Reunattomien osittaissanojen ja harvojen viivoittimien yhteydestä

LuK Aleksi Vanhatalo

Pro gradu -tutkielma
Maaliskuu 2024

Tarkastajat:
Dos. Aleksi Saarela
Prof. Vesa Halava

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Aleksi Vanhatalo: Reunattomien osittaissanojen ja harvojen viivoittimien yhteydestä
Pro gradu -tutkielma, 32 s., 6 liites.
Matematiikka
Maaliskuu 2024

Työssä esitetään uusi yhteys harvojen viivoittimien ja reunattomien osittaissanojen välillä. Tämä tuottaa uudet parhaat ylä- ja alarajat reunattomien osittaissanojen maksimaaliselle kolomäärälle riippuen aakkostokoosta. Alarajan parannus saadaan aikaan suoralla konstruktiolla, joka käyttää neljää aakkosta. Uusi yläraja pätee kaikille aakkostoille, mutta voittaa ennestään tunnetut ylärajat vasta, kun aakkosia on käytössä vähintään kuusi.

Työ sisältää aiemmin tunnetut maksimaalisten kolojen määrän ratkaisut yksinkertaisen reunan ja binääriaakkoston tapauksissa. Kummatkin tapaukset ratkaistaan yleisellä graafeihin perustuvalla argumentilla, jolla voidaan tutkia myös isompien aakkostojen tapauksia.

Harvojen viivoittimien kappaleessa esitetään kysymys siitä, kuinka paljon vähintään tulee pituuksia merkitä annetun pituiseen viivoittimeen, jotta sillä voi mitata kaikki pituuttaan pienemmät etäisyydet. Tähän kysymykseen esitetään parhaat tunnetut tulokset todistuksineen. Viivoittimia käsittelevässä kappaleessa todistetaan myös Wichmann-resepti toimivaksi viivoitinkonstruktioksi. Todistusta ei ennestään esiinny kirjallisuudessa, vaikkakin Wichmann mainitsee todistuksen olevan olemassa. Tuloksia sovelletaan tämän jälkeen reunattomiin osittaissanoihin.

Asiasanat: Sanojen kombinatoriikka, Osittaissanat, Harvat viivoittimet, Sanan reuna

Sisällys

1 Johdanto

Tämä työ käsittelee uutta yhteyttä ennestään erillään tutkittujen ongelmien välillä. Tästä syystä työ jakaantuu ensin kahteen hyvin irrallaan olevaan osaan, osittaissanojen kappaleeseen ja viivoittimien kappaleeseen.

Sanakombinatoriikassa osittaissanat ovat sanojen yleistys, jossa osa sanan kirjaimista saatetaan korvata "kololla". Kolot edustavat kadonnutta informaatiota tapauksessa, jossa tiedetään jonkun kirjaimen kadonneen. Sanakombinatoriikan klassisia tuloksia on yleistetty osittaissanoihin ja toisaalta osittaissanoista itsestään kumpuaa uudenlaisia kysymyksiä jotka ovat herättäneet tutkijoiden mielenkiinnon. Osittaissanojen tutkimuksesta yleisesti on helpointa lukea kirjasta "Algorithmic combinatorics on partial words"[11], jonka on kirjoittanut yksi tämän tutkielman päälähteiden ([1] ja [2]) kirjoittajista, Francine Blanchet-Sadri. Tässä työssä keskitytään sanan reunan yleistykseen osittaissanojen tapauksessa. Sanan reuna tarkoittaa sanan aitoa etuliitettä (prefix) joka on myös sen takaliite (suffix). Osittaissanoissa reunan käsite saa hieman yleisemmän muodon, jossa kolot lasketaan olevan aina yhteensopivia etu- ja takaliitteissä.

Työn toinen käsiteltävä kombinatorinen objekti on pätevä viivoitin, joka tunnetaan kirjallisuudessa myös nimellä rajoitettu erotuskanta (eng. restricted difference base). Kyseessä on joukko merkkejä niin, että merkkien välillä voidaan mitata eli erotuksina esittää mikä tahansa annettu pituus nollan ja viivoittimen suurimman arvon välillä. Esimerkiksi joukko $\{0, 1, 4, 6\}$ on pätevä viivoitin, sillä

$$\begin{aligned}
0 &= 0 - 0,\\
1 &= 1 - 0,\\
2 &= 6 - 4,\\
3 &= 4 - 1,\\
4 &= 4 - 0,\\
5 &= 6 - 1 \text{ ja}\\
6 &= 6 - 0.
\end{aligned}$$

Päteviä viivoittimia ja erityisesti merkkimäärältään pienimpiä päteviä viivoittimia suhteessa pituuteensa, on tutkittu jo pitkään. Erdös ja Gál [3] onnistuivat jo vuonna 1948 esittämään oikean kasvuluokan merkkimäärälle, minkä annetun pituinen pätevä viivoitin vähimmillään tarvitsee. Toisaalta viimeisin paras konstruktio on vuodelta 2020 (Pegg [8]). Viivoittimille on löydetty myös käytännön sovelluksia signaalinkäsittelyssä [13].

Kummassakin kappaleessa esitetään kappaleen oma kombinatorinen optimointiongelma:

- Paljonko koloja voi n-pituisessa osittaissanassa olla ilman, että osittaissanaan syntyy epätriviaaleja reunoja? Tämä ongelma haarautuu aakkostokoon mukaisesti äärettömän moneksi osaongelmaksi.

- Mikä on minimaalinen määrä merkittyjä pituuksia n-pituisessa pätevässä viivoittimessa?

Nämä ongelmat ovat luonteeltaan hyvin samanlaisia, vaikkakin teoreettinen viitekehys eroaa. Kummassakin ongelmassa yritetään samanaikaisesti konstruoida mahdollisimman hyviä ratkaisuehdokkaita, ja toisaalta todistaa teoreettisia rajoja mahdollisten ratkaisujen hyvyydestä. Käy ilmi, että ongelmien samankaltaisuus johtuu syvemmästä yhteenkuuluvuudesta, joka esitetään tämän työn loppupuolella.

Reunattomia osittaissanoja käsittelevässä kappaleessa esitetään ja todistetaan Emily Allenin, Francine Blanchet-Sadrin ja muiden ([1] ja [2]) tuloksia, erityisesti yksinkertaisten reunojen ja binäärisanojen täydelliset ratkaisut. Lisäksi tarkennetaan aakkostokoosta riippuvaa kolojen ylärajaa käyttäen graafiteoreettista argumenttia yksityiskohtaisemmin kuin aiemmin.

Viivoittimien kappale koostaa parhaat rajat harvojen viivoittimien merkkimääristä, ja sisältää vakiota vaille parhaimpien tulosten todistukset. Näihin kuuluu muunmuassa Erdösin ja Gálin raja-arvotulos [3] ja Leechin versio Rédein ja Rényin alarajasta ([4] ja [5]). Ylärajaa varten kappaleesta suuri osa käsittelee niinsanottua Wichmann-reseptiä, nimettynä kehittäjänsä Wichmannin mukaan [9], joka on käytössä nykytietämyksen parhaassa viivoitinkonstruktioissa. Wichmann-reseptin pätevyyden todistus on pitkä, eikä sitä kokonaisuutena esiinny kirjallisuudessa. Tämän työn täsmällisyyden vuoksi todistus on kuitenkin kirjoitettu kokonaan auki.

Ongelmien yhteyttä käsittelevässä kappaleessa käy ilmi, että yhteyden luominen tuottaa reunattomien osittaissanojen ongelmaan uusia parannettuja rajoja, kun aakkostokoko on vähintään neljä. Tämän lisäksi onnistutaan konstruoimaan vastaesimerkkejä aikaisemmin oikeiksi luultuihin tuloksiin, jotka reunattomien osittaissanojen kappaleessa esitetään konjektuureina.

2 Sanat ja osittaissanat

Tämä kappale määrittelee äärellisten sanojen ja osittaissanojen käsitteet. Sanakombinatoriikkaa tunteva lukia voi siirtyä suoraan reunoja käsittelevään kappaleeseen ja palata tarvittaessa takaisin tarkistamaan määritelmiä.

Määritelmä 1. Aakkoston A sana w on jono joukosta $A^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$. Jonon elementit kirjoitetaan peräkkäin ilman indeksejä erottavaa merkkiä. Jonoa jossa ei ole yhtään elementtiä kutsutaan tyhjäksi sanaksi ja merkitään symbolilla ϵ.

Määritelmässä aakkosto A on vapaasti valittava epätyhjä joukko. Aakkoston yli tehtyjen sanojen joukosta käytetään merkintää A^*. Tässä työssä joukon A jäseniä voidaan kutsua symboleiksi, kirjaimiksi tai merkeiksi. Sanan w pituus $|w|$ on sanan indeksien määrä, eli $|w| = n \iff w \in A^n$. Merkintöjä helpottava sopimus on, että $A^0 = \{\epsilon\}$ jolloin $|\epsilon| = 0$. Pituutta vastaavalla merkinnällä voidaan myös esittää sanassa esiintyvien symbolien määrää; merkintä $|w|_a$ tarkoittaa sanassa w esiintyvien a symbolien määrää.

Seuraava määritelmä on sanojen tyypillinen yhdistämisoperaatio.

Määritelmä 2. Jos u ja v ovat äärellisiä sanoja yli yhteisen aakkoston, merkintä uv tarkoittaa sanaa, jossa sanaa u seuraa sana v. Tätä yhdistelmää sanotaan sanojen u ja v tuloksi tai katenaatioksi.

Sanojen potenssi merkitsee kokonaislukutapauksessa sanan tuloa itsensä kanssa tavalliseen tapaan. Lisäksi epätyhjille sanoille määritellään rationaalipotenssi $w^{\frac{n}{m}}$ kaikille rationaaliluvuille, joissa $m = |w|$. Tässä merkinnässä poistetaan sanasta $w^{\lceil \frac{n}{m} \rceil}$ symboleita lopusta niin, että jäljellä olevassa sanassa $w^{\frac{n}{m}}$ on n symbolia.

Esimerkki 1. Sanojen aa ja bb tulot järjestyksestä riippuen ovat $aabb$ ja $bbaa$. Sanan aa kolmas potenssi on $(aa)^3 = aaaaaa$.

Esimerkki 2. Sanasta ab voidaan muodostaa rationaalilukupotenssit $(ab)^{\frac{n}{2}}$ kaikilla $n \geq 0$. Esimerkiksi $(ab)^{\frac{5}{2}} = ababa$.

Reunan käsite vertailee sanan etu- ja takaliitteitä keskenään. Määritellään ne seuraavaksi:

Määritelmä 3. Sana v on sanan w tekijäsana (eng. *factor*), jos on olemassa sanat u_1 ja u_2 joille $w = u_1 v u_2$. Jos edellisessä $u_1 = \epsilon$ kutsutaan sanaa v sanan w etuliiteksi (eng. *prefix*) ja jos vastaavasti $u_2 = \epsilon$ sanaa v kutsutaan sanan w takaliiteksi (eng. *suffix*). Tyhjää sanaa ϵ ja koko sanaa w kutsutaan triviaaleiksi tekijöiksi. Muita tekijöitä kutsutaan joko aidoiksi tekijöiksi tai epätriviaaleiksi tekijöiksi.

Tulevien kappaleiden kannalta olennaisin konsepti on osittaissanat. Osittaissanoissa aakkostoon lisätään uusi erikoismerkki, jonka tarkoitus on esittää sanasta puuttuvaa tai identifioimatonta merkkiä. Tällöin osittaissanoja voidaan pitää abstraktiona viottuneesta datasta.

Määritelmä 4. Olkoon A aakkosto ja $\diamondsuit \notin A$. Tällöin sanat $w \in (A \cup \{\diamondsuit\})^*$ ovat aakkoston A osittaisanoja. Symbolia $\diamondsuit$ kutsutaan tällöin koloksi (eng. *hole*).

Esimerkki 3. Sana $a\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit$ on osittaissana yli aakkoston $A = \{a, b\}$ ja tämän osittaissanan pituus on 5.

Kaikki sanat ovat siis osittaissanoja. Jos halutaan korostaa että jokin osittaissana on myös aidosti sana, voidaan sitä sanoa täydeksi sanaksi. Koloa kutsutaan symboliksi, mutta koloa ei kutsuta tässä tutkielmassa merkiksi tai kirjaimeksi jotta se erottuisi aakkoston varsinaisista jäsenistä. Osittaissanan pituus lasketaan aakkoston $A \cup \{\diamondsuit\}$ mukaan, eli $|\diamondsuit| = 1$.

Osittaissanojen kolo-symbolin voi mieltää sanan puuttuvana kirjaimena. Kuitenkin seuraavan määritelmän mukaan koloja voi toisaalta olla parempi ajatella jokerisymbolina. Tämän ajatuksen hyödyllisyys näkyy vielä selkeämmin osittaissanojen reunoja käsittelevässä kappaleessa. Osittaissanoihin kuuluu yhteensopivuuskäsite, jossa osittaissanan koloja sovitetaan johonkin aakkoston oikeaan kirjaimeen.

Määritelmä 5. Osittaissana w sopii osittaissanaan u jos $|w| = |u|$ ja vektoreina kaikissa indekseissä i pätee $w(i) = u(i)$ tai $w(i) = \diamondsuit$. Tällöin merkitään $w \subseteq u$.

Huomautus 1. Jos sana v sopii sanaan w, niin sanan v kaikilla alku- ja loppuliitteillä v' löytyy vastaava alku- ja loppuliitte w' sanasta w jolla sana v' sopii sanaan w'. Sanojen sopivuus määrittelee myös osittaisen järjestyksen osittaissanoille.

Esimerkki 4. Osittaissana $a\diamondsuit b$ yli aakkoston $\{a, b\}$ sopii sanoihin aab ja abb eli $a\diamondsuit b \subseteq aab$ ja $a\diamondsuit b \subseteq abb$. Kolo-symboli sopii mihin tahansa kirjaimeen.

3 Reunattomista osittaissanoista

Sanakombinatoriikassa täyden sanan reuna määritellään sanan aitona tekijänä, joka on sekä sen etu- että takaliite. Tämä määritelmä sisältyy yleisempään osittaissanojen reunan määritelmään.

Määritelmä 6. Sanalla w sanotaan olevan reuna u jos täysi sana u on epätyhjä, $u \neq w$ ja on olemassa sanat x ja y niin, että $w \subseteq ux$ ja $w \subseteq yu$. Jos reunan pituus on korkeintaan puolet koko sanan pituudesta, sanotaan reunan olevan yksinkertainen.

Osittaissanaa, jolla ei ole (yksinkertaisia) reunoja, kutsutaan (yksinkertaisesti) reunattomaksi. Jos osittaissana on yksittäinen symboli tai tyhjä sana, kutsutaan sitä triviaaliksi reunattomaksi sanaksi.

Esimerkki 5. Sanalla $w = aabbba$ on reuna a, joten w on yksinkertaisesti reunallinen. Sanalla abc ei ole reunoja. Sanalla $abcabcabc = (abc)^3$ on sekä kolmen että kuuden pituinen reuna.

Esimerkki 6. Osittaissanalla $w = a\diamondsuit b$ on reuna ab, sillä $w \subseteq abb$ ja toisaalta $w \subseteq aab$. Vaikka sanalla w on tosiaan reuna, ei kuitenkaan ole olemassa täyttä sanaa johon w sopii, jolla olisi reuna. Huomioidaan myös, että osittaissanalla w ei ole yksinkertaisia reunoja. Lyhin kolollinen reunaton osittaissana on $a\diamondsuit bc$.

Koska kolot sopivat kaikkiin symboleihin, kolojen lisääminen osittaissanaan tuottaa helposti reunoja. On luonnollista kysyä maksimaalista määrää koloja mitä annettua pituutta olevassa reunattomassa osittaissanassa voi olla. Yksinkertaisen reunan sekä yleisen reunan binäärisanojen tapauksissa vastaus tiedetään täsmällisten konstruktioiden perusteella. Konstruktiot löysivät ja parhaaksi todistivat Blanchet-Sadri et al artikkelissaan [1].

Määritellään funktiot laskemaan maksimaalista kolojen määrää reunattomassa osittaissanassa. Merkinnät ovat samat kuin artikkelissa [2].

Määritelmä 7. Merkintä $\mathrm{HSB}(n)$ tarkoittaa maksimaalista määrä koloja mitä yksinkertaisesti reunattomassa n-pituisessa binäärisessä osittaissanassa voi olla. Vastaavasti olkoon $\mathrm{HB}_k(n)$ maksimaalinen määrä koloja joita voi olla reunattomassa n-pituisessa sanassa yli aakkoston A, jossa $|A| = k$.

Välitön huomio on, että nämä funktiot ovat kasvavia.

Huomautus 2. Sekä HB_k että $\mathrm{HSB}(n)$ ovat kasvavia funktioita. Olkoon a ja b eri kirjaimia ja w osittaissana niin, että sana awb on (yksinkertaisesti) reunaton. Silloin sana $awbb$ on yhtä pidempi sana joka on (yksinkertaisesti) reunaton ja siinä on yhtä monta koloa kuin sanassa awb. Reunattomuus nähdään huomiolla, että yhden pituista reunaa ei ole ja $n > 1$ pituinen reuna tuottaisi sanaan awb reunan jonka pituus on $n - 1$.

Seuraavien kappaleiden tarkoitus on tutkia näitä funktioita ja osittaissanojen reunojen ominaisuuksia. Funktioiden arvoja on taulukoitu liitteissä taulukkoon A. Määritellään tarvittava optimaalisuuskäsite. Muutamia optimaalisia viiden aakkosen sanoja on myös listattu liitteissä.

Kuva 1: Sanan *abc* vertailugraafit

Määritelmä 8. Aakkoston A (yksinkertaisesti) reunatonta osittaissanaa w kutsutaan optimaaliseksi jos $|A| = k$ ja $|w|_\diamondsuit = \mathrm{HB}_k(|w|)$ tai yksinkertaisen reunan tapauksessa $|w|_\diamondsuit = \mathrm{HBS}(|w|)$. Kontekstista on selvää, kumman reunatyypin suhteen sanaa käytetään.

Sekä yksinkertaisen että yleisen reunan tapausta voidaan tutkia graafien avulla. Jotta n-pituinen osittaissana $w = a_0a_1a_2 \ldots a_{n-1}$ on reunaton, on sen täytettävä $n - 1$ vertailuehtoa, jossa kaikki mahdolliset reunapituudet estyvät vertailemalla kahta yhteensopimatonta kirjainta, jotka etu- ja takaliitteissä ovat samassa kohdassa. Esimerkiksi sanassa *abc* yhden pituinen reuna estyy, koska voimme vertailla kirjaimia indekseissä 0 ja 2, ja kahden pituinen reuna estyy vertailemalla kirjaimia kohdassa 0 ja 1 tai 1 ja 2. Tässä tapauksessa kelpaavat vertailut voidaan esittää kahdenlaisena graafina, joita tämän tutkimuksen aikana kutsutaan vertailugraafeiksi. Sanan *abc* vertailugraafit esiintyvät kuvassa 1, jossa kaaret edustavat yhden ja kahden pituisten reunojen vertailua.

Määritelmä 9. Osittaissanan w (yksinkertainen) vertailugraafi $G = (V, E)$ on graafi, jossa solmut V ovat sanan w kirjaimien indeksit ja

- kaikilla kaarilla $(i, j) \in E$ sanassa w esiintyy indekseissä i ja j yhteensopimattomat kirjaimet,
- jos kaaret (i, j) ja (k, l) ovat kaksi erillistä joukon E alkiota, niin $|i - j| \neq |k - l|$ ja
- jos jokin kaarijoukko E' täyttää edelliset kaksi ehtoa, niin $|E'| \leq |E|$.

Erityisesti yleisen reunan kappaleessa käsitellään vertailugraafeja. Kyseisessä kappalessa on myös lisää kuvia osittaissanojen vertailugraafeista.

3.1 Yksinkertainen reuna

Kysymys maksimaalisten kolojen määrästä yksinkertaisesti reunattomassa osittaissanassa on ratkaistu täydellisesti. Tässä kappaleessa esitetään ratkaisu, mutta yksinkertaisia reunoja ei käsitellä tutkimuksen myöhemmissä kappaleissa. Myöhemmin esitettävä yhteys harvoihin viivoittimiin ei päde yksinkertaisiin reunoihin optimaalisten osittaissanojen suhteen.

Tässä kappaleessa rajoitutaan binääriaakkostoon. Rajoitus ei vähennä yleisyyttä seuraavan yksinkertaisen lemman perusteella

Lemma 1. *Kaikkia yksinkertaisesti reunattomia osittaissanoja w vastaan on olemassa yksinkertaisesti reunaton binäärinen osittaissana w' jolla $|w|_\diamondsuit = |w'|_\diamondsuit$.*

Todistus. Olkoon w yksinkertaisesti reunaton osittaissana yli mielivaltaisen aakkoston. Olkoon osittaissanat u ja v osittaissanan w tekijöitä niin, että $|u| = \lfloor \frac{|w|}{2} \rfloor$ ja $w = uv$. Konstruoidaan osittaissanat u' ja v' vaihtamalla kaikki kirjainesiintymät sanasta u kirjaimeksi a ja samoin sanasta v kirjaimeksi b. Nyt sanassa $w' = u'v'$ on yhtä monta kirjainta kuin sanassa w, ja sanat w' ja w ovat myös yhtä pitkät. Lisäksi sana w' on yksinkertaisesti reunaton, sillä jos sanoilla u' ja v' on yhteensopivat etu- ja takaliitteet, vastaavanpituiset etu- ja takaliitteet ovat yhteensopivia sanoissa u ja v, mikä on ristiriidassa sanan w yksinkertaisesti reunattomuutta vastaan. □

Aloitetaan varsinainen kappale lauseella, joka näyttää esimerkin 6 mukaisen reunallisen, mutta ei yksinkertaisesti reunallisen, sanan olevan välttämättä kolollinen osittaissana. Todistuksen perimmäinen idea on siinä, että jos sanalla w on epätriviaalit jaot $w = av = vb$ jossa $|v| > \frac{|w|}{2}$, niin tietenkin sanan v tulee alkaa ja loppua samalla tavalla.

Lause 1 ([1])**.** *Reunallisen osittaissanan w pienin reuna v on itse reunaton. Lisäksi jos sanan w etuliite (vastaavasti takaliite) u on reunaton ja sopii pienimpään osittaissanan w reunaan v, niin $|u| = |v| \leq \frac{|w|}{2}$.*

Todistus. Oletetaan, että osittaissanan w pienimmällä reunalla v on edelleen reuna v'. Tällöin $w \subseteq vu \subseteq v'u'$ ja $w \subseteq tv \subseteq t'v'$ joillakin osittaissanoilla u, u', t ja t', eli erityisesti v' on myös osittaissanan w reuna. Tämä on ristiriidassa reunan v minimaalisuuden kanssa. Ensimmäinen väite pitää siis paikkansa.

Toista väitettä varten oletetaan, että osittaissanan w pienin reuna v on kooltaan suurempi kuin sanan w puoliväli, eli $|v| > \frac{|w|}{2}$. Merkitään, että $w = ux$ niin, että $u \subseteq v$. Näytetään, että sanalla u on reuna. Koska sana v on reuna, on olemassa jako $w = yu'$ jolla $u' \subseteq v$. Reunan v pituuden takia osittaissana u voidaan siis jakaa osiin $u = yu''$, jossa u'' on epätyhjä alkuliite sanasta u'. Tällöin on olemassa sanan v alkuliite v' jolle $u'' \subseteq v'$. Kokonaisuudessaan siis $u = yu'' \subseteq v = av'$ jollakin sanalla a. Toisaalta sanan v alkuliitteet sopivat myös sanan u alkuliitteisiin, joten on olemassa sana b jolla $u \subseteq v'b$. Yhteenvetona huomataan, että sana v' on sanan u reuna. Vastaava todistus toimii takaliite-tapauksessa. □

Lauseesta seuraa yksinkertainen huomio, joka sopiakseen yleisempään lauseeseen on todistettu hieman monimutkaisesti.

Seuraus 1 ([1])**.** *Reunallinen täysi sana on yksinkertaisesti reunallinen.*

Todistus. Olkoon v sanan w pienin reuna. Edellisen lauseen mukaan v on reunaton. Lisäksi koska sana w on täysi, pätee $w = vb \subseteq vb$ jollakin sanalla b. Nyt sana v on reunaton etuliite, joka sopii reunaan v ja silloin lauseen mukaan seuraa, että $|v| \leq \frac{|w|}{2}$. □

Esimerkki 7 esittää lyhyitä optimaalisia reunattomia osittaissanoja. Esimerkistä voi yrittää löytää jo jonkinlaista järjestelmänmukaisuutta, mutta esimerkin sanojen lyhyyden takia sitä voi olla vielä vaikea huomata.

Esimerkki 7. Alle 8 merkkiä pitkiä olevia yksinkertaisesti reunattomia osittaissanoja, joissa on maksimaalinen määrä koloja.

$$\begin{aligned}
w_1 &= \diamondsuit \\
w_2 &= ab \\
w_3 &= a\diamondsuit b \\
w_4 &= a\diamondsuit bb \\
w_5 &= a\diamondsuit\diamondsuit bb \\
w_6 &= a\diamondsuit\diamondsuit bbb \\
w_7 &= a\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit bbb \\
w_8 &= a\diamondsuit a\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit bb
\end{aligned}$$

Seuraavaksi esitetään lemman muodossa yläraja funktiolle HBS parillisen pituisten sanojen tapauksessa. Tämä todistaa myöhemmän konstruktion täsmälliseksi. Esimerkistä 7 voi nähdä todistuksen kahden eri tapauksen erottumisen toisistaan. Todistus käyttää vertailugraafeja.

Lemma 2 ([2])**.** *Kaikilla* $l \geq 1$ *pätee* $\mathrm{HSB}(2l) \leq 2l - (\lfloor\sqrt{l}\rfloor + \lceil\frac{l}{\lfloor\sqrt{l}\rfloor}\rceil)$.

Todistus. Yksinkertaisesti reunattoman osittaissanan vertailugraafissa on ainakin $\lfloor\frac{|w|}{2}\rfloor$ kaarta, jotka edustavat yksinkertaisten reunojen estymistä. Toisaalta kaari voi esiintyä vain yhteensopimattomien kirjainten indeksien välillä, joten binäärisen osittaissanan w vertailugraafissa on korkeintaan $|w|_a\,(|w| - |w|_a - |w|_\diamondsuit)$ kaarta. Saadaan ehto

$$\left\lfloor\frac{|w|}{2}\right\rfloor \leq |w|_a\,(|w| - |w|_a - |w|_\diamondsuit),$$

jonka toteuttavat kaikki yksinkertaisesti reunattomat binääriset osittaissanat. Sijoitetaan oletus $|w| = 2l$ ja ratkaistaan osittaissanan kolojen määrä,

$$|w|_\diamondsuit \leq \left\lfloor 2l - |w|_a - \frac{l}{|w|_a}\right\rfloor = 2l - \left\lceil |w|_a + \frac{l}{|w|_a}\right\rceil.$$

Jotta yläraja saavuttaa maksimiarvon, tulee lauseke $\lceil |w|_a + \frac{l}{|w|_a}\rceil$ minimoida suhteessa kokonaislukuun $|w|_a$, joka on korkeintaan luvun l suuruinen. Ilman kattofunktiota ja kokonaislukurajoitetta minimi saavutetaan arvolla $|w|_a = \sqrt{l}$. Selvästi siis joko $\lfloor\sqrt{l}\rfloor$ tai $\lceil\sqrt{l}\rceil$ on paras kokonaislukuvalinta.

Verrataan valintoja toisiinsa suoraan. Olkoon $l = m^2 + t$ jollakin $0 \leq t \leq 2m$.

Jos $t = 0$, kummatkin vaihtoehdot antavat saman tuloksen. Muuten:

$$\begin{aligned}
&\lceil\sqrt{l}\rceil + \left\lceil\frac{l}{\lceil\sqrt{l}\rceil}\right\rceil - \left(\lfloor\sqrt{l}\rfloor + \left\lceil\frac{l}{\lfloor\sqrt{l}\rfloor}\right\rceil\right)\\
&= 1 + \left\lceil\frac{l}{\lceil\sqrt{l}\rceil}\right\rceil - \left\lceil\frac{l}{\lfloor\sqrt{l}\rfloor}\right\rceil\\
&= 1 + \left\lceil\frac{m^2+t}{m+1}\right\rceil - \left\lceil\frac{m^2+t}{m}\right\rceil\\
&= 1 + \left\lceil\frac{(m+1)^2+t-2m-1}{m+1}\right\rceil - m - \left\lceil\frac{t}{m}\right\rceil\\
&= 2 + \left\lceil\frac{t-2m-1}{m+1}\right\rceil - \left\lceil\frac{t}{m}\right\rceil\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että muuttujan t ollessa välillä $m < t \leq 2m$ saa toisiksi viimeinen rivi muodon $2-0-2$, ja jos taas $0 < t \leq m$, niin toisiksi viimeinen rivi on $2-1-1$. Täten valinta $|w|_a = \lfloor\sqrt{l}\rfloor$ kelpaa ja lauseen väite seuraa. □

Lause 2 ([2])**.** *Kaikilla luvuilla $l \geq 1$ pätee*

$$\mathrm{HSB}(2l) = 2l - \left(\lfloor\sqrt{l}\rfloor + \left\lceil\frac{l}{\lfloor\sqrt{l}\rfloor}\right\rceil\right).$$

Lisäksi $\mathrm{HSB}(1) = 1$ *ja* $\mathrm{HSB}(2l+1) = \mathrm{HSB}(2l) + 1$.

Todistus. Lemmassa 2 näytettiin seuraavan konstruktion olevan paras mahdollinen parillisen pituisille sanoille. Konstruktion sana on

$$w = (a\diamondsuit^{\lfloor\sqrt{l}\rfloor-1})^{\frac{l}{\lfloor\sqrt{l}\rfloor}}\diamondsuit^{l-\lfloor\sqrt{l}\rfloor}b^{\lfloor\sqrt{l}\rfloor},$$

missä rationaalinen potenssi tulkitaan määritelmän 2 mukaisesti.

Sanan w pituus on siten $l + (l - \lfloor\sqrt{l}\rfloor) + \lfloor\sqrt{l}\rfloor = 2l$ ja siinä on $\lceil\frac{l}{\lfloor\sqrt{l}\rfloor}\rceil + \lfloor\sqrt{l}\rfloor$ kappaletta kirjaimia, joten koloja on lauseen mukainen määrä. Jäljelle jää näyttää, että sana w on yksinkertaisesti reunaton. Jos tarkastellaan sanasta w takaliitettä jonka pituus on k ja $\lfloor\sqrt{l}\rfloor < k \leq l$, ja sitä vastaavan pituista etuliitettä, huomataan että takaliite loppuu $\lfloor\sqrt{l}\rfloor$ pituiseen osioon kirjainta b, ja taasen etuliitteen viimeisessä vastaavanpituisessa pätkässä on oltava kirjain a. Jos taas takaliitteen pituus on pienempi, siinä ei ole koloja lainkaan. Kummassakin tapauksessa etuliitteet eivät sovi takaliitteisiin, jos niiden pituudet ovat korkeintaan l. Tämä yhdessä lemman 2 kanssa todistaa väitteen parillisten lukujen tapauksessa. Parittomanpituiset yksinkertaisesti reunattomat sanat saadaan parillisista laittamalla sanan puoliväliin lisäkolo, sillä keskellä oleva sana ei vaikuta yksinkertaisiin reunoihin. Tällöin siis parittomille sanoille pätee $\mathrm{HSB}(2l+1) = \mathrm{HSB}(2l) + 1$. □

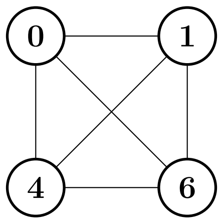
Esimerkki 8. Konstruoidaan lauseen 2 kaavalla pituutta 20 ja 21 olevat yksinkertaisesti reunattomat sanat, joissa on maksimaalinen määrä koloja.

$$
\begin{aligned}
\lfloor \sqrt{10} \rfloor &= 3 \\
w(20) &= (a\diamondsuit^2)^{\frac{10}{3}}\diamondsuit^7 b^3 \\
&= a\diamondsuit\diamondsuit a\diamondsuit\diamondsuit a\diamondsuit\diamondsuit a\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit bbb \\
w(21) &= (a\diamondsuit^2)^{\frac{10}{3}}\diamondsuit\diamondsuit^7 b^3 \\
&= a\diamondsuit\diamondsuit a\diamondsuit\diamondsuit a\diamondsuit\diamondsuit a\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit bbb
\end{aligned}
$$

3.2 Yleinen reuna

Blanchet-Sadri et al. [1] konstruoivat ja todistivat optimaaliset reunattomat binääriset osittaissanat. Myöhemmin sanojen optimaalisuudelle löydettiin graafiteoreettinen todistus [2]. Tässä kappaleessa esitetään siis optimaaliset binäärisanat sekä tutkitaan graafiteoreettisen argumentin rajoja isommilla aakkostoilla. Yleisiin reunoihin palataan myös viivoitinkappaleen jälkeen.

Vertailugraafin määritelmästä 9 seuraa suoraan, että n-pituisen sanan vertailugraafissa on korkeintaan n solmua ja $n-1$ kaarta ja lisäksi tämä $n-1$ kaarta esiintyy täsmälleen kaikilla reunattomilla osittaissanoilla. Graafi on myös k-väritettävä, jossa k on käytettävän aakkoston koko. Sanan w vertailugraafi ei myöskään ole välttämättä yksikäsitteinen kuten kuvassa 1. Vertailugraafista voidaan tehdä yksittäistapauksissa lisää huomioita, esimerkiksi kuvassa 2 nähdään, että osittaissanan $ab\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit d$ vertailugraafista syntyi täysi graafi jossa on kaikki mahdolliset kaaret jokaisen solmun välillä. Tämä tarkoittaa sitä, että riippumatta aakkosmäärästä seitsemänpituisessa reunattomassa osittaissanassa voi olla korkeintaan kolme koloa.



Kuva 2: Osittaissanan $ab\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit d$ vertailugraafi

Käyttäen yllä olevaa huomiota solmujen minimimäärästä ja rajoittumalla binääriaakkostoon graafeista voidaan suhteellisen helposti todistaa seuraava raja:

Lause 3 ([2]). *Kaikilla $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{HB}_2(n) \leq \left\lfloor n - 2\sqrt{n-1} \right\rfloor.$$

Todistus. Olkoon w binäärinen reunaton osittaissana ja merkitään $|w| = n$. Koska osittaissana w on reunaton, sen vertailugraafissa G on $n-1$ kaarta. Toisaalta osittaissanassa w on $|w|_a$ kappaletta kirjainta a ja $|w|_b = n - |w|_a - |w|_\diamondsuit$ kappaletta kirjainta b. Graafissa G voi esiintyä kaari vain sellaisten indeksiparien välillä, joista toisessa esiintyy kirjain a ja toisessa b, eli mahdollisia kaaria on $|w|_a\,(n-|w|_a-|w|_\diamondsuit)$

kappaletta, joten $n-1 \leq |w|_a (n - |w|_a - |w|_\diamondsuit)$. Tästä voidaan ratkaista kolojen lukumäärä, eli

$$|w|_\diamondsuit \leq n - |w|_a - \frac{n-1}{|w|_a}.$$

Derivaatan avulla laskettuna suurin yläraja saavutetaan, kun asetetaan $|w|_a = \sqrt{n-1}$ välittämättä siitä onko kyseessä kokonaisluku. Väitteen yläraja seuraa sijoituksen jälkeen, kun huomioidaan, että $|w|_\diamondsuit$ on kokonaisluku. □

Yläraja saavutetaan seuraavalla konstruktiolla

Lemma 3 ([2])**.** *Kaikilla $i, j, l \geq 0$ kun $l \leq i$ sana*

$$(a\diamondsuit^i)^j a\diamondsuit^l ab^{i+1}$$

on reunaton.

Todistus. Tarkastellaan mahdollisia etuliitteitä kahdessa eri tapauksessa, ja todetaan, ettei kumpikaan tapaus voi muodostaa reunaa.

- Muotoa $(a\diamondsuit^i)^x$ olevissa etuliitteissä on korkeintaan i koloa peräkkäin. Täten takaliitteessä olevat b kirjaimet eivät voi sopia etuliitteeseen, sillä etuliitteen koloja on aina ainakin yksi vähemmän peräkkäin kuin verrattavia b kirjaimia peräkkäin. Tämä tapaus kattaa pisimmillään etuliitteen $(a\diamondsuit^i)^j a\diamondsuit^l = (a\diamondsuit^i)^{\frac{j(i+1)+l+1}{i+1}}$.
- Etuliitteet muotoa $(a\diamondsuit^i)^j a\diamondsuit^l ab^x$ loppuvat muotoon ab^x jollakin $x \geq 0$, kun taas verrattavilla takaliitteillä on loppu b^{x+1}, eli nämäkään eivät sovi.

□

Lause 4 ([2])**.** *Kaikilla $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathrm{HB}_2(n) = \left\lfloor n - 2\sqrt{n-1} \right\rfloor.$$

Todistus. Konstruktio tapahtuu lemman 3 avulla, kun valitaan sopivat parametrit. Lattiafunktion takia parametrien valinnat eivät ole täysin suoraviivaisia, ja valinnat tuottavat kolme erilaista tapausta.

Tapaus 1: $n \geq 5$ ja $n = m^2 + 1$ jollekin kokonaisluvulle m. Tällöin kolojen tavoitemäärä on $m^2+1-2m = (m-1)^2$ joka saavutetaan sanalla $(a\diamondsuit^{m-1})^{m-1}ab^m = (a\diamondsuit^{m-1})^{m-2}a\diamondsuit^{m-1}ab^m$. Sana on lemman 3 mukaisesti reunaton ja sen pituus on $m(m-1)+1+m = m^2+1 = n$ ja siinä on $(m-1)^2$ koloa.

Tapaus 2: $n \geq 5$ ja $(m-1)^2+1 < n \leq m(m-1)+1 < m^2$ jollekin kokonaisluvulle m. Tällöin kolojen tavoitemäärä on $n-2m+1$ sillä $n-2m+1 < n-2\sqrt{m(m-1)} \leq n-2\sqrt{n-1} < n-2m+2$. Epäyhtälöiden vaiheet on helppo todentaa oikeiksi oletuksien avulla. Valitaan lemman 3 parametreiksi

$$\begin{aligned} i &= m-1, \\ j &= m-3 \text{ ja} \\ l &= n-m(m-2)-2, \end{aligned}$$

jolloin muodostettu sana on $(a\Diamond^{m-1})^{m-3}a\Diamond^{n-m(m-2)-2}ab^m$. Tapauksen yläraja pituudelle n näyttää, että $l \leq i$ ja sana on siis reunaton. Tämän sanan pituus on $m(m-3)+1+n-m(m-2)-2+1+m=n$ ja siinä on koloja $(m-1)(m-3)+n-m(m-2)-2=n-2m+1$ kappaletta, mikä oli aiemmin laskettu tavoitemäärä.

Tapaus 3: $n \geq 5$ ja $(m-1)^2+1 < m(m-1)+2 \leq n \leq m^2$ jollekin kokonaisluvulle m. Tämän tapauksen tavoitekolomäärä on $n-2m$, sillä $n-2m < n-2\sqrt{n-1} \leq n-2\sqrt{m(m-1)+1} < n-2m+1$. Kuten edellisessä tapauksessa, nämä ovat helppoja todentaa. Tässä tapauksessa parametrit ovat

$$\begin{aligned} i &= m, \\ j &= m-3 \text{ ja} \\ l &= n-(m+1)(m-2)-2, \end{aligned}$$

jotka tuottavat sanan $(a\Diamond^m)^{m-3}a\Diamond^{n-(m+1)(m-2)-2}ab^{m+1}$. Taas koska $l \leq i$, konstruoitu sana on reunaton. Sen pituus on $(m+1)(m-3)+1+n-(m+1)(m-2)-2+1+m+1=n$ ja koloja haluttu määrä $m(m-3)+n-(m+1)(m-2)-2=n-2m$

Viimeisenä triviaali tapaus 4: $n < 5$. Lauseke antaa tällöin tavoitekolomääräksi 0. Riittää siis osoittaa, että ei ole olemassa neljän pituista binääristä reunatonta osittaissanaa jossa on kolo. Kun huomioidaan, että reunattomassa sanassa alku- ja loppusymbolit tarvitsevat olla eri kirjaimet, ja symmetrian nojalla kolo voidaan olettaa olevan indeksissä 1, saadaan kirjainvaihtoa lukuunottamatta vaihtoehdot $a\Diamond ab$ ja $a\Diamond bb$, joista kumpikaan ei ole reunaton. □

Vertailugraafien avulla saatiin siis ratkaistua täsmällinen lauseke funktiolle HB_2. Yleisen aakkoston tapauksessa voidaan todistaa lauseen 3 mukainen aakkoston koosta riippuva yläraja, mutta valitettavasti raja huononee huomattavasti aakkostokoon kasvaessa. Todistuksessa käytettävä graafi G_{max} on Turánin graafi, jolla on yleisempääkin mielenkiintoa graafiteoriassa ja johon liittyy ns. Turánin lause. Turánin lausetta ei tarvita tässä tutkielmassa, mutta siitä voi lukea kirjasta [12].

Lause 5 ([2], poislukien tarkennus)**.** *Kaikille $k \geq 2$ ja $n \geq 0$ pätee*

$$\mathrm{HB}_k(n) \leq \left\lfloor n - \sqrt{\frac{2k}{k-1}(n-1)} \right\rfloor.$$

Lisäksi edellisen tarkennuksena, kun merkitään $n - \mathrm{HB}_k(n) = qk + r$ jollekin q ja $r < k$, niin

$$\mathrm{HB}_k(n) \leq \left\lfloor n - \sqrt{\frac{2k}{k-1}(n-1) + \frac{kr-r^2}{k-1}} \right\rfloor.$$

Todistus. Kuten lauseen 3 todistuksessa, todetaan että reunattoman osittaissanan vertailugraafissa $G=(V,E)$ on $n-1$ kaarta. Olkoon w reunaton osittaissana yli aakkoston $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$. Merkitään $|w|=n$ ja $|w|_\Diamond = h$, jolloin sanan w vertailugraafissa on $n-h$ solmua. Konstruoidaan graafi $G_{max}=(V,E_{max})$, jossa on myös $n-h$ solmua, jossa jokainen solmu edustaa yhtä kirjainta $a_i \in A$ ja jokaisesta solmusta on kaari kaikkiin sellaisiin solmuihin, jotka edustavat jotain muuta kirjainta. Lisäksi valitaan graafin G_{max} solmujen edustus kirjaimilla niin, että kaarien määrä on maksimoitu. Silloin tietenkin $|E| \leq |E_{max}|$, josta todistuksen lopussa saadaan väitteen raja.

Olkoon graafissa G_{max} kirjaimella a_i edustettujen solmujen määrä $|a_i|$. Oletetaan, että joillakin $i \neq j$ kirjaimet jakautuvat epätasaisesti, eli $|a_i| \geq |a_j|+2$. Tällöin jos muutetaan yhden solmun edustuskirjain a_i edustuskirjaimeksi a_j ja vaihdetaan kaaret graafin G_{max} säännön mukaisiksi, saadaan $|a_i| - 1 - |a_j| \geq 1$ uutta kaarta, mikä on ristiriidassa graafin G_{max} konstruktion kanssa. Täten kaikki edustuskirjaimet esiintyvät mahdollisimman tasaisesti solmuissa. Tämä tieto riittää laskemaan kaarien määrän: Jaetaan $n - h$ solmua tasaisesti kaikkien aakkosten kesken ja merkitään $m = n - h = qk + r$ jollakin $0 \leq r < k$, missä k on käytettävän aakkoston koko. Näillä merkinnöillä graafissa G_{max} on r edustuskirjainta, joilla on merkitty $q + 1$ solmua, ja $k - r$ edustuskirjainta, joilla on merkitty q solmua. Kaarien määrä voidaan laskea parittamalla ensin yhtä isot edustusluokat ja lisäämällä ristitermi. Näin muodostettu lauseke sievenee seuraavanlaisesti:

$$
\begin{aligned}
&\binom{r}{2}(q+1)^2 + \binom{k-r}{2}q^2 + (k-r)r(q+1)q \\
=&\frac{1}{2}(r(r-1)(q+1)^2 + (k-r)(k-r-1)q^2 + 2(k-r)r(q+1)q) \\
=&\frac{1}{2}((kq+r)^2 - kq^2 - 2rq - r) \\
=&\frac{1}{2}(m^2 - k(\frac{(m-r)^2}{k^2}) - 2r(\frac{(m-r)}{k}) - r) \\
=&\frac{1}{2k}(km^2 - m^2 + 2mr - r^2 - 2mr + 2r^2 - rk) \\
=&\frac{1}{2k}(km^2 - rk - m^2 + r^2) \\
=&\frac{1}{2k}(km^2 - r^2k - m^2 + r^2 + r(r-1)k) \\
=&(1 - \frac{1}{k})\frac{m^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2}.
\end{aligned}
$$

Jokainen välivaihe on helppo todeta oikeaksi. Saadaan siis lopulta, että vertailugraafin kaarimäärä $n - 1$ on korkeintaan graafin G_{max} kaarien määrä eli epäyhtälönä

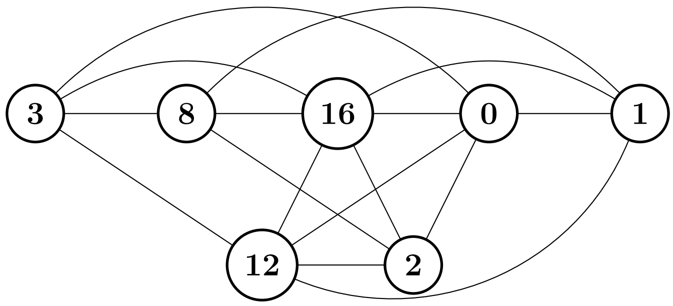
$$n - 1 \leq (1 - \frac{1}{k})\frac{(n-h)^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2}.$$

Tästä voidaan ratkaista kolojen määrä h, eli

$$h \leq n - \sqrt{\frac{2k}{k-1}(n-1) + \frac{kr - r^2}{k-1}}.$$

Koska $r < k$, lauseke suurenee väiteen mukaiseksi ylärajaksi kun arvioidaan $r = 0$. $\square$

Lemman 5 kahdesta ylärajasta jälkimmäinen toimii ensimmäisen tarkennuksena. Tämän käyttö vaatii lisäaskelia, sillä parametrin r laskemiseksi tulee muodostaa arvaus vastauksesta $\mathrm{HB}_k(n)$ etukäteen. Tähän voi käyttää ensimmäistä kaavaa. Kummankin rajan tehokkuus putoaa kun nostetaan aakkoston kokoa, ja voi erityisesti



Kuva 3: Sanan $abcd\diamondsuit^4 e\diamondsuit^3 f\diamondsuit^3 g$ vertailugraafi.

tuottaa heikkoja rajoja kun osittaissanan pituuden suhde on pieni aakkostokokoon verraten. Esimerkiksi parametreillä $n = 17, k = 9$ saamme tuloksen $\mathrm{HB}_9(17) \leq 11$ ensimmäisestä kaavasta. Tulos 11 huomataan mahdottomaksi, sillä jos se olisi oikea tulos, saataisiin jakojäännöstermiksi $r = 17 - 11 = 6$ ja tarkennettu epäyhtälö ei pidä paikkaansa. Tällöin tiedetään, että $\mathrm{HB}_9(17) \leq 10$. Kuvassa 3 nähdään tämän olevan tarkka arvo, sillä siinä on esitetty 17 symbolin osittaissana, jonka vertailugraafissa on 7 solmua ja 16 kaarta. Parametreillä $k = 5, n = 11$ saamme esimerkin jossa yläraja on ennen ja jälkeen tarkennuksen $\mathrm{HB}_5(11) \leq 6$. Todellinen arvo on $\mathrm{HB}_5(11) = 5$. Parametrein $n = 11, k = 5$ ja $h = 6$ muodostettu Turánin graafi sisältää vaaditut 10 kaarta, mutta sitä ei voida muodostaa vastaavaksi 11 pituiseksi osittaissanaksi.

Seuraava konstruktio antaa HB_k funktiolle helposti laskettavan alarajan. Konstruktio esiintyy tutkimusartikkelissa [1].

Lemma 4 ([1])**.** *Kaikilla kokonaisluvuilla $i, j \geq 0$ ja $k \geq 3$ pätee $\mathrm{HB}_k((i+1)(j+1)) \geq ij$.*

Todistus. Olkoon a, b, c eri merkkejä aakkostosta A ja $w = (a\diamondsuit^i)^j bc^i$ sana yli aakkoston A joillakin $i, j \geq 0$. Sana w on reunaton, sillä alle $(i+1)j+1$ pituisessa reunassa olisi etuliitteitä katsoen viimeisen $i+1$ merkin joukossa merkki a, jota ei voida sovittaa sanan w takaliitteeseen. Pidempi reunus taasen loppuisi etuliitteitä katsoen merkkeihin $bc^{i'}$ jossa taas kirjainta b ei voida sovittaa sanan w takaliitteeseen c^i.

Nähdään että $|w| = (i+1)j + 1 + i = (i+1)(j+1)$ ja sanassa w on ij koloa, joten väitetty alaraja pitää paikkansa. □

Blanchet-Sadri et al. [1] antoivat myös todistuksen lemman 4 konstruktion optimaalisuudesta kun $i = j$. Esitetään väite konjektuurina, sillä se näytetään vastaesimerkin perusteella vääräksi myöhemmin tämän tutkielman lauseessa 12.

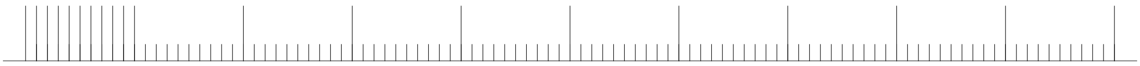
Konjektuuri 1. Lemman 4 konstruktio tuottaa optimaalisia sanoja, kun $i = j$. Erityisesti siis kaikille $i > 1$ pätee $\mathrm{HB}_k((i+1)^2) = i^2$.

Lause 12 antaa myös yllättävän vastaesimerkin Allen et al. [2] esittämään todistukseen seuraavasta väitteestä.

Konjektuuri 2. Kaikille $n > 0$ pätee $\mathrm{HB}_k(n+1) \leq \mathrm{HB}_k(n) + 1$.

4 Harvat viivoittimet

Tutkielman huomio poistuu hetkellisesti osittaissanojen maailmasta ja siirtyy viivoittimien maailmaan. Kombinatoriset viivoittimet ovat suora abstraktio koulusta tutuista viivoittimista, joilla voidaan pituuksia vertailemalla viivoittimeen merkittyjä merkkejä. Tämän tutkielman puitteissa viivoittimiin liittyvä pääkysymys on merkkien minimaalinen määrä pätevässä viivoittimessa. Harvojen viivoittimien harrastajat yleisesti ajattelevat, että paras konstruktio on löydetty (Pegg [8]), mutta tämän tutkielman kirjoitushetkellä väitteelle ei ole todistusta. Aloitetaan viivoittimiin tutustuminen esimerkillä.



Kuva 4: Esimerkin 9 mukainen viivoitin. Kuvan generointiin on käytetty osin Peggin koodia [8].

Esimerkki 9. Kuvitellaan metrin pituinen mittatikku, jossa on sentin välein merkkejä etäisyyksien mittaamiseksi. Tällöin mitalla voidaan mitata etäisyydet $[0, 100]$ sentin välein, mutta näiden etäisyyksien mittaamiseksi osa merkeistä eivät ole välttämättömiä. Mittatikku, jossa ensimmäiseen 50 senttiin asti on merkitty sentin välein merkki, kelpaa sekin välin $[0, 100]$ mittaamiseen, sillä etäisyydet $[0, 50]$ voidaan mitata normaaliin tapaan, mutta jos mitattava etäisyys on yli 50 senttiä voidaan mittatikku kääntää ympäri, ja mitata lopusta alkuun. Näin mitattava etäisyys saadaan selville vähemmillä merkeillä. Merkkejä voidaan vielä ennestään vähentää. Jos käytetään mittaamisen alkupisteenä mitä tahansa merkittyä arvoa, ongelmaa voi lähestyä yrittämällä suunnitella mahdollisimman vähän merkkejä käyttävän mittatikun. Esimerkiksi merkeillä $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90$ voidaan mitata kaikki etäisyydet ≤ 100, mutta ei ole selvää onko tämä konstruointimetodi paras. Kuvassa 4 esiintyy kyseinen mittatikku viivoittimena. Kuvassa ensimmäinen ja viimeinen merkattu arvo edustavat merkkejä 0 ja 100.

Esimerkissä kuvailtu ongelma osoittautuu haastavaksi sekä algoritmeille että teoreettiselle tutkimukselle, eikä yllä oleva helposti muodostettu esimerkki ole sadan sentin eikä yleensä minkään pituuden paras metodi.

4.1 Määritelmiä ja esimerkkejä

Tässä kappaleessa määritellään viivoittimet, pätevät viivoittimet ja harvat viivoittimet. Määritelmät ovat hyvin intuitiivisia ja helposti konkretisoitavissa todelliseen maailmaan.

Määritelmä 10. Viivoitin on vektori $v \in \mathbb{Z}^n$, jonka ensimmäisessä indeksissä on luku 0 ja vektorin arvot ovat aidosti kasvavia indeksin funktiona, eli $v(0) = 0$ ja $v(i) < v(j)$ kaikilla $0 \leq i < j < n$. Viivoittimen arvoja kutsutaan merkeiksi ja viivoittimen viimeistä merkkiä kutsutaan viivoittimen pituudeksi, jota merkitään myös l(v). Jos viivoittimessa on merkit a ja b, niin sanotaan että pituus $|a-b|$ voidaan mitata viivoittimella. Pituutta l oleva viivoitin on pätevä (eng. complete), jos sen merkeillä voidaan mitata kaikki kokonaispituusarvot väliltä $[1, l]$.

Viivoitin voidaan myös esittää joukkona kun esimerkiksi merkkien keskenäinen järjestys ei ole selvää. Tästä syystä tässä tutkielmassa viivottimia merkitään käyttäen kaarisulkeita, ja ei ole tärkeää tiedostaa onko kyseessä vektori vai joukko. Tällöin viivoittimen pituus on yhtäsuuri kuin sen suurin alkio.

Esimerkki 10. Pituutta kolme olevia viivoittimia on neljä erilaista. Ne ovat $\{0, 3\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$ ja $\{0, 1, 2, 3\}$. Näistä viimeistä kutsutaan täydeksi viivoittimeksi.

Esitetään myös määritelmän mukaiselle viivoittimen esitysmuodolle vaihtoehtoinen esitys, jota käytetään myöhemmin konstruktiossa:

Määritelmä 11. Viivoitin $v = \{v_1, v_2, v_3, \dots v_n\}$ voidaan esittää erotusmuodossa $v^- = (v_2 - v_1, v_3 - v_2, \dots, v_n - v_{n-1})$. Erotusmuodossa siis esitetään peräkkäisten merkkien välien pituudet merkkien sijaan.

Toisin kuin määritelmän mukaisessa merkintätavassa, erotusmuotoisessa viivoittimessa sama arvo voi esiintyä useamman kerran sekä merkkien järjestys on merkityksellinen. Tämä mahdollistaa lyhyemmän merkintätavan. Jos erotus e toistuu erotusmuodossa viivoittimessa v^- määrän m kertaa peräkkäin, voidaan nämä toistot korvata tekstissä merkinnällä e^m. Esimerkiksi täysi viivoitin voidaan esittää muodossa (1^n). Peräkkäisiä yhtäsuuria erotuksia kutsutaan tästä eteenpäin osioiksi

Esimerkki 11. Erotusmuotoinen viivoitin $(1, 3^2, 2)$ tarkoittaa määritelmän mukaista viivoitinta $\{0, 1, 4, 7, 9\}$. Tämä on pätevä viivoitin. Erotusmuodossa on 3 osiota, 1, 3^2 ja 2.

Päteviä viivoittimia voi jatkaa pidemmiksi päteviksi viivoittimiksi seuraavan lauseen mukaisesti. Tätä tarvitaan myöhemmin Wichmannin [9] konstruktion täydentämiseksi.

Lemma 5. [9] *Olkoon v erotusmuotoinen pätevä viivoitin, jonka ensimmäinen osio on 1^r. Tällöin viivoitin v voidaan jatkaa pidemmäksi päteväksi viivoittimeksi v' lisäämällä viimeisen osion jälkeen osio l^m, missä $l \leq r + 1$.*

Todistus. Tulee vain osoittaa, että viivoitin v' on edelleen pätevä. Viivoittimessa v' voidaan edelleen mitata kaikki samat pituudet kuin viivoittimessa v. Viivoittimen v pituutta pidemmät mitat viivoitimella v' pystyy mittaamaan seuraavasti. Viivoittimen alusta valitaan ensimmäinen sellainen osion l^m merkki, että mitattava etäisyys on pienempi tai yhtäsuuri kuin pituus viivoittimen alusta valittuun merkkiin. Nyt mikäli näin saatu etäisyys on suurempi kuin haluttu etäisyys, koska osiossa l^m merkkien etäisyys $l \leq r + 1$, voi haluttu etäisyys olla korkeintaan r pienempi kuin saavutettu etäisyys. Nyt voidaan alun 1^r osiosta siirtyä oikealle korkeintaan r merkkiä, jotta saadaan mitattua tavoiteltu mitta. □

Esimerkki 12. Erotusmuotoista viivoitinta $(1^3, 4, 2)$ voidaan jatkaa esimerkiksi viivoittimiksi $(1^3, 4, 2, 4)$ tai $(1^3, 4, 2, 3^3)$. Nämä viivoittimet ovat kaikki päteviä, ja määritelmän mukaisessa esityksessä ne ovat

$$\{0, 1, 2, 3, 7, 9\}$$
$$\{0, 1, 2, 3, 7, 9, 13\} \text{ ja}$$
$$\{0, 1, 2, 3, 7, 9, 12, 15, 18\}.$$

Määritelmä 12. Pätevää viivoitinta, jossa on minimaalinen määrä merkkejä pituuteensa nähden kutstutaan harvaksi viivoittimeksi (eng. sparse ruler).

Huomautus 3. Harvan viivoittimen nimeämiskäytännöt eivät ole standardisoituneet. Turhan toiston välttämiseksi tässä työssä käytetään sanoja "pätevä viivoitin" ja "harva viivoitin" kuten määritelty. Yleisemmin käytössä oleva nimeämiskäytäntö on nimetä kaikki pätevät viivoittimet harvoiksi viivoittimiksi ja kutsua edellisen määritelmän mukaista harvaa viivoitinta minimaaliseksi harvaksi viivoittimeksi.

Esimerkki 13. Viivoitin $\{0, 1, 4, 6\}$ on pätevä kuuden pituinen viivoitin. Koska kuuden pituista viivoitinta ei voi tehdä päteväksi käyttäen vain kolmea merkkiä, kyseinen viivoitin on harva viivoitin.

Funktiota HB_k vastaava funktio viivoittimien maailmassa on funktio joka laskee merkkien määrän n pituisessa harvassa viivoittimessa.

Määritelmä 13. Merkintä $\mathrm{M}(n)$ tarkoittaa n pituisen harvan viivoittimen merkkimäärää.

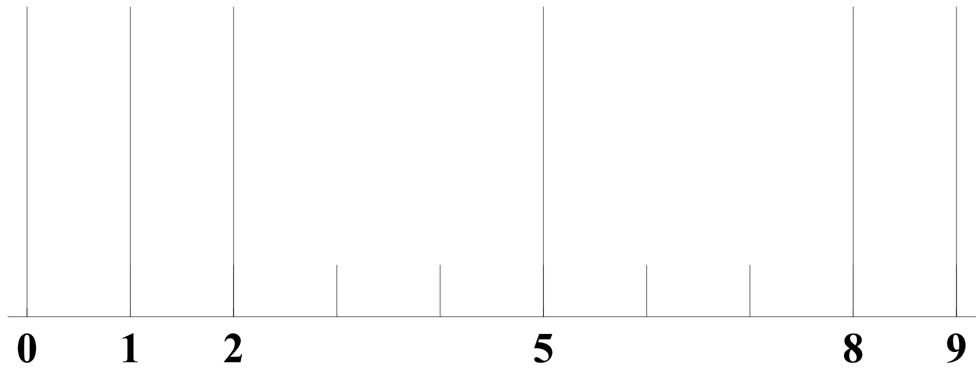
Huomioidaan, että yleisen merkintätavan mukaisesti viivoittimista lasketaan merkiksi myös viivoittimen alun 0 merkki ja päättävä merkki $l(v)$.

Johdannon esimerkissä 9 esitetty sadan sentin mittatikun konstruktio yleistyy minkä tahansa pituiseksi päteväksi viivoittimeksi. Kyseinen konstruktio antaa funktiolle M ylärajaksi neliöjuurilausekkeen, jolloin tiedetään, että $\mathrm{M}(n) = \mathcal{O}(\sqrt{n})$. Tämä osoittautuu seuraavan kappaleen aikana tarkaksi asymptoottiseksi kasvuluokaksi, vaikkakin johdannon metodi ei ole optimaalinen. Esitetään silti samantapainen konstruktio lauseena, sillä se tuottaa varsin hyviä lyhyen pituuden viivoittimia.

Lemma 6. *Kaikilla $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{M}(n) \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor + \left\lceil \frac{n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \right\rceil.$$

Todistus. Aloitetaan muodostamalla erotusmuotoinen täysi viivoitin $(1^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1})$. Lauseen 5 mukaisesti tätä viivoitinta voidaan jatkaa päteväksi viivoittimeksi laittamalla mielivaltainen määrä $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ pituisia erotuksia loppuun. Laitetaan niitä mahdollisimman monta kuitenkin niin, että aikaansaadun viivoittimen pituus ei yletä lukua n. Näinollen jatkoilla on käytettävinään indeksikohtia $n + 1 - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ kappaletta, missä lauseke saadaan laskemalla viivoittimen mahdolliset indeksit $[0, n]$ ja vähentämällä



Kuva 5: Pätevä viivotin $\{0,1,2,5,8,9\}$ on muodostettu lemman 6 mukaisesti. Kuvan generointiin on käytetty osin Peggin koodia [8].

siitä jo alusta käytetyt indeksit. Jatkeiden määrä saadaan kun jaetaan tämä jatkeiden pituudella $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Jos jako ei mene tasan, tarvitsee vielä erikseen lisätä viimeinen merkki n viivoittimeen. Lopputulema on viivoitin, joka käyttää

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \left\lceil \frac{n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \right\rceil$$

merkkiä, eli harva viivoitin käyttää korkeintaan saman verran merkkejä. $\square$

4.2 Funktion M tiedetyt arvot ja asymptoottinen käytös

Harvojen viivoittimien määrittäminen algoritmisesti vaatii valtavia määriä laskenta-aikaa, ja funktion M arvot tunnetaankin tarkasti vain pituuteen 213 asti [10]. Tämän jälkeen tietokonelaskentaa on suoritettu vain ylärajojen saavuttamiseksi. Toisaalta tiedetyt teoreettiset alarajat eivät ole nykyisen ymmärryksen mukaan tarkkoja edes asymptoottisessa käytöksessä. P. Erdös ja I. Gál onnistuivat todistamaan, että lausekkeella $\frac{\mathrm{M}(n)^2}{n}$ on raja-arvo käyttämällä lukuteoreettisia työkaluja, joten funktion M raja-arvojen oikea muoto tiedetään. Kyseinen todistus liittää raja-arvon suoraan myös yksittäisiin viivoittimiin niin, että raja-arvo kertoo asymptoottisen käytöksen lisäksi yksittäisten viivoittimien merkkimäärästä.

Aloitetaan tiedettyjen arvojen tarkastelulla ja niistä saadulla yllättävällä tuloksella.

Lemma 7 ([10])**.** *Funktio* M *ei ole kasvava.*

Todistus. Tietokonehakujen tuloksena $\mathrm{M}(135) = 21$ ja $\mathrm{M}(138) = 20$. Haun on suorittanut ensimmäisenä Arch D. Robison vuonna 2014 (OEIS A046693 ja A103300 [10]) ja tulos on riippumattomasti verifioitu. Esimerkkeinä harvoista viivoittimista $\{0,1,2,3,4,5,6,65,68,71,74,81,88,95,102,109,116,123,127,131,135\}$ ja $\{0,1,2,3,7,14,21,28,43,58,73,88,103,111,119,127,135,136,137,138\}$. Näiden esimerkkien jälkeen lemman väitteen verifiointiin riittäisi todeta ettei ole olemassa 135 pituista pätevää viivoitinta, jossa on vain 20 merkkiä. $\square$

Funktiota M voisi kuvitella kasvavaksi, eikä tälle löydetylle vastaesimerkille tunneta selitystä. Ei myöskään tiedetä vastaavien esimerkkien määrää. Tämän esimerkin jälkeen tunnetuissa arvoissa nähdään useita vastaavia funktion M arvojen laskuja, mutta ei tiedetä muuttuuko funktio M kasvavaksi jonkin rajan jälkeen.

Seuraavaksi todistetaan funktion M asymptoottinen käytös. Alkuperäinen todistus Erdösilta ja Gálilta sisälsi pienen teknillisen virheen, joten todistus seuraa John Leechin korjattua versiota [4]. Seuraten Leechin esitystä tämän kappaleen loppuun asti aloitetaan lukujonojen ja viivoittimien indeksöinti luvusta 1.

Todistukseen tarvitaan lukuteoreettinen lemma, joka esitetään ilman todistusta. Lemman todistus viittaa projektiivisiin tasoihin, joiden esittely tämän työn puitteissa ei olisi tarkoituksenmukaista.

Lemma 8 (James Singer [6]). *Kaikille alkuluvuille p on olemassa lukujono*

$$0 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_{p+1} \leq p^2 + p + 1$$

niin, että erotukset $b_i - b_j$ tuottavat edustajat kaikille jäännösluokille modulo p^2+p+1.

Raja-arvotulokseen tarvittavaa laskentaa on siirretty toiseksi lemmaksi. Lemmassa luku δ_ϵ ei olisi välttämätön, eikä sitä esiinny Leechin esityksessä. Se kuitenkin helpottaa laskemista myöhemmin.

Lemma 9 ([3]). *Kaikilla $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ja $\epsilon \in (0,1)$ on olemassa luvut δ_ϵ ja $N(\epsilon, n)$ niin, että kaikilla $N > N(\epsilon, n)$ on olemassa alkuluku p jolle pätee*

$$\left(1 - \frac{\epsilon}{n+2}\right)\frac{N}{n+1} \overset{(a)}{\leq} p^2 + p + 1 \overset{(b)}{<} \frac{N}{n+1} \overset{(c)}{\leq} (p^2+p+1)\left(1 + \frac{\delta_\epsilon}{n+1}\right),$$

ja $\lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon = 0$

Todistus. Todistetaan ensin epäyhtälöt jotka ovat merkittynä merkeillä (a) ja (b).

Olkoon luku $\gamma > 0$ niin, että $(1+\gamma)^{-2} > 1 - \frac{\epsilon}{n+2}$. Alkulukulauseen seurauksena tällöin voidaan valita x_γ siten, että kaikilla $x > x_\gamma$ on olemassa alkuluku p_x niin, että

$$x \leq p_x < x(1+\gamma).$$

Tästä saadaan $x^2 + x + 1 \leq p_x^2 + p_x + 1 < (1+\gamma)^2(x^2+x+1)$. Edelleen valitaan x niin, että

$$N = (n+1)(1+\gamma)^2(x^2+x+1).$$

Tämä onnistuu, kun $N > N(\epsilon, n) = (n+1)(1+\gamma)^2(x_\gamma^2 + x_\gamma + 1)$, jossa γ valittiin riippumaan kiinnitetystä arvosta ϵ. Tällöin epäyhtälöt (a) ja (b) seuraavat suoraan sijoituksella, jossa epäyhtälöä (a) varten käytetään alussa valittua arvojen γ ja ϵ suhdetta.

Epäyhtälöä (c) varten valitaan luku δ_ϵ sellaiseksi, että

$$\left(1 + \frac{\delta_\epsilon}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\epsilon}{n+2}\right) \geq 1.$$

Tämä on mahdollista, sillä $(1-\frac{\epsilon}{n+2})>0$ ja selvästi δ_ϵ voidaan valita niin, että raja-arvo vaatimus $\lim_{\epsilon\to 0}\delta_\epsilon = 0$ täyttyy. Tämän valinnan jälkeen epäyhtälö (c) seuraa epäyhtälöstä (a):

$$\frac{N}{n+1} \leq \left(1-\frac{\epsilon}{n+2}\right)\frac{N}{n+1}\left(1+\frac{\delta_\epsilon}{n+1}\right) \overset{(a)}{\leq} (p^2+p+1)\left(1+\frac{\delta_\epsilon}{n+1}\right).$$

□

Lause 6 ([3])**.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{M}(n)^2}{n} = \inf_{t\in\mathbb{N}}\frac{(\mathrm{M}(t)+2)^2}{t+1}.$$

Erityisesti raja-arvo on siis olemassa.

Todistus. Kiinnitetään $n\in\mathbb{N}_{>0}$ ja $\epsilon\in(0,1)$ ja valitaan jokin optimaalinen pätevä viivoitin

$$v = (a_1, a_2, \ldots, a_{\mathrm{M}(n)}).$$

Jokaista riitävän suurta N kohden voidaan valita lemman 9 mukainen alkuluku p ja edelleen valitaan lemman 8 mukaiset kokonaisluvut

$$0 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_{p+1} \leq p^2+p+1.$$

Käyttäen viivoitinta v ja lukuja b_i voidaan muodostaa seuraava joukko:

$$A = \{a_i(p^2+p+1)+b_j \mid 0 < i \leq \mathrm{M}(n), 0 < j \leq p+1\}.$$

Kyseinen joukko A ei ole välttämättä pätevä viivoitin, mutta sen alkioiden erotuksina voidaan mitata kaikki pituuden väliltä $[0,(p^2+p+1)n]$.

Väli $[0,(p^2+p+1)n-1]$ kyetään esittämään muodossa $a_{i'}(p^2+p+1)+b_i-(a_{j'}(p^2+p+1)+b_j)$ seuraavalla tavalla: Valitaan kyseiseltä väliltä esitettävä luku l ja kirjoitetaan se muodossa $l=(p^2+p+1)l_1+l_2$, missä $l_2<(p^2+p+1)$. Jos l_2 voidaan esittää erotuksena $l_2=b_i-b_j$, voidaan valita viivoittimesta v luvut $a_{i'}$ ja $a_{j'}$ joilla $l_1=a_{i'}-a_{j'}$ ja esittää l kahden joukon A elementin erotuksena. Jos taas l_2 ei esiinny lukujen b_i erotuksina, voidaan silloin lemman 8 mukaisesti esittää $l_2-(p^2+p+1)=b_i-b_j$. Tämä johtuu siitä, että luvut b_i esittävät jäännösluokkaedustajat modulo (p^2+p+1), ja toisaalta erotukset ovat välillä $[-(p^2+p+1)+1,(p^2+p+1)-1]$. Nyt valitaan viivoittimen v merkit niin, että $a_{i'}-a_{j'}=l_1+1$, ja voidaan esittää luku l. Jäljellä oleva arvo $(p^2+p+1)n$ voidaan esittää valinnoilla $b_i=b_j=0$ ja sellaisilla $a_{i'}$ ja $a_{j'}$, joilla $a_{i'}-a_{j'}=n$.

Seuraavaksi täydennetään joukko A viivoittimeksi, jonka pituus on N. Valitaan luku δ_ϵ lemman 9 mukaan ja lisätään joukkoon A jäsenet

$$B = \{0,1,2,\ldots T-1, N-(T-1)T, N-(T-2)T, \ldots, N-T, N\},$$

missä $T=\left\lceil\sqrt{(1+\delta_\epsilon)(p^2+p+1)}\right\rceil$. Selvästi joukon B merkeillä voidaan mitata arvot välillä $[N-T^2+1,N]$. Lisäksi

$$\begin{aligned}N-T^2+1 &\leq N-(1+\delta_\epsilon)(p^2+p+1)+1\\ &\overset{9(c)}{\leq} (n+1+\delta_\epsilon)(p^2+p+1)-(1+\delta_\epsilon)(p^2+p+1)+1\\ &= (p^2+p+1)n+1.\end{aligned}$$

Eli joukon B arvoilla voidaan mitata väli $[(p^2+p+1)n+1, N]$.

Joukko $A \bigcup B$ on siis N pituinen pätevä viivoitin. Lasketaan seuraavaksi kyseisen viivoittimen merkkimäärälle yläraja.

$$\begin{aligned}
\left|A \bigcup B\right| \leq &(p+1)\mathrm{M}(n) + 2T \\
= &(p+1)\mathrm{M}(n) + 2\left\lceil \sqrt{(1+\delta_\epsilon)(p^2+p+1)}\right\rceil \\
\leq &(p+1)\mathrm{M}(n) + 2\left\lceil (1+\delta_\epsilon)(p+1)\right\rceil \\
< &(p+1)\mathrm{M}(n) + 2(1+(1+\delta_\epsilon)(p+1)) \\
= &(p+1)\mathrm{M}(n) + p(2(1+\delta_\epsilon) + \frac{4+2\delta_\epsilon}{p}) \\
\overset{\text{Merk.}}{=} &(p+1)\mathrm{M}(n) + p\lambda.
\end{aligned}$$

Korotetaan vielä luvun N suuruusvaatimusta entisestään niin, että alkuluku p tulee valituksi niin, että $\frac{(p+1)^2}{p^2+p+1} < (1+\epsilon)$. Tällöin pätee kaikille riittävän suurille N:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{M}(N)^2}{N} \leq &\frac{((p+1)\mathrm{M}(n)+p\lambda)^2}{(p^2+p+1)(n+1)} \\
< &\frac{(p+1)^2(\mathrm{M}(n)+\lambda)^2}{(p^2+p+1)(n+1)} \\
< &(1+\epsilon)\frac{(\mathrm{M}(n)+\lambda)^2}{(n+1)}.
\end{aligned}$$

Otetaan raja-arvot $N \to \infty$ ja $\epsilon \to 0$. Tällöin luku λ lähestyy arvoa 2, joten se voidaan epäyhtälön oikean puolen jatkuvuuden vuoksi korvata suoraan arvolla 2.

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\mathrm{M}(N)^2}{N} \leq \frac{(\mathrm{M}(n)+2)^2}{(n+1)}.$$

Tämä pitää paikkansa mielivaltaiselle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, joten

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\mathrm{M}(N)^2}{N} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \frac{(\mathrm{M}(n)+2)^2}{(n+1)}.$$

Tämän avulla saadaan näytettyä lopulta raja-arvon suppeneminen, sillä

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\mathrm{M}(N)^2}{N} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \frac{(\mathrm{M}(n)+2)^2}{(n+1)} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{(\mathrm{M}(n)+2)^2}{(n+1)} = \liminf_{N\to\infty} \frac{\mathrm{M}(N)^2}{N}.$$

□

Redéi ja Rényi [5] esittivät raja-arvolle ensimmäisen alarajan, jota Leech paransi marginaalisesti kehittämättä varsinaisesti uutta ideaa.

Lause 7 ([5]). *Lauseen* 6 *raja-arvolle on alaraja*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{M}(n)^2}{n} \geq \max_{0<\delta<2\pi} 2(1-\frac{\sin\delta}{\delta}) > 2{,}43.$$

Todistus. Olkoon $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{\mathrm{M}(n)} = n$ pätevä viivoitin. Eulerin lauseen mukaan kaikilla $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{r=1}^{\mathrm{M}(n)} \sum_{l=1}^{\mathrm{M}(n)} \cos{(a_r - a_l)x} = \left| \sum_{r=1}^{\mathrm{M}(n)} e^{ixa_r} \right|^2 \geq 0.$$

Vasemmanpuolisessa tuplasummassa summattavia termejä on yhteensä $\mathrm{M}(n)^2$ kappaletta. Näistä ainakin $2n$ kappaletta osataan laskea täsmällisesti, sillä jokaista $0 < t \leq n$ vastaan on olemassa ainakin kaksi (r, l) paria, jolle $(a_r - a_l) = |t|$. Jäljellä olevat $\mathrm{M}(n)^2 - 2n$ summattavaa voidaan arvioida ylöspäin kosinifunktion maksimiarvoon 1. Käyttäen vielä kosinin parillisuutta saadaan

$$2 \sum_{t=1}^{n} \cos tx + \mathrm{M}(n)^2 - 2n \geq \sum_{r=1}^{\mathrm{M}(n)} \sum_{l=1}^{\mathrm{M}(n)} \cos{(a_r - a_l)x} \geq 0,$$

josta edelleen

$$\mathrm{M}(n)^2 \geq 2n - 2 \sum_{t=1}^{n} \cos tx. \tag{1}$$

Funktio $1 + 2\sum_{t=1}^{n} \cos tx = \sum_{t=-n}^{n} e^{itx}$ tunnetaan yleisesti nimellä Dirichletin ydin. Suoraan geometrisen summan kaavasta voidaan johtaa Eulerin kaavan avulla, että

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{t=1}^{n} \cos tx &= \sum_{t=-n}^{n} e^{itx} \\ &= (e^{ix})^{-n} \frac{1 - (e^{ix})^{2n+1}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})ix} - e^{(n+\frac{1}{2})ix}}{e^{\frac{-ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} \\ &= \frac{-2i \sin{(\frac{2n+1}{2}x)}}{-2i \sin{(\frac{x}{2})}} \\ &= \frac{\sin{(\frac{2n+1}{2}x)}}{\sin{(\frac{x}{2})}}. \end{aligned}$$

Sijoitettuna epäyhtälöön 1 saadaan käyttökelpoinen tulos

$$\mathrm{M}(n)^2 \geq 2n - \frac{\sin \delta}{\sin \frac{\delta}{2n+1}} + 1 > 2n - (2n+1)\frac{\sin \delta}{\delta} + 1,$$

joka pätee kaikille kulmille δ. Väite seuraa jakamalla epäyhtälö luvulla n ja ottamalla raja-arvo.

$\square$

Lauseen 7 tulos ei ole tarkka alaraja, sillä Anton Bernshteyn ja Michael Tait paransivat alarajaa [7] vuonna 2019 arvoon $\max_{0<\delta<2\pi} 2(1 - \frac{\sin \delta}{\delta}) + \epsilon$, missä $\epsilon \approx 10^{-3}$.

Heidän menetelmillään voisi alarajaa vielä parantaa, mutta heidän mukaansa ei ole syytä uskoa että metodi tuottaisi tarkkaa alarajaa.

Lauseen 6 muodon vuoksi raja-arvolle saadut alarajat tuottavat alarajoja myös yksittäisarvoille. Lauseessa 7 sellainen muodostettiin tosin jo todistuksen sisällä. Paras alaraja-arvio funktiolle M on siis

$$\mathrm{M}(n) \geq \max_{0<\delta<2\pi} \sqrt{2n+1-\frac{\sin\delta}{\sin\frac{\delta}{2n+1}}} > \max_{0<\delta<2\pi} \sqrt{2(1-\frac{\sin\delta}{\delta})n+1-\frac{\sin\delta}{\delta}}.$$

Tai likiarvona lyhyesti

$$\mathrm{M}(n) > \sqrt{2{,}43n+1}.$$

4.3 Wichmann-resepti

Funktion M ylärajat saadaan suoraan konstruktioista. Tässä kappaleessa ei todisteta nykyistä parasta konstruktiota, mutta sen sijaan todistetaan parhaan konstruktion kulmakivi, Wichmann-resepti [9]. Suoraan siitä saadaan myös todistettua parasta tunnettua ylärajaa vain vakion verran huonompi yläraja. Wichmann-resepti ei itsessään ole monimutkainen, mutta sen toimivuuden todistaminen osoittautuu raskaaksi, joten todistus on siirretty liitteisiin.

Vuonna 2020 Ed Pegg Jr [8] esitti tähän mennessä parhaimman konstruktion vähämerkkisille päteville viivoittimille. Konstruktiosta voidaan todistaa seuraava lause.

Lause 8 ([8]). *Kaikilla $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{M}(n) \leq \left\{\sqrt{3n+\frac{9}{4}}\right\}+1,$$

missä $\{\cdot\}$ merkitsee pyöristämistä.

Todistus käyttää vuonna 1963 B. Wichmannin [9] rakentamaa konstruktiota, jolla saadaan aikaan erittäin hyviä viivoittimia tietyille pituuksille. Tässä tutkimuksessa todistetaan vakiota huonompi tulos joka saadaan suoraan Wichmannin konstruktiosta.

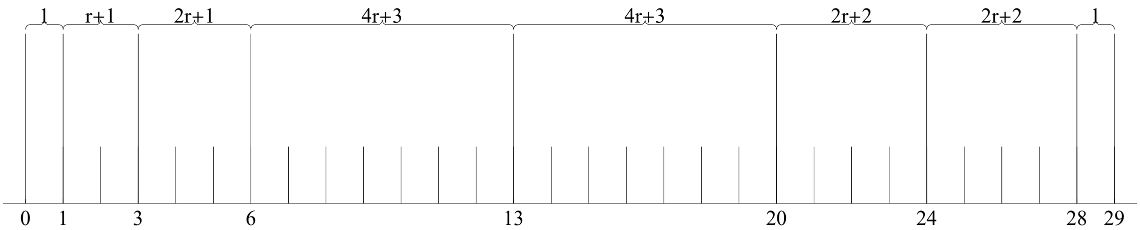
Lause 9 ([9]). *Kaikilla $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{M}(n) \leq \sqrt{3n}+4.$$

Todistus. Katso alla oleva tarkastelu Wichmann-reseptistä 10. Väitteen todistus seuraa välittömästi tämän jälkeen. □

Määritelmä 14. Wichmann-resepti on funktio $w_1 : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \cup_{m=1}^{\infty}\mathbb{N}^m$, missä funktion arvot tulkitaan erotusmuotoisina viivoitimina.

$$w_1(r,s) = (1^r, r+1, (2r+1)^r, (4r+3)^s, (2r+2)^{r+1}, 1^r)$$



Kuva 6: Wichmann-reseptistä saatu viivoitin $w_1(1,2)$. Kuvassa on näkyvillä Wichmann-reseptin erotukset, jossa $r = 1$. Kuvan generointiin on käytetty osin Peggin koodia [8].

Määritelmästä voidaan suoraan laskea, että Wichmann-reseptin tuottamat viivottimet ovat pituudeltaan $4r(r+s+2)+3(s+1)$ ja siinä on $(4r+s+3)$ merkkiä. Wichmann-reseptistä voidaan tehdä muutamia variaatiota. Jokaista kahden muutujan funktiota, joka tuottaa erotusmuotoisia päteviä viivottimia, kutsutaan Wichmann-reseptiksi, mutta annettu määritelmä on yleisin ja tietokonehakujen perusteella tehokkaaksi todettu.

Esimerkki 14. Esimerkiksi $w_1(1,2)$ on erotusmuotoinen viivoitin $(1,2,3,7,7,4,4,1)$ eli määritelmän mukaisesti viivoitin $(0,1,3,6,13,20,24,28,29)$. Tämä on harva viivoitin. Kuvassa 6 on esitetty Wichmann-reseptin erotusmuoto kyseisellä viivoittimella.

Niin Pegg [8] kuin Wichmannkaan ei [9] todistanut reseptin toimivuutta, eli sitä että tuottaako se päteviä viivoittimia. Wichmann antaa esimerkin avulla karkeat ohjeet todistukselle ja toteaa yleisen todistuksen olevan turhan pitkä. Lukija saa arvioida tilannetta itse.

Lause 10. *Wichmann-reseptin* $w_1(r,s) = (1^r, r+1, (2r+1)^r, (4r+3)^s, (2r+2)^{r+1}, 1^r)$ *tuottamat viivoittimet ovat päteviä.*

Todistus. Työn luettavuuden vuoksi todistus on siirretty liitteisiin. Todistus on pitkä, työläs ja vaikeaselkoinen, mutta löytyy siis liitteissä lauseena 14.

□

Lause 9 voidaan nyt todistaa. Peggin parempi tulos seuraa käyttäen samanlaista ideaa, mutta tarkemmin tehtynä. Koska Peggin tulos on kuitenkin vain vakion verran parempi, tähän tutkimukseen riittää seuraava todistus.

Todistus. Olkoon $r \geq 4$. Valitaan Wichmann-reseptin parametreihin $s = 2r + e \in [2r-2, 2r+4]$. Tällöin resepti antaa pätevän viivottimen, jonka pituus on

$$L_{r,s} = 4r(r+s+2) + 3(s+1) = 4r(3r+2+e) + 3(2r+e+1)$$

ja jossa on

$$M_{r,s} = 4r + s + 3 = 6r + e + 3$$

merkkiä. Nyt on helppoa tarkistaa, että annettuilla r ja s pätee:

$$\sqrt{3L_{r,s}} = \sqrt{36r^2 + 12r(e+2) + 18r + 9e} \geq 6r + 3 + e = M_{r,s}.$$

Eli näillä parametreillä saadaan aikaan erinomaisia viivoittimia. Pituuksien $L_{r,2r-2}$ ja $L_{r,2r+4}$ välisillä arvoilla tällaisia erinomaisia viivoittimia on $4r+3$ arvon välein, sillä pituus kasvaa sen verran yhdellä s arvon kasvatuksella. Lauseen 5 mukaisesti voidaan siis jatkaa edellistä tällä välillä olevaa Wichmann-reseptin mukaista viivoitinta neljästi saavuttaen seuraava erinomainen viivoitin. Tällä tavoin saadaan katettua kaikki riittävän suuret viivoitinpituudet, sillä laskemalla nähdään, että $L_{r,2r+4} = L_{r+1,2(r+1)-2}$. Tämä tarkoittaa, että edellisen r parametrin valinnan välin päätepiste on myös seuraavan r valinnan aloituspiste. Koska tulos vaatii, että $r \geq 4$, saadaan kaikilla $n \geq L_{4,6} = 213$ päteemään

$$\mathrm{M}(n) \leq \sqrt{3n} + 4.$$

Lisäksi lemman 6 raja on yhtä hyvä tai parempi kuin väitteen yläraja, kun $n < 224$. Tämä täyttää puuttuvat arvot alusta. Pidemmillä viivoittimilla lemma 6 ei enää anna rajan alittavia viivoittimia. □

Seuraus 2 ([9])**.** *Lauseiden* 6 *ja* 9 *yhteisvaikutuksena saadaan välittömästi tulos*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{M}(n)^2}{n} \leq 3.$$

Nykyisten tietokoneella tehtyjen hakujen ja eritysesti Peggin tuloksen [8] perusteella on valistuneena arvauksena kohtuullista esittää yllä saatu yläraja täsmällisenä arvona.

Konjektuuri 3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{M}(n)^2}{n} = 3.$$

Konjektuuria 3 tunnetumpi ja voimakkaampi versio on niinkutsuttu "optimal ruler conjecture."

Konjektuuri 4. Kaikilla $M \geq 14$ on olemassa Wichmann-reseptin mukainen viivoitin w jonka merkkien määrä on M ja jonka pituus on maksimaalinen kaikkista M merkkiä käyttävistä pätevistä viivoittimista.

5 Harvojen viivoittimien ja reunattomien osittaissanojen yhteys

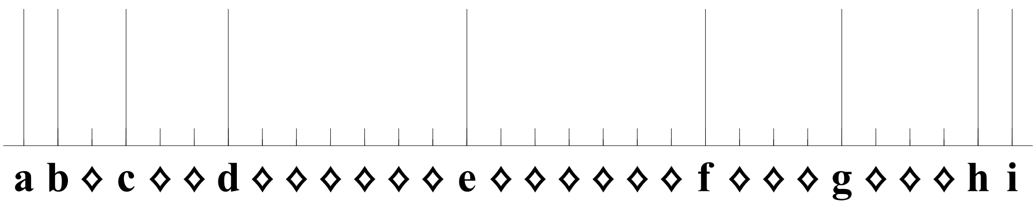
Kuten edellä olevissa kappaleissa ja johdannossa on todettu, harvat viivoittimet ja osittaissanat voidaan tulkita vastaaviksi kombinatorisiksi objekteiksi, kunhan aakkosia on käytössä riittävä määrä. Tässä kappaleessa käytetään merkintää HB_∞ merkitsemään optimaalista reunattomien osittaissanojen kololaskentafunktiota, kun aakkostokokoa ei rajoiteta vakioarvoon. Kappaleen päätulos on yhdistää funktio HB_∞ harvojen viivoittimien merkkifunktioon M.

Aloitetaan esittelemällä vastaavuus-konstruktio:

Määritelmä 15. Olkoon v viivoitin. Tällöin viivoitinta v vastaa sana v', jossa $|v'| = l(v)+1$ ja sanassa v' indeksissä i on kirjain jos ja vain jos i on viivoittimen v merkki.

Vastaavasti olkoon w osittaissana, jossa ensimmäinen ja viimeinen symboli ovat kirjaimia. Tällöin sitä vastaa yksikäsitteinen viivoitin w', johon on merkitty arvo i jos ja vain jos sanassa w indeksissä i on kirjain.

Esimerkki 15. Viivoitinta $(0, 1, 4, 6)$ vastaa esimerkiksi sanat $aa\diamondsuit\diamondsuit a\diamondsuit a$ ja $ab\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit d$. Sanaa $abc\diamondsuit\diamondsuit a\diamondsuit\diamondsuit b$ vastaa yksikäsitteisesti viivoitin $(0, 1, 2, 5, 8)$.



Kuva 7: Pätevää viivotinta $\{0, 1, 3, 6, 13, 20, 24, 28, 29\}$ vastaa reunaton osittaissana $ab\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit d\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit e\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit f\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit g\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit hi$. Kuvan generointiin on käytetty osin Peggin koodia [8].

Vastaavuuden voima tutkielman aikaisempien kappaleiden esitetyissä ongelmissa perustuu siihen, että vastaavuus suoraan sitoo ongelmien ratkaisut toisiinsa. Seuraavaa lausetta voidaan pitää tämän tutkielman päätuloksena, joskin sen seuraukset ovat mielenkiintoisempia kuin lause itsessään. Lauseen sisältöä voi seurata myös tukeutuen kuvaan 7.

Lause 11. *Epätriviaalia reunatonta osittaissanaa w vastaa pätevä viivoitin määritelmän 15 mukaisesti. Lisäksi pätevää viivoitinta v vastaa ainakin yksi reunaton osittaissana $u \in A^*$, missä aakkoston koko $|A|$ on vähintään viivoittimen v merkkien määrä.*

Todistus. Epätriviaalisuus tarkoittaa reunattoman osittaissanan olevan vähintään kahden symbolin pituinen, jolloin sekä ensimmäinen ja viimeinen symboli ovat kirjaimia. Oletetaan, että w on reunaton osittaissana ja $1 < |w| = n$ ja olkoon luku l mielivaltainen väliltä $0 < l < n$. Tarkastellaan pituutta l olevia etu- ja takaliitettä. Koska nämä eivät ole yhteensopivia, niissä on oltava samassa indeksissä i jokin merkki. Nämä merkit sijaitsevat sanassa w etuliiteosassa indeksissä i ja takaliiteosassa indeksissä $n - l + i$. Näistä merkeistä voidaan tällöin mitata etäisyys $n - l + i - i = n - l$. Koska l oli mielivaltainen, saamme mitattua kaikki pituudet $1, 2, 3, \ldots, n-1$ ja näin ollen konstruktion mukainen $n-1$-pituinen viivoitin on pätevä.

Kääntäen, oletetaan viivoittimen v olevan pätevä ja tuotetaan osittaissana v'. Merkitään viivoittimen pituudeksi $l(v) = n$. Käyttäen riittävän isoa aakkostoa, voidaan olettaa, että sanassa v' ei esiinny kahta samaa kirjainta. Tällöin riittää osoittaa että samanpituisissa etu- ja takaliitteissä on yhteisessä indeksissä jokin kirjain. Olkoon luku l väliltä $0 \leq l < n$. Viivoitin v osaa mitata pituuden $n - l$. Tämän pituuden mittaamiseksi viivoitin v käyttää merkkiä joka on arvoltaan korkeintaan l, sillä jos kummatkin käytetyt merkit olisivat vasta tämän rajan jälkeen, merkeillä olisi maksimietäisyys $n-l-1$ valinnoilla $l+1$ ja n. Vastaavasti toinen merkeistä on vähintään arvon $n-l$ suuruinen. Käytetyt merkit esiintyvät siis sanassa v' etu- ja takaliitteissä, joiden pituus on $l+1$. Olkoon etuliitteessä merkki ja siten kirjaimen indeksi i. Tällöin takaliitteessä käytetään viivoittimen merkkiä $i+n-l$ eli sanan v' indeksiä $i+n-l$ joka on takaliitteen indeksi i. Sanalla v' ei voi siis olla pituutta $l+1$ olevaa reunaa. Käyden samalla argumentilla kaikki viivoittimen mittaavat arvot läpi, tiedetään että vastaavalla $n+1$ pituisella osittaissanalla ei ole reunoja lainkaan. $\square$

Seuraus 3. *Riittävän suurella aakkostolla pituuden funktiona optimaalista reunatonta osittaissanaa vastaa harva viivoitin ja kääntäen harvaa viivoitinta vastaa ainakin yksi optimaalinen osittaissana. Erityisesti*

$$\mathrm{HB}_k(n) = \mathrm{HB}_\infty(n) = n - \mathrm{M}(n-1)$$

kun $n > 1$ *ja* $k \geq \mathrm{M}(n-1)$.

Todistus. Olkoon v pätevä $n-1$ pituinen viivoitin jossa on $\mathrm{M}(n-1)$ merkittyä arvoa eli harva viivoitin. Aakkoston koko-oletuksen avulla lause 11 kertoo viivoitinta v vastaavan reunaton osittaissana w. Näytetään, että osittaissana w on optimaalinen. Oletetaan vastaoletuksena, että on olemassa osittaissana w' jolla $|w'| = |w|$ mutta $|w'|_\diamondsuit > |w|_\diamondsuit$. Tällöin sanaa w' vastaisi lauseen 11 mukaisesti pätevä viivoitin, jossa olisi vähemmän kuin $\mathrm{M}(n-1)$ merkkiä, mikä on ristiriidassa funktion M määritelmän kanssa. Saadussa optimaalisessa osittaissanassa w on $n-\mathrm{M}(n-1)$ koloa vastaavuuden määritelmästä. Saadaan väitetty kaava, jota käyttäen on helppo todistaa väitteen kääntöpuoli. $\square$

Huomautus 4. Seurauksessa 3 yhtäsuuruus saattaa olla voimassa jo pienemmillä aakkostoilla. Esimerkiksi harvaa viivoitinta $\{0, 1, 2, 4, 7\}$ vastaa reunaton osittaissana $abc\diamondsuit d\diamondsuit\diamondsuit d$, jossa käytetään vain neljää eri kirjainta.

Funktion M asymptoottista käytöstä käsittelevässä kappaleessa saatiin tulos

$$\mathrm{M}(n) \geq \sqrt{2{,}43n+1}.$$

Yhdistämällä tämä seuraukseen 3, saadaan kaikille $k \in \mathbb{N}$ pätemään epäyhtälö

$$\mathrm{HB}_k(n) \leq \mathrm{HB}_\infty(n) = n - \mathrm{M}(n-1) \leq n - \sqrt{2{,}43n+1}.$$

Tämä yläraja tarkentaa aikaisempaa ylärajaa joka esitettiin lauseessa 5, kun $k \geq 6$. Kuten viivoitinkappaleessa todettiin, ei ole silti syytä uskoa kyseisen rajan olevan tarkka.

5.1 Harvoja viivoittimia käyttävät osittaissanakonstruktiot

Harvoja viivoittimia käyttäen voidaan siis muodostaa esimerkkejä osittaissanoista joilla voidaan tarkistaa yleistuloksia funktiosta HB_k joissa aakkoston kokoa k ei ole rajoitettu. Tämä on tietysti kätevämpää kuin aakkoston lukitseminen ja siten esimerkkien hakeminen. Löydetyt viivoittimet voidaan sitten muuttaa äärellistä määrää aakkosia käyttäviksi sanoiksi, mutta aakkosmäärää ei ennalta tiedä, sillä harvojen viivoittimien yleistä muotoa ei tunneta. Wichmann-reseptin mukaisten viivoittimien muoto on kuitenkin sellainen, että tämän kappaleen aikana nähdään niille riittävän korkeintaan 4 aakkosta.

Lause 12. *Konjetuurit* 1 *ja* 2 *eivät pidä paikkaansa. Erityisesti funktiolla* HB_k *on seuraavat arvot:*

$$\begin{aligned} \mathrm{HB}_{10}(36) &= 26 \\ \mathrm{HB}_{21}(136) &= 115 \\ \mathrm{HB}_{21}(139) &= 119 \end{aligned}$$

Todistus. Kyseiset arvot ovat suoria vastaesimerkkejä esitettyihin konjektuureihin, joiden mukaan $\mathrm{HB}_{10}(36) = 25$ ja $\mathrm{HB}_{21}(139) \leq \mathrm{HB}_{21}(136) + 3 = 118$.

Käyttäen seurausta 3 voidaan väitteen arvot lukea tiedettyjen harvojen viivoittimien merkkimäärien lukujonosta (OEIS A046693 [10]). Ensimmäiseen konjektuuriin liittyvän vastaesimerkin verifioiminen on mahdollista kohtuullisilla laskentaresursseilla ja esimerkki optimaalisesta sanasta on

$$abc\diamondsuit^{14}d\diamondsuit^{3}e\diamondsuit^{2}f\diamondsuit^{2}g\diamondsuit^{2}h\diamondsuit^{2}i\diamondsuit j.$$

Toisen konjektuurin vastaesimerkit seuraavat lemmasta 7. Vastaavuudesta saadut sanat ovat

$$abcdefg\diamondsuit^{58}h\diamondsuit^{2}i\diamondsuit^{2}j\diamondsuit^{2}k\diamondsuit^{6}l\diamondsuit^{6}m\diamondsuit^{6}n\diamondsuit^{6}o\diamondsuit^{6}p\diamondsuit^{6}q\diamondsuit^{6}r\diamondsuit^{3}s\diamondsuit^{3}t\diamondsuit^{3}u,$$

joka on reunaton 136 pituinen osittaissana jossa on 115 koloa ja

$$abcd\diamondsuit^{3}e\diamondsuit^{6}f\diamondsuit^{6}g\diamondsuit^{6}h\diamondsuit^{14}i\diamondsuit^{14}j\diamondsuit^{14}k\diamondsuit^{14}l\diamondsuit^{14}m\diamondsuit^{7}n\diamondsuit^{7}o\diamondsuit^{7}p\diamondsuit^{7}qrst,$$

joka taas on reunaton 139 pituinen sana jossa on 119 koloa. □

Koska Wichmann-resepti on paras tiedetty konstruktio vähämerkkisille päteville viivoittimille, on vastaavuuden takia luonnolllista määritellä niitä vastaavat Wichmann-sanat.

Määritelmä 16. Wichmann-sana $W_1(r, s)$ on yksikäsitteinen reunaton osittaissana, joka määräytyy seuraavista ominaisuuksista:

- Osittaissanaa $W_1(r, s)$ vastaa viivoitin $w_1(r, s)$.
- Osittaissana $W_1(r, s)$ käyttää mahdollisimman pientä aakkostoa ja
- yllä olevien ehtojen täyttävistä reunattomista osittaissanoista $W_1(r, s)$ on aakkosjärjestyksessä ensimmäinen.

Kolmas ehto on mukana, jotta annetuille parametreille r ja s on olemassa yksikäsitteinen $W_1(r, s)$. Alla annettuna muutamia esimerkkejä.

Esimerkki 16.

$$W_1(1,1) = ab\diamondsuit a\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit db$$

$$W_1(1,2) = ab\diamondsuit a\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit db$$

$$W_1(2,2) = abb\diamondsuit^{2}a\diamondsuit^{4}a\diamondsuit^{4}b\diamondsuit^{10}c\diamondsuit^{10}c\diamondsuit^{5}d\diamondsuit^{5}d\diamondsuit^{5}dbb$$

Esimerkin Wichmann-sanat näyttävät seuraavan ennalta-arvattavaa kaavaa. Tämä pitää paikkansa myös yleisesti, eli kaikki Wichmann-sanat voidaan koostaa esimerkin tapaan. Aloitetaan lemmalla, joka rajoittaa Wichmann-sanat viiteen aakkoseen.

Lemma 10. *Kaikilla $r, s \geq 1$ Wichmann-sana $W_1(r, s) \in \{a, b, c, d, e\}^*$.*

Todistus. Todistuksessa konstruoidaan viivoitinta $w(r, s)$ vastaava sana W, joka käyttää esitettyjä aakkosia. Tällöin Wichmann-sanan tulee käyttää samaa tai pienempää aakkostoa määritelmänsä nojalla.

Pilkotaan Wichmann-resepti vastaavanlaisesti kuin lauseen 10 todistuksessa $w_1(r, s) = (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F})$, jossa jokainen osa edustaa peräkkäin olevia yhtäsuuria erotuksia, eli esimerkiksi A $= 1^r$. Tarkastellaan osion D$= (4r + 3)^s$ sisällä olevia viivoittimen merkkejä. Jos käytetään vain osion D merkkejä, voidaan mitata vain eri moninkertoja luvusta $(4r + 3)$. Täten seuraten vastaavuuden 11 todistusta, jos asetetaan sanaan W osion D oikeanpuolinmaiseen merkkiin eri kirjain kuin muihin osion D merkkeihin, saadaan sanaan W estettyä kaikki reunat, jotka vastaavat osion sisäpuolella D mitattuja arvoja viivoittimessa $w_1(r, s)$. Vastaava argumentti toimii kaikkiin muihinkin alueisiin, eli jokainen alue erikseen vaatii vain korkeintaan 2 kirjainta. Jos lisäksi valitaan jokaisessa alueessa nämä kirjaimet erillisiksi niin, että kaksi vierekkäistä aluetta jakavat alueiden erottavaan merkkiin sijoitetun kirjaimen, saadaan aikaan sana $W \in \{a, b, c, d, e, f, g\}^*$, missä osio A käyttää kirjaimia $\{a, b\}$, osio B käyttää kirjaimia $\{b, c\} \ldots$ ja osio F käyttää kirjaimia $\{f, g\}$. Tätä konstruktiota voidaan parantaa. Ensimmäinen kirjain saadaan huomaamalla, että alueet A ja F osaavat sisäisesti mitata täsmälleen samat mitat, joten vaihtamalla alueen A kaikki kirjaimet samoiksi ei luo sanaan W reunoja. Toisena parannuksena todetaan, että jos mitataan viivoittimen $w_1(r, s)$ alusta alueesta A alueen B yli, saadaan mitatuksi arvoksi $2r + 1$. Tämä on juurikin alueen C palasen mitta, joka seuraa aluetta B. Täten mitat, jotka tehdään alueen C sisäpuolella voidaankin tehdä alkaen alueesta A ja lopettaen alueeseen C. Alue C ei tarvitse siis uutta merkkiä, ja sielläkin voidaan korvata kaikki merkit samalla kirjaimella, joka on yhteinen alueiden B ja C kanssa. Tällöin saadaan aikaiseksi sana

$$W = a^{r+1}\diamondsuit^r b(\diamondsuit^{2r}b)^r(\diamondsuit^{4r+2}c)^s(\diamondsuit^{2r+1}d)^{r+1}e^r,$$

jossa:

- Alue A käyttää kirjainta a.
- Alue B käyttää ensimmäisenä kirjaimenaan kirjainta a ja toisena kirjaimena kirjainta b.
- Alue C käyttää kirjainta b.
- Alue D käyttää ensimmäisenä kirjaimenaan kirjainta b ja sen jälkeen kirjainta c.
- Alue E käyttää ensimmäisenä kirjaimenaan kirjainta c ja sen jälkeen kirjainta d.

- Alue F käyttää ensimmäisenä kirjaimenaan kirjainta d sen jälkeen kirjainta e.

Osittaissanan W muotoisia optimaalisia viiden aakkosen sanoja on listattu liitteeseen. $\square$

Käyttäen edellistä lemmaa voidaan vielä tarkentaa tulosta yhden aakkosen verran.

Lause 13. *Kaikilla $r, s \geq 1$ Wichmann-sana $W_1(r, s) \in \{a, b, c, d\}^*$.*

Todistus. Todistuksessa puhutaan siitä, kuinka osittaissana mittaa etäisyyksiä. Vastaavuuden kannalta tämä tarkoittaa osittaissanaa vastaavan viivoittimen mittaamia arvoja niin, että käytetyt merkit eivät osittaissanassa ole samaa aakkosta. Jos osittaissana voi mitata kaikki pituudet, se on reunaton.

Käytetään lemman 10 konstruktiota ja muodostetaan viivotinta $w_1(r, s)$ vastaava reunaton osittaissana W. Sanaa W muokkaamalla voidaan vielä poistaa yksi aakkonen e. Tehdään seuraavat muutokset:

- Alue A käyttää ensimmäisenä kirjaimena kirjainta a ja sen jälkeen kaikissa merkeissä kirjainta b.
- Alue B käyttää ensimmäisenä kirjaimenaan kirjainta b ja toisena kirjaimena kirjainta a (seurauksena muutoksista alueisiin A ja C).
- Alue C käyttää kirjainta a paitsi viimeisenä kirjaimena kirjainta b.
- Alue F käyttää ensimmäisenä kirjaimenaan kirjainta d ja sen jälkeen kaikissa merkeissä kirjainta b.
- Muuten muutetussa sanassa on samat kirjaimet samoilla paikoilla kuin sanassa W.

Muutoksilla tuotettu sana on siis

$$W' = ab^r \diamondsuit^r (a\diamondsuit^{2r})^r b(\diamondsuit^{4r+2}c)^s(\diamondsuit^{2r+1}d)^{r+1}b^r.$$

Nyt analysoidaan sitä, kuinka sana W' edelleen mittaa kaikki etäisyydet. Verrattuna sanaan W, ensimmäinen huolenaihe on etäisyydet osion A viimeisistä kirjaimista osion C viimeiseen kirjaimeen. Nämä etäisyydet ovat väli $[r + 1 + (2r + 1)r, (2r + 1)(r + 1) - 1] = [(2r + 2)r + 1, (2r + 2)r + r]$. Välin arvoista nähdään, että kyseinen ongelma ratkeaa mittaamalla osiosta F osioon E, joka voidaan edelleen tehdä. Toinen tarkastettava on osion A ensimmäisestä kirjaimesta osioon C. Nämä etäisyydet ovat arvon $(2r+1)$ moninkertoja, joten ne voidaan mitata kokonaan osion C sisällä, poissulkien pisin arvo $(2r+1)(r+1)$, mutta se voidaankin mitata edelleen osiosta A osioon C. Näinollen alueiden A ja C väliset etäisyydet voidaan edelleen mitata. Edellinen hoitaa myös alueen B, sillä sen kaksi merkkiä kuuluvat alueille A ja C. Osioiden A ja F väliset mittaukset onnistuvat, sillä ne voidaan aina suorittaa aloittaen osion A ensimmäisestä merkistä a. Viimeisenä tapauksena osion C viimeinen kirjain ei enää vertaannu osion F viimeisiin kirjaimiin, joten tulee mitata muulla tavoin väli $[(4r + 3)s + (2r + 2)(r + 1) + 1, (4r + 3)s + (2r + 2)(r + 1) + r]$. Tämä väli on sama kuin $[r+1+(2r+1)r+(4r+3)s+(2r+2), r+r+1+(2r+1)r+(4r+3)s+(2r+2)]$, mikä saadaan kun mitataan osiosta A osion E toiseen merkkiin. Muuten sana W' mittaa kuten sana W, joten se on reunaton. Esimerkissä 16 esiintyy malleja sanoista W'. □

Seuraus 4. *Yhdistämällä lauseet 10 ja lauseen 9 tulokset nähdään, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee*

$$\mathrm{HB}_k(n) \geq n - \sqrt{3(n-1)} - 4,$$

kun $k \geq 4$.

Todistus. Lauseessa 9 kun todistetaan viivoittimien rajoja, käytetään vain Wichmann-reseptien viivoittimia tai niiden jatkeita 5. Wichmann-reseptin mukaisista viivoittimien jatkeista tehdyissä reunattomissa osittaissanoissa ei tarvita uusia aakkosia, sillä todistuksesta 5 nähdään, että lisättyjä merkkejä tarvitsee verrata vain aloittavaan osioon. Wichmann-sanan tapauksessa on selvää, että aloittava osio ei käytä kaikkia aakkosia. Täten lisätyt merkit voidaan tehdä aakkosella d. Jäljelle jää lauseen 9 alle 213 pituiset viivoittimet. Lauseessa 9 näitä varten rakennettiin viivoittimet, jotka erotusmuotoisina ovat muotoa $(1^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1}, \lfloor\sqrt{n}\rfloor^m, t)$ joillekin m ja t. Näistä nähdään samaan tapaan kuin Wichmann-sanojen todistuksessa 10, että tarvitaan vain korkeintaan neljä aakkosta. Yhteensä kaikki pituudet tulee katettua. □

Huomautus 5. Myös Peggin tulos 8 saadaan käyttämään vain neljää aakkosta hyvin vastaavanlaisella tavalla. Tällöin saadaan parempi raja, eli kaikilla riittävän suurilla n pätee

$$\mathrm{HB}_k(n) \geq n - \sqrt{3(n-1)} - 1,$$

kun $k \geq 4$. Tämä tulos saadaan pätemään vasta rajan $n > 257992$ jälkeen, ja sitä pienemmille tulos tulisi tarkistaa tietokonehauilla tai keksiä pienille arvoille toinen konstruktio. Konstruktion löytyminen vaikuttaa Peggin tietokonehaun vaikeuden mukaan olevan haastavaa. Koska parannus esitettyyn tulokseen on vain pienen vakion verran, ei tätä tulosta pyritty erikseen tätä työtä varten saavuttamaan.

6 Tulokset

Tutkielmassa esitettiin uusi vastaavuus aiemmin erillisinä pidettyjen ongelmien, reunattomien osittaissanojen ja harvojen viivoittimien, välillä. Tästä syystä kummankin kombinatorisen ongelman parhaita tunnettuja tuloksia koostettiin ja suurin osin todistettiin niitä erikseen käsittelevissä kappaleissa.

Vastaavuuden seurauksena osoittautui, että harvojen viivoittimien puolella tunnetut tulokset saatiin käyttöön reunattomien osittaissanojen kololaskentafunktion HB_k tutkimukseen, kun aakkostokoko $k \geq 4$. Uudet parhaat rajat ovat

$$n - \sqrt{3n-3} - 4 \leq \mathrm{HB}_4(n) \leq \mathrm{HB}_k(n) \leq \mathrm{HB}_\infty(n) \leq n - \sqrt{2{,}43n},$$

jossa alaraja saatiin käyttäen Wichmann-sanoja lauseessa 10 ja ylärajan muodostamiseen käytettiin Rédein ja Rényin tulosta [5]. Ylärajan uusi tulos voittaa aikaisemmat ylärajat vasta, kun $k \geq 6$. Työssä myös esitettiin metodi tiputtaa alarajan vakiotermi -4 vakioon -1. Kyseinen alaraja olisi esitettyjen metodien paras tulos, mutta se vaatisi kohtuuttoman tietokonehaun teorian tueksi.

Tutkielmassa esitettiin myös ennestään ratkaistut (Blanchet-Sadri et al. [1]) binäärisanojen ja yksinkertaisten reunojen tapaukset, sekä esitettiin paras tunnettu ylärajaa funktioille HB_3, HB_4 ja HB_5 tarkentamalla aikaisempaa todistusta (Allen et al. [2]).

Rajojen lisäksi päästiin reunattomien osittaissanojen ongelmassa käyttämään harvojen viivoittimien ennaltalaskettuja arvoja, joiden avulla konstruoitiin vastaesimerkit aiemmin oikeiksi luultuille konjektuureille 1 ja 2. Lauseen 12 mukaan ainakin 21 aakkosella löytyy vastaesimerkki intuitiviiseen ajatukseen siitä, että reunattoman osittaissanan pituuden kasvattaminen yhdellä sallii korkeintaan yhden kolon enemmän muodostamatta reunoja. Toisaalta binäärisanoissa nähdään täsmällisestä kaavasta suoraan, että konjektuuri 2 pitää paikkaansa. On siis olemassa jokin maksimaalinen määrä aakkosia, jossa konjektuuri 2 pitää. Wichmann-sanojen myötä on luultavaa, että konjektuuri 2 ei ole voimassa edes rajoittumalla neljään aakkoseen.

Mielenkiintoisena kysymyksenä jää Erdösin ja Gálin viivoittimien raja-arvotulosta vastaava tulos reunattomien osittaissanojen kannalta. Vastaavuus kertoo, että raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n - \mathrm{HB}_\infty(n))^2}{n}$$

on olemassa, ja toisaalta sama pätee tunnetulle funktiolle HB_2. Jopa oletuksella $\mathrm{HB}_4(n) = \mathrm{HB}_\infty(n)$ kysymys on avoin kolmen aakkosen osalta, eikä vastaavuus tarjoa kysymyksen ratkaisemiseen ainakaan suoraviivaista tietä.

Viitteet

[1] Francine Blanchet-Sadri, Emily Allen, Cameron Byrum and Robert Mercaş. “How Many Holes Can an Unbordered Partial Word Contain?” In LATA, 5457:176–187. Germany: Springer Berlin / Heidelberg, 2009.

[2] Emily Allen, Francine Blanchet-Sadri, Michelle Bodnar, Brian Bowers, Joe Hidakatsu, and John Lensmire. “Combinatorics on Partial Word Borders.” Theoretical computer science 609 (2016): 469–493.

[3] P. Erdös, I. Gál. "On the representation of 1,2,. . . N by differences."Proceedings of the KNAW volume 51 (1948) 1155-1158.

[4] John Leech. "On the representation of 1,2,. . . N by differences."Journal of the London Mathematical Society Volume s1-31, Issue 2 (1956)

[5] L. Rédei, A. Rényi, "On the representation of the numbers 1, 2,. . . ,N by means of differences", Matematicheskii Sbornik, 1949, Volume 66, Number 3, 385–389 (in Russian)

[6] James Singer. “A Theorem in Finite Projective Geometry and Some Applications to Number Theory.” Transactions of the American Mathematical Society 43.3 (1938): 377–385

[7] Anton Bernshteyn and Michael Tait. "Improved Lower Bound for Difference Bases." Journal of number theory 205 (2019): 50–58. Web.

[8] Pegg, E. "Hitting All the Marks: Exploring New Bounds for Sparse Rulers and a Wolfram Language Proof."https://blog.wolfram.com/2020/02/12/hitting-all-the-marks-exploring-new-bounds-for-sparse-rulers-and-a-wolfram-language-proof/

[9] B. Wichmann. "A Note on Restricted Difference Bases"In Journal of the London Mathematical Society 1963 s1-38: 465-466

[10] OEIS Foundation Inc. (2024), Entry A046693 and A103300 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, https://oeis.org/A046693 and https://oeis.org/A103300

[11] Blanchet-Sadri, Francine. (2008). Algorithmic combinatorics on partial words. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

[12] B. Bollobás. Modern Graph Theory. New York: Springer, 1998.

[13] D.A. Linebarger, I.H. Sudborough, and I.G. Tollis. "Difference Bases and Sparse Sensor Arrays." IEEE transactions on information theory 39.2 (1993): 716–721. Web.

A Taulukko funktioista HB ja M

n	$\mathrm{HB}_2(n)$	$\mathrm{HB}_3(n)$	$\mathrm{HB}_4(n)$	$\mathrm{M}(n-1)$
2	0	0	0	2
3	0	0	0	3
4	0	1	1	3
5	1	1	1	4
6	1	2	2	4
7	2	2	3	4
8	2	3	3	5
9	3	4	4	5
10	4	4	5	5
11	4	5	5	6
12	5	6	6	6
13	6	7	7	6
14	6	7	8	6
15	7	8	8	7
16	8	9	9	7
17	9	10	10	7
18	9	10	11	7
19	10	11	11	8
20	11	12	12	8
21	12	13	13	8
22	12	14	14	8
23	13	14	15	8
24	14	15	16	8
25	15	16	16	9
26	16	17	17	9
27	16	18	18	9
28	17	18	19	9
29	18	19	20	9
30	19	20	21	9
31	20	21	21	10
32	20	22	22	10
33	21	23	23	10
34	22	23	24	10

B Optimaalisia viiden aakkosen reunattomia osittaissanoja

Optimaalisia reunattomia osittaissanoja, jotka käyttävät aakkostoa $\{a, b, c, d, e\}$. Vaihtoehtoisista optimaalisista sanoista esitetään sellainen, joka seuraa tarkiten lemman 10 konstruktiota Wichmann-reseptistä. Kaikki sanat eivät vastaa Wichmann-viivoittimia tai niiden jatkeita.

$ab\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit d$

$aaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c$

$aab\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit c$

$aab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit d$

$aaab\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c$

$aaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c$

$aaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

$aab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit d$

$aaaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c$

$aaaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

$aaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

$aaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

$aaaaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

$aaaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c$

$aaaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

$aaaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

$aaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

$aab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d\diamondsuit\diamondsuit d\diamondsuit\diamondsuit e\diamondsuit e$

$aaaaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

$aaaaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

$aaaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

$aaaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

$aab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit dd$

$aab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d\diamondsuit\diamondsuit d\diamondsuit\diamondsuit d\diamondsuit\diamondsuit e\diamondsuit e$

$aaaaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c$

$aaaaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

$aaaaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

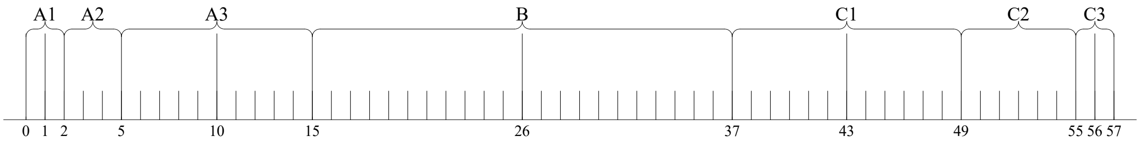
$aaaab\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit b\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit c\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit d$

C Wichmann-reseptin pätevyystodistus

Lause 14. *Wichmann-reseptin* $w_1(r,s) = (1^r, r+1, (2r+1)^r, (4r+3)^s, (2r+2)^{r+1}, 1^r)$ *tuottamat viivoittimet ovat päteviä.*

Todistus. Tämän todistuksen aikana puhuttaessa välistä $[l,k]$ tarkoitetaan väliin kuuluvia kokonaislukuja ja merkintään myös $[l,k]+a = [l+a, k+a]$. Tavoitteena on siis mitata kaikki arvot väliltä $[0, r+r+1+r(2r+1)+s(4r+3)+(r+1)(2r+2)+r]$

Todistuksessa on kolme osaa joilla täydennetään Wichmann-reseptin mittaamat arvot.
Kaikissa osioissa Wichmann-resepti jaotellaan kolmeen osaan A,B,C, missä $w_1(r, s) = (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$. Osio B on erotukset $(4r + 3)^s$ ja A ja C määräytyvät olemaan B osion vasemmalla ja oikealla puolella olevat osat.



Kuva 8: Viivoitin $w_1(2, 2)$. Kuvassa on erotettu Wichmann-reseptin eri osiot merkeillä A1, A2, A3, B, C1, C2 ja C3. Osio C1 on erotuksista $(2r + 2)^{r+1}$ vasemmalta katsoen r ensimmäistä. Rajoilla olevat merkit lasketaan kuuluvaksi kumpaankin rajaavansa osioon. Kuvan generointiin on käytetty osin Peggin koodia [8].

Ensin mitataan pituudet väliltä $[0, (r+1)(2r+2)+r]$, eli pituudet jotka ovat korkeintaan osion C pituisia. Osion A paloista $(1^r, r+1)$ saadaan helposti laskettua etäisyydet väliltä $[0, 2r+1]$. Jos otetaan mukaan $t \leq r$ kappaletta etäisyyksiä $(2r+1)$ ja mitataan siitä oikealle, saadaan mitattua etäisyydet $[0, 2r+1]+t(2r+1)$. Tämän jälkeen C osiosta voidaan vastaavalla tavalla laskea etäisyydet $[2r+2, 3r+2]+t(2r+2)$, missä $t \leq r$. Tämä tapahtuu ottamalla ensimmäiseksi mittausmerkiksi parametrin t tarvitsema määrä $(2r + 2)$ etäisyyksiä, eli $t + 1$ kappaletta oikealta, ja mittaamalla siitä oikealle liu'uttaen mukaanotettavien 1 etäisyyksien määrää.

Näillä metodeilla saadaan mitattua välit $[0, 2r+1]$, $[2r+2, 3r+2]$, $[2r+2, 4r+2]$, $[4r+4, 5r+4]$, $[5r+5, 6r+3]$, $[6r+6, 7r+6] \ldots$ kunnes parametri $t = r$, jolloin ollaan mitattu osion C pituus. Puuttuvat pituudet ovat $4r+3, 6r+4.6r+5, 8r+5, 8r+6, 8r+7 \ldots$ jotka yleisesti nähdään olevan $[4r + 2 + t(2r + 1) + 1, (t + 2)(2r + 2) - 1]$ kaikilla $0 \leq t < r$. Näissä väleissä matalin arvo $4r+3+t(2r+1)$ lasketaan ottamalla osiosta B vasemmanpuolisin $4r + 3$ väli ja lisäämällä siihen vasemmalta A osiosta $(2r + 1)$ välejä. Saamme tähän arvoon lisättyä yhden, jos korvaamme kaksi $(2r + 1)$ väliä lisäämällä oikealta $(4r + 3)$ väli osiosta B. Tätä jatketaan, kunnes kaikki $(2r + 1)$ on käytetty tai niitä on vain yksi jäljellä. Mikäli jossain prosessiin vaiheessa osiosta B loppuu kesken $(4r + 3)$ välit, voidaan sellainen korvata ottamalla C osiosta $(2r + 2)$ väli ja lisäämällä vasemmalta ylinmääräinen $(2r + 1)$ väli, tuottaen tarvittava mitta. Kummassakin tapauksessa tällä tavoin viimeisin mitattu arvo parittomalla t on $(\frac{t-1}{2} + 1)(4r + 3) + (2r + 1)$ jota voidaan nostaa yhdellä ottamalla B osion oikealta puolelta mittaukseen mukaan $(2r + 2)$ väli ja poistamalla viimeinen A osion $(2r + 1)$. Tämän jälkeen voidaan nostaa arvoja yhdellä vaihtamalla $(4r + 3)$ arvoja kahteen $(2r + 2)$ arvoon, jolloin viimeisenä mitataan juurikin $4r + 3 + t(2r + 2) = (t + 2)(2r + 2) - 1$. Tapaus, jossa t on parillinen on hyvin samanlainen. Koostaen tähän mennessä ollaan mitattu kaikki välit $[0, (r+1)(2r+2)+r]$

Seuraavaksi mitataan etäisyydet väliltä $[(r+1)(2r+2)+r, (r+1)(2r+2)+r+(4r+3)s]$. Olkoon l jokin luku tuolta väliltä. Osoitetaan, että on olemassa mitattava etäisyys l' jolla $l' \equiv l \mod 4r+3$ ja $l' \leq l$ ja johon voidaan lisätä tarvittavat määrät etäisyyttä

$4r+3$. Luvun l' olemassaolo seuraa siitä, että A osion oikealta reunalta vasemmalle ja C osion vasemmalta reunalta oikealle muodostetuissa etäisyyksissä saamme $4r+3$ erillaista modulus edustajaa.

- Jos verrataan kahta pituutta, jotka on muodostettu osion A oikealta laidalta vasemmalle. Edustetaan pituuden valintoja parametreillä $t_1, t_2, t_3, t_1', t_2'$ ja t_3'. Näistä alaindeksi 1 edustaa osioiden $(2r+1)$ määrää eli $t_1, t_1' \leq r$, alaindeksi 2 edustaa sitä otetaanko $(r+1)$ osio mukaan vai ei, eli $t_2, t_2' \leq 1$ ja lopulta indeksillä 3 merkitään 1 osioiden määrää, eli $t_3, t_3' \leq r$. Näiden merkintöjen kanssa voidaan laskea, että kaikilla mahdollisilla valinnoilla tuotetaan eri moduloluokkia.

$$\begin{aligned} (2r+1)t_1 + t_2(r+1) + t_3 &\equiv (2r+1)t_1' + t_2'(r+1) + t_3' && || \cdot 2 \\ -t_1 + 2t_2(r+1) + 2t_3 &\equiv -t_1' + 2t_2'(r+1) + 2t_3' && \mod 4r+3 \end{aligned}$$

  Jos $t_3 \neq t_3'$, niin $t_1 = t_1'$ ja $t_2 = t_2'$ jolloin saadaan eri moduluksia. Jos taas $t_2 = 1 \neq t_2' = 0$, niin $t_3' = 0$ ja $t_1 = r$. Tällöin yhtälö saa muodon

$$r + 2 + 2t_3 \equiv -t_1' \qquad \mod 4r+3$$

  Jota sitäkään ei saada t_3 ja t_1' parametrien rajoissa pätemään, eli näin tehdyillä valinnoilla saadaan uusia moduloluokkia. Viimeiseksi valinnoiksi jää $t_2 = t_2' = t_3 = t_3' = 0$. Tälläkin tavoin saamme eri t_1 ja t_1' arvoilla eri tuloksia. Yhteensä saadaan siis A puolelta $r+1+r+1 = 2r+2$ eri $4r+3$ jäännösluokkaedustajaa.

- Seuraavaksi verrataan osiosta C otettuja pituuksia keskenään. Vastaavalla valintojen merkitsemisellä saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} (2r+2)t_1 + t_2 &\equiv (2r+2)t_1' + t_2' && || \cdot 2 \\ t_1 + 2t_2 &\equiv t_1' + 2t_2' && \mod 4r+3 \end{aligned}$$

  Tästäkin tekemällä kaikki eri mahdolliset valinnat huomataan, että saadaan eriäviä jäännösluokkia. Täten B puolelta voidaan laskea $r+1+r+1 = 2r+2$ jäännösluokkaedustajaa.

- Jotta tiedetään laskettaneen eri modulusluokkia, A puolelta otettua pituutta verrataan C puolelta otettuun pituuteen. Tämä muodostaa yhtälön

$$\begin{aligned} (2r+1)t_1 + t_2(r+1) + t_3 &\equiv (2r+2)t_1' + t_2' && || \cdot 2 \\ -t_1 + 2t_2(r+1) + 2t_3 &\equiv t_1' + 2t_2' && \mod 4r+3 \end{aligned}$$

  Missä $t_1' \leq r+1$ ja $t_2' \leq r$ samoin rajoittein, eli mikäli $r_1' < r+1$ niin $t_2' = 0$. Ainoa mahdollinen yhtäsuuruus tulee parametrien nollaamisesta. Kun siis lasketaan yhteen A ja B puolella saadut jäännösluokkaedustajat, yksi leikkauksessa esiintyvä arvo tulee poistaa. Löydettyjä jäännösluokkaedustajia on siis $2r+2+2r+2-1 = 4r+3$ kappaletta, eli kaikki.

Edellä mainittu l' luku siis löydetään niin, että sen pituus on korkeintaan $(r+1)(2r+2)+r$. Tälläinen pituus voidaan mitata niin, että tarvitta määrä $(4r+3)$ moninkertoja voidaan lisätä osiosta B.

Viimeiseksi jäävät luvut väliltä $[(r+1)(2r+2)+r+(4r+3)s, 4r(r+s+2)+3(s+1)]$. Toisin sanoen, jos merkitään viivoittimen pituutta kirjaimella L, tulee vielä mitata väli [L−A,L]. Jaetaan osiot A ja C vielä hienompiin osiin A1, A2, A3, C1, C2 ja C3 joissa jokainen osa edustaa omankokoistaan välirakennetta, paitsi C2 joka edustaa oikealta katsoen ensimmäistä yhtä $(2r+2)$ erotusta. Eli esimerkiksi osiossa A2 on yksittäinen arvo $r+1$, ja osioissa A1 ja C2 on kummassakin r kappaletta arvoa 1. Kun mittauksessa käytetään merkkiä osiosta A1 tai C3, on helppoa liu'uttaa käytettyä merkkiä koko osion läpi mitaten kaikki etäisyydet r kokoisella välillä. Toisin sanoen, jos käytetään lihavoitua symbolia edustamaan liu'uttamista, saadaan välin $[\mathrm{L}-2r, \mathrm{L}]$ mittaus esitettyä seuraavasti:

$$\mathbf{A1} + \mathrm{A2} + r\mathrm{A3} + \mathrm{B} + r\mathrm{C1} + \mathrm{C2} + \mathbf{C3} \longrightarrow [\mathrm{L}-2r, \mathrm{L}],$$

missä merkinnät rA3 ja rC1 tarkoittavat täsmällisiä määriä otettuja välejä kyseisistä osioista. Seuraava väli $[\mathrm{L}-3r-1, \mathrm{L}-2r-1]$ voidaan esittää vastaavasti:

$$r\mathrm{A3} + \mathrm{B} + r\mathrm{C1} + \mathrm{C2} + \mathbf{C3} \longrightarrow [\mathrm{L}-3r-1, \mathrm{L}-2r-1].$$

Tämän jälkeen loput välit aina arvoon L−A asti voidaan esittää seuraten algoritmia, jossa vuorostaa poistetaan A3 osion $2r+1$ pituisia välejä ja C3 osion $2r+2$ pituisia välejä pois mittauksesta. Algoritmin muutama ensimmäinen vaihe on kirjattu alla taulukkoon ja taulukkoa seuraamalla kaava selviää. Ensin vasemmalla puolella liu'utetaan A1 osiota, sitten siirrytään oikealle puolelle liu'uttamaan C3 osiota. Tämän jälkeen otetaan tarvittavat välistepit jotta päästään taas liu'uttamaan vasenta puolta, ja kaava toistuu.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A1} + \mathrm{A2} + r\mathrm{A3} + \mathrm{B} + r\mathrm{C1} &\longrightarrow [\mathrm{L} - 4r - 2, \mathrm{L} - 3r - 2]\\
(r-1)\mathrm{A3} + \mathrm{B} + r\mathrm{C1} + \mathrm{C2} + \mathbf{C3} &\longrightarrow [\mathrm{L} - 5r - 2, \mathrm{L} - 4r - 2]\\
r\mathrm{A3} + \mathrm{B} + r\mathrm{C1} &\longrightarrow \mathrm{L} - 5r - 3\\
\mathbf{A1} + \mathrm{A2} + r\mathrm{A3} + \mathrm{B} + (r-1)\mathrm{C1} &\longrightarrow [\mathrm{L} - 6r - 4, \mathrm{L} - 5r - 4]\\
(r-2)\mathrm{A3} + \mathrm{B} + r\mathrm{C1} + \mathrm{C2} + \mathbf{C3} &\longrightarrow [\mathrm{L} - 7r - 3, \mathrm{L} - 6r - 3]\\
(r-1)\mathrm{A3} + \mathrm{B} + r\mathrm{C1} &\longrightarrow \mathrm{L} - 7r - 4\\
r\mathrm{A3} + \mathrm{B} + (r-1)\mathrm{C1} &\longrightarrow \mathrm{L} - 7r - 5\\
\mathbf{A1} + \mathrm{A2} + r\mathrm{A3} + \mathrm{B} + (r-2)\mathrm{C1} &\longrightarrow [\mathrm{L} - 8r - 6, \mathrm{L} - 7r - 6]\\
(r-3)\mathrm{A3} + \mathrm{B} + r\mathrm{C1} + \mathrm{C2} + \mathbf{C3} &\longrightarrow [\mathrm{L} - 9r - 4, \mathrm{L} - 8r - 4]\\
(r-2)\mathrm{A3} + \mathrm{B} + r\mathrm{C1} &\longrightarrow \mathrm{L} - 9r - 5\\
(r-1)\mathrm{A3} + \mathrm{B} + (r-1)\mathrm{C1} &\longrightarrow \mathrm{L} - 9r - 6\\
r\mathrm{A3} + \mathrm{B} + (r-2)\mathrm{C1} &\longrightarrow \mathrm{L} - 9r - 7\\
\mathbf{A1} + \mathrm{A2} + r\mathrm{A3} + \mathrm{B} + (r-3)\mathrm{C1} &\longrightarrow [\mathrm{L} - 10r - 8, \mathrm{L} - 9r - 8]\\
&\cdots\\
&\cdots\\
&\cdots\\
\mathbf{A1} + \mathrm{A2} + r\mathrm{A3} + \mathrm{B} + 1\mathrm{C1} &\longrightarrow [\mathrm{L} - \mathrm{A} + 1, \mathrm{L} - \mathrm{A} + 1 + r]\\
\mathrm{B} + r\mathrm{C1} + \mathrm{C2} + \mathrm{C3} &\longrightarrow \mathrm{L} - \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Taulukon toisiksi viimeisin rivin paikkaansapitävyys ei ole itsestäänselvää, mutta pitää paikkansa laskemalla

$$
\begin{aligned}
&r\mathrm{A1} + \mathrm{A2} + r\mathrm{A3} + \mathrm{B} + 1\mathrm{C1}\\
=&r + r + 1 + r(2r+1) + \mathrm{B} + 2r + 2\\
=&r + (r+1)(2r+2) + \mathrm{B} + 1\\
=&\mathrm{C} + \mathrm{B} + 1\\
=&\mathrm{L} - \mathrm{A} + 1
\end{aligned}
$$

Täten viimeinenkin osio voidaan mitata ja Wichmann-resepti tuottaa päteviä viivoittimia.

$\square$