  $t = -2$ . Siten

$$\mathbf{b} = -2\left(\frac{3}{2}\mathbf{i} - 2\mathbf{j}\right) = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}.$$

Jos  $\mathbf{b}$  asetetaan alkamaan pisteestä  $(4, 3)$ , on  $\mathbf{b}$ :n loppupisteen paikkavektori

$$4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{b} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}.$$

Loppupiste on siis  $(1, 7)$ .

**Vastaus:**  $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  ja loppupiste on  $(1, 7)$ .

**Esimerkki 8.** Ilmaise vektori  $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$  vektoreiden  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  summana  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ , kun  $\mathbf{u}$  on samansuuntainen vektorin  $\mathbf{i} + \mathbf{j}$  kanssa ja  $\mathbf{v}$  on kohtisuorassa vektoriin  $\mathbf{u}$  nähden.

*Ratkaisu.* Koska vektorit  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{i} + \mathbf{j}$  ovat samansuuntaisia ja  $\mathbf{v}$  on kohtisuorassa  $\mathbf{u}$ :n kanssa, saadaan yhtälöt

$$\mathbf{u} = t(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \text{ ja } \mathbf{v} \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 0,$$

jollakin vakion  $t$  positiivisella arvolla. Lisäksi on oltava

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Kun tämä yhtälö kerrotaan (pistetulo) puolittain lausekkeella  $(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ , saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) &= (3\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ t(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) + 0 &= 4 \\ 2t &= 4 \\ t &= 2. \end{aligned}$$

Näin ollen

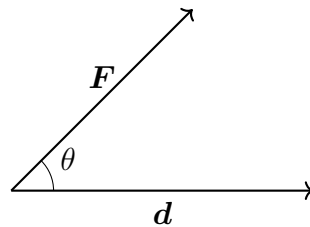
$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \text{ ja } \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}.$$

### 3.1.2 Pistetulo fysiikassa

Kahden vektorin välisen kulman selvittäminen on fysiikassa usein tarpeen. Tämä tilanne tulee esiin etenkin mekaniikassa, mutta myös esimerkiksi sähkömagnetismissa ja optiikassa. Luvussa 6 käsiteltävissä teoreemoissa tarvitaan pistetuloa, ja näillä teoreemoilla on lukuisia sovelluksia muun muassa nestedynamiikassa ja sähkömagnetismissa. Yleisimmin tunnettu sovellus pistetulolle itselleen fysiikassa on kuitenkin tehdyn työn laskeminen, jota tarkastellaan seuraavaksi yksityiskohtaisemmin.

#### Työ

Jo lukion fysiikan kursseilla opetetaan, että tehty työ saadaan selville kertomalla työtä tekevä voima siirtymällä, jonka ajan voima kappaleeseen on vaikuttanut. Mikäli voima ei ole siirtymän suuntainen, ei voiman siirtymään nähden kohtisuora komponentti tee työtä (kuva 10).



Kuva 10:

Tässä tapauksessa työ saadaan kertomalla voiman siirtymän suuntainen komponentti itse siirtymällä eli kuljetulla matkalla;  $W = (F \cos \theta) \cdot d$ . Tämä voidaan pistetulon määritelmään nojautuen kirjoittaa mielekkäästi muotoon

$$W = Fd \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}. \quad (12)$$

Mikäli voima muuttuu etäisyyden funktiona, ja mahdollisesti myös suunta  $\mathbf{d}$  muuttuu ajan funktiona, voimme kirjoittaa differentiaalisen pientä kuljettua matkaa kohden vastaavan kaavan:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (13)$$

Luvussa 5 on selvitetään, miten integroimme  $dW$ :n saadaksemme selville, kuinka suuren kokonaistyön muuttuva voima  $\mathbf{F}$  on tehnyt liikuttaessaan kappaletta jotakin reittiä pitkin.

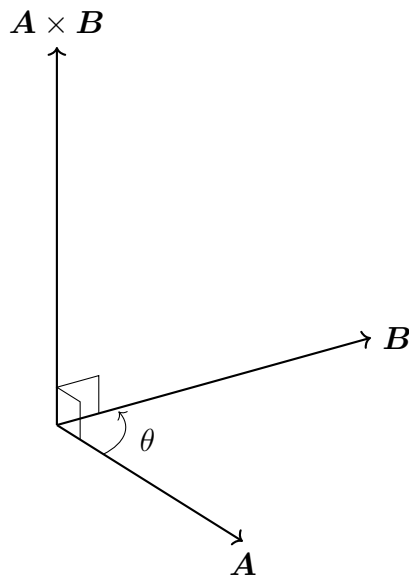
## 3.2 Ristitulo

### 3.2.1 Ristitulo matematiikassa

Ristituloa ja pistetuloa ei tule sekoittaa keskenään. Ristitulo on määritelty vain kolmiulotteisessa avaruudessa. Kahden vektorin  $\mathbf{A}$  ja  $\mathbf{B}$  välistä ristituloa eli vektorituloa merkitään  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ . Tällä ristitulolla tarkoitetaan vektoria, jonka suuruus ja suunta ovat seuraavan määritelmän mukaiset:

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \theta,$$

missä  $\theta$  on vektoreiden  $\mathbf{A}$  ja  $\mathbf{B}$  välinen positiivinen kulma ( $\leq 180^\circ$ ). Vektorin  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  suunta on kohtisuorassa sitä tasoa vastaan, jossa  $\mathbf{A}$  ja  $\mathbf{B}$  sijaitsevat. Suuntana on oikean käden säännön mukaan peukalon suunta, jos  $\mathbf{A}$  on etusormen ja  $\mathbf{B}$  keskisormen suuntainen (katso kuva 11).



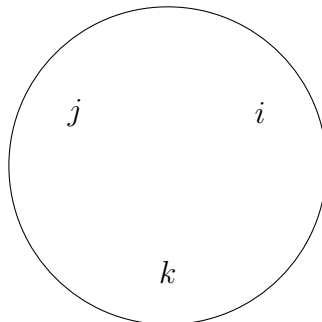
Kuva 11:

Huomion arvoista on, että ristitulo ei ole kommutatiivinen eli  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  ei ole sama asia kuin  $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$  vaan  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ . Ristitulon määritelmästä voidaan suoraan päätellä, että kahden samansuuntaisen tai vastakkaissuuntaisen vektorin ristitulo on nollavektori, samoin luonnollisesti kaikkien vektoreien ristitulo itsensä kanssa, sillä

$\sin 0^\circ = 0$ . Jos kahdesta vektorista ainakin toinen on nollavektori, on myös ristitulo nollavektori. Geometrian kannalta tärkeä ominaisuus on, että vektorien ristitulo on itseisarvoltaan yhtä suuri kuin sen suunnikkaan pinta-ala, jonka sivuina kyseiset vektorit ovat. Erityisesti toisiinsa nähden kohtisuorien vektorien ristitulo on niiden pituuksien tulo. Myös jokaisen yksikkövektorin  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$  ristitulo itsensä kanssa on nolla. Päätellään seuraavaksi kyseisten yksikkövektoreiden keskinäiset ristitulot oikean käden säännön avulla:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array}$$

Helppo muistisääntö näille ristituloille saadaan, kun kirjoitetaan kuvan 12 mukaisesti ympyrän sisälle kirjaimet  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$ . Kun ympyrää kierretään vastapäivään (eli kasvavan kiertokulman suuntaan), saadaan positiivinen lopputulos (esim.  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ) ja myötäpäivään kiertäessä negatiivinen tulos (esim.  $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ ). Ristitulon itseisarvo on verrannollinen vektorien välisen kulman siniin, joten ristituloa voidaan ikäänkuin käyttää kohtisuoruuden mittana samaan tapaan kuin pistetuloa yhden-suuntaisuuden mittana. Kahden yksikkövektorin ristitulon itseisarvo on 1, jos ja vain jos ne ovat kohtisuorassa, ja 0, jos ja vain jos ne ovat saman- tai vastakkaisuuntaisia. Samojen yksikkövektorien pistetulon laita on tässä suhteessa tarkalleen päinvastoin.



Kuva 12:

Nämä tulokset ovat luonnollisesti voimassa vain niin kutsutussa oikeakätisessä koordinaatistossa; vasenkätisessä koordinaatistossa kunkin ristitulon lopputulos muuttuu vastakkaismerkkiseksi. Nykyisin käytetään lähestulkoon yksinomaan oikeakätistä koordinaatistoa. Ristitulo on distributiivinen, eli

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}. \quad (14)$$

Distributiivisuuden sekä yksikkövektoreiden kertolaskukaavion perusteella ristitulo voidaan kirjoittaa auki seuraavaan muotoon komponenttien avulla:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z) \times (\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z) \\ &= \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

Determinanttimuoto onkin kenties kätevin tapa muistaa, miltä ristitulo komponenttimuodossa näyttää. Ristitulon komponenttiesityksen avulla voidaan selvittää kahden vektorin välinen kulma. Niiden pistetulo taas antaa tämän kulman kosinin, joka voi olla positiivinen tai negatiivinen. Ristitulon itseisarvo taas antaa saman kulman sinin, joka on aina positiivinen.

**Esimerkki 9.** Etsi jokin vektori, joka on kohtisuorassa sekä vektoria  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$  että vektoria  $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  vastaan.

*Ratkaisu.* Koska kahden vektorin ristitulona laskettu vektori on kohtisuorassa kumpaakin vektoriin nähden, lasketaan kaavalla (15)  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , joka kelpaa siis tehtävänannon mukaiseksi vastaukseksi.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-2 + 3) - \mathbf{j}(-4 + 1) + \mathbf{k}(6 - 1) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

**Esimerkki 10 (Kolmion pinta-alan laskeminen).** Kolmion kärjet ovat pisteissä  $O = (0, 0, 0)$ ,  $A = (\frac{1}{2}, 1, 0)$  ja  $B = (0, 1, 1)$ . Kuinka suuri on kolmion pinta-ala? (yo pitkä matematiikka K95:6)

*Ratkaisu.* Kolmion  $OAB$  ala voidaan laskea vektoritulon avulla. Kolmion kahtena sivuna ovat vektorit  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$  ja  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$  ja näiden vektoritulo (ristitulo)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}\right) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{j} \times \mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{i} \times \mathbf{k} + \mathbf{j} \times \mathbf{j} + \mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{k} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + 0 + \mathbf{i} \\ &= \mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Kolmion  $OAB$  ala on silloin

$$\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0,61.$$

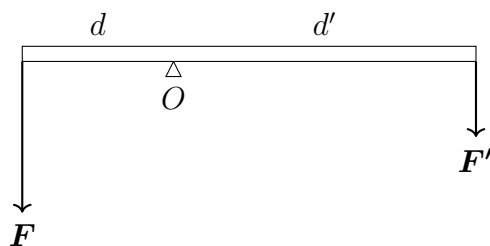
### 3.2.2 Ristitulo fysiikassa

Pistetuloon nähden on ristitulolla vielä enemmän välittömiä sovelluksia fysiikassa, sen lisäksi, että sitä käytetään luvussa 6 esiteltävässä roottorilauseessa. Seuraavaksi käsitellään neljä ristitulon fysikaalista sovellusta.

#### Voiman momentti

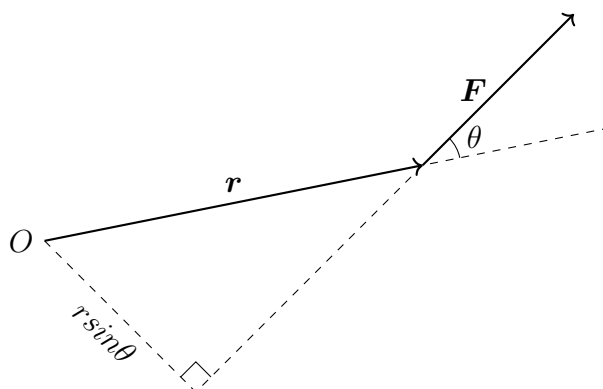
Mekaniikassa ja erityisesti sen osa-alueessa statiikassa voiman momentti on keskeinen käsite. Yksinkertainen ja paljon käytetty esimerkki voiman momentin merkityksestä on keinulauta (kuva 13). Jos keinujat ovat eripainoisia, lauta voidaan tasapainottaa siten, että painavampi henkilö siirtyy lähemmäksi tukipistettä. Tämä

muuttaa vipuvarren pituutta, jolloin keinujen aiheuttamat momentit eli vääntövaikutukset muuttuvat niin, että ne tasapainoittavat toisensa.



Kuva 13:

Suuretta  $Fd$  kutsutaan voiman  $F$  momentiksi pisteen  $O$  suhteen, kun  $d$  on voiman  $F$  vaikutussuoran kohtisuora etäisyys pisteestä  $O$ . Keinulaudan tapauksessa voimat johtuvat henkilöiden massoista, jolloin  $F = mg$ . Kuvasta 14 tulee ilmi, että voiman momentti pisteen  $O$  (tarkemmin paperin tasoon nähden kohtisuoran pisteen  $O$  kautta kulkevan akselin suhteen) on  $Fr \sin \theta$ .



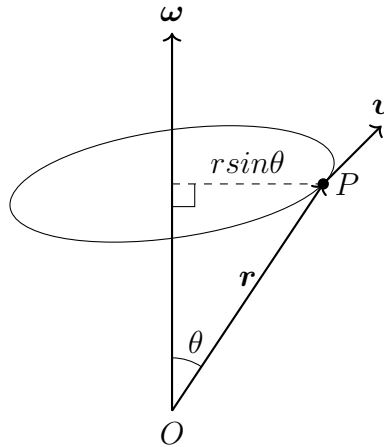
Kuva 14:

Ristitulon  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  suuruus on  $Fr \sin \theta$ , joten momentin suuruus on  $|\mathbf{r} \times \mathbf{F}|$ . Vektori  $\mathbf{r}$  on voiman vaikutuspisteen paikkavektori. Havainnollistetaan seuraavaksi vielä momentin suuntaa mielikuvan avulla. Kuvitellaan oikean käden sormet koukistetuksi voiman momentin aiheuttaman pyörimisliikkeen suuntaan. Tällöin peukalo osoittaa pyörimisakselin suunnan ja kyseistä suuntaa kutsutaankin usein voiman momentin suunnaksi. Tämä suunta on sama kuin ristitulovektorin  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  suunta.

## Kulmanopeus

Pyörivän kappaleen kulmanopeutta kuvataan yleisesti vektorilla, jonka suunta on pyörimisakselin suuntainen. Vastaavasti kuin voiman momenttia tarkasteltaessa voidaan nytkin oikean käden sormet koukistaa pyörimisliikkeen suuntaisesti, jolloin peukalo osoittaa pyörimisakselin suuntaisen kulmanopeusvektorin suuntaan. Kuva 15 mallintaa jäykän kappaleen pyörimistä, missä piste  $P$  on jokin kappaleen piste ja  $\omega$  on kappaleen kulmanopeus. Tässä vektori  $\mathbf{r}$  on pisteen  $P$  paikkavektori pyörimisakselilla sijaitsevaan tarkastelupisteeseen nähden. Kulmanopeuden suunta on

kohtisuorassa sitä tasoa vastaan, jossa piste pyörii. Pyörimistä voikin mallintaa samalla tavalla oikean käden säännön avulla kuin voiman momenttiakin. Tangentiaalinen nopeus  $\mathbf{v}$  on myös vektori, ja sen suuruus saadaan nyt laskemalla ristitulo  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ . Laskukaava perustuu siihen, että vektori  $\mathbf{v}$  on kohtisuorassa  $\mathbf{r}$ :n ja kulmanopeusvektorin määrittämään tasoon nähden, jolloin nopeuden suunta on juuri se, minkä ristitulokin antaa. Lisäksi pisteen  $P$  kiertorata muodostaa ympyrän, jonka säteen pituus on  $r \sin \theta$ , joten nopeuden  $\mathbf{v}$  suuruus on  $(r \sin \theta)\omega$ , kuten ristitulokin määrittelee.



Kuva 15:

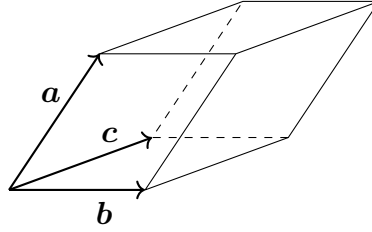
### Muita fysiikan sovelluksia

Varattujen hiukkasten, useimmiten elektronien, liike on yksi keskeisimmistä sähkö- ja magnetismin sisällöistä. Jos varattu hiukkanen, jonka sähköinen varaus on  $q$  liikkuu nopeudella  $\mathbf{v}$  magneettikentässä, jonka suuruuden ja suunnan määrittelee vektori  $\mathbf{B}$ , kohdistaa magneettikenttä hiukkaseen voiman  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Esimerkiksi kuvaputkitelevisioissa elektronisuihkua on ohjattu tähän ilmiöön perustuen.

Radallaan etenevien taivaankappaleiden liikkeet kuuluvat tähtitieteen keskeisiin tutkimusaiheisiin. Aurinkoa nopeudella  $\mathbf{v}$  kiertävän planeetan pyörimismäärä  $\mathbf{h}$  voidaan myös laskea ristitulona. Olkoon planeetan massa  $m$  ja sen paikkavektori aurinkoon nähden  $\mathbf{r}$ . Tällöin  $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ .

### 3.3 Kolmitulot

Vektorianalyysissä kolmitulo tarkoittaa kolmen kolmiulotteisen vektorin tuloa. Useimmiten kyseessä on skalaarikolmitulo ja joskus harvoin vektorikolmitulo. *Skalaarikolmitulolla* tarkoitetaan tuloa  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ . Geometrisesti tulkittuna tulon arvoksi saadaan kyseisten vektoreiden virittämän suuntaissärmiön tilavuus, tai sen vastaluku, jos tulo saa negatiivisen arvon (kuva 16). Tulos on aina skalaari, minkä vuoksi tätä tuloa nimitetään juuri *skalaarikolmituloksi*. Periaatteessa sulkeita ei tarvita, sillä pistetuloa ei voi laskea ensin; tällöin tulisi laskettavaksi skalaarin ja vektorin välinen ristitulo, jollaista ei ole määritelty.



Kuva 16:

Skalaarikolmitulon arvo ei muutu, jos kolmen vektorin paikat vaihtuvat seuraavan kierron mukaisesti:  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ . Toisaalta ristitulon antikommutatiivisuuden vuoksi minkä tahansa kahden vektorin keskinäinen paikanvaihto aiheuttaa kolmitulon etumerkin muutoksen:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}), \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \text{ ja} \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}).\end{aligned}$$

Fysiikassa skalaarikolmituloa tarvitaan, jos halutaan tietää yksittäiseen pisteeseen vaikuttavan voiman momentti jonkun suoran suhteen. Kun voiman  $\mathbf{F}$  momentti pisteen  $O$  suhteen on  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , saadaan voiman momentti suoran  $L$  suhteen skalaarikolmitulona  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ , missä  $\mathbf{n}$  on suoran  $L$  suuntainen yksikkövektori.

**Esimerkki 11 (Skalaaritulo determinanttina).** Todistetaan seuraavaksi, että skalaarikolmitulolle pätee

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

*Ratkaisu.*

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \\ &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot [(B_y C_z - B_z C_y) \mathbf{i} + (B_z C_x - B_x C_z) \mathbf{j} \\ &\quad + (B_x C_y - B_y C_x) \mathbf{k}] \\ &= A_x (B_y C_z - B_z C_y) + A_y (B_z C_x - B_x C_z) + A_z (B_x C_y - B_y C_x) \\ &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

**Esimerkki 12 (Suunnikassärmiön tilavuus).** Laske sen suunnikassärmiön tilavuus, jonka sivuina ovat vektorit  $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  ja  $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ .

*Ratkaisu.* Kappaleen tilavuus saadaan laskemalla sen virittävien vektoreiden skalaarikolmitulon itseisarvo:



$$V = |\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = |-20| = 20.$$

**Esimerkki 13 (Pisteeseen kohdistuvan voiman vääntömomentti akselin suhteen).** Kuinka suuri on voiman  $\mathbf{F} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$  vääntömomentti suoran  $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} + (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})t$  suhteen, kun voima  $\mathbf{F}$  kohdistuu pisteeseen  $(1, 1, 1)$ ?

*Ratkaisu.* Ensin on laskettava voiman vääntömomentti jonkun suoralla sijaitsevan pisteen, esimerkiksi pisteen  $(3, 0, 2)$  suhteen. Tämä saadaan laskemalla ristitulo  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , kun  $\mathbf{r}$  on vektori valitusta suoran pisteestä voiman vaikutuspisteeseen  $(1, 1, 1)$ . Siispä  $\mathbf{r} = (-2, 1, -1)$ . Vääntömomentti on

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

Annetun suoran suuntainen yksikkövektori on  $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$  ja kysytty voiman vääntömomentti suoran suhteen

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) = 1.$$

Vektorikolmitulon  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  arvo on vektori, kuten nimi antaa ymmärtää. Kolmen vektorin vektorikolmitulolle voidaan johtaa seuraava kaava:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (16)$$

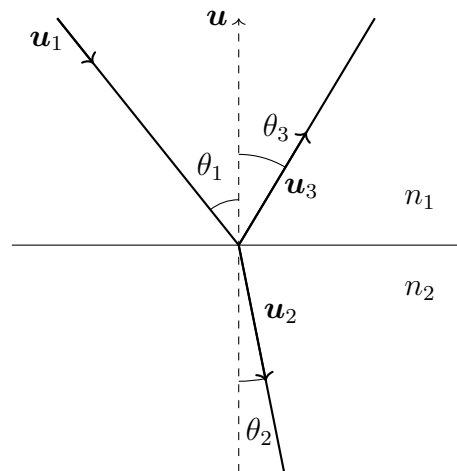
Vektorikolmitulolla ei ole yhtä selkeää geometristä tulkintaa kuin skalaarikolmitulolla. Esimerkkinä fysiikan puolelta tarkastellaan kuvasta 15 tuttua hiukasta  $P$ , joka on kiinni jäykässä pyörivässä kappaleessa, ja oletetaan pisteen massaksi nyt  $m$ . Kyseisen hiukkasen pyörimismäärä  $\mathbf{L}$  pyörimisakselilla sijaitsevan kiintopisteen  $O$  suhteen on  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ . Tässä  $r$  on hiukkasen paikkavektori kiintopisteeseen nähden ja  $\mathbf{v}$  hiukkasen tangentiaalinen nopeus. Koska tangentiaalinen nopeus voidaan ilmaista kulmanopeuden ja paikkavektorin ristitulona, voidaan pyörimismäärän yhtälö muuntaa muotoon  $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ .

### 3.4 Tehtäviä: Tulot

1. Olkoon  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$  ja  $\mathbf{C} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Laske seuraavat tulot:

- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ ,
- $\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ ,
- $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ ,
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ,
- $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ ,
- $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ .

- Kuinka suuren työn voimat  $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  ja  $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  tekevät yhteensä liikuttaessaan kappaletta vektorin  $\mathbf{C} = \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$  mukaisen etäisyyden verran? Vihje: Kannattaa ensin laskea voimavektorit yhteen.
- Voima  $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$  vaikuttaa pisteeseen  $(1, 5, 2)$ . Kuinka suuri on voiman vääntömomentti a) origon suhteen, b)  $y$ -akselin suhteen, c) suoran  $x/2 = y/1 = z/(-2)$  suhteen?
- Voima  $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$  vaikuttaa pisteeseen  $(-5, 2, 1)$ . Kuinka suuri on voiman vääntömomentti suoran  $2x = -4y = -z$  suhteen?
- Kuvassa 17 yksikkövektori  $\mathbf{v}_1$  on satunnaisen pintaan osuvan valonsäteen suuntainen. Yksikkövektori  $\mathbf{v}_2$  on taittuneen säteen suuntainen ja yksikkövektori  $\mathbf{v}_3$  heijastuneen säteen suuntainen. Olkoon  $\mathbf{u}$  rajapinnan normaalin suuntainen yksikkövektori. Aineiden taitekertoimet ovat  $n_1$  ja  $n_2$ . Optiikan lakien mukaan  $\theta_1 = \theta_3$  ja  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ . Kirjoita nämä lait vektorimuotoon käyttäen piste- ja ristituloa.



Kuva 17:

- Laske auki vektorikolmituloa käsittelevässä kappaleessa esiintynyt tulo  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r})$ . Osoita, että jos  $\mathbf{r}$  ja  $\boldsymbol{\omega}$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin  $\mathbf{a} = -\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}$ . Johda tämän avulla perustavan laatuinen mekaniikan tulos, jonka mukaan kiihtyvyytsvektori osoittaa ympyräradan keskipisteeseen ja on suuruudeltaan  $v^2/r$ .
- Määritä ne tason vektorit, joiden pituus on 1 ja jotka ovat kohtisuorassa vektoria  $-\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$  vastaan. (yo pitkä matematiikka S92:2a)
- Laske sen kolmion pinta-ala, jonka kärjet sijaitsevat pisteissä  $(1, 2, 0)$ ,  $(1, 0, 3)$  ja  $(0, 3, 1)$ .
- Määritä yksikkövektori, joka on kohtisuorassa vektoreihin  $\mathbf{i} + \mathbf{j}$  ja  $(\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$  nähden.

## 4 Differentiaalioperaatiot

Olet todennäköisesti nähnyt Newtonin toisen lain  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  kirjoitettuna muodossa  $\mathbf{F} = md^2\mathbf{r}/dt^2$ . Saatat myös tuntea Gaussin lain sähkökentille, jossa esiintyy pintaintegraali vektorin normaalikomponentista. Vektorifunktioiden erilaiset derivaatat ja integraalit ovat tärkeitä lähes jokaisella matematiikkaa soveltavalla alalla. Lukuisat laajat fysiikan aihepiirit, kuten mekaniikka, kvanttimekaniikka, optiikka, hydrodynamiiikka, lämpöoppi ja sähköoppi hyödyntävät vektorianalyysin keskeisiä yhtälöitä ja teoreemoja. Nämä teoreemat käydään läpi luvussa 6. Luvuissa 4 ja 5 kartutetaan luvussa 6 tarvittavaa ymmärrystä vektoreiden differentiaali- ja integraalioperaatioita.

### 4.1 Vektoreiden derivointi

Tässä alaluvussa käsitellään lyhyesti kolmikomponenttisen vektorin derivointia, joka on tarvittava taito kaikkien seuraavien aiheiden kannalta. Alaluvun lopussa luodaan katsaus derivointiin napakoordinaatistossa, sillä napakoordinaatisto on käytännöllinen työkalu useissa fysiikan tehtävissä. On hyvä muistaa, että derivaatta yleisesti kuvastaa muutosnopeutta. Paikan muutos johtuu nopeudesta, joten nopeus saadaan derivoimalla kappaleen paikan määrittävä funktio ajan suhteen ja vastaavasti nopeuden muutos johtuu kiihtyvyydestä, eli kiihtyvyys saadaan derivoimalla nopeuden määrittävä funktio ajan suhteen. Kun funktiolla on monta komponenttia, eli se on vektoriarvoinen, voidaan derivointikin toteuttaa komponenttikohtaisesti.

Vektorin  $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z$  derivaatta  $t$ :n suhteen, kun  $A_x$ ,  $A_y$  ja  $A_z$  ovat  $t$ :n funktioita, määritellään seuraavasti:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i}\frac{dA_x}{dt} + \mathbf{j}\frac{dA_y}{dt} + \mathbf{k}\frac{dA_z}{dt}. \quad (17)$$

Vektorin  $\mathbf{A}$  derivaatta tarkoittaa siis vektoria, jonka komponentit ovat  $\mathbf{A}$ :n komponenttien derivaattoja. Vakiolla kerrotun vektorin sekä kahden vektorin piste- tai ristitulon derivoinnissa pätee pitkälti normaalit tulon derivoimissäännöt. Ristitulossa kuitenkin ei voi vektoreiden järjestystä vaihtaa mielivaltaisesti. Kaavamuodossa kyseiset säännöt ovat

$$\frac{d}{dt}(a\mathbf{A}) = \frac{da}{dt}\mathbf{A} + a\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} \text{ ja} \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}. \quad (20)$$

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa kolmiulotteisessa avaruudessa liikkuvan kappaleen koordinaatit riippuvat ajasta.

**Esimerkki 14 (Paikka, nopeus ja kiihtyvyys).** Merkitään ajanhetkellä liikkuvan kappaleen koordinaatteja  $(x, y, z)$ ;  $x$ ,  $y$  ja  $z$  ovat  $t$ :n funktioita. Kappaleen sijaintia vastaava paikkavektori hetkellä  $t$  on

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z. \quad (21)$$

Kappaleen nopeusvektorin komponentit ajanhetkellä  $t$  ovat  $dx/dt$ ,  $dy/dt$  ja  $dz/dt$ , joten nopeusvektori on

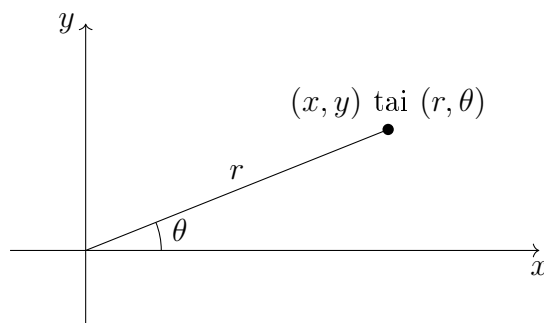
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt}. \quad (22)$$

Vastaavasti kiihtyvyyksvektori saadaan toisten derivaattojen avulla:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \mathbf{k} \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (23)$$

## Napakoordinaateista

Toistaiseksi tässä tutkielmassa on kirjoitettu vektorit karteesisen koordinaatiston mukaisesti käyttäen koordinaatiston akseleiden suuntaisia yksikkövektoreita  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$ . Usein kuitenkin on kätevää käyttää jotakin muuta koordinaatistoa, kuten kaksiu-lotteista napakoordinaatistoa tai kolmiulotteista pallo- tai sylinterikoordinaatistoa. Käsitellään seuraavaksi napakoordinaatistoa, joka on edellämämainituista useimmiten käytetty. Muut tarvittavat koordinaatistomuutokset esitellään esimerkkilaskujen yhteydessä. Kuvassa 18 esitetään, miten pisteen  $(x, y)$  napakoordinaatit  $(r, \theta)$  muodostetaan. Ensimmäinen napakoordinaatti, säde  $r$ , kertoo pisteen etäisyyden keskipisteestä, eli karteesisen koordinaatiston origoa vastaavasta navasta. Toinen koordinaatti, kiertokulma  $\theta$ , on se kulma, jonka pisteen paikkavektori muodostaa napa-akselin eli positiivisen  $x$ -akselin kanssa. Napakoordinaatisto onkin käytännöllisin sellaisissa laskuissa, joissa kahden pisteen sijainti toisiinsa nähden on helpoiten määritettävissä etäisyyden ja kulman avulla.



Kuva 18:

Napakoordinaatistossa yksikkövektorit ovat  $\mathbf{e}_r$  ja  $\mathbf{e}_\theta$ , mutta käytännön laskuissa näitä näkee harvoin. Karteesisessä koordinaatistossa yksikkövektoreiden suuruus ja suunta ovat vakioita, ja napakoordinaatistossa suuruus on vakio, mutta suunta vaihtelee vektorikohtaisesti. Tässä kohtaa tutkielmaa esitellään karteesisten koordinaattien muokkaaminen napakoordinaateiksi ja päinvastoin, sekä napakoordinaattien derivointi. Seuraavien lukujen aikana käydään läpi tilanteita, joissa napakoordinaatiston käyttö on perusteltua ja samalla harjoitellaan muita sen käyttöön liittyviä taitoja.

Kuvasta 18 nähdään trigonometrian perusteella, että napakoordinaatit voidaan muuttaa karteesisiksi koordinaateiksi seuraavasti:

$$x = r \cos \theta \text{ ja } y = r \sin \theta. \quad (24)$$

Vastaavasti karteesiset koordinaatit voidaan muokata Pythagoraan lauseen ja trigonometrian perusteella napakoordinaateiksi seuraavasti:

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ ja } \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (25)$$

Yksikkövektoreille pätee vastaavasti

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta \text{ ja } \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta. \quad (26)$$

Napakoordinaatiston yksikkövektorit voidaan derivoida  $t$ :n suhteen seuraavasti:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = -\mathbf{i}(\sin \theta) \frac{d\theta}{dt} + \mathbf{j}(\cos \theta) \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad (27)$$

ja

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\mathbf{i}(\cos \theta) \frac{d\theta}{dt} - \mathbf{j}(\sin \theta) \frac{d\theta}{dt} = -\mathbf{e}_r \frac{d\theta}{dt}. \quad (28)$$

Kaavojen 27 ja 28 avulla voidaan nyt derivoida vektoriarvoisia funktioita, jotka on kirjoitettu napakoordinaatteina.

**Esimerkki 15.** Olkoon  $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta$ , missä  $A_r$  ja  $A_\theta$  ovat  $t$ :n funktioita. Laske nyt  $d\mathbf{A}/dt$ .

*Ratkaisu.* Funktion  $\mathbf{A}$  lauseke sisältää kahden tulon summan, joten

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{e}_r \frac{dA_r}{dt} + A_r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \mathbf{e}_\theta \frac{dA_\theta}{dt} + A_\theta \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}.$$

Kaavojen (27) ja (28) perusteella tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{e}_r \frac{dA_r}{dt} + \mathbf{e}_\theta A_r \frac{d\theta}{dt} + \mathbf{e}_\theta \frac{dA_\theta}{dt} - \mathbf{e}_r A_\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Korkeamman kertaluvun derivaatat saadaan laskemalla derivoimalla yllä olevaa lauseketta uudelleen kaavojen (27) ja (28) mukaan.

## 4.2 Vektorikentistä

Useat fysikaaliset suureet saavat eri arvoja avaruuden eri pisteissä. Esimerkiksi huoneessa lämpötila saattaa olla korkea patterin läheisyydessä ja matala avonaisen ikkunan äärellä. Pistemäistä varausta ympäröivä sähkökenttä on voimakkaimmillaan varauksen lähellä ja heikkenee, kun etäisyys varaukseen kasvaa. Vastaavasti gravitaatiovoima, jolla maapallo vetää satelliitteja puoleensa, riippuu satelliitin ja maapallon välisestä etäisyydestä. Joen virtausnopeus on suuri kapeissa kanavissa sekä putouksissa ja pieni leveissä matalikoissa. Kaikissa näissä esimerkeissä voidaan määrittää avaruuden osa, jossa tutkimamme suure saa arvoja. Termiä kenttä käytetään

kuvaamaan sekä kyseistä avaruuden aluetta että fysikaalisen suureen arvoja kyseisessä alueessa (esim. gravitaatiokenttä, sähkökenttä). Jos kyseessä on skalaarisuure, esimerkiksi lämpötila, puhutaan *skalaarikentästä*. Jos kyseessä on voiman, nopeuden tai sähkökentän kaltainen vektorisuure, puhutaan *vektorikentästä*. Fysiikan alan pulmat rajoittuvat varsin usein tiettyyn avaruuden alueeseen, ja tämä tulee osata huomioida laskuissa.

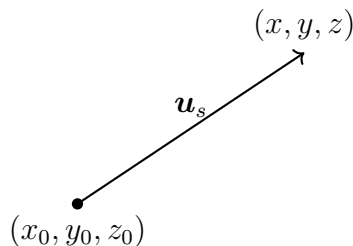
Yksinkertainen esimerkki skalaarikentästä on potentiaalienergia maanpinnan lähellä: sen arvo on  $V = mgz$ , kun ollaan korkeudella  $z$  sovitun nollatason yläpuolella. Tämä taso voidaan ajatella  $xy$ -tasoksi. Jos maastossa olevaan kukkulaan merkittäisiin tiettyjä korkeuksia  $z$  vastaavat ns. korkeuskäyrät, saataisiin esiin potentiaalienergiakentän tasa-arvokäyriä. Horisontaaliset tasot, jotka leikkaisivat kukkulan näitä käyriä pitkin, ovat nimeltään potentiaalienergiakentän tasa-arvopintoja. Tutkitaan toisena esimerkkinä pistevarauksen  $q$  aiheuttaman sähkökentän tasa-arvopintoja. Etäisyydellä  $r$  varauksesta sähköinen potentiaali  $V = 9 \cdot 10^9 q/r$ . Potentiaali saa saman arvon kaikkialla, missä  $r$  saa saman arvon; tämän sähkökentän tasa-arvopinnat ovat sellaisten pallojen pintoja, joiden keskipisteessä varaus sijaitsee. Vastaavasti luentosaliin voitaisiin kuvitella piirrettävien pintoja, todennäköisesti hyvin epäsäännöllisiä, joilla lämpötila olisi vakio. Näitä pintoja kutsutaan *isotermeiksi*, kun vakio-suurena on lämpötila.

### 4.3 Suunnattu derivaatta ja gradientti

Lähestytään seuraavaksi suunnattua derivaattaa ja gradienttia ajatusharjoituksen avulla. Oletetaan lämpötila  $T(x, y, z)$  tunnetuksi jokaisessa huoneen pisteessä. Tarkastellaan nyt, kuinka nopeasti lämpötila muuttuu, kun etäännyimme eri suuntiin alkupisteestä. Luultavasti lämpötilan muutosnopeus ( $^{\circ}C/cm$ ) on erisuuruinen ja -suuntainen eri suuntiin liikuttaessa. Lämpötilan muutos edetyn matkan suhteen riippuu siis tarkastelusuunnasta; sitä kutsutaankin suunnatuksi derivaataksi. Esimerkin tilanteessa tätä merkitään  $dT/ds$ , joka symboloi osamäärän  $\Delta T/\Delta s$  raja-arvoa, kun kuljettua matkaa symboloiva  $\Delta s$  lähestyy arvoa nolla. Suunta, jossa  $dT/ds$  saa suurimman arvonsa on suunta, josta lämpö fysikaalisesti virtaa. Lämpö siis virtaa lämpimästä viileään päin, päinvastaiseen suuntaan lämmön kasvun maksimiin nähden.

Tehdään vielä toinen ajatusharjoitus ennen konkreettista suunnatun derivaatan laskemista. Oletetaan, että henkilö seisoo kukkulan huipulla ja haluaa tietää, mihin suuntaan alamäki on jyrkin hänen lähtöpisteestään katsottuna. Tämä on suunta, johon henkilö liukastuttuaan lähtisi liukumaan ja jota usein kutsutaan "suorimmaksi reitiksi" alas. Tarkennetaan tätä hieman epämääräistä määritelmää seuraavaksi. Kuvitellaan, että siirrymme lyhyen matkan  $\Delta s$  kukkulaa pitkin; pystysuunnassa siirtymä  $\Delta z$  saa positiivisen arvon ylämäessä, negatiivisen arvon alamäessä ja arvon nolla, mikäli kiersimme kukkulaa vakiokorkeudella. Nyt osamäärän  $\Delta z/\Delta s$  ja sen raja-arvon  $dz/ds$  suuruudet riippuvat suunnasta eli  $dz/ds$  on suunnattu derivaatta. Rinne on jyrkin siellä, missä  $dz/ds$  on itseisarvoltaan suurin. Huomaa, että koska massalla  $m$  on potentiaalienergia  $V = mgz$ , saavutetaan osamäärän  $dz/ds$  maksimi samassa pisteessä kuin osamäärän  $dV/ds$  maksimi, kun kukkulan tasa-arvokäyrillä  $V(x, y) = mgz(x, y) = \text{vakio}$ .

Perehdytään seuraavaksi suunnatun derivaatan määrittämiseen. Tarkastellaan



Kuva 19:

skalaarikenttää  $\Phi(x, y, z)$  ja sen muutosnopeutta tiettyyn suuntaan tehdyn siirtymän suhteen  $d\Phi/ds$  pisteessä  $(x_0, y_0, z_0)$ . Osoittakoon nyt yksikkövektori  $\mathbf{u} = \mathbf{i}a + \mathbf{j}b + \mathbf{k}c$  siirtymän suunnan. Kun kuvan 19 mukaisesti siirrytään pisteestä  $(x_0, y_0, z_0)$  matkan  $s$  verran vektorin  $\mathbf{u}$  suuntaan pisteeseen  $(x, y, z)$ , saadaan yhtälö

$$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = \mathbf{u}s = (\mathbf{i}a + \mathbf{j}b + \mathbf{k}c)s,$$

jonka perusteella voidaan kirjoittaa

$$\begin{cases} x = x_0 + as, \\ y = y_0 + bs, \\ z = z_0 + cs. \end{cases} \quad (29)$$

Tämä yhtälöryhmä esittää parametrimuodossa suoran, joka kulkee pisteen  $(x_0, y_0, z_0)$  läpi vektorin  $\mathbf{u}$  suuntaisesti. Nyt muuttujana on  $s$ , kun tyypillisesti parametriesityksessä se on  $t$ . Kyseisen suoran pisteiden koordinaatit  $x$ ,  $y$  ja  $z$  riippuvat nyt kaikki vain yhdestä muuttujasta  $s$ , jolloin myös funktio  $\Phi$  on yhden muuttujan  $s$  funktio. Yhtälöryhmän (29) määrittämällä suoralla funktion  $\Phi$  arvot riippuvat vain etäisyydestä pisteeseen  $(x_0, y_0, z_0)$  nähden, jolloin myös  $d\Phi/ds$  voidaan määrittää seuraavasti:

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} a + \frac{\partial\Phi}{\partial y} b + \frac{\partial\Phi}{\partial z} c. \quad (30)$$

Tämä on yksikkövektorin  $\mathbf{u}$  pistetulo vektorin  $\mathbf{i}(\partial\Phi)/(\partial x) + \mathbf{j}(\partial\Phi)/(\partial y) + \mathbf{k}(\partial\Phi)/(\partial z)$  kanssa, jota kutsutaan funktion  $\Phi$  *gradientiksi*:

$$\nabla\Phi = \text{grad } \Phi = \mathbf{i} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (31)$$

Funktion gradientin ja yksikkövektorin  $\mathbf{u}$  pistetuloa kutsutaan funktion suunnatuksi derivaataksi vektorin osoittamaan  $\mathbf{u}$  suuntaan:

$$\frac{d\Phi}{ds} = \nabla\Phi \cdot \mathbf{u}. \quad (32)$$

Suunnatun derivaatan arvo tietyssä pisteessä ilmoittaa funktion hetkellisen muutosnopeuden tietyn vektorin määrittämään suuntaan liikuttaessa. On tärkeää huomata, että suunnatun derivaatan laskennassa käytettävää suuntaa ei yleensä anneta suoraan ns yksikkösuuntana, vaan yksikkövektori  $\mathbf{u}$  saadaan jakamalla annettu suuntavektori pituudellaan. Napakoordinaatistossa gradientille on johdettavissa kaava

$$\nabla\Phi = \mathbf{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial y}. \quad (33)$$

**Esimerkki 16.** Laske funktion  $\Phi(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$  hetkellinen muutosnopeus, kun pisteestä  $P = (1, 1, 0)$  lähdetään kulkemaan vektorin  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$  suuntaan.

*Ratkaisu.* Kysytty muutosnopeus saadaan laskemalla suunnattu derivaatta annetussa pisteessä. Funktion gradientti on

$$\nabla\Phi(x, y, z) = (3x^2 - y^2, -2xy, -1).$$

Pisteessä  $P$  gradientti saa arvon  $(2, -2, -1)$ . Suunnattu derivaatta on laskettava yksikkövektorin

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

suuntaan. Suunnattu derivaatta saadaan pistetulona

$$\nabla\Phi(P) \cdot \mathbf{u} = (2, -2, 1) \cdot \left( \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k} \right) = \frac{4}{7}.$$

Lähdettäessä vektorin  $\mathbf{A}$  suuntaisesti pisteestä  $P$  kasvaa funktio hetkellisesti  $\frac{4}{7}$  verran pituusyksikköä kohden.

**Esimerkki 17.** Olkoon lämpötila  $T$  pisteessä  $(x, y, z)$   $T = x^2 - y^2 + xyz + 273$ . Mihin suuntaan lämpötila nousee nopeiten pisteessä  $P = (-1, 2, 3)$ ?

*Ratkaisu.*

$$\nabla T(x, y, z) = (2x + yz)\mathbf{i} + (-2y + xz)\mathbf{j} + xy\mathbf{k}.$$

Pisteessä  $P$

$$\nabla T(-1, 2, 3) = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Tämän vektorin suuntaan lämpötilan nousu on suurin. Lämpötilan nousu saa pisteessä  $P$  arvon

$$\frac{dT}{ds} = |\nabla T| = \sqrt{4^2 + (-7)^2 + (-2)^2} = \sqrt{69}.$$

Jos oltaisiin kysytty, mihin suuntaan lämpö virtaa, eli mihin suuntaan lämpötila laskee nopeiten, olisi laskettu gradientin vastaluku  $-\nabla T$  ja tässä suunnassa olisi nyt  $-dT/ds = -\sqrt{69}$ .

## 4.4 Roottori ja divergenssi

Tässä alaluvussa käsitellään melko lyhyesti kaksi muuta nabla-operaattorin sisältävää määritelmää: roottori ja divergenssi. Näillä on lukuisia tärkeitä sovelluksia fyysikassa. Sovelluksiin palataan yksityiskohtaisemmin tutkielman viimeisessä luvussa. Roottori ja divergenssi muodostavat suuren osan keskeisestä sisällöstä viimeisen luvun teoreemoissa. Tässä luvussa keskitytään matemaattiseen sisältöön.

Nabla-operaattori



$$\nabla = \mathbf{i} \frac{d}{dx} + \mathbf{j} \frac{d}{dy} + \mathbf{k} \frac{d}{dz} \quad (34)$$

voidaan ajatella derivaatan yleistykseenä; nabla-operaattori vaatii samaan tapaan kuin  $d/dx$  peräänsä derivoitavan funktion. Nablaa käytetäänkin saman tyyppisesti kuin termiä  $d/dx$  indikoimaan tiettyä operaatiota. Nablasta voimme puhua myös *vektorioperaattorina*.

Gradientin yhteydessä laskimme, mitä tuottaa tulokseksi  $\nabla\phi$ , kun  $\phi$  on skalaarifunktio. Tässä luvussa päästämme nablan operoimaan vektoriarvoisia funktioita. Tässä luvussa  $\mathbf{V}$  on kolmesta komponentista koostuva vektorifunktio, eli sen komponentit  $V_x$ ,  $V_y$  ja  $V_z$  ovat  $x$ :n,  $y$ :n ja  $z$ :n funktiota:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{i}V_x(x, y, z) + \mathbf{j}V_y(x, y, z) + \mathbf{k}V_z(x, y, z).$$

Kaksi lauseketta, joissa  $\nabla$  matematiikassa esiintyy, ovat divergenssi ja roottori. Esitellään ne seuraavaksi, ja niihin palataan uudelleen luvussa 6, joiden teoreemoissa niillä on keskeinen asema. Seuraavissa kaavoissa vektoriarvoisen funktion  $V(x, y, z)$  komponentteja merkitään ala-indeksein  $V_x$ ,  $V_y$  ja  $V_z$ , jolloin

$$V(x, y, z) = \mathbf{i}V_x(x, y, z) + \mathbf{j}V_y(x, y, z) + \mathbf{k}V_z(x, y, z).$$

Huomaa, että tässä ala-indeksit eivät viittaa funktion osittaisderivaattoihin, kuten joskus on tapana kirjoittaa. Fysikaalisessa mielessä  $V$  edustaa vektorikenttää, joka voisi kuvastaa vaikkapa sähkökenttää pistevarauksen ympärillä. Tällainen vektorikenttä on olemassa jokaisessa pisteessä, mutta sen suuruus ja suunta vaihtelevat. Tällaiselle vektorikentälle voidaan määritellä divergenssi (englanniksi *divergence*) pistetulon avulla seuraavasti:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (35)$$

Vektorikentän roottori (englanniksi *curl*) määritellään puolestaan ristitulon avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \text{rot } \mathbf{V} \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (36)$$

Divergenssi kuvaa vektorikentän lähteisyyttä ja roottori kuvaa vektorikentän pyörteisyyttä. Tulee muistaa, että kussakin vektorikentän pisteessä divergenssi saa skalaariarvoja ja roottori vektoriarvoja. Lähteisyyden voidaan tulkita kuvaavan pisteestä lähtevän tai pisteeseen päättyvän vektorivuon tiheyttä, ja pisteiden voidaan sanoa toimivan vektorikentän lähteenä tai nieluna. Vektorikentän roottori puolestaan voidaan tulkita kuvaavan vektorikentän pyörteisyyden aiheuttajien tiheyttä. Fysiikassa kutsutaankin tästä syystä vektorikentän roottoria pyörrekentäksi. Lisää

fysikaalisia tulkintoja ja sovelluksia näille kahdelle vektorikenttiin kohdistettavalle differentiaalioperaattorille esitellään luvussa 6.

**Esimerkki 18.** Laske vektorikentälle  $V(x, y, z) = xy\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$  divergenssi ja roottori.

*Ratkaisu.*

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (xy\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\mathbf{j} + yz\mathbf{k}) = y + 2y + y = 4y.$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y^2 - z^2 & yz \end{vmatrix} = (z + 2z)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (0 - x)\mathbf{k} = 3z\mathbf{i} - x\mathbf{k}.$$

## 4.5 Tehtäviä: Differentiaalioperaatiot

- Mihin suuntaan funktion  $\phi = x^2 - y^2 + 2xy$  arvot pienenevät nopeiten pisteestä  $(1, 1)$  tarkasteltuna?
- Mikä on funktion  $z = e^x \cos y$  suunnattu derivaatta vektorin  $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$  suunnassa pisteessä  $(1, 1, 2)$ ?
- Olkoon  $\phi = x^2 - y^2$  pinnan yhtälö. Jos  $\phi$  on sähköinen potentiaali, niin käyrät, joilla  $\phi = \text{vakio}$ , ovat ns ekvipotentiaaleja. Sähkökenttä  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . Jos taas  $\phi$  on lämpötila, niin vastaavat käyrät ovat isotermejä ja  $\nabla\phi$  on lämpötilan gradientti; lämpö virtaa suuntaan  $-\nabla\phi$ .
  - Piirrä pinnan muodon hahmottamiseksi tasoon käyrät, joissa  $\phi = 4$ ,  $\phi = 1$ ,  $\phi = 0$ ,  $\phi = -1$  ja  $\phi = -4$ .
  - Mikä on sähkökentän suuruus ja suunta pisteessä  $(2, 1)$ ?
  - Mihin suuntaan siirryttäessä lämpötila laskee nopeiten pisteestä  $(-3, 2)$  tarkasteltuna?
  - Kuinka nopeasti pisteestä  $(1, 2)$  tarkasteltuna lämpötila muuttuu etäisyyden muuttuessa, kun lähdetään kulkemaan suuntaan  $3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ?
- Laske roottori ja divergenssi seuraaville vektorikentille
  - $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,
  - $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ,
  - $\mathbf{V} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ ,
  - $\mathbf{V} = x^2y\mathbf{i} + y^2x\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ ,
  - $\mathbf{V} = x(\sin y)\mathbf{i} + (\cos y)\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ .

## 5 Integraalit

Tässä luvussa tarkasteltavat integraalit ovat viimeinen aihe, joka tulee opetella ennen viimeiseen lukuun siirtymistä. Lähtöoletus on, että integrointi on lukijalla hallussa lukion matematiikan pitkän oppimäärän mukaisesti. Viivaintegraali on erityisen tärkeä, joten se käsitellään ensimmäisenä. Tämän jälkeen käsitellään pinta- ja tilavuusintegraaleja. Kaikki nämä integraalit esiintyvät luvussa 6 käsiteltävissä teoreemoissa.

Kun seuraavissa luvuissa käsitellään pintoja, edellytetään, että ne ovat sileitä tai että niillä on äärellinen määrä kärkiä tai särmiä. Tällaisia pintoja ovat esimerkiksi monitahokkaan pinta, pallopinta ja valtaosa käytännön sovelluksissa esille tulevista pinnoista. Käyristä puolestaan edellytetään, että ne ovat sileitä tai että niillä on äärellinen määrä kärkiä. Tällaisia käyriä ovat esimerkiksi murtoviiva, ympyrän kehä ja valtaosa sovelluksissa esiintyvistä käyristä. Esityksen mutkistamisen välttämiseksi ei näitä edellytyksiä enää erikseen mainita tutkielmassa.

### 5.1 Viivaintegraali

Kappaleessa 3.1.2 totesimme, että voima  $\mathbf{F}$  tekee työn  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , siirtäessään kappaletta differentiaalisen pienen matkan  $d\mathbf{r}$ . Oletetaan seuraavaksi, että tiettyä polkua pitkin etenevään kappaleeseen vaikuttava voima  $\mathbf{F}$  ei ole vakio, vaan muuttuu polun varrella. Tällainen tilanne voi tulla vastaan vaikkapa, kun liikkuvaan varattuun hiukkaseen kohdistuu sähkökentän aiheuttama voima. Nyt  $\mathbf{F}$  siis riippuu paikkakoordinaateista  $x$ ,  $y$  ja  $z$ . Koska hiukkanen liikkuu määrättyä polkua pitkin, eivät paikkakoordinaatit voi saada mitä tahansa arvoa. Jos polku sijaitsee kolmiulotteisessa avaruudessa, tarvitaan sen määrittämiseksi kaksi yhtälöä, sillä tällaiset polut ovat kahden pinnan leikkauksia. Jäljelle jää vain yksi aidosti riippumaton muuttuja. Sekä voima  $\mathbf{F}$  että  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$  voidaan kirjoittaa yhden muuttujan funktioina.

Voiman tekemä kokonaistyö saadaan laskettua integroimalla  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  yli kyseessä olevan polun, ja tämä integraali voidaan nyt kirjoittaa yhden muuttujan integraalina. Tällaista integraalia kutsutaan *polkuintegraaliksi* tai *viivaintegraaliksi*. Viivaintegraali on siis integraali pitkin suoraa tai käyrää, eli kyseessä on yhden muuttujan integraali, toisin kuin esimerkiksi integroitaessa yli pinnan tai tilavuuden. Tasossa käyrien yhtälöt annetaan yleensä muodossa  $y = f(x)$  ja kolmessa ulottuvuudessa polun yhtälö voidaan antaa joko niin, että  $y$  ja  $z$  ovat  $x$ :n funktioita, tai kaikki kolme koordinaattia jonkun muun muuttujan, vaikkapa  $t$ :n funktiota. Mikäli polku, jonka yli viivaintegraali lasketaan, on suljettu, eli sen alku- ja loppupiste ovat keskenään samat, voidaan tavallisen integraalimerkin sijaan käyttää merkkiä  $\oint$ .

**Esimerkki 19.** Selvitä voiman  $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$  tekemä työ, kun kuljetaan matka pisteestä  $(0, 0)$  pisteeseen  $(2, 1)$

- suorinta reittiä pitkin,
- paraabeliä  $y = 1/4x^2$  pitkin,
- pisteen  $(0, 1)$  kautta,

d) käyrää  $x = 2t^3$ ,  $y = t^2$  pitkin.

*Ratkaisu.* Paikkavektori  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  sijaitsee  $(x, y)$ -tasossa, joten

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy \text{ ja } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = xy dx - y^2 dy.$$

Haluamme nyt laskea integraalin

$$W = \int (xy dx - y^2 dy).$$

a) Integroitava funktio eli integrandi on ensin ilmaistava vain yhden muuttujan avulla. Suorin reitti on pitkin suoraa  $y = \frac{1}{2}x$ , jolloin  $dy = \frac{1}{2} dx$ . Muuttuja  $x$  saa tällä polulla arvoja välillä  $[0, 2]$ . Sijoittamalla nämä termit ja rajat laskettavaan integraaliin, saamme

$$W_1 = \int_0^2 \left( x \cdot \frac{1}{2}x dx - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \cdot \frac{1}{2} dx \right) = \int_0^2 \frac{3}{8}x^2 dx = \int_0^2 \frac{x^3}{8} = 1.$$

Olisi ollut mahdollista käyttää myös muuttujaa  $y$  ainoana muuttujana laskussa. Tällöin polku olisi annettu muodossa  $x = 2y$ , jolloin  $dx = 2 dy$  ja integrointi olisi tapahtunut rajojen 0 ja 1 välillä. Laskutavan vaihtaminen ei muuta vastauksen arvoa.

b) Tällä polulla  $y = \frac{1}{4}x^2$  ja  $dy = \frac{1}{2}x dx$ . Täten saamme integraalin

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_0^2 \left( x \cdot \frac{1}{4}x^2 dx - \frac{1}{16}x^4 \cdot \frac{1}{2}x dx \right) = \int_0^2 \left( \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{32}x^5 \right) dx \\ &= \int_0^2 \left( \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{192} \right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

c) Murtoviivan tapauksessa on edettävä polkua pätkä kerrallaan. Integraali lasketaan ensin pisteestä  $(0, 0)$  pisteeseen  $(0, 1)$  ja tämän jälkeen pisteestä  $(0, 1)$  pisteeseen  $(2, 1)$ . Kysytty integraali on näiden kahden osan summa. Ensimmäisellä polun osalla  $x = 0$  ja  $dx = 0$ , joten on valittava integrointi  $y$ :n suhteen. Tämän pätkän osalta integraali on

$$\int_0^1 (0 \cdot y \cdot 0 - y^2 dy) = \int_0^1 \left( -\frac{y^3}{3} \right) = -\frac{1}{3}.$$

Jälkimmäisellä polun osalla taas  $y = 1$  ja  $dy = 0$ , ja käytetään integroinnissa muuttujaa  $x$ :

$$\int_0^2 (x \cdot 1 dx - 1 \cdot 0) = \int_0^2 \frac{x^2}{2} = 2.$$

Kysytty kokonaistyö on edellisten pätkien aikana tehtyjen töiden summa eli

$$W_3 = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}.$$

- d) Tämä polku on annettu parametrimuodossa, jota on mahdollista hyödyntää integroitaessa. Määritelmän mukaan  $x = 2t^3$  ja  $y = t^2$ , joten  $dx = 6t^2 dt$  ja  $dy = 2t dt$ . Origossa  $t = 0$  ja pisteessä  $(2, 1)$   $t = 1$ . Seuraavaksi tehdään sijoitukset integrandiin ja asetetaan alarajaksi arvo 0 ja ylärajaksi arvo 1. Näin saamme integraaliksi

$$W_4 = \int_0^1 (2t^3 \cdot t^2 \cdot 6t^2 dt - t^4 \cdot 2t dt) = \int_0^1 (12t^7 - 2t^5) dt = \frac{12}{8} - \frac{2}{6} = \frac{7}{6}.$$

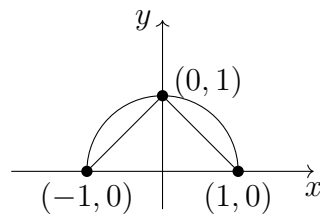
**Esimerkki 20.** Määritä integraalin

$$I = \int \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

arvo, kun alkupisteenä on  $(-1, 0)$  ja loppupisteenä  $(1, 0)$

- kulkien origokeskeisen puoliympyrän kaarta pitkin vastapäivään,
- kulkien ensin suoraan pisteeseen  $(0, 1)$  ja sieltä suoraan loppupisteeseen.

*Ratkaisu.* Hahmotellaan polut koordinaatistoon (kuva 20).



Kuva 20:

- On helpointa siirtyä napakoordinaatteihin, kun liikutaan ympyrän kaarta pitkin; säde  $r = 1$  koko ympyrän kaarella ja kulma  $\theta$  on ainoa muuttuja. Lähtöpisteessä kulman arvo on  $\pi$  ja loppupisteessä 0. Muunnos karteesisesta koordinaatistosta napakoordinaatteihin tapahtuu seuraavien yhtälöiden mukaan:

$$x = \cos \theta \text{ ja } dx = -\sin \theta d\theta,$$

$$y = \sin \theta \text{ ja } dy = \cos \theta d\theta.$$

Lisäksi ympyrän yhtälön mukaan  $x^2 + y^2 = 1$ , joten

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{\cos^2 \theta d\theta - \sin \theta (-\sin \theta) d\theta}{1} = d\theta.$$

Näin kysytyyn integraalin arvo on

$$I_1 = \int_{\pi}^0 d\theta = -\pi.$$

- b) Nyt integraali suoritetaan kahdessa palassa, jotka summataan lopuksi yhteen. Alkupuoli kuljetaan pitkin suoraa  $y = x + 1$ . Tällöin  $dx = dy$  ja ingrinti kyseisen polun osalta tapahtuu seuraavasti:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{x dx - (x + 1) dx}{x^2 + (x + 1)^2} &= \int_{-1}^0 \frac{-dx}{2x^2 + 2x + 1} \\ &= \int_{-1}^0 \frac{-2 dx}{(2x + 1)^2 + 1} \\ &= \int_{-1}^0 -\arctan(2x + 1) \\ &= -\arctan 1 + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Loppupuoli matkasta kuljetaan pitkin suoraa  $y = 1 - x$ . Tällöin  $dy = -dx$  ja integraalin jälkipuoli lasketaan seuraavasti:

$$\int_0^1 \frac{x dx + (1 - x) dx}{x^2 + (1 - x)^2} = \int_0^1 \frac{-2 dx}{(2x - 1)^2 + 1} = \int_0^1 -\arctan(2x - 1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Laskemalla yhteen polun alku- ja loppupuolen yli lasketut integraalit saadaan kysytty integraalin arvo  $I_2 = -\pi$ .

## Konservatiiviset kentät

Yllä käsitellyissä kahdessa esimerkissä huomasimme, että joskus integraali saa eri arvoja eri integrointipolkuja pitkin, joskus taas saman arvon. Nämä kaksi tilannetta ovat keskenään oleellisesti erilaisia, jos tulkitsemme integraalin fysikaalisena työnä, jonka voima tekee siirtäessään kappaletta pitkin integrointipolkua. Kun kitkaa on mukana, riippuu tehdyn työn määrä yleensä polusta. Edellä olevista esimerkeistä ensimmäisessä integraalin suuruus riippui polusta. Voimakenttää, jolle  $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  riippuu päätepisteiden lisäksi polusta näiden välillä, kutsutaan *epäkonservatiiviseksi*. Fysikaalisessa mielessä tämä tarkoittaa sitä, että polun varrella energiaa kuluu vaikkapa kitkavoimaa vastaan työskentelyyn. Jotkut kentät taas ovat *konservatiivisia*; niissä integraali  $\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$  saa valitusta polusta riippumatta aina saman arvon, kun kuljetaan tietystä aloituspisteestä tiettyyn loppupisteeseen. Gravitaatiokenttä on hyvä esimerkki konservatiivisesta kentästä: kappaleen nostaminen suoraan halutulle korkeudelle  $h$  vaatii työmäärän  $W = mgh$  riippumatta reitin suorudesta tai pituudesta, kunhan reitit ovat kitkattomia.

Jos kenttä on konservatiivinen, voidaan integrointipolku valita mielen mukaan mahdollisimman helposti, ja jo tästä syystä on hyödyllistä tunnistaa, onko kenttä konservatiivinen. Eräs helppo tapa tämän määrittämiseksi on tutkia kyseisen vektorikentän roottoria. On todistettu, että  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$  on välttämätön ja riittävä ehto kentän konservatiivisuudelle. Jos siis kentän roottori saa nollasta poikkeavan arvon, on kenttä epäkonservatiivinen ja päinvastoin. Näistä vektorikentistä puhutaan pyörteettöminä kenttinä. Kun pyörteetön vektorikenttä kuvaa jotakin voimaa, kutsutaan kyseistä voimaa myös konservatiiviseksi. Kitkavoimat ja ilmanvastus ovat esimerkkejä ei-konservatiivisista voimista, ja niiden tehdessä työtä ei systeemin mekaaninen

energia säily vaan kuluu. Konservatiivisia kenttiä ovat esimerkiksi painovoimakenttä, sähkökentät ja tietyt magneettiset kentät.

Klassisessa mekaniikassa  $W$  symboloi työtä, jonka voimakenttä  $\mathbf{F}$  on tehnyt, jos kenttä on konservatiivinen eli jos  $\mathbf{F} = \nabla W$ . Esimerkkinä toimii vaikkapa massa  $m$ , joka voi pudota tai jota voidaan nostaa gravitaatiokentässä etäisyyden  $z$  verran. Kun kappale tippuu, tekee gravitaatiovoima työn, jonka suuruus on  $mgh$ . Jos taas nostamme kappaletta ylöspäin, merkitään gravitaatiovoiman tekemäksi työksi  $-mgh$ , koska liike on ollut päinvastaiseen suuntaan kuin kappaleen pudotessa. Noustuaan korkeudelle  $z$  kappale on saanut potentiaalienergiaa määrän  $\Phi = +mgh$ . Toisin sanoen  $W = -\Phi$  ja  $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$ . Funktiota  $\Phi$  kutsutaan myös voiman  $\mathbf{F}$  skalaaripotentialiksi. Potentiaalienergian nolataso voidaan kuitenkin valita mielivaltaisesti, joten funktioon voi lisätä vakion ilman, että voimakenttä  $\mathbf{F}$  muuttuu. Yleisellä tasolla kaikilla vektorikentillä  $\mathbf{V}$  on skalaaripotentiali  $\Phi$ , jolle  $\mathbf{V} = -\nabla\Phi$ , jos  $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ . Tämä on skalaaripotentialin määritelmä mekaniikassa ja sähköopissa.

**Esimerkki 21.** Osoita, että voima  $\mathbf{F} = (2xy - z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - (3xz^2 + 1)\mathbf{k}$  on konservatiivinen.

*Ratkaisu.* Lasketaan annetun voimavektorikentän roottori.

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy - z^3 & x^2 & -3xz^2 - 1 \end{vmatrix} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{37}$$

joten voima  $\mathbf{F}$  on konservatiivinen.

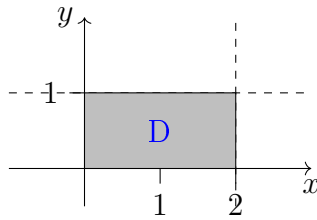
## 5.2 Pintaintegraali eli vuointegraali

Sanalla pintaintegraali voidaan tarkoittaa kahta eri asiaa: kaksinkertaista integraalia eli kaksoisintegraalia tai vuointegraalia eli vuopintaintegraalia. Kaksinkertainen integraali on jo lukiosta tutun yksinkertaisen integraalin laajennus, jossa integroidaan yli jonkin  $xy$ -tason osan yli. Kaksinkertaista integraalia käytetään ennenkaikkea sen tilavuuden määrittämiseen, joka jää pinnan  $f(x, y)$  ja  $xy$ -tasoon sijoittuvan pohjan väliin. Kyseistä  $xy$ -tason aluetta, jonka yli funktio  $f(x, y)$  integroidaan merkitään usein kirjaimella  $D$  tai  $R$ . Kaksinkertainen integraali merkitään kahtena peräkkäisenä integraalimerkkinä  $\iint$  ja kirjoitetaan yleisesti muodossa

$$\iint f(x, y) dA = \iint f(x, y) dx dy, \tag{38}$$

missä funktio  $f$  on integroitava funktio ja  $dA$  on differentiaalisen pienen pinta-alayksikkö. Käytännössä integrointi voidaan suorittaa integroimalla ensin toisen ja sitten toisen muuttujan suhteen. Integraalien rajat määräytyvät integroitavan tasoalueen mukaan. Kaksinkertainen integraali esiintyy muun muassa luvussa 6 esiteltävässä Greenin teoreemassa.

**Esimerkki 22.** Laske tilavuus, joka jää pinnan  $z = x^2y^2$  ja  $xy$ -tasossa sijaitsevan suorakaiteen  $D$  (kuva 21) väliin. Suorakaiteen  $D$  rajaavat  $x$ - ja  $y$ -akselit sekä suorat  $y = 1$  ja  $x = 2$  eli lyhyemmin  $D = [0, 2] \times [0, 1]$ .



Kuva 21:

*Ratkaisu.* Kysytty tilavuus saadaan nyt integroimalla pinnan funktio yli tasoalueen  $D$ :

$$\begin{aligned}
 V &= \int_D z(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^2 x^2 y^2 dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^2 x^2 y^2 dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left( y^2 \int_0^2 x^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left( y^2 \int_0^2 \frac{1}{3} x^3 \right) dy = \int_0^1 \frac{8}{3} y^2 dy \\
 &= \int_0^1 \frac{8}{3} y^3 = \frac{8}{3}.
 \end{aligned}$$

Huomaa, että kaksinkertainen integrointi suoritetaan aina sisemmästä muuttujasta aloittaen, eikä asiaa tarvitse sulkeilla korostaa. Tämän luvun esimerkeissä järjestystä on paikoin korostettu sulkein, jotta välivaiheet varmasti hahmottuvat lukijalle.

**Esimerkki 23.** Esittäköön edellisen tehtävän tasoalue  $D = [0, 2] \times [0, 1]$  metallilevyä, jonka massatiheyttä (massa per pinta-ala) kuvaa funktio  $\rho = xy$ . Laske kyseisen levyn massa.

*Ratkaisu.* Levyn massa  $m$  saadaan integroimalla tiheysfunktio yli tasoalueen  $D$ :

$$\begin{aligned}
 m &= \int_D \rho(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^2 xy dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^2 xy dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left( y \int_0^2 x dx \right) dy = \int_0^1 \left( y \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 \right) dy = \int_0^1 2y dy \\
 &= \int_0^1 y^2 = 1.
 \end{aligned}$$

Vuointegraali, lyhyemmin vuo, on vähintään yhtä tärkeä fysiikan sovellusten kannalta kuin kaksinkertainen integraali. Vuointegraalissakin integroidaan yli pinnan, mutta pinnan ei tarvitse olla taso, vaan se voi olla mikä tahansa kolmiulotteisessa avaruudessa oleva pinta, jolla ei siis ole paksuutta. Pintaintegraalissa lasketaan vektorikentän kulkeutumista läpi kyseisen pinnan, ja sitä voidaankin pitää viivaintegraalin kaksiulotteisena laajenuksena. Pintaintegraaleilla on sovelluksia fysiikassa ja varsinkin sähkömagnetismissä, jonka lakeja tarkastellaan luvussa 6. Vektorikentän vuota pinnan läpi voidaan hahmotella pinnan läpäisevien kenttäviivojen lukumääränä. Vuo riippuu paitsi vektorikentän voimakkuudesta myös pinnan koosta,



muodosta ja suunnasta. Yleensä vektorikentän vuo merkitään symbolilla  $\Phi$ . Vuon yksikkö riippuu tarkasteltavan vektorikentän yksiköstä.

Yleinen ajatusharjoitus vuon hahmottamiseksi on mielikuva tuulettimen puhaltamasta ilmasta ja suorakulmion mallisesta silmukasta, joka asetetaan tuulettimen eteen. Silmukkaa pienentämällä tai ilmavirtaa heikentämällä pienenee myös ilmavirran vuo silmukan läpi. Jos silmukka asetetaan ilmavirran suuntaisesti, ei sen läpi virtaa lainkaan ilmaa, ja jos se taas on kohtisuorassa ilmavirtaa vastaan, saa vuo eli virtaama suurimman mahdollisen arvonsa. Silmukan läpi kulkevan ilmavirran suuruus saadaankin silmukkaa vastaan kohtisuoran nopeuskomponentin ja silmukan alan tulo. Jos silmukka asetetaan niin, että ilmavirta kulkee sen läpi kulmassa  $\theta$ , on kyseinen nopeuskomponentti suuruudeltaan  $v \cos \theta$  ja silmukan läpi sekunnissa virtaavan ilmamäärän tilavuus  $vA \cos \theta$ . Yleisesti vakiovektorikentän  $F$  vuo tason läpi on

$$\Phi_F = FA \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}, \quad (39)$$

missä  $\theta$  on tason yksikkönormaalien eli tasosta ulospäin osoittavan yksikkövektorin ( $\mathbf{n}$ ) ja  $\mathbf{F}$ :n välinen kulma.

Muuttuvan vektorikentän vuo minkä tahansa muotoisen pinnan läpi saadaan integroimalla:

$$\Phi_F = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}. \quad (40)$$

Kaksinkertaisella integraalilla korostetaan sitä, että integrointi tapahtuu yli kaksikulmaisen pinnan. Joissakin lähteissä käytetään tässäkin tilanteessa yksinkertaista integraalimerkkiä. Yleisen pinnan symbolina käytetään usein kirjainta  $S$ . Jos pinta on suljettu, kuten esimerkiksi pallo tai laatikko, saatetaan kaksinkertaisen integraalimerkin päälle lisätä pieni ovaali vastaavaan tapaan kuin suljetun polkuintegraalin merkintään lisätään pieni ympyrä. Suljetun pinnan tapauksessa on kiinnitettävä erityistä huomiota yksikkönormaalien  $\mathbf{n}$  suuntaan, sillä suljetulle pinnalle voidaan määrittää sisä- ja ulkopuoli. Tapana on käyttää pinnalta ulospäin osoittavaa yksikkönormaalina eli ns. ulkoyksikkönormaalina, sillä sen avulla voidaan saada tietoa suljetun pinnan sisällä olevasta vektorikentästä ulkoakäsin. Vaihtamalla ulkoyksikkönormaaliksi sisäyksikkönormaaliksi tai avoimen pinnan tapauksessa vaihtamalla pinnan toisen puolen yksikkönormaaliiin muuttuu vuo vastaluvukseen:

$$\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n})dA = -(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA). \quad (41)$$

Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkiä vuointegraalin laskemisesta. Esimerkkejä on runsaasti lisää luvussa 6, sillä vuointegraali esiintyy Gaussin ja Stokesin lauseissa.

**Esimerkki 24.** Laske vektorikentän  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$  vuo läpi kiekonmallisen pinnan  $S = \{(x, y, z) | 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9, z = 5\}$ .

*Ratkaisu.* Pinta  $S$  on  $xy$ -tason suuntainen, joten sen yksikkönormaalina toimii vektori  $\mathbf{k}$ . Pinta-alayksikkönä kiekossa on  $dA = dx dy$ . Vektorikentän vuo pinnan läpi on

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA = \iint_S (x + z) dx dy = \iint_S (x + 5) dx dy.$$

Symmetrian nojalla  $\iint_S x \, dx \, dy = 0$ , joten

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA = \iint_S 5 \, dx \, dy = 5\pi \cdot 3^2 = 45\pi.$$

### 5.3 Tilavuusintegraali

Tilavuusintegraali tai avaruusintegraali määritellään kolmessa ulottuvuudessa hyvin vastaavasti kuin kaksinkertainen integraali tasossa. Kolminkertaista integraalia voidaan käyttää, kun selvitetään jonkin asian kertymä jonkin avaruuden alueen sisällä. se esiintyy myös luvussa 6 käsiteltävässä Gaussin lauseessa, jolla voidaan kuvata pinnan sisäänsä sulkeman varauksen määrää. Käsitellään tästäkin aiheesta yksi esimerkki, sillä niitä on lisää seuraavassa luvussa.

**Esimerkki 25.** Mikä on yksikkökuution massa, kun sen yksi kärki on origossa, vastakkainen pisteessä  $(1, 1, 1)$  ja sen tiheyden määrittää funktio  $\rho(x, y, z) = x + y + z$ ?

*Ratkaisu.* Kuution massa saadaan integroimalla tiheysfunktio yli koko kuution tilavuuden seuraavasti:

$$V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1}{2} + y + z \right) \, dy \, dz = \int_0^1 (1 + z) \, dz = \frac{3}{2}.$$

### 5.4 Tehtäviä: Integraalit

- Laske viivaintegraalin  $\int (x^2 - 2) \, dx - 2xy \, dy$  arvo, kun siirrytään pisteestä  $(0, 0)$  pisteeseen  $(1, 2)$  seuraavaa polkua pitkin:
  - $y = 2x^2$ ,
  - $x = t^2, y = 2t$ ,
  - suorimpia reittejä pisteen  $(2, 0)$  kautta.
- Integroi  $\int (x + 2y) \, dx - 2x \, dy$  yli seuraavan suljetun polun:
  - origokeskeinen yksikköympyrä,
  - neliö, jonka kärjet ovat pisteissä  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$  ja  $(1, -1)$ .
- Määritä integraalin  $\int_C y^2 \, dx + 2x \, dy + dz$  arvo, kun  $C$  on polku pisteestä  $(0, 0, 0)$  pisteeseen  $(1, 1, 1)$ , siten, että
  - se kulkee suoraan pisteestä  $(0, 0, 0)$  pisteeseen  $(1, 0, 0)$ , sieltä suoraan pisteeseen  $(1, 0, 1)$ , josta mennään suoraan päätepisteeseen  $(1, 1, 1)$ ,
  - lähtöpisteestä edetään ympyrän  $x^2 + y^2 - 2y = 0$  kaarta pisteeseen  $(1, 1, 0)$ , josta siirrytään suorinta tietä pisteeseen.

4. Laske kuinka suuren työn kenttä  $\mathbf{F} = (y+z)\mathbf{i} - (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$  tekee siirtäessään kappaletta yhden kierroksen pitkin seuraavia suljettuja polkuja:
- vastapäivään  $(x, z)$ -tason origokeskeistä yksikköympyrää  $x^2 + z^2 = 1$ ,
  - origosta pisteeseen  $(0, 0, 2\pi)$  käyrää  $x = 1 - \cos t$ ,  $y = \sin t$  pitkin ja tämän jälkeen takaisin origoon  $z$ -akselia pitkin.
5. Todista, että seuraavat voimakentät ovat konservatiivisia. Määritä sitten jokaiselle kentälle skalaaripotentiali  $\Phi$  siten, että  $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$ .
- $\mathbf{F} = \mathbf{i} - z\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ ,
  - $\mathbf{F} = (3x^2yz - 3y)\mathbf{i} + (x^3z - 3x)\mathbf{j} + (x^3y + 2z)\mathbf{k}$ ,
  - $\mathbf{F} = y(\sin 2x)\mathbf{i} + (\sin^2 x)\mathbf{j}$ ,
  - $\mathbf{F} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}\mathbf{j}$ .
6. Kuinka suuren työn voima  $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  tekee, kun se siirtää kappaletta pisteestä  $(1, 0, 0)$  pisteeseen  $(-1, 0, \pi)$
- pitkin parametrisoitua käyrää  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$  (spiraali, helix),
  - pitkin pisteitä yhdistävää janaa?
  - Onko syytä olettaa työn olevan yhtä suuri kumpaakin reittiä pitkin? Perustelee arvauksesi.

## 6 Keskeisiä teoreemoja

Tässä luvussa esitellään kolme vektorianalyysin keskeistä teoreemaa. Ne ovat kaksi- ja kolmiulotteisia yleistyksiä analyysin peruslauseesta, jonka mukaan derivaatta  $G'(t)$  integroituna välin  $[a, b]$  yli on yhtä suuri kuin funktion  $G$  arvojen erotus välin päätepisteissä:

$$\int_a^b G'(t)dt = G(b) - G(a). \quad (42)$$

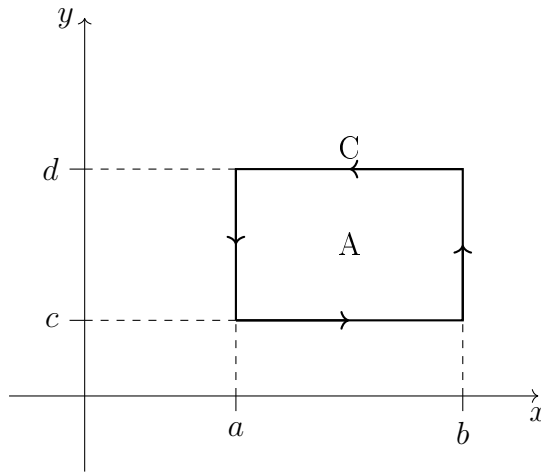
Seuraavissa alaluvuissa esiintyy vektorikenttiä, sekä tason että avaruuden alueita, joissa kenttiä tarkastellaan. Vektorikenttiä kuvaavilta funktioilta oletetaan, että ne ovat jatkuvasti derivoituvia, eli että funktion komponenttien osittaisderivaatat ovat jatkuvia, avoimessa *yhdesti yhtenäisiä* alueessa. Geometrisessa mielessä yhdesti yhtenäisellä alueella tarkoitetaan tason tai avaruuden aluetta, jossa ei ole "reikiä". Tarkemmin määriteltynä minkä tahansa alueeseen sisältyvän suljetun polun on oltava kutistettavissa pistemäiseksi pysyen alueen sisällä eli ilman, että polku törmää alueeseen kuulumattomiin pisteisiin.

Käyriltä puolestaan oletetaan, että ne ovat yksinkertaisia ja suljettuja. Yksinkertaisella suljetulla käyrällä ei ole tiettyä alku- tai loppupistettä eikä se leikkaa itseään. Tällaisia käyriä kutsutaan myös *Jordanin käyriksi*. Geometrisessä mielessä yksinkertainen suljettu käyrä reunustaa yhtenäistä tasoaluetta tai yhtenäistä avaruuden pintaa. Esityksen selkeyttämiseksi ei näitä edellytyksiä erikseen mainita puhuttaessa vektorikentistä tai käyristä.

## 6.1 Greenin teoreema tasossa

Olkoot nyt  $P(x, y)$  ja  $Q(x, y)$  funktiota, joiden ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Johdetaan seuraavaksi tulos, jonka mukaan kaksinkertainen integraali funktiosta  $\frac{\partial}{\partial x}Q(x, y)$  yli suorakaiteen muotoisen tasoalueen  $A$  (kuva 22) on yhtäsuuri kuin polkuintegraali yli tasoalueen  $A$  reunojen. Merkitään reunaa yleiseen tapaan kirjaimella  $C$ . Integroidaan ensin muuttujan  $x$  suhteen, jolloin

$$\iint_A \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_c^d [Q(b, y) - Q(a, y)] dy. \quad (43)$$



Kuva 22:

Tarkastellaan seuraavaksi integraalia  $\oint Q(x, y) dy$ , integrointipolkuna tasoalueen reuna  $C$  vastapäivään kuljettuna, jolloin alue  $A$  jää koko ajan polun vasemmalle puolelle. Symboli  $\oint$  korostaa sitä, että integrointipolku on suljettu. Polun vaakasuorilla osuuksilla  $y$ -koordinaatti on vakio, eli  $dy = 0$  ja integraali saa näiltä osin arvon nolla. Oikeanpuoleisella sivulla  $x = b$  ja  $y$ -koordinaatin arvot kasvavat arvosta  $c$  arvoon  $d$ . Vasemanpuoleisella sivulla  $x = a$  ja  $y$ -koordinaatin arvot laskevat arvosta  $d$  arvoon  $c$ . Näin polkuintegraali saa muodon

$$\oint Q(x, y) dy = \int_c^d Q(b, y) dy + \int_d^c Q(a, y) dy = \int_c^d [Q(b, y) - Q(a, y)] dy. \quad (44)$$

Yhdistämällä yhtälöt (43) ja (44) voidaan kirjoittaa

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q dy. \quad (45)$$

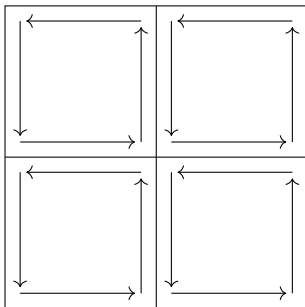
Vastaavasti voidaan johtaa tulos

$$-\iint_A \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_C P dx. \quad (46)$$

Yhdistämällä integraalit (45) ja (46) saadaan kaava

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (47)$$

Yhtälön (47) mukainen tulos pätee suorakaiteelle. Tarkastellaan seuraavaksi yleisempää tapausta, jossa käyrä  $C$  sulkee sisäänsä minkä tahansa mallisen yhtenäisen tasoalueen.



Kuva 23:

Jaetaan nyt tasoalue  $A$  erittäin pieniin neliöihin, joista jokaiselle pätee yhtälö (47). On selvää, että kaksinkertainen integraali yli koko tasoalueen  $A$  on yhtä suuri kuin summa kaksinkertaisista integraaleista jokaisen pienen neliön osalta. Polkuintegraalien osalta tilannetta voidaan hahmotella kuvan 23 avulla. Kuva (23) esittää neljää tasoalueen  $A$  sisältämistä pienistä neliöistä. Kuvasta (23) nähdään, kuinka neliöiden yhteisten sivujen osalta integrointipolut kulkevat päinvastaisiin suuntiin kumoten viivaintegraalit tältä janalta. Vastaavasti kaikkien tasoalueen  $A$  sisällä olevien pienten neliöiden rajoilla viivaintegraalit kumoutuvat, ja kumoutumatta jäävät vain viivaintegraalit koko tasoalueen  $A$  reunojen osalta. Näin ollen yhtälö (47) pätee myös sellaisille tasoalueille, jotka eivät ole suorakaiteita. Tämä tulos on *Greenin teoreema tasossa*:

**Lause 1.**

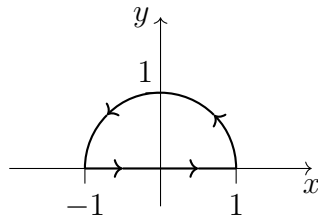
$$\iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial A} P dx + Q dy.$$

Greenin teoreeman polkuintegraali lasketaan vastapäivään. Greenin teoreema yhdistää toisiinsa kaksinkertaisen integraalin yli tietyn tasoalueen ja polkuintegraalin kyseisen tasoalueen reunan yli. Näin ollen voidaan valita näistä integraaleista helpompi, laskea sen arvo, ja saada samalla selville toinenkin Greenin teoreemassa esiintyvä integraali. Hyödynnetään tätä mahdollisuutta seuraavassa esimerkissä.

**Esimerkki 26.** Laske integraali  $\oint_C y^2 dx + 3xy dy$ , kun  $C$  rajaa origokeskeisen yksikköympyrän ylemmän puoliskon vastapäivään kulkien (kuva 24).

*Ratkaisu.* Vektorikenttä kyseisessä integraalissa on nyt  $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, 3xy)$ . Greenin teoreeman avulla voimme nyt muuntaa kysytyn polkuintegraalin tavalliseksi kaksinkertaiseksi integraaliksi. Integrandin on nyt oltava

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3y - 2y = y.$$



Kuva 24:

Integrointi tapahtuu yli yksikköympyrän ylemmän puoliskon, eli käyrän  $C$  rajaaman tasoalueen yli. Merkitään tätä tasoaluetta yleiseen tapaan kirjaimella  $D$ . Koska käyrän  $C$  suunta oli vastapäivään, tasoalue jää sen vasemmalle puolelle. Jos käyrän suunta olisi ollut myötäpäivään, olisi lopputuloksesta pitänyt lopuksi ottaa vastaluku. Tasoalueen  $D$  määrittävät seuraavat epäyhtälöt:

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ ja } 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

Greenin teoreeman mukaan nyt

$$\begin{aligned} \oint_C (y^2 dx + 3y dy) &= \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D y dA = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} y^2 \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} \right) dx = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Huom: Alkuperäinen integraali voidaan laskea myös perinteisesti polkuintegraalina, mutta tämä olisi ollut työläämpää kuin Greenin teoreeman hyödyntäminen.

**Esimerkki 27 (Konservatiivinen voima).** Edellisessä kappaleessa käsiteltiin konservatiivisia kenttiä, joiden tekemä työ on riippumaton valitusta polusta kahden pisteen välillä. Greenin teoreeman mukaan voiman tekemä työ suljettua polkua pitkin voidaan kirjoittaa seuraavaan muotoon:

$$W = \oint_{\partial A} (F_x dx + F_y dy) = \iint_A \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

Mikäli nyt  $\partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y = 0$  (eli roottorin  $\mathbf{F}$   $z$ -komponentti = 0), on tehty työ mitä tahansa suljettua polkua pitkin  $W = 0$ . Tämä tarkoittaa sitä, että kahden pisteen välillä tehty työ on riippumaton valitusta polusta.

Johdetaan seuraavaksi lyhyesti Greenin teoreemasta divergenssilause eli Gaussin lause ja roottorilause eli Stokesin lause, joita käsitellään tarkemmin seuraavissa alaluvuissa. Merkitään nyt vektoriarvoiselle funktiolle  $\mathbf{V} = \mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y$  lyhyemmin  $Q = V_x$  ja  $P = -V_y$ , jolloin

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{V}. \quad (48)$$

Tässä kaksiulotteisessa tilanteessa  $V_z = 0$ , joten tasoaluetta  $A$  kiertävän reunan tangenttivektori on

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy.$$

Normaalivektori, joka on kohtisuorassa tangenttivektoriin nähden ja joka osoittaa tasoalueesta  $A$  ulospäin on puolestaan

$$\mathbf{n} ds = \mathbf{i} dy - \mathbf{j} dx,$$

missä  $\mathbf{n}$  on yksikkövektori ja  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ .

Edellä määritellyjä komponentteja  $P$  ja  $Q$  käyttäen voidaan kirjoittaa

$$P dx - Q dy = -V_y dx + V_x dy = (\mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y) \cdot (\mathbf{i} dy - \mathbf{j} dx) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (49)$$

Sijoittamalla yhtälöt (48) ja (49) Lauseen 1 mukaiseen Greenin teoreeman yhtälöön saadaan tulos

**Lause 2.**

$$\iint_A \operatorname{div} \mathbf{V} dx dy = \int_{\partial A} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds.$$

Tämä tulos tunnetaan divergenssilauseena tasossa. Se voidaan yleistää kolmeen ulottuvuuteen, jolloin se saa seuraavan muodon:

**Lause 3.**

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{V} d\tau = \iint_{\partial\tau} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\tau.$$

Tämä on *divergenssilause*, joka tunnetaan myös *Gaussin lauseena*. Gaussin lauseessa  $\tau$  symboloi tilavuutta ja  $\partial\tau$  suljettua pintaa, joka toimii kyseisen tilavuuden reunana. Differentiaalisen pientä tilavuusyksikköä symboloi  $d\tau$  ja vastaavasti hyvin pientä pinnan palasta  $d\sigma$ . Normaalivektori  $\mathbf{n}$  osoittaa kohtisuorasti ulospäin pinnasta.

Toinen sovellus Greenin teoreemasta saadaan, kun merkitään jälleen vektoriarvoiselle funktiolle  $\mathbf{V} = \mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y$  lyhyesti  $Q = V_x$  ja  $P = V_y$ .

Koska nyt  $V_z = 0$  voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = (\operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{k}). \quad (50)$$

Ottamalla mukaan tangenttivektori  $r$  saadaan

$$P dx + Q dy = (\mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y) \cdot (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy) = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}. \quad (51)$$

Sijoittamalla yhtälöt (50) ja (51) Lauseen 1 mukaiseen Greenin teoreeman yhtälöön saadaan tulos, joka tunnetaan Stokesin lauseena tasossa:

**Lause 4.**

$$\iint_A (\operatorname{rot} \mathbf{V}) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy = \oint_{\partial A} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}.$$

Tämäkin lause voidaan yleistää kolmeen ulottuvuuteen:

**Lause 5.**

$$\iint_{\sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma) = \int_{\partial\sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}.$$

Tämä tulos tunnetaan nimellä *Stokesin lause*. Stokesin lauseessa  $\sigma$  on avoin pinta, esimerkiksi puolet pallon pinnasta. Tällöin  $\partial\sigma$  on kyseisen pinnan reuna ja  $\mathbf{n}$  pinnan normaalin suuntainen yksikkövektori.

## 6.2 Tehtäviä: Greenin teoreema

1. Määritä Greenin teoreemaa hyödyntäen integraalin

$$\int 2x \, dy - 3y \, dx$$

arvo, kun integroimispolku on neliö, jonka kärjet sijaitsevat pisteissä  $(0, 2)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(-2, 0)$  ja  $(0, -2)$ .

2. Greenin teoreemaa hyödyntäen on mahdollista todistaa, että yksinkertaisen käyrän  $C$  rajaaman tasoalueen pinta-ala  $A$  on

$$A = \frac{1}{2} \int_C (x \, dy - y \, dx).$$

Laske tämän perusteella, kuinka suuren pinta-alan käyrä

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$$

rajaa sisälleen.

3. Laske polkuintegraali  $\int (2y \, dx - 3x \, dy)$  pitkin sellaisen neliön reunoja, jonka suorat  $x = 3$ ,  $x = 5$ ,  $y = 1$  ja  $y = 3$  rajaavat. Hyödynnä tarvittaessa Greenin teoreemaa.
4. Laske polkuintegraali  $\int_C ((x \sin x - y) \, dx + (x - y^2)) \, dy$ , kun  $C$  on  $(x, y)$ -tason kolmio, jonka kärjet sijaitsevat pisteissä  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  ja  $(2, 0)$ .

## 6.3 Divergenssilause ja divergenssi

Tämän luvun alussa tarkastellaan divergenssin merkitystä ja sen fysikaalisia sovelluksia. Luvun loppupuolella käydään yksityiskohtaisemmin läpi jo Greenin teoreeman yhteydessä mainittua divergenssilauseetta sekä sen sovelluksia fysiikan alalla. Lopussa on tehtäviä divergenssiin ja divergenssilauseeseen liittyen.

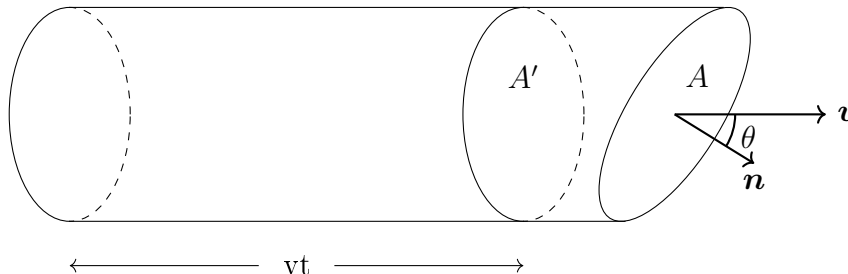


### 6.3.1 Divergenssistä

Differentiaalioperaattoreita käsittelevästä luvusta 4 tuttu divergenssin määritelmä on:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (52)$$

Luvussa 4 kuvailtiin divergenssin ilmentävän vektorikentän lähteisyyttä. Siirrytään nyt tarkastelemaan divergenssiä fysikaalisesta näkökulmasta. Ajatellaan seuraavaksi virtaavaa nestettä. Jos jokaiseen nesteen pisteeseen piiretään vektori  $v$ , joka kuvastaa nesteen virtauksen nopeutta eli suuntaa ja vauhtia kyseisessä pisteessä, syntyy vektorikenttä. Käyriä, jotka ovat vektoreiden  $v$  suuntaisia, kutsutaan *virtausviivoiksi*. Vastaava mallinnus voidaan tehdä mille tahansa virtaavalle elementille, kuten kaasulle, sähkövirralle, hiukkasille tai lämmölle. Divergenssi tulee nyt kuvaamaan määrää, jonka verran virtaavaa ainetta virtaa ulos tai sisään tutkittavasta tilavuudesta. Tällainen ulos- tai sisäänpäin virtaaminen voi johtua muun muassa tiheyden muutoksesta, esimerkiksi kun, asunnosta virtaa ilmaa lämmityksen ansiosta harventunutta ja laajentunutta ilmaa. Virtaus voi myös johtua siitä, että tila sisältää *lähteen*, kuten radioaktiivisen säteilyn lähteen, tai *nielun*. Divergenssi liittyy konkreettisen materiaalin virtauksen lisäksi esimerkiksi sähkö- ja magneettikenttiin; voimme korvata nopeuden  $v$  sähkökentällä  $E$  tai magneettikentällä  $B$ , jolloin puhutaan virtauksen sijaan *vuosta*.



Kuva 25:

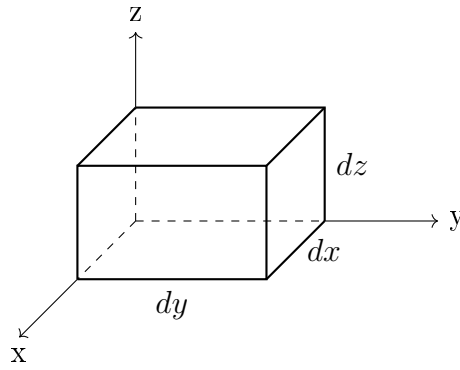
Tutkitaan seuraavaksi tarkemmin virtaavaa vettä. Merkitään  $\mathbf{V} = v\rho$ , missä  $\rho$  on virtaavan veden tiheys. Ajassa  $t$  pinnan  $A'$  (kohtisuorassa virtausnopeuteen nähden) läpi virtaavan veden tilavuus on  $vt \cdot A' \cdot \rho$ . Sama määrä vettä virtaa myös kulmaan  $\theta$  kallistetun pinnan  $A$  läpi (kuva 25). Trigonometrian mukaan  $A' = A \cos \theta$ , joten

$$vtA'\rho = vt\rho A \cos \theta. \quad (53)$$

Jos veden virtausnopeus  $v$  muodostaa kulman  $\theta$  jonkin pinnan yksikkönormaalien  $\mathbf{n}$  kanssa, niin ajan yksikössä pinta-alkion läpi virtaa vesimäärä

$$v\rho \cos \theta = V \cos \theta = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}. \quad (54)$$

Tarkastellaan seuraavaksi virtauksen alueella sijaitsevaa tilavuusalkiota  $dx dy dz$ . Tilavuusalkiolla on kuusi sivua, ja jokaisen läpi virtaa vettä joko sisään tilavuusalkiota tai ulos siitä. Lasketaan nyt kokonaisvirtaus summana kaikkien sivujen suhteen.



Kuva 26:

Kuvassa (26)  $xz$ -tasossa sijaitsevan sivun läpi vettä virtaa nopeudella  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{j}$  pintaalkiota kohden. Toisin sanoen koko kyseisen sivun  $dx dz$  läpi virtaa vettä tahtiin  $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{j}) dx dz$ . Toisaalta  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{j} = V_y$ , joten tämä virtaama voidaan kirjoittaa muotoon  $V_y dx dz$ . Vastakkaisen, eli kuvassa (26) oikean puoleisen, seinämän läpi taas virtaa ulos vastaavasti  $V_y dx dz$ , sillä erotuksella, että nyt  $V_y$ :llä saattaa olla eri arvo - sijainti ei enää ole sama. Eroa näillä kahdella nopeudella on  $\partial V_y$ , jota voidaan approksimoida suureella  $dV_y$ . Kun  $x$  ja  $z$  ovat vakioita, voidaan tämä kirjoittaa muotoon  $dV_y = (\partial V_y)/(\partial y) dy$ . Kokonaisvirtaama ulospäin näiden kahden  $xz$ -tason suuntaisten pinnan läpi saadaan oikeanpuolimmaisesta seinämän ulosvirtauksen ja vasemman puolen sisäänvirtauksen erotuksena eli

$$[V_y^{(vasen)} - V_y^{(oikea)}] dx dz = \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} dy \right) dx dz.$$

Vastaavasti kokonaisulosvirtaus pohjan ja kannen läpi on  $(\partial V_z)/(\partial z) dx dy dz$  ja kahden muun sivutahkon läpi  $(\partial V_x)/(\partial x) dx dy dz$ . Kokonaisulosvirtaus särmiöstä  $dx dy dz$  on edellälaskettujen summa:

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \text{div } \mathbf{V} dx dy dz = \nabla \cdot \mathbf{V} dx dy dz.$$

Jos kokonaisulosvirtaus jaetaan apuna käytetyn särmiön tilavuudella  $dx dy dz$ , saadaan tulokseksi veden hävikki tilavuusalkiota kohden. Tämä juuri on divergenssin fysikaalinen merkitys: ulosvirtauksen nettomäärä tilavuusalkiota kohden kussakin pisteessä. Tällä tarkoitetaan esimerkiksi hiukkasten, kaasujen tai nesteiden ulosvirtausta. Sähkö- ja magneettikenttien tapauksessa puhutaan vuosta. Tämä muistuttaa jossain määrin tiheyttä - tiheys määritellään kussakin pisteessä massaksi tilavuusyksikköä kohden, ja se saattaa saada eri arvoja eri pisteissä. Vastaavasti divergenssikään ei yleensä ole vakio koko kentässä, vaan sen arvo vaihtelee pisteestä toiseen.

Merkitään seuraavaksi divergenssiin liittyviä suureita:

$\Psi$  = muodostuvan nesteen nettomäärä aikayksikössä tilavuusalkiota kohden,

$\rho$  = nesteen tiheys eli massa tilavuusalkiota kohden ja

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$  = tilavuusalkion massan muutos ajan suhteen.

Muuttujaa  $\Psi$  kutsutaan *lähteisyydeksi*. Suorakaiteen  $dx dy dz$  massan muutos saadaan vähentämällä muodostuvan nesteen määrästä ulos virtaavan nesteen määrä, toisin sanoen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \Psi dx dy dz - \nabla \cdot \mathbf{V} dx dy dz,$$

josta saadaan

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \Psi - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Jos  $\Psi = 0$ , eli lähteitä/nieluja ei ole, saa edellinen yhtälö muodon, joka tunnetaan *jatkuvuusyhtälönä*:

**Lause 6.**  $\nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .

Jos tiheys on muuttumaton eli

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \text{ niin } \nabla \cdot \mathbf{V} = \Psi.$$

Fysiikassa tästä seuraa virtausmekaniikassa tunnettu tulos, jonka mukaan putkessa virtaavan vakiotiheyksisen nesteen nopeus on kääntäen verrannollinen putken paksuuteen kullakin ajanhetkellä. Magneettikentän divergenssi taas on aina nolla, sillä yksittäisiä magneettisia napoja ei ole olemassa.

Tehdään seuraavaksi varsinaista divergenssilauseetta varten tarvittavia päätelmiä. Aiemmin johdimme tuloksen, jonka mukaan tasoalueen  $A$  läpi virtaa aikayksikössä nestemäärä  $A \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ , kun  $\mathbf{n}$  on tason  $A$  (yksikkö)normaalivektori ja  $\mathbf{V} = \mathbf{v} \rho$ , kun  $\mathbf{v}$  on nesteen nopeus ja  $\rho$  nesteen tiheys. Kuvitellaan nyt mitä tahansa suljettua pintaa, ja merkitään sen pinta-alkiota symbolilla  $d\sigma$ . Riippuen pinnan muodosta tämä voidaan kirjoittaa tarvittaessa auki eri tavoin: tason tapauksessa  $d\sigma = dx dy$  ja pallopinnalle pätee  $d\sigma = (r^2 \sin \theta) d\theta d\Phi$ . Merkitään jälleen tuttuun tapaan pinnasta ulospäin kohtisuoraan ulospäin osoittavaa yksikkövektoria kirjaimella  $\mathbf{n}$ . Huomaa, että normaalivektorin suunta muuttuu riippuen pinnan pisteen sijainnista. Näiden merkintöjen avulla pinta-alkion läpi ulos virtaavan nesteen määrä voidaan kirjoittaa muotoon  $d\tau = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  ja integroimalla näitä koko suljetun pinnan yli saadaan kokonaisulosvirtaukseksi pinnan sulkeman avaruuden alueen sisältä

$$\iint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (55)$$

Toisaalta aiemmin päätelimme, että tilavuusalkiosta  $d\tau = dx dy dz$  virtaa ulos nestemäärä  $\nabla \cdot \mathbf{V} d\tau$ . Tämän avulla voidaan määrittellä divergenssi toisella tapaa tunnetun määritelmän (33) lisäksi. Tilavuusalkiosta ulos virtaava nestemäärä voidaan kirjoittaa kahdella tavalla, joten

$$\nabla \cdot \mathbf{V} d\tau = \iint_{d\tau:n \text{ pinta}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (56)$$

Kun tämä yhtälö jaetaan puolittain tilavuusalkiolla ja annetaan sen lähestyä nollaa, saadaan divergenssille määritelmäksi:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{1}{d\tau} \iint_{d\tau:n \text{ pinta}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (57)$$

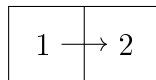
### 6.3.2 Divergenssilause

Kuvitellaan seuraavaksi, että suuri yhtenäinen avaruuden  $R^3$  alue  $\tau$  jaetaan tilavuusalkioiksi,  $d\tau_i$ . Jokaisesta tilavuusalkiosta ulospäin suuntautuvan nettovirtauksen määrä on  $\nabla \cdot \mathbf{V} d\tau_i$  ja näiden summa koko tarkasteltavan avaruuden alueen yli on

$$\sum_i \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau_i. \quad (58)$$

Osoitetaan seuraavaksi, että ylläoleva on yhtä kuin koko alueesta  $\tau$  ulospäin suuntautuvan nettovirtauksen määrä. Tarkastellaan nyt kahden vierekkäisen tilavuuselementin välistä virtausta (kuva 27). Palasta 1 palaan 2 suuntautuva ulosvirtaus on palan 2 kannalta sisäänvirtausta eli negatiivista ulosvirtausta. Näin ollen palojen 1 ja 2 välisen yhteisen seinämän osalta ulosvirtausten summa on nolla. Näin summalausekkeen (58) arvo on yhtä suuri kuin koko alueesta ulospäin suuntautuva virtaus. Kun pienten tilavuuselementtien koon annetaan lähestyä nollaa, lähestyvä kyseinen summa kolminkertaista integraalia yli koko alueen, eli

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau. \quad (59)$$



Kuva 27:

Nyt olemme saaneet kaksi eri lauseketta, (55) ja (59), tilavuudesta ulospäin suuntautuvan virtauksen määrälle. Merkitsemällä nämä yhtä suureksi saamme tuloksen, jota kutsutaan *divergenssilauseeksi*:

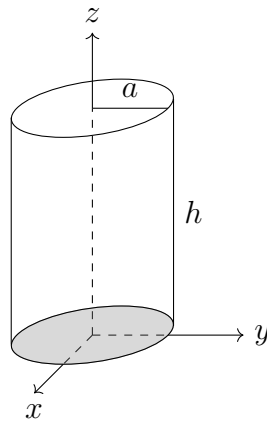
$$\iiint_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau = \iint_{\partial\tau} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (60)$$

Divergenssilauseen avulla on siis mahdollista muuntaa tilavuusintegraali integraaliksi yli suljetun pinnan, ja päinvastoin.

### Integraalimerkinnöistä

Näitä kolmin- ja kaksinkertaisia integraaleja merkitään usein kolmen ja kahden integraalimerkin sijaan yksinkertaisemmin yhdellä integraalimerkillä, esimerkiksi:  $\int d\tau$ . Samaa tarkoittavat  $\iiint d\tau$  ja  $\iiint dx dy dz$ . On siis huolellisesti tarkasteltava, minkä muuttujan tai muuttujien suhteen integrointi tapahtuu ja minkälaisen tason tai avaruuden alueen yli. Mikäli halutaan korostaa, että pinta-alaintegraali lasketaan yli suljetun pinnan tai viivaintegraali yli suljetun polun yli, korvataan tavallinen integraalimerkki  $\int$  symbolilla  $\oint$ . Pinta-integraalia yli suljetun pinnan voidaan vastaavasti merkitä  $\iint d\tau$  tai  $\oint d\tau$ . Myös integrandi  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\tau$  esiintyy usein hieman toisin kirjoitettuna. Normaalin suuntainen yksikkövektori  $\mathbf{n}$  ja skalaari  $d\tau$  yhdistetään usein vektoriksi  $\tau$ , joka tarkoittaa  $n$ :n suuntaista vektoria, jonka suuruus on  $d\tau$ . Myös tulos  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\tau$  voidaan kirjoittaa muotoon  $\mathbf{V} \cdot d\tau$ .

**Esimerkki 28.** Lasketaan sama integraali kahdella eri tavalla, ensin divergenssilausesta (60) hyödyntäen ja sitten perinteiseen tyyliin. Olkoon vektorikenttä  $\mathbf{V} = ix + jy + kz$ . Lasketaan integraali  $\oint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  yli kuvan 28 suljetun sylinteripinnan. Sylinteri on suora, sen pohjan ja kannen säde  $a$ , korkeus  $h$ , pohja on  $xy$ -tasossa ja pohjan keskipiste  $(0, 0, 0)$  (kuva 28).



Kuva 28:

Divergenssilauseen (60) mukaan kyseinen integraali on yhtä suuri kuin tilavuusintegraali  $\int \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau$  yli sylinterin pinnan rajaaman kolmiulotteisen alueen. Tässä esimerkissä käytetään lyhyesti yksinkertaista integraalimerkkiä, sillä on selvää, milloin kyse on tilavuusintegraalista ja milloin pintaintegraalista. Divergenssin määritelmän (33) mukaan on

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Täten yhtälön (60) nojalla on voimassa

$$\oint_{\text{syl. pinta}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\text{syl. tilavuus}} \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau = \int 3 d\tau = 3 \int d\tau = 3V_{\text{syl.}} = 3\pi a^2 h. \quad (61)$$

Integraalin  $\oint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  laskeminen suoraan, divergenssilausesta hyödyntämättä, hieman haastavampaa. Laskemalla se seuraavaksi voidaan todeta divergenssilauseen

paikkansapitävyys tämän esimerkin yksittäistapauksessa. Ensimmäiseksi on selvitettävä, mikä on pinnan normaalivektori  $\mathbf{n}$  kullakin pinnalla. Sylinterin yläpinnalla eli kannella  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ , joten sen osalta

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{k} = z = h.$$

Tästä seuraa, että

$$\oint_{\text{yläpinta}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = h \int d\sigma = h \cdot A_{\text{kansi}} = h \cdot \pi a^2 = \pi a^2 h. \quad (62)$$

Sylinterin alapinnalla eli pohjalla  $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ , joten sen osalta

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{k} = -z = 0.$$

Tästä seuraa, että

$$\oint_{\text{alapinta}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0. \quad (63)$$

Sylinterin kaarevalla vaipalla vektori  $\mathbf{i}x + \mathbf{j}y$  on aina kohtisuorassa pintaan nähden. Tämä vektori pitää jakaa pituudellaan, jotta saadaan selville pinnan yksikönormaalivektorin  $\mathbf{n}$  lauseke. Sylinterin vaippa voidaan ajatella eri korkeuksilla sijaitseviksi ympyröiksi, joiden yhtälö on  $x^2 + y^2 = a^2$ , joten

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{i}x + \mathbf{j}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mathbf{i}x + \mathbf{j}y}{a}.$$

Vaipan osalta on siis

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{x^2 + y^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a.$$

Tästä seuraa, että

$$\oint_{\text{vaippa}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = a \int d\sigma = a \cdot A_{\text{vaippa}} = a \cdot 2\pi ah = 2\pi a^2 h. \quad (64)$$

Yhdistämällä integraalit (62), (63) ja (64) yli sylinteripinnan eri osien saadaan integraaliksi

$$\oint_{\text{syl. pinta}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \pi a^2 h + 0 + 2\pi a^2 h = 3\pi a^2 h. \quad (65)$$

Huomion arvioista on, että yhtälöt (61) ja (65) tuottavat saman arvon kysytylle pintaintegraalille.

### 6.3.3 Gaussin laki fysiikassa

Tässä luvussa on käsitelty divergenssilauseetta, jonka mukaan vektorikentän vuo läpi suljetun pinnan on yhtä suuri kuin vektorikentän divergenssi eli lähteisyys pinnan sisäänsä sulkeman avaruuden alueen yli. Divergenssilauseetta kutsutaan joskus myös Gaussin divergenssilauseeksi tai lyhyemmin Gaussin lauseeksi. Sillä on paljon sovelluksia fysiikassa. Keskeisin näistä on Gaussin laki sähkökentille, lyhyemmin Gaussin laki, jonka mukaan sähkökentän vuo läpi suljetun pinnan on saman suuruinen kuin kyseisen pinnan sisäänsä sulkema varaus. Tämä laki on yksi neljästä Maxwellin yhtälöstä, jotka kuvaavat sähkömagneettisten kenttien vuorovaikutuksia ja käyttäytymistä. Muut kolme Maxwellin yhtälöä ovat Faradayn laki, Ampèren laki ja Gaussin laki magneettikentille. Tässä alaluvussa tarkastellaan Gaussin lakia sähkökentille ja magneettikentille. Ampèren lakiin palataan viimeisessä luvussa roottorilauseen sovellusten yhteydessä. Gaussin laki sähkökentille voidaan kirjoittaa integraalimuotoon

$$\Phi = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_A}{\varepsilon_0}, \quad (66)$$

missä

$$\begin{aligned} \Phi &= \text{suljetun pinnan } A \text{ läpi virtaava sähkövuo,} \\ \oint_A &= \text{pintaintegraali pinnan } A \text{ yli,} \\ \mathbf{E} &= \text{sähkökentän voimakkuus, yksikkönä } \frac{N}{C} \text{ tai } \frac{V}{m}, \\ d\mathbf{A} &= \text{pinta-alkio, suuntana normaali pinnasta ulospäin ja} \\ Q_A &= \text{pinnan } A \text{ sisäänsä sulkema kokonaisvaraus.} \end{aligned}$$

Pinta-alkiosta käytetään usein myös symbolia  $d\sigma$ . Pieni rengas integraalimerkin keskikohdassa korostaa sitä, että kyseessä on vektorin vuo umpinaisen pinnan läpi. Sähkövuon tiheyden  $\mathbf{D}$  ja sähkökentän voimakkuuden  $\mathbf{E}$  välillä on yhteys  $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ , missä  $\varepsilon$  on väliaineen permittiivisyys, ja tämän johdosta tämän luvun kaavoista on usein tarjolla kaksi vaihtoehtoista muotoa. Tämän luvun esimerkeissä käytetään väliaineen permittiivisyyden arvona tyhjiön permittiivisyyttä  $\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$ .

Mikäli yksittäisten varausten sijaan pinta sulkee sisäänsä varausjakauman, jonka tiheysfunktio on  $\rho(x, y, z)$ , saadaan kokonaisvaraus tilavuusintegraalina integroimalla tiheysfunktio yli avaruuden alueen, jonka pinta sulkee sisäänsä. Tällöin Gaussin laki voidaan kirjoittaa muotoon

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dx dy dz = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV, \quad (67)$$

missä

$\int_V$  = tilavuusintegraali pinnan A sisäänsä sulkeman alueen yli ja  
 $dV$  = tilavuusalkio, josta usein käytetään myös symbolia  $d\tau$ .

Divergenssilauseen mukaan polkuintegraali  $\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$  voidaan kirjoittaa muotoon

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV. \quad (68)$$

Yhdistämällä yhtälöt (67) ja (68) voidaankin merkitä yhtäsuuruus

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV. \quad (69)$$

Koska yhtälö (70) pätee kaikille avaruuden alueille  $V$ , on oltava

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (70)$$

Tämä yhtälö on differentiaalimuoto Gaussin lauseesta sähkökentille, ja juuri tässä muodossa se yleensä ilmaistaan Maxwellin lakeja listattaessa. Se voidaan myös kirjoittaa muodossa

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (71)$$

## Gaussin lain ja Coulombin lain välinen yhteys

Gaussin laki sähkökentille on yhteydessä Coulombin lakiin. Näytetään nyt, miten Gaussin laista voidaan johtaa Coulombin laki. Todistus toiseen suuntaan on jätetty harjoitustehtäväksi. Coulombin lain mukaan varatun hiukkasen (varaus  $q_1$ ) toiseen hiukkaseen (varaus  $q_2$ ) kohdistama sähköstaattinen voima on verrannollinen kummankin hiukkasen varaukseen ja kääntäen verrannollinen hiukkasten välisen etäisyyden neliöön. Sähkövuon määritelmän mukaan pistemäinen varaus aiheuttaa r-säteisen pallopinnan yli sähkövuon

$$\Phi = 4\pi r^2 |D|.$$

Oletetaan nyt, että hiukkanen sijaitsee pallon keskipisteessä, jolloin symmetrian nojalla voidaan olettaa sähkövuon tiheys  $\mathbf{D}$ , yksikkönä  $C/m^2$ , yhtä suureksi pallopinnan jokaisessa pisteessä. Sähkövuon oletetaan symmetrian perusteella myös osoittavan ulospäin pinnasta pinnan normaalivektorin suuntaisesti kussakin pinnan pisteessä. Toisaalta Gaussin lain (66) mukaan sähkövuon  $\Phi$  pinnan läpi on yhtäsuuri kuin pinnan sisäänsä sulkema varaus, eli tässä tapauksessa  $\Phi = q_1$ . Koska  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$  synnyttää varaus  $q_1$  sähkökentän

$$\mathbf{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{r}, \quad (72)$$



missä  $\mathbf{r}$  on varauksesta  $q_1$  tarkastelupisteen suuntaan osoittava yksikkövektori. Sähkökenttä  $\mathbf{E}$  kohdistaa varaukseen  $q_2$  voiman  $\mathbf{F} = q_2\mathbf{E}$ . Näin ollen on varausten  $q_1$  ja  $q_2$  toisiinsa kohdistama voima

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \mathbf{r}. \quad (73)$$

Yhtälö (73) tunnetaan Coulombin lakina. Toisin kuin Gaussin laki sähkökentille, on Coulombin laki voimassa vain staattisille varausjakaumille.

### Gaussin laki magneettikentille

Toistaiseksi tässä alaluvussa on käsitelty Gaussin lakia sähkökentille. Gaussin laki magneettikentille on magneettinen analogia Gaussin laille sähkökentille, ja molemmat kuuluvat Maxwellin yhtälöihin. Luodaan nyt lyhyt katsaus Gaussin lakiin magneettikentille, jonka mukaan magneettivuo suljetun pinnan  $S$  läpi saadaan laskeamalla pinnan sisäänsä sulkemien magneettisten napojen voimakkuuksien  $p_i$  summa:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \Sigma p_i, \quad (74)$$

missä  $\mathbf{B}$  on magneettivuon tiheys, yksikkönä  $T$  (Tesla). Yksittäisiä magneettisia monopoleja ei ole havaittu luonnossa, joten magneettisten napojen voimakkuudet kumoavat pareittain toisensa. Divergenssilauseen avulla voidaan näin ollen Gaussin laki magneettikentille kirjoittaa integraalimuotoon

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0, \quad (75)$$

missä  $V$  on pinnan  $S$  sisäänsä sulkema avaruuden alue. Koska yhtälö (75) pätee kaikille suljetuille pinnoille, voidaan Gaussin laki magneettikentille kirjoittaa differentiaalimuodossa

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (76)$$

Magneettikentän divergenssi on nolla, joten on magneettikenttä lähteetön. Tämä on seuraus yksittäisten magneettisten monopolioiden löytämisen vaikeudesta. Magneettiset kenttäviivat muodostavatkin aina suljettuja silmukoita.

**Esimerkki 29.** Laatikon sisällä (ei välttämättä keskellä) on varaus  $q = 3,0\mu C$ . Kuinka suuri on varauksen aiheuttaman sähkökentän vuo yli laatikon pinnan? Onko Gaussin lain avulla mahdollista selvittää sähkökentän suuruus laatikon pinnoilla?

*Ratkaisu.* Gaussin lain (66) mukaan saadaan sähkökentän vuo pinnan läpi jakamalla pinnan sisäänsä sulkema varaus tyhjiön permittiivisyydellä:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{3 \cdot 10^{-9} C}{8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} \approx 339 \frac{Nm^2}{C}.$$

Gaussin lakia voidaan soveltaa sähkökentän selvittämiseen vain erittäin symmetrisissä tapauksissa. Tässä esimerkissä ei varauksen etäisyys pinnalle ole vakio tai

tiedossa, eikä näin ollen Gaussin lakia voida hyödyntää sähkökentän suuruuden selvittämiseen. Merkintä  $\Phi_E$  korostaa sitä, että kyseessä on nimenomaan sähkökentän vuo, eikä vaikkapa magneettikentän vuo. Merkintää  $\Phi$  voidaan käyttää sellaisenaan, kun on selvää, minkälaisen kentän vuosta on kyse.

**Esimerkki 30.** Sijaitkoon varaus  $q = 3,0\mu C$   $0,20\text{ m}$ -säteisen pallopinnan keskipisteessä. Laske sähkökentän suuruus pallopinnalla. Laske varauksen aiheuttaman sähkökentän vuo yli kyseisen pallopinnan. Vaikuttaako säde vuon suuruuteen?

*Ratkaisu.* Symmetrian perusteella sekä sähkökenttä  $\mathbf{E}$  että pinta-alkio  $d\mathbf{A}$  osoittavat suoraan pois päin pallopinnasta jokaisessa sen pisteessä. Ne ovat siis samansuuntaiset eli  $\mathbf{E} \uparrow\uparrow d\mathbf{A}$ , mistä seuraa edelleen, että  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E dA$ . Pallopinnalla sähkökentän suuruus on vakio, joten

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \approx 6,75 \cdot 10^5 \frac{N}{C}. \quad (77)$$

Nyt sähkökentän  $\mathbf{E}$  vuo läpi pallopinnan saadaan sijoittamalla tulos (77) kaavaan (66):

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int EA = 6,75 \cdot 10^5 \frac{N}{C} \cdot 4\pi \cdot (0,2\text{ m})^2 \approx 3,4 \cdot 10^5 \frac{Nm^2}{C}.$$

Pallopinnan säteen suuruus ei vaikuttanut lopputulokseen, sillä se esiintyi laskuissa ensin jakajana ja sitten kertojana niin, että sen vaikutus kumoutui. Sijoittamalla arvot lausekkeisiin vasta myöhäisessä vaiheessa olisi säde saatu kumottua ennen sen arvon sijoittamista. Tähän päätelmään olisi voinut päästä myös piirtämällä erisäteisiä pallopintoja varauksen ympärille ja huomaamalla vuon tiheyttä kuvaavien kenttäviivojen kokonaismäärän pysyvän samana pallopinnan suuruudesta riippumatta. Lausekkeita sieventämällä voidaankin havaita, että esimerkin kaltaisessa tilanteessa pallopinnalla  $\Phi = q/\epsilon_0$ . Tämä tulos voidaan laajentaa tilanteeseen, jossa varaus on suljettu kokonaan mielivaltaisen muotoisen pinnan sisälle: vuo on edelleen  $\Phi = q/\epsilon_0$ , sillä jokaisen pintapalan voi projisoida kuvitteelliselle varausta ympäröivälle palloille. Tällaisesta kuvitteellisesta suljetusta tarkastelupinnasta käytetäänkin nimeä *Gaussin pinta*.

## 6.4 Tehtäviä: Divergenssilause

1. Olkoon vektorikenttä  $\mathbf{V} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ . Integroi nyt  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  yli yksikkökuution pinnan. Yksikkökuution kulman sijaitsevat pisteissä  $(0,0,0)$ ,  $(0,0,1)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(1,1,0)$ ,  $(1,0,1)$ ,  $(0,1,1)$  ja  $(1,1,1)$ . Laske integraali ensin integroimalla yli kunkin sivun erikseen ja sitten divergenssilausesta hyödyntämällä.
2. Olkoon vektorikenttä  $\mathbf{F} = x(\cos^2 y)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + x(\sin^2 y)\mathbf{k}$ . Laske integraali  $\iint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  yli sellaisen pallon pinnan, jonka säde on 3 ja keskipiste origossa. Puntaroi, onko integraali helpompi laskea suoraan pintaintegraalina vai muuttaa tilavuusintegraaliksi ja hyödyntää divergenssilausesta.

3. Olkoon vektorikenttä  $\mathbf{V} = (x^2 + y^2 + z^2)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$  Laske integraali  $\iiint(\nabla \cdot \mathbf{V}) d\tau$  yli avaruuden alueen, jonka yhtälö on  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ . Puntaroi, onko integraali helpompi laskea suoraan tilavuusintegraalina vai muuttaa pintaintegraaliksi ja hyödyntää divergenssilausea.
4. Johda Coulombin laki Gaussin laista tarkastelemalla sellaisen pallon pintaa  $\sigma$ , jonka keskipisteessä sijaitsee varaus  $q$ .

## 6.5 Stokesin lause ja roottori

Tähän mennessä olemme määritelleet roottorin  $\nabla \times \mathbf{V}$  ja käsitelleet yhtä sen sovelluksista, eli kahden pisteen välisen käyräintegraalin riippuvuutta valitusta integrointipolusta. Tässä kappaleessa valaistetaan toisen esimerkin avulla roottorin fysikaalista merkitystä ja pohjustetaan Stokesin lausetta, jota siirrytään tarkastelemaan Stokesin lausetta. Stokesin lause yhdistää toisiinsa pintaintegraalin yli avoimen pinnan kyseisen pinnan reunan yli laskettuun polkuintegraaliin.

### 6.5.1 Roottorista

Tarkastellaan tasaisella kulmanopeudella  $\boldsymbol{\omega}$  pyörivää jäykkää kappaletta. Nyt siis  $|\boldsymbol{\omega}|$  on kulmanopeuden suuruus ja  $\boldsymbol{\omega}$  on pyörimisakselin suuntainen vektori (katso kuva 15). Luvussa 3.2.2 näytettiin, että jäykässä kappaleessa sijaitsevan pisteen nopeus  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , missä  $\mathbf{r}$  on hiukkasen paikkavektori pyörimisakseliin nähden. Lasketaan seuraavaksi  $\nabla \times \mathbf{v}$  eli  $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ . Kaavan (16) perusteella

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r}. \quad (78)$$

Koska  $\boldsymbol{\omega}$  on vakio, voidaan ensimmäinen termi yhtälössä (78) kirjoittaa muotoon

$$\boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) = 3\boldsymbol{\omega}. \quad (79)$$

Toinen termi yhtälössä (78) kirjoittaa muotoon

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \left( \omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}. \quad (80)$$

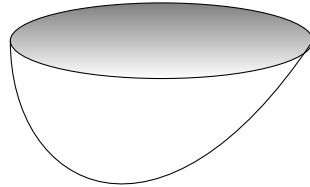
Koska osittaisderivaatat  $\partial y / \partial x = \partial z / \partial x = 0$  ja niin edelleen, niin

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega} \text{ eli } \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{v}).$$

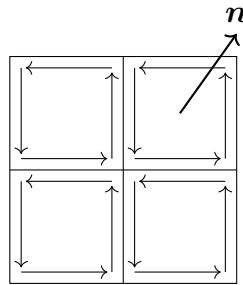
Tässä esimerkissä jäykän kappaleen kyydissä pyörivän pisteen kulmanopeus on siis suoraan verrannollinen pisteen tangentiaalisen nopeusvektorin roottoriin. Tämä tulos antaa osviittaa siitä, että termi *roottori* viittaa nimenomaan *rotaatioon* eli pyörimiseen. Vektorikentän roottorin arvo kuvastaakin esimerkiksi virtaavan nesteen tapauksessa nesteen kulmanopeutta tarkastelupisteen välittömässä läheisyydessä.

### 6.5.2 Stokesin lause

Kuten luvussa 6.1 pohjustettiin, yhdistää Stokesin lause toisiinsa avoimen pinnan yli lasketun pintaintegraalin ja pinnan reunan yli lasketun polkuintegraalin. Kyseisten pintojen on oltava kaksipuolisia, eli esimerkiksi Moebiuksen renkaaseen Stokesin lausetta ei voida soveltaa. Esimerkiksi kuvan 29 mukainen "perhoshaavi" puolestaan esittää kaksipuolista pintaa, johon reunoineen voisi soveltaa Stokesin lausetta.



Kuva 29:



Kuva 30:

Pilkotaan seuraavaksi mielikuvissa edellä kuvailtu pinta pieniksi pinta-alayksiköiksi  $d\sigma$  (kuva 30). Piirretään kuhunkin pinta-alayksikköön oma normaalivektori  $\mathbf{n}$ , kuitenkin niin, että kaikki normaalivektorit ovat kaksipuolisen pinnan samalla puolella. Kukin pinta-alayksikkö on kooltaan hyvin lähellä vastaavaan pinnan kohtaan muodostettua tangenttitasoa, joten kullekin pinta-alayksikölle erikseen on voimassa:

$$\oint_{d\sigma:n \text{ reuna}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{d\sigma} (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (81)$$

Kun nämä yhtälöt lasketaan yhteen jokaisen pinta-alayksikön osalta, saadaan koko pintaa  $\sigma$  koskeva yhtälö:

$$\sum_{\text{pinta-alayksiköt}} \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\text{pinta } \sigma} (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (82)$$

Kuvasta (30) voidaan nähdä, että kaikki viivaintegraalit kumoavat toisensa pareittain aina kahden pinta-alayksikön rajalla. Tämän ilmiön ansiosta edellisen yhtälön vasen puoli pelkistyy tavanomaiseksi viivaintegraaliksi yli pinnan reunan. Kyseisessä muodossa yhtälö tunnetaan tärkeänä Stokesin lauseena:

**Lause 7.** 
$$\oint_{\text{pinnan } \sigma \text{ reuna}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\text{pinta } \sigma} (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Huomion arvoista on, että Stokesin lauseen mukaan reunan yli laskettu polkuintegraali on yhtä suuri kuin  $\nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  integroituna yli minkä tahansa kaksipuolisen pinnan, jota kyseinen reuna rajaa. Integraalin arvo ei siis riipu siitä, mihin muotoon pinta on tarkasteluhetkellä asetunut. Oikea integrointisuunta voidaan tarkistaa aiemmin mainitun oikeankädensäännön mukaan, kun kuvitellaan, että pinta ja pinnan reuna litistetään samaan tasoon, jolloin pinta on enää reunan sisällä oleva tason osa. Käsitellään yksi esimerkki Stokesin lauseesta ennen sen fysikaalisia sovelluksia.

**Esimerkki 31.** Olkoon vektorikenttä  $\mathbf{V} = 4y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ . Laske nyt integraali  $\int (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\sigma$  yli pallopinnan puolikkaan, jonka yhtälö on  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ .

*Ratkaisu.* Vektorikentän  $\mathbf{V}$  roottori on kaavan (36) nojalla  $\nabla \times \mathbf{V} = -3\mathbf{k}$ . Integraalin laskeminen voidaan nyt toteuttaa useammalla tavalla: suoraan integroimalla pallokoordinaatistossa, Stokesin lauseen (7) avulla laskemalla polkuintegraali  $\oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$   $xy$ -tasossa sijaitsevaa pinnan reunaa eli ympyrää  $x^2 + y^2 = a^2$  pitkin tai hyödyntämällä Stokesin lausetta huomioiden sen, että integraali saa saman arvon yli minkä tahansa pinnan, jolla on sama reuna kuin pallonpuolikkaalla.

Näistä tavoista on juuri tässä erimerkissä viimeinen selvästi helpoin. Myös  $xy$ -tasossa sijaitsevalla kiekolla  $x^2 + y^2 \leq a^2$  on sama reuna kuin tehtävänannon pallopinnan puolikkalla. Normaalivektori  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$  kyseisällä kiekolla, ja kiekon pinta-ala on  $\pi a^2$ . Nyt

$$\int (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int (-3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} d\sigma = \int -3 d\sigma = -3 \int d\sigma = -3\pi a^2.$$

Lasketaan integraali myös suoraan integroimalla. Origokeskeisen pallon pinnalla pinnasta ulospäin osoittava vektori on  $\mathbf{r}$ , josta saadaan yksikkönormaalivektori jakamalla se pituudellaan:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}}{a} = \frac{i x + j y + k z}{a}.$$

Tästä seuraa, että

$$\nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -3\mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{r}}{a} = -3\frac{z}{a}.$$

Seuraavaksi on laskettava integraali  $\int -3\frac{z}{a} d\sigma$  yli puolipallon pinnan. Pallokoordinaatistoon päästään tekemällä koordinaattimuunnokset

$$z = r \cos \theta \text{ ja } d\sigma = r^2 \sin \theta d\theta d\phi.$$

Puolipallon pinnalla  $r = a$ , joten kysytty integraali on

$$\begin{aligned} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} -3 \frac{a \cos \theta}{a} a^2 \sin \theta d\theta d\phi &= -3a^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= -3a^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = -3\pi a^2. \end{aligned}$$

### 6.5.3 Stokesin lause fysiikassa

Divergenssilauseen eli Gaussin lauseen pääsovellukset fysiikassa olivat kenttien lähtöisyyden tutkiminen sekä Gaussin lait sähkö- ja magneettikentille. Neljästä Maxwellin yhtälöstä oli siis kaksi johdettavissa Gaussin lauseesta. Kaksi muuta Maxwellin yhtälöä, eli Ampèren ja Faradayn lait, ovat puolestaan roottorilauseen eli Stokesin lauseen sovelluksia. Tässä alaluvussa tarkastellaan kyseisiä lauseita ja sitä, miten roottorilauseella tutkitaan kenttien pyörteisyyttä.

#### Amperen laki

Amperen laista on hyötyä magneettikenttiä laskettaessa. Amperen lakina tunnetun yhtälön mukaan suljetun polun  $C$  reunustaman pinnan läpäisevälle sähkövirralle  $I$  ja magneettikentän intensiteetille  $\mathbf{H}$  pätee

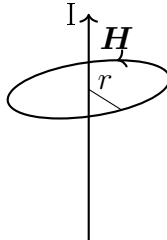
$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I. \quad (83)$$

Reuna  $C$  on nyt verrattavissa edellisessä luvussa esimerkkinä käytettyyn perhoshaavin reunaan. Kuvitellaan seuraavaksi, että reuna ympäröi nippua sähköjohtimia, joissa kulkee virtaa. Pinnan läpi kulkenut virtamäärä on nyt sama mille tahansa kuvitellulle pinnalle, jota  $C$  reunustaa, ja jonka johtimet siis läpäisevät. Tutkaillaan seuraavaksi mahdollisimman yksinkertaisen esimerkin avulla, miten Amperen lakia käytetään magneettikentän intensiteetin määrittämiseen. Kuvitellaan suora ja pitkä johdin, jossa kulkee sähkövirta  $I$ . Magneettikentän intensiteetti  $\mathbf{H}$  etäisyydellä  $r$  johtimesta on  $r$ -säteisen, kohtisuoraan johtimeen nähden sijoittuvan, kiekon reunan tangentin suuntainen kussakin tarkastelupisteessä (kuva 31). Magneettikentän intensiteetti on suuruudeltaan jokaisessa tarkastelupisteessä etäisyydellä  $r$  johtimesta symmetrian nojalla sama,  $|\mathbf{H}|$ . Selvitetään nyt magneettisen intensiteetin suuruus Amperen lailla. Määritellään poluksi  $C$   $r$ -säteisen kiekon reuna, jolloin saadaan yhtälö:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} |\mathbf{H}| r d\theta = |\mathbf{H}| r \cdot 2\pi = I, \quad (84)$$

joten

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{2\pi r}. \quad (85)$$



Kuva 31:

Johdetaan seuraavaksi Amperen laista yksi Maxwellin tunnetuista yhtälöistä, Stokesin lausetta apuna käyttäen. Palataan tarkastelemaan tilannetta, jossa käyrä  $C$

ympäröi kuvitteellista johdinnippua. Kuvataan symbolilla  $\mathbf{J}$  virran tiheyttä, eli virtaa, joka läpäisee  $\mathbf{J}$ :n suhteen kohtisuorassa olevan pinta-alayksikön. Tarkastellaan mitä tahansa kaksipuolista pintaa  $\sigma$ , jonka käyrä  $\mathbf{C}$  rajaa. Nyt pintaelementin  $d\sigma$  läpi kulkee virta, jonka suuruuden määrää tulo  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ . Koko pinnan  $\sigma$  läpi kulkeva virtamäärä saadaan pintaintegraalina  $\iint_{\sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ . Amperen lain mukaan tämä virta voidaan merkitä yhtäsuureksi seuraavan polkuintegraalin kanssa:

$$\oint_{\mathbf{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (86)$$

Toisaalta Stokesin lauseen mukaan on

$$\oint_{\mathbf{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (87)$$

Nyt yhdistämällä Amperen lain (86) ja Stokesin lauseen (87) mukaiset tulokset saadaan seuraavien pinta-integraalien välille yhtäsuuruus:

$$\iint_{\sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{\sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (88)$$

Koska yhtäsuuruus on voimassa riippumatta siitä, mikä pinta  $\sigma$  on kyseessä, voidaan seuraavat komponentit integrandeista kirjoittaa Maxwellin yhtälönä tunnettuun muotoon yhtäsuuriksi:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (89)$$

## Konservatiiviset kentät

Tarkastellaan tämän luvun viimeisenä aiheena yksityiskohtaisesti vektorikenttien konservatiivisuuteen liittyviä ehtoja. Kun tason tai avaruuden yhdesti yhtenäisessä alueessa vektorifunktion  $\mathbf{F}$  kaikkien komponenttien ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, ovat seuraavat viisi seikkaa joko kaikki tai ei yksikään yhtä aikaa voimassa:

1.  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$  jokaisessa alueen pisteessä.
2. Jokaiselle alueen sisältämälle yksinkertaiselle suljetulle käyrälle pätee  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ .
3.  $\mathbf{F}$  on konservatiivinen, eli integraalin  $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  arvo ei riipu valitusta polusta, kunhan se sisältyy kokonaan alueeseen.
4.  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  on eksakti differentiaali.
5.  $\mathbf{F} = \text{grad } W$ , jollekin funktiolle  $W$ .

Selvennetään ensin muutamaa lauseissa esiintyvää määritelmää, ja perustellaan sitten, miksi ensimmäisestä kohdasta seuraa toinen, toisesta kolmas ja niin edelleen. *Eksakti differentiaali* tarkoittaa kahdessa ulottuvuudessa yleistä differentiaalimuotoa  $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ , jolle löytyy jokin skalaarifunktio  $F$ , jolle  $dF = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ . Kolmiulotteisessa tapauksessa yleinen differentiaalimuoto on  $A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$ . Differentiaalimuotoa kutsutaan eksaktiksi jos on olemassa sellainen skaalaarifunktio  $G$ , jolle  $dG = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$ .

Todistetaan ensin, että **kohdasta 1) seuraa kohta 2)**. Valitaan tason tai avaruuden alueen sisältä jokin yksinkertainen ja suljettu polku, ja hyödynnetään Stokesin lausetta. Annetaan valitun polun toimia Stokesin lauseessa esiintyvän pinnan reunana. Kutistetaan polku kasaan pisteeksi. Koska vektorikentän roottori on koko yhtenäisessä alueessa kohdan 1) mukaan nolla, on se myös nolla sillä pinnalla, jonka pisteeksi kutistuva polku ikäänkuin piirtää. Näin myös pintaintegraali Stokesin lauseessa on nolla ja edelleen viivaintegraali yli suljetun polun on nolla, kuten kohdassa 2) väitetään.

Siirrytään perustelemaan, että **kohdasta 2) seuraa kohta 3)**. Valitaan tason tai avaruuden alueen sisältä pisteen  $A$  ja  $B$ . Valitaan mielivaltaisesti tason tai avaruuden alueen puitteissa polku  $a$ , pisteestä  $A$  pisteeseen  $B$  ja polku  $b$  pisteestä  $B$  pisteeseen  $A$ . Nyt polkujen  $a$  ja  $b$  summa on suljettu polku, sillä se johtaa takaisin lähtöpisteeseen  $A$ . Koska kohdan 2) perusteella polkuintegraali  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ , on myös valitsemiemme polkujen osalta

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Integraalin arvo muuttuu aina vastaluvukseen, jos integroimisvälin alku- ja loppupiste vaihdetaan keskenään. Voidaan siis perustellusti todeta, että myös

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

eli integraalin arvo riippuu vain päätepisteiden, ei polun, valinnasta. Näin on kohta 3) tullut todistetuksi.

Jatketaan todistamalla, että edelleen **kohdasta 3) seuraavat kohdat 4) ja 5)**. Valitaan tason tai avaruuden alueen sisältä kiintopisteeksi jokin piste  $O$ . Lasketaan tästä pisteestä integraali  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  kuhunkin kyseisen alueen pisteeseen  $P$ . Kunkin tällaisen integraalin arvo on kohdan 3) perusteella riippumaton valitusta polusta. Nimetään nyt tämä yksikäsitteinen arvo funktioksi  $W$  pisteessä  $P$ . Voidaan siis kirjoittaa:

$$\int_O^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = W(P).$$

Funktio  $W$  on jatkuva, joten

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Koska



$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz = \nabla W \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

mielivaltaiselle  $d\mathbf{r}$ :lle, ja

$$\mathbf{F} = \nabla W,$$

mikä vastaa todistettavaa viidettä lausetta. **Kohdasta 5) seuraa kohta 1)**, sillä  $\mathbf{F}$ :n komponenttien ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaattojen jatkuvuudesta seuraa  $W$ :n toisen kertaluvun "sekoitettujen" osittaisderivaattojen yhtäsuuruus. Johtopäätös on, että kohdat 1-5 seuraavat toisistaan. Erityisen tärkeää on muistaa ehdot, eli kyseessä olevan tason tai avaruuden alueen on oltava yhdesti yhtenäinen ja funktiolla  $\mathbf{F}$  on oltava jatkuvat ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat.

Vektorikenttää  $\mathbf{V}$  kutsutaan *pyörteettömäksi*, *konservatiiviseksi* ja *lamellaariseksi*, kun  $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ . Tässä tapauksessa  $\mathbf{V} = \text{grad } W$ , missä  $W$  on *skalaaripotentiali*, joista on puhuttu luvussa 4 gradientin yhteydessä. Tällaisen vektorikentän kenttäviivat voi olla suljettuja silmukoita, ja gravitaatiokenttä ja sähköstaattinen kenttä ovat esimerkkejä tällaisesta kentästä. Jos taas  $\text{div } \mathbf{V} = 0$ , kutsutaan vektorikenttää *lähteettömäksi* tai *solenoidaaliseksi*. Tällaiselle kentälle  $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A}$ , missä  $\mathbf{A}$  on vektoriarvoinen funktio, jota kutsutaan vektoripotentialiksi. Tällaisen lähteettömän kentän kenttäviivoilla ei ole alkua eikä loppua, vaan ne ulottuvat äärettömän kauas tai ovat suljettuja silmukoita. Jos tiedetään, että  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ , on mahdollista muodostaa funktio  $\mathbf{A}$ , jolle  $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A}$ .

**Esimerkki 32.** Olkoon vektorikenttä  $\mathbf{V} = \mathbf{i}(x^2 - yz) + \mathbf{j}2yz + \mathbf{k}(z^2 - 2zx)$ . Etsi vektorikenttä  $\mathbf{A}$ , niin että  $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$ .

*Ratkaisu.* Vektorikenttä  $\mathbf{V}$  on lähteetön, sillä

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - yz) + \frac{\partial}{\partial y}(-2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 - 2zx) = 2x - 2z + 2z - 2x = 0.$$

Etsimällemme vektorikentälle  $\mathbf{A}$  on oltava

$$\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(x^2 - yz) + \mathbf{j}2yz + \mathbf{k}(z^2 - 2zx). \quad (90)$$

Useampikin vektorikenttä  $\mathbf{A}$  toteuttaa tämän yhtälön. Etsitään yksittäinen ratkaisu, ja sen jälkeen yleinen lauseke ehdot toteuttaville vektorikentille  $\mathbf{A}$ . On mahdollista valita  $\mathbf{A}$  siten, että yksi sen komponenteista on 0, ja valitaan nyt  $A_x = 0$ . Tällöin determinantti yksinkertaistuu, ja  $\text{rot } \mathbf{A}$ :n komponenteiksi jää enää y-komponentti  $-2yz = -\partial A_z / \partial x$  ja z-komponentiksi  $z^2 - 2zx = -\partial A_y / \partial x$ . Integroimalla nämä puolittain muuttujan  $x$  suhteen saadaan yhtälöt

$$A_y = z^2 x - zx^2 + f_1(y, z) \text{ ja } A_z = 2xyz + f_2(y, z). \quad (91)$$

Sijoittamalla tulos (91) yhtälöön (90) saadaan

$$x^2 - yz = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 2xz + \frac{\partial f_2}{\partial y} - 2zx + x^2 - \frac{\partial f_1}{\partial z}. \quad (92)$$

Valitaan nyt  $f_1$  ja  $f_2$  niin, että yhtälö (92) toteutuu. Havaitaan tällä tehtävällä olevan useita ratkaisuja, kuten  $f_2 = 0$  ja  $f_1 = \frac{1}{2}yz^2$  tai  $f_1 = 0$  ja  $f_2 = -\frac{1}{2}y^2z$ . Valitsemalla näistä vaihtoehdoista jälkimmäinen saadaan tehtävälle yksittäisratkaisu

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}(z^2x - zx^2) + \mathbf{k}(2xyz - \frac{1}{2}y^2z).$$

Voidaan todistaa, että jos löydetään yksi vektorikenttä  $\mathbf{A}$ , jolle  $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A}$ , niin muut ratkaisut ovat muotoa

$$\mathbf{A} + \nabla u,$$

missä  $u$  on mikä tahansa skalaarifunktio. Muun muotoisia ratkaisuja tehtävällä ei ole.

## 6.6 Tehtäviä: Stokesin lause

1. Olkoon vektorikenttä  $\mathbf{F} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ . Laske integraali  $\iint (\nabla \times \mathbf{F}) d\boldsymbol{\tau}$  yli  $xy$ -tason suorakaiteen, jota rajoittavat  $x$ - ja  $y$ -akselit sekä suorat  $x = a$  ja  $y = b$ . Laske tämän jälkeen polkuintegraali  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  yli saman suorakaiteen reunan. Näiden tulisi nyt Stokesin lauseen mukaan saada samat arvot.
2. Laske  $\iint_{\sigma} \text{rot}(x^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} d\sigma$ , kun  $\sigma$  on  $xy$ -tason yläpuolelle jäävä osa pinnasta  $z = 4 - x^2 - y^2$ .
3. Olkoon vektorikenttä  $\mathbf{V} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + (z + xy)\mathbf{k}$ . Laske integraali  $\iint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  yli sellaisen kappaleen pinnan, jota rajaavat tasot  $z = 0$  ja  $z = 5$  sekä putkimainen pinta  $x^2 + y^2 = 9$ .
4. Olkoon  $\mathbf{V} = (x^2 + yz + y)\mathbf{i} + (x - 2yz)\mathbf{j} + (z^2 - 2zx + x + y)\mathbf{k}$ . Määritä nyt vektorikenttä  $\mathbf{F}$  siten, että  $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{F}$ .

## 7 Loppusanat lukijalle

Haluan näissä loppusanoissa onnitella tutkielman lukijaa, joka on nyt tutustunut vektorianalyysiin ja sen sovelluksiin fysiikassa. Tutkielma on toivottavasti auttanut lukijaa saavuttamaan vankat perustaidot vektorianalyysin soveltamisesta ja kerryttänyt hyödyllisen työkalupaketin, jonka avulla voi päästä käsiksi lukuisiin fysiikan ilmiöihin ja periaatteisiin. Vektoreiden ymmärtäminen mahdollistaa muun muassa nestevirtausten ja sähkömagneettisten kenttien kuvailun, ja tämän myötä aukeaa myös uusia näkökulmia koko maailmankaikkeuden toimintaan.

On syytä muistaa, että fysiikan ilmiöt ovat syvästi kietoutuneet useaan matematiikan osa-alueeseen. Suosittelen lukijaa syventymään myös sellaisiin matematiikan osa-alueisiin kuin differentiaaliyhtälöt, lineaarialgebra ja kompleksianalyysi. Näiden avulla voi saavuttaa lisää ymmärrystä luonnonilmiöistä. Taustatyö, jonka lukija on nyt tehnyt vektorianalyysin parissa, on hyvä pohja tuleville tutkimusretkille matematiikan eri osa-alueisiin.

Tässä tutkielmassa on käsitelty hyvin rajattua määrää vektorianalyysin lukuisista sovelluksista. Saavutetut tiedot ja taidot helpottavat lukijaa, joka haluaa tutustua syvällisemmin mekaanisiin ja sähkömagneettisiin systeemeihin tai tutustua muihin fysiikan osa-alueisiin, kuten kvanttimekaniikkaan. Toivonkin, että vektoreiden käyttömahdollisuuksien loistokas kirjo inspiroi ja motivoi lukijaa fysiikan alan yliopisto-opinnoissa.

Tässä tutkielmassa on käsitelty laskuja, joissa pärjää kynällä ja paperilla tai taskulaskimella. Osa pulmista, joihin fysiikan alalla voi kohdata, ei ole kuitenkaan ratkaistavissa näillä työvälineillä. Tällöin tarjoavat erilaiset tietokoneohjelmat ja verkosovellukset korvaamatonta apua. Tietokoneohjelmistot kuten MATLAB ja Mathematica tarjoavat laskutehoa, joka kantaa huomattavasti manuaalista laskentaa pidemmälle. Nämä alustat mahdollistavat muun muassa monimutkaisten vektorilaskujen käsittelyn ja lopputulosten visuaalisen kuvailun. Muun muassa haku- ja vastauskone Wolfram Alpha ([www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com)) tarjoaa verkossa vastauksia matemaattisiin kysymyksiin numeroina, kuvina ja taulukkoina. Wolfram Alpha osaa myös laskea symbolein ja numeroin sekä piirtää funktioiden kuvaajia. Vaikka fysiikan opinnoissa pärjääkin pitkälle kynän, paperin ja taskulaskimen voimin, suosittelemme lukijaa rohkeasti tutustumaan matemaattisiin ohjelmistoihin ja verkkoalustoihin, jotka avartavat mahdollisuuksia monimutkaisempien ilmiöiden ymmärtämiseen.

## 8 Tehtävien vastaukset

### Luku 2: Peruslaskutoimitukset

1. Vihje: Piirrä kuva ja käytä vektoreiden yhteen- ja vähennyslaskua.
2. Eivät. Vihje: määritä valonsäteitä esittävät vektorit ja muodosta yhtälöryhmä.
3. Samansuuntaisuus ei toteudu millään  $d$ :n arvolla. (Vektorit ovat tosin yhden-suuntaiset, kun  $d = 1/2$ .)
4.  $\frac{1}{\sqrt{130}}(11\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$
5. Tuulee lounaasta nopeudella  $50\sqrt{2}\frac{km}{h} \approx 71\frac{km}{h}$ .
6. Soutaminen tulee suunnata  $53^\circ$  itäänpäin suoraan vastarannalle johtavaan suuntaan nähden. Aikaa kuluu 8 minuuttia.

### Luku 3: Tulot

1. a)  $6\mathbf{C} = 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$   
 b)  $-2\mathbf{A} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$   
 c)  $-8$   
 d)  $-8$   
 e)  $4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$   
 f)  $-4\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$

2.  $-5$
3. a)  $11\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 13\mathbf{k}$   
 b)  $3$   
 c)  $17$
4.  $-9\mathbf{i} - 23\mathbf{j} + \mathbf{k}, \frac{1}{\sqrt{21}}$
5.  $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}, n_1\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u} = n_2\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}$
6.  $\mathbf{a} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\omega} - \omega^2\mathbf{r}$ . Kun  $\mathbf{r}$  ja  $\boldsymbol{\omega}$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, on  $\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r}$  ja  $|\mathbf{a}| = \frac{v^2}{r}$ .
7.  $\pm \frac{1}{\sqrt{10}}(3\mathbf{i} + \mathbf{j})$
8.  $\sqrt{6}$
9.  $\pm\sqrt{13}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$

#### Luku 4: Differentiaalioperaatiot

1.  $-\mathbf{i}$
2.  $\frac{\pi e}{3\sqrt{5}}$
3. a) Vihje: Ratkaise käyrien yhtälöstä muuttuja  $y$ , kun  $\Phi = 4, y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$  jne.  
 b) suuruus  $2\sqrt{5}$ , suunta  $-2\mathbf{i} + \mathbf{j}$   
 c)  $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$   
 d)  $\sqrt{10}$
4. a)  $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3, \nabla \times \mathbf{r} = 0$   
 b)  $\nabla \cdot \mathbf{r} = 2, \nabla \times \mathbf{r} = 0$   
 c)  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \nabla \times \mathbf{V} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$   
 d)  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 5xy, \nabla \times \mathbf{V} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (y^2 - x^2)\mathbf{k}$   
 e)  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \nabla \times \mathbf{V} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - x(\cos y)\mathbf{k}$

#### Luku 5: Integraalit

1.  $-\frac{11}{3}$
2. a)  $-4\pi$   
 b)  $-16$
3. a)  $3$   
 b)  $\frac{8}{3}$

4. a) 0  
b)  $2\pi$
5. a)  $yz - x$   
b)  $3xy - x^3yz - z^2$   
c)  $-y \sin^2 x$   
d)  $-\arcsin(xy)$
6. a)  $\pi + \frac{\pi^2}{2}$   
b)  $\frac{\pi^2}{2}$   
c) Ei, sillä vektorikentän roottori ei ole nolla, joten kenttä ei ole konservatiivinen, ja viivaintegraalin arvo riippuu integrointipolusta.

### Luku 6.2: Greenin teoreema

1. 40
2.  $-\frac{3}{2}$
3.  $-20$
4. 2

### Luku 6.4: Divergenssilause

1. 3
2.  $36\pi$
3.  $100\pi$
4. Vertaa siihen, miten s.50-51 Gaussin laista on johdettu Coulombin laki

### Luku 6.6: Stokesin lause

1.  $2ab$
2. 0
3.  $45\pi$
4.  $\mathbf{F} = (xz - yz^2 - \frac{y^2}{2})\mathbf{i} + (\frac{x^2}{2} - x^2z + \frac{yz^2}{2} - yz)\mathbf{j} + \nabla u$ , missä  $u$  on mikä tahansa skalaarifunktio.

## Viitteet

- [1] Cassiday, George ; Fowles, Grant (2005). *Analytical Mechanics*, 7th edition. Belmont, CA: Brooks/Cole.
- [2] Freedman, Roger ; Young, Hugh (2004) *University Physics*, 11th edition. San Francisco, CA: Pearson Addison Wesley.
- [3] Väisälä, Kalle (1954). *Vektorianalyysi*. Helsinki: WSOY.
- [4] Lahtinen, Aatos ; Myrberg, Lauri (2001) *Matematiikan ylioppilastehtävät ratkaisuiheen 1992-2001*, 11. painos. Saarijärvi: MFKA-Kustannus Oy.