TURUN YLIOPISTO

Matemaattinen luovuus ryhmätyöskentelyssä

Matematiikan opettajalinjan
pro gradu -tutkielma

Laatija:
Johanna Saari

7.4.2024
Turku

Pro gradu -tutkielma

Oppiaine: Matematiikka
Tekijä: Johanna Saari
Otsikko: Matemaattinen luovuus ryhmätyöskentelyssä
Ohjaajat: Professori Peter Hästö ja professori Vesa Halava
Sivumäärä: 29 sivua
Päivämäärä: 7.4.2024

Tämä pro gradu -tutkielma on kirjallisuuskatsaus, jossa käsitellään matemaattista luovuutta ryhmätyöskentelyssä ja sen eri osa-alueissa. Matematiikka on tärkeä osa tämän hetken maailmaa ja luovuus on merkittävä osa sitä. Matemaattisesta luovuudesta on oltu kiinnostuneita alan piireissä kasvavissa määrin lähivuosien aikana, mutta ryhmätyöskentelyn vaikutuksesta siihen ei ole ollut paljon puhetta. Tämä pro gradu -tutkielma tavoittelee hieman täydentämään tätä aukkoa tarkastelemalla mitä on ryhmässä tapahtuva matemaattinen luovuus, mitkä asiat siihen vaikuttavat edistävästi tai haitallisesti ja mitä hyötyjä siitä voi olla. Tutkielmassa aihetta lähestytään viidentoista aihetta käsittelevän tutkimusartikkelin pohjalta. Työssä käy ilmi, että panostaminen matemaattiseen luovaan ryhmätyöskentelyyn voi olla hyödyllistä ja merkittävää matematiikan opetukselle sekä oppimiselle ja näiden lisäksi myös oppijalle itselleen.

Aluksi tutkielmassa puhutaan yleisesti luovuudesta ja esitellään työn tutkimusartikkelit, minkä jälkeen syvennytään tarkemmin matemaattiseen luovuuteen ja sen eri osa-alueisiin. Tämän jälkeen tarkastellaan ja pohditaan matemaattista luovuutta ryhmätyöskentelyssä ja sen eri osa-alueissa. Lopuksi vielä tarkastellaan ja pohditaan mitä merkitystä matemaattisella luovuudella on ja miten sitä voidaan lisätä.

Avainsanat: matematiikka, matemaattinen luovuus, kollektiivinen luovuus, ryhmätyöskentely

Sisällysluettelo

1 Johdanto

Luovuus on laaja ja monimutkainen käsite, jolle ei löydy yksiselitteistä määritelmää. Luovana ajatteluna pidetään esimerkiksi uusien ideoiden keksimistä, mielikuvituksellisuutta sekä laatikon ulkopuolelta ajattelua. Yksinkertaisesti voitaisiin kuitenkin sanoa, että luovuus on ihmisen kyky luoda jotain uutta. Arkielämässä luovuus rajoitetaan usein esimerkiksi erilaisiin taiteilijoihin, kun taas tieteen aloilla luovuus on oma moniulotteinen konstruktionsa. Kirjallisuudesta löytyy luovuudelle lukuisia erilaisia määritelmiä, jotka eroavat toisistaan enemmän tai vähemmän kirjoittajan tarkoitusperästä tai tavoitteesta riippuen.

Monet tutkijat jakavat luovuuden kahtia yleiseen (engl. domain-general) ja alakohtaiseen spesifiseen (engl. domain-specific) luovuuteen sekä niiden eri ulottuvuuksiin. Alakohtaisella spesifisellä luovuudella tarkoitetaan sitä, että luovuus vaatii tietyn tason ymmärrystä kyseisellä sisältöalueella. Monesti nämä kaksi ovat vahvasti yhteydessä toisiinsa. Toinen kirjallisuudesta löytyvä luovuuden merkittävä kahtiajako on jako luovuuden absolutistisen ja relativistisen määritelmän välillä. Luovuuden absolutistinen määritelmä korostaa uuden tiedon ja yhteiskuntaan olennaisesti vaikuttavien tuotoksien merkityksellisyyttä, kun taas relativistinen määritelmä keskittyy niin sanottuun arkielämän jokapäiväiseen luovuuteen, jossa luovuuden tuotokset ovat tavallisten ihmisten yksilöllisiä hyödyllisiä aikaansaannoksia, jotka ovat uusia suhteessa heidän omiin aikaisempiin kokemuksiinsa. Relativistinen näkökanta on koulutuksessa absoluutista näkökantaa oleellisempi.

Monelle ihmiselle luovuus on taito, jonka kanssa synnytään tai ei. Tästä mielikuvasta huolimatta luovia ajattelutapoja voidaan harjoitella ja kehittää, sillä luovan ajattelun taidot muodostuvat ihmisen kertyneestä harjoittelusta ja aiempaan kokemukseen perustuvasta asiantuntemuksesta. Yhteistyön ja luovien ajattelutapojen oppiminen on tärkeää jo koulussa, sillä nämä taidot kulkevat ihmisen mukana koulusta tämän tulevaisuuteen. Lähestulkoon jokainen ihminen käyttää matemaattista ajattelua joko tarkoituksellisesti tai passiivisesti arki- sekä työelämässään, sillä matematiikka on läsnä jollain tasolla lähes kaikessa, mitä teemme. Matemaattisen ajattelun osaamisen merkitys on täten huomattava sekä yksilölle että yhteiskunnalle. Pelkkä asiasisällön hallinta ei riitä, vaan myös luovia taitoja tarvitaan. Harjoittelemalla alakohtaista spesifiä luovuutta, kuten tässä matemaattista luovuutta, voidaan valjastaa tästä omaksutut tiedot ja taidot edelleen. Monet tutkimusartikkelit (esimerkiksi Abdu ja Schwartz 2020; Aljarrah 2020; Chiu 2008; Jung 2001; Jung ja Lee 2019; Levenson ja Molad 2022; Molad, Levenson ja Levy 2020; Sengil-Akar ja Yetkin-Ozdemir 2022) korostavat luovuuden ja yhteistyön taitojen merkitystä matematiikan alalla sekä nykymaailmassa. Globalisaation aikakaudella työnkuvien muuttuessa soveltavammiksi on tärkeää, että eri lähtökohdista ja koulutussuunnista tulevat ihmiset osaavat yhdistää taitonsa ja tietonsa ratkaistakseen heidän eteensä tulevia ongelmia yhtenä kollektiivina. Tutkimukset ovat myös osoittaneet, että yhteistyöllinen luovuus voi olla yksilöllistä luovuutta paljon tehokkaampaa ja merkityksellisempää niin matematiikassa kuin yleisestikin (Aljarrah 2020). Yhteisöllinen luovuus on yksilöiden käyttäytymisen, mukana olevien yksilöiden vuorovaikutuksen ja ryhmän sisäisen vuorovaikutuksen luovan synergian funktio (Jung ja Lee 2019). Täten harjoittamalla yhteisöllistä luovuutta monilla eri alueilla voidaan tulevaisuudessa saavuttaa huippuosaamista monissa erilaisissa tehtävissä, joita globalisaatio voi tuoda tullessaan.

Luovuuden pohjalta voidaan määritellä edelleen *matemaattinen luovuus*, johon syvennytään paremmin kappaleessa 3 Matemaattinen luovuus.

2 Työn tutkimusartikkelien esittely

Tässä työssä lähestytään matemaattista luovuutta ryhmätyöskentelyssä viidentoista aihetta käsittelevän tutkimusartikkelin pohjalta. Tutkimusartikkeleissa aihetta tarkasteltiin eri ikäisten oppilaiden ja opiskelijoiden keskuudessa eri metodeilla eri näkökulmista.

Suurimmassa osassa tutkimusartikkeleita tutkittiin pienryhmien tai parin toimintaa joko peruskouluikäisten oppilaiden keskuudessa (Aljarrah 2020; Chiu 2008; Goos ja Galbraith 1996; Levenson 2011; Sengil-Akar ja Yetkin-Ozdemir 2022) tai lukioikäisten tai sitä vanhempien opiskelijoiden keskuudessa (Jung ja Lee 2019; Levenson ja Molad 2022). Tutkimusartikkelissa (Aljarrah 2020) kerättiin tutkittavaa dataa videoimalla pienryhmien toimintaa Design-based research -metodilla, artikkelissa (Chiu 2008) analysoitiin tilastollisesti pienryhmien keskustelua Dynamic multilevel analysis -metodilla ja artikkeleissa (Goos ja Galbraith 1996; Jung ja Lee 2019; Levenson 2011; Levenson ja Molad 2022; Sengil-Akar ja Yetkin-Ozdemir 2022) seurattiin ja analysoitiin joko parin tai pienryhmän toimintaa tietyn ajanjakson aikana joko paikan päältä tai nauhoitteilta. Apuna analysoinnissa saatettiin käyttää muun muassa opetushetkien muistiinpanoja sekä oppilaiden tai opiskelijoiden tekemiä työmonisteita. Artikkelissa (Sengil-Akar ja Yetkin-Ozdemir 2022) tutkimuskohteet, erityisen lahjakkaat oppilaat, valittiin Case study -metodin tutkimukseen huolellisesti etukäteen. Tutkimusartikkelissa (Schoevers, Kroesbergen ja Kattou 2018) tutkittiin isompaa peruskouluikäisten oppilaiden ryhmää Structural equation modeling -metodilla, jossa tutkittiin tilastollisesti näiden tekemiä erilaisia testejä ja niiden yhteyksiä matemaattisen luovuuden eri osa-alueisiin.

Tutkimusartikkelissa (Abdu ja Schwartz 2020) testattiin yläasteikäisistä oppilaista muodostuvan ryhmän kanssa, miten oppilaiden kouluttaminen yhdessä oppimiseen vaikuttaa matemaattisten ongelmanratkaisutehtävien ratkaisemiseen. Ensin oppilaille pidettiin alkutilanteen kartoittava testi, sitten koulutusta ja lopuksi vielä lopputilanteen kartoittava testi.

Toinen tutkimusartikkeleissa usein esiintyvä tutkimusmenetelmä oli kahden tai neljän erilaisen ryhmän vertaaminen toisiinsa. Näille kaikille yhteistä oli tutkimusryhmät ja kontrolliryhmät. Kahta erilaista lukioikäisistä tai sitä vanhemmista opiskelijoista muodostuvaa ryhmää vertailivat (Bicer 2021; Molad, Levenson ja Levy 2020), jossa artikkelissa (Bicer 2021) tutkimusryhmälle pidettiin kurssi, jota kontrolliryhmälle ei pidetty, ja artikkelissa (Molad, Levenson ja Levy 2020) ohjeistettiin opiskelijoita tutkimusryhmässä ja kontrolliryhmässä eri työskentelytyyleihin työn eri vaiheissa. Neljää erilaista ryhmää vertailivat tutkimusartikkelit (Jung 2001; Kirisci, Sak ja Karaback 2020; Kramarski ja Mevarech 2003). Artikkelissa (Jung 2001) tutkittiin yliopiston kandivaiheen opiskelijoita, kun taas kahdessa muussa artikkelissa (Kirisci, Sak ja Karaback 2020; Kramarski ja Mevarech 2003) tutkittiin yläasteikäisiä oppilaita. Artikkelissa (Kramarski ja Mevarech 2003) tutkittiin miten yksilötyö tai ryhmätyö ja metakognitiivinen koulutus tai sen puuttuminen vaikuttivat saman matemaattisen tehtävän ratkaisemiseen ja artikkelissa (Kirisci, Sak ja Karaback 2020) käytettiin Solomon four-group design -metodia mittaamaan Selective Problem Solving -mallin tehokkuutta oppilaiden matemaattisen luovuuden kehittämiseen.

Tutkimusartikkelissa (Adiredja ja Zandieh 2020) haastateltiin samanikäisiä opiskelijoita eri taustoista Semi-structured interview -metodilla, jossa haastattelu oli avoin, mutta sisälsi ennalta määrätyn joukon kysymyksiä, jotka herättivät keskustelua tiettyä tutkittavaa teemaa kohti.

Joissakin tutkimusartikkeleissa tutkittava oppilaiden tai opiskelijoiden joukko oli paljon pienempi tai suurempi riippuen tutkimuksen käyttämästä tutkimusmetodista. Esimerkiksi artikkelissa (Chiu 2008) tutkittava joukko oli erityisen pieni (kaksi neljän oppilaan ryhmää), sillä siinä tutkittiin yksityiskohtaisesti ryhmän joka ikistä kanssakäymistä, kun taas artikkeleissa (Kirisci, Sak ja Karaback 2020; Kramarski ja Mevarech 2003) tutkittava joukko oli huomattavan suuri (201 ja 384 oppilasta), sillä käytetty ryhmiä vertaileva tutkimusmetodi mahdollisti useiden toisiaan vastaavien ryhmien osallistumisen tutkimukseen tehden niistä mahdollisesti jopa tarkempia.

Artikkelien tutkimuksien yhteydessä käytettiin paljon erilaisia ongelmanratkaisutehtäviä, joista pari esitellään myöhemmin kappaleessa 5.3.1 Esimerkkejä.

3 Matemaattinen luovuus

Matematiikka on tieteenalana luonnostaan luova. Useat tutkimukset ovatkin osoittaneet, että yleinen luovuus, matemaattinen kyky ja matemaattinen luovuus ovat vahvasti kytköksissä toisiinsa (Adiredja ja Zandieh 2020; Bicer 2021; Schoevers, Kroesbergen ja Kattou 2018). Sekä yleinen luovuus että matemaattinen kyky ovat edellytyksiä matemaattiselle luovuudelle. Matemaattista luovuutta auttavat myös metakognitiiviset taidot, eli taidot oman ajattelunsa tiedostamisesta ja säätelystä (Kramarski ja Mevarech 2003).

Matemaattinen luovuus on alakohtaista spesifiä luovuutta. Matemaattisten sääntöjen tunteminen on siis välttämätöntä matemaattiselle luovuudelle, mutta samalla ne voivat myös tukahduttaa luovuutta (Molad, Levenson ja Levy 2020). Matematiikka koetaan tosi tiukkojen sääntöjen sanelemana tieteenalana, jolloin helposti ongelmaan alkaa etsiä ratkaisua tiettyjen raamien sisältä - eikä anna itselleen mahdollisuutta ajatella asiaa luovasti.

Matemaattisen luovuuden ytimenä katsotaan olevan ongelmanratkaisu. Ongelmanratkaisutehtävät ovat sellaisia tehtäviä, joiden ratkaisumenetelmät eivät ole heti selkeitä. Tällöin ongelman ratkaisijat ohjataan ajattelemaan luovasti. Ongelmanratkaisutehtäviä ovat esimerkiksi tehtävät, joilla on useampi kuin yksi ratkaisu, avoimet tehtävät sekä ongelman muodostustehtävät. Näillä kaikilla tehtävillä on usein useampi kuin yksi ratkaisu, joten ne sopivat loistavaksi arvioimaan matemaattista luovuutta ja sen eri osa-alueita. (Bicer 2021; Schoevers, Kroesbergen ja Kattou 2018)

Matemaattinen luovuuden arviointi voidaan nähdä kahdesta eri näkökulmasta, luovasta prosessista ja luovasta tuotteesta (Levenson ja Molad 2022; Molad, Levenson ja Levy 2020; Sengil-Akar ja Yetkin-Ozdemir 2022). Luovalla prosessilla tarkoitetaan prosessia, jonka lopputuloksena syntyy uusi ja oivaltava ratkaisu kyseessä olevaan ongelmaan, kun taas vastaavasti luovalla tuotteella tarkoitetaan ideaa tai ratkaisua ongelmaan, joka on usein uusi ja/tai omaperäinen. Toisinaan prosessia ja tuotetta on kuitenkin hyvin vaikeaa erottaa toisistaan (Levenson 2011). Aina, varsinkin koulumatematiikassa, näiden prosessien erottaminen ei ole välttämätöntä, vaan niiden voidaan katsoa olevan yksi luova kokonaisuus.

Matemaattiseen luovaan ajatteluun liittyy esimerkiksi taito ratkaista matemaattisia ongelmia epätavallisin keinoin, löytää yhteyksiä useiden erilaisten matemaattisten konseptien väliltä, kehittää uusia ideoita konseptin sisällä, tehdä epätavallisia johtopäätöksiä relevanteista lähteistä, tunnistaa oleellisia tietoja ja vastauksien oikeellisuutta, luoda matemaattisia yleistyksiä sekä rakentaa uutta matemaattista tietoa. Matemaattisten ongelmien luova ratkaisu vaatii siis luovaa ajattelutapaa, riskien ottoa, mielikuvituksellisuutta, erilaisten metodien käyttöä ja kehittämistä, uteliaisuutta ja mietteliäisyyttä. (Aljarrah 2020; Bicer 2021; Kirisci, Sak ja Karaback 2020; Schoevers, Kroesbergen ja Kattou 2018; Sengil-Akar ja Yetkin-Ozdemir 2022)

Matemaattisen luovuuden kolme tärkeintä ominaisuutta ovat sujuvuus (engl. fluency), joustavuus (engl. flexibility) ja omaperäisyys (engl. originality, novelty) (Levenson 2011). Muita tärkeitä ominaisuuksia ovat tehokkuus (engl. effectiveness), tarkkuus (engl. sensitivity) ja kehittäminen (engl. elaboration). Näistä tarkemmin seuraavissa kappaleissa.

3.1 Sujuvuus

Sujuvuudella (engl. fluency) tarkoitetaan matemaattisen luovuuden kontekstissa erilaisten ideoiden jatkuvuutta ja assosiaatioiden virtausta. Sitä käytetään viittaamaan suuren määrän ideoita ja/tai vaihtoehtoisia ratkaisuja tuottamiseen (Aljarrah 2020; Levenson ja Molad 2022; Molad, Levenson ja Levy 2020). Sujuvat ajattelijat pystyvät luomaan monia ideoita ja lähestymistapoja löytääkseen erilaisia ratkaisuja annettuun ongelmaan. Tutkimuksissa sujuvuutta mitataan useimmiten arvioimalla toistumattomien ideoiden kokonaismäärää (Levenson 2011). Matematiikan kontekstissa näiden ideoiden tulee myös olla tietyn alueen sääntöjen ja määritelmien mukaisia sekä matemaattisesti oikeita (Kramarski ja Mevarech 2003; Molad, Levenson ja Levy 2020).

Kollektiivinen sujuvuus ei välttämättä ole suurempaa kuin yksilöiden yhteenlaskettu sujuvuus. Tämä tarkoittaa sitä, että ryhmä ei välttämättä keksi suurempaa määrää erilaisia ideoita kuin mitä ryhmän jäsenet keksisivät erillänsä yhteenlaskettuina. (Molad, Levenson ja Levy 2020) Avun pyytäminen, selvennysten vastaanottaminen ja strategioiden selittäminen johtavat sujuvuuteen (Levenson ja Molad 2022).

3.2 Joustavuus

Joustavuudella (engl. flexibility) tarkoitetaan matemaattisen luovuuden kontekstissa toisistaan eroavien tuotettujen ideoiden lukumäärää. Sillä viitataan useamman kuin yhden oikeellisen argumentin esittämiseen väitettä ja/tai päättelyä perusteltaessa sekä silminnähtäviin muutoksiin lähestymistavoissa ongelmia ratkottaessa. (Aljarrah 2020; Kramarski ja Mevarech 2003; Levenson ja Molad 2022; Molad, Levenson ja Levy 2020) Joustavat ajattelijat pystyvät muuttamaan ajattelu- ja/tai lähestymistapaansa etsiessään erilaisia ratkaisuja annettuun ongelmaan. Tutkimuksissa joustavuutta mitataan useimmiten arvioimalla erilaisten käytettyjen strategiakategorioiden tai ratkaisukategorioiden kokonaismäärää (Levenson ja Molad 2022).

Joustavuuden voidaan katsoa olevan fiksaation, mielen jäykkyyden ja itsensä rajoittamisen vastakohta (Levenson 2011; Molad, Levenson ja Levy 2020). Joustavuutta on siis irtautua näistä stereotypioista. Fiksaatio voi olla joko sisältöuniversumifiksaatiota tai algoritmista fiksaatiota. Sisältöuniversumifiksaatiolla tarkoitetaan sitä, jolloin matemaattisen ongelman ajattelu rajoittuu riittämättömään määrään tehtävään soveltuvia elementtejä, kun taas algoritmisella fiksaatiolla tarkoitetaan tarpeetonta sitoutumista alun perin toimineeseen algoritmiin, vaikka algoritmin käyttö muuttuisikin sopimattomaksi tai vähemmän optimaaliseksi. (Aljarrah 2020; Levenson ja Molad 2022) Fiksaatio saattaa myös kohdistua matemaattisten sääntöjen turhan täsmälliseen noudattamiseen. Matemaattisen tarkkuuden väliaikainen keskeyttäminen saattaa olla kannattavaa joustavuudelle, kun ongelman ratkaisija voi miettiä erilaisia ratkaisumetodeita ilman pelkoa epäonnistumisesta tai leimautumisesta. Joissain tapauksissa erilaiset rajoitukset voivat myös luoda luovuutta. (Adiredja ja Zandieh 2020)

Kollektiivisella joustavuudella tarkoitetaan kollektiivista prosessia, eikä välttämättä sitä, että ryhmä yhdessä tuottaa ratkaisuja erilaisia strategioita käyttämällä (Levenson 2011). Kollektiivinen joustavuus riippuu vahvasti ryhmän jäsenten välisistä vuorovaikutuksista. Ryhmän jäsenten monimuotoisuus voi olla joko suuri etu tai este (Molad, Levenson ja Levy 2020). Toimivassa ryhmässä kollektiivinen joustavuus pääsee huippuunsa, kun jokainen ryhmän jäsen sisäistää ja omaksuu ryhmän käyttämän strategian ja pääsee itse tuottamaan lisää ratkaisuja, kun taas toimimattomassa ryhmässä ratkaisujen käyttöön tarkoitettua aikaa saattaa kulua erilaisiin vuorovaikutustilanteisiin (Levenson ja Molad 2022).

3.3 Omaperäisyys

Omaperäisyydellä (engl. originality, novelty) tarkoitetaan matemaattisen luovuuden kontekstissa uusien ja/tai ainutlaatuisten ideoiden tai ratkaisujen tuottamista. Sillä viitataan harvinaisten ideoiden tai ratkaisujen tuottamiseen sekä muista poikkeavien ratkaisumenetelmien käyttämiseen. Omaperäisyyttä voidaan siis luonnehtia ainutlaatuisena, ryhmästä poikkeavana ja yksilöllisyyden säilyttävänä ajattelutapana. (Aljarrah 2020; Levenson 2011; Molad, Levenson ja Levy 2020) Se saattaa olla vahvasti riippuvaista matematiikan sisällön tuntemuksesta ja matemaattisista kyvyistä. Omaperäisyys on suhteellinen käsite, sillä se on riippuvainen kontekstistaan. Esimerkiksi luokkahuoneessa uusi ratkaisu on sellainen, joka on uusi luokkahuoneen osallistujille heidän oppimishistoriaansa suhteutettuna. (Levenson 2011; Levenson ja Molad 2022; Molad, Levenson ja Levy 2020) Tutkimuksissa omaperäisyyttä mitataan usein arvioimalla suhteellisesti harvinaisten ideoiden tai ratkaisujen lukumäärää (Levenson ja Molad 2022). Suhteellisella harvinaisuudella tarkoitetaan sitä, että esiintyykö idea tai ratkaisu harvoin, esimerkiksi alle viidessätoista prosentissa yhteenlasketuista ideoista tai ratkaisuista (Molad, Levenson ja Levy 2020).

Omaperäisyydellä voidaan viitata matemaattisen luovuuden kontekstissa kirjallisuudessa kahteen toisistansa eroavaan asiaan. Omaperäinen idea voi olla joko kyseisessä tilanteessa syntynyt uusi idea, jonka kuitenkin useat keksivät toisistaan riippumatta tai kyseisessä tilanteessa syntynyt yksi- ja ainutlaatuinen, tavallisesta selkeästi poikkeava idea.

Omaperäiset ideat voivat syntyä yllättävissäkin tilanteissa ja olosuhteissa. Esimerkiksi saman strategian toistuva käyttö voi sattumalta johtaa alkuperäiseen ideaan, vaikka algoritmista ajattelua pidetään luovuudelle epäominaisena piirteenä. Joskus myös sattumalta toisesta tilanteeseen liittymättömästä ideasta hiottu villi idea saattaa osoittautua uuden idean lisäksi myös matemaattisesti oikeelliseksi sekä kontekstissa omaperäiseksi ideaksi. (Levenson ja Molad 2022)

Kollektiivinen omaperäisyys on erittäin monimutkainen käsite. On todella vaikea erotella, että onko uusi idea tulosta koko kollektiivin tai yhden sen jäsenen ajattelusta (Levenson ja Molad 2022; Molad, Levenson ja Levy 2020).

3.4 Sujuvuuden, joustavuuden ja omaperäisyyden suhde

Sujuvuus, joustavuus ja omaperäisyys ovat selkeästi matemaattisen luovuuden perusta. Erilaiset tehtävät voivat stimuloida näitä luovuuden kolmea eri elementtiä eri tasoilla ja eri voimakkuuksilla. Jokin tehtävä voi esimerkiksi stimuloida hyvin joustavuutta ja hieman sujuvuutta, mutta ei laisinkaan omaperäisyyttä, kun vastaavasti taas joku toinen tehtävä voi stimuloida pelkästään omaperäisyyttä. (Levenson 2011)

Ei ole selkeää ovatko nämä kolme matemaattisen luovuuden perustan elementtiä yhtä tärkeitä matemaattiselle luovuudelle tai onko yksi esimerkiksi enemmän tai vähemmän tärkeä kuin kaksi muuta. Useissa tutkimuksissa tätä ajatusta on koitettu selkeyttää luomalla erilaisia pisteytyksiä näille kolmelle eri elementille. (Molad, Levenson ja Levy 2020)

3.5 Tehokkuus, tarkkuus ja kehittäminen

Muita matemaattisen luovuuden tärkeitä ominaisuuksia ovat esimerkiksi tehokkuus (engl. effectiveness), tarkkuus (engl. sensitivity) ja kehittäminen (engl. elaboration).

Tehokkuudessa arvioidaan, että onko idea esimerkiksi sopiva, hyödyllinen, asianmukainen tai arvokas. On tärkeä osata olla suvaitseva epäselvyyden tunteelle, eikä heti esimerkiksi kuopata ideaa ensimmäisen ongelman ilmetessä. Tehokkuus on siten jossain määrin kyky arvioida voiko kyseisen idean ongelman ratkaista ja onko siihen tarpeeksi aikaa ja muita resursseja tai kannattaako yrittää keksiä jotain kokonaan uutta. (Aljarrah 2020; Levenson ja Molad 2022)

Tarkkuudella tässä kontekstissa viitataan ideoiden parantamisprosessiin antamalla enemmän yksityiskohtia eli yksinkertaisemmin ideoiden tarkentamiseen. (Levenson ja Molad 2022)

Kehittämisellä viitataan taas idean jalostamiseen. Siinä idea omaksutaan ja siihen rakennetaan lisää sisältöä, sitä käsitellään uudelleen ja uudelleen useista eri näkökulmista, jotta sitä saadaan hiottua paremmaksi. (Adiredja ja Zandieh 2020; Aljarrah 2020; Levenson ja Molad 2022)

4 Luovuus ryhmätyöskentelyssä matematiikassa

Matemaattiset ongelmat ovat usein luotu vaikeiksi yksittäisille ratkaisijoille (Abdu ja Schwartz 2020). Vaikeat tehtävät pakottavat ratkaisijat soveltamaan tietojaan ja taitojaan, joka on tärkeää matematiikan syvälliselle oppimiselle. Yksi tapa pureutua vaikeisiin tehtäviin on ryhmätyöskentely. Ryhmätyöskentely on työskentelyä, jossa kaksi tai useampi ihminen työskentelee yhdessä saman ongelman tai tehtävän parissa. Siinä jokaisen ryhmän jäsenen tarkoituksena on valjastaa omat vahvuutensa ryhmän käyttöön sekä kannustaa toisia yhteisen päämäärän saavuttamiseksi. Ryhmässä työskentely on artikkelin (Abdu ja Schwartz 2020) mukaan usein hyödyllistä matematiikan oppimiselle, sillä artikkelissa mainitut tutkimukset löysivät sitä tukevia ominaisuuksia, kuten esimerkiksi positiivista keskinäistä riippuvuutta, yksilöllistä vastuunottoa sekä edistävää vuorovaikutusta.

Ryhmätyöskentelylle hyödyllisiksi toimintatavoiksi on esitetty esimerkiksi omien ajatusten selittämistä toisille, toisten ideoiden ja näkökulmien huomioimista ja kuuntelemista sekä ymmärtämisen yrittämistä, kysymyksien kysymistä toisilta epäselvissä tilanteissa, väitteiden tukemista tiedolla argumenttien muodostamiseksi ja ryhmän jäsenten välisen toiminnan yhteensovittamista sekä vastuun jakamista (Abdu ja Schwartz 2020; Goos ja Galbraith 1996). Ryhmätyöskentelylle epähyödyllisksi toimintatavoiksi on esitetty esimerkiksi toisten kuulematta jättämistä, asioista kiistelyä tai vastaavasti myös asioiden kyseenalaistamatonta hyväksymistä sekä vastuiden ja töiden tasapainottamatta jättämistä (Abdu ja Schwartz 2020).

Ryhmän luovuus on ennalta-arvaamatonta, kollektiivista ja tuottavaa. Ryhmän jäsenten välinen toiminta ja vuorovaikutus saa vaikutteita toisistaan ja ryhmällä on usein ominaisuuksia, joita sen jäsenillä ei yksin työskennellessä välttämättä olisi. Yksilöllistä ja kollektiivista tiedon tuottamista ei voida täysin erottaa toisistaan ryhmäkontekstissa, joten kollektiivinen työskentely voi myös antaa tilaa yksilön ideoille ja niiden matemaattiselle kehitykselle. (Aljarrah 2020) Ryhmän jäsenten yhteistyökykyinen työskentely edistää heidän luovaa ajatteluaan matematiikassa, sillä ryhmän jäsenet voivat vaikuttaa toistensa ajatuksiin sekä kehittää toistensa ideoita (Sengil-Akar ja Yetkin-Ozdemir 2022).

Luovuus on ennen kaikkea ihmisen yksilöllinen ominaisuus. Kuitenkin ryhmässä yksilöt voivat toimia keskenään luovasti ja saada aikaiseksi sellaisia ideoita ja ratkaisuja, joihin he eivät olisi erillään pystyneet (Aljarrah 2020; Levenson 2011). Kollektiivisia luovia tekoja matematiikassa ovat esimerkiksi ryhmäläisten voimien yhdistäminen, normaalista poikkeava ajatteleminen ja ideoiden yhdistäminen uudella tavalla (Aljarrah 2020). Ryhmässä ideoiden syntymiseen vaikuttaa siis jokaisen yksilön henkilökohtainen panos ja vuorovaikutus ryhmän muiden jäsenien kanssa. Ryhmäläiset voivat yhdistää ja rakentaa yhteisiä ideoita ryhmäläisten yksilöllisistä ideoista. Ryhmän yhteistyössä matemaattinen idea, joka on alun perin lähtöisin ryhmän yhdeltä jäseneltä, omaksutaan ja sitä rakennetaan sekä kehitetään eteenpäin yhteiseksi ideaksi. (Levenson 2011; Sengil-Akar ja Yetkin-Ozdemir 2022) Samoin yhden ryhmäläisen idea voi muistuttaa toista ryhmäläistä toisenlaisen idean mahdollisuudesta (Levenson ja Molad 2022).

Matemaattisessa ryhmätyöskentelyssä kritiikin antaminen voi olla hyödyllistä sekä sen antajalle että vastaanottajalle, sillä kritiikki stimuloi ajatusprosesseja. Varsinkin kritiikki, joka keskittyy keskeiseen ideaan annetussa matemaattisessa tehtävässä, edistää luovuutta enemmän kuin määrällisesti useiden kritiikkien antaminen. (Levenson ja Molad 2022) Jos ryhmän jäsen, joka on kaikista varmin omasta ideastaan, puhuu viimeiseksi, on kaikilla ryhmän jäsenillä mahdollisuus osallistua keskusteluun ja mahdollisista virheistä voidaan oppia lisää (Abdu ja Schwartz 2020). Samoin jos yhdellä ryhmän jäsenellä on epävarmuuksia ideansa kanssa, voi toisella jäsenellä olla tietous ratkaista tämä epävarmuus. Matematiikan luokkahuoneessa tämä voi ilmentyä uusien luovien ideoiden virtana. (Adiredja ja Zandieh 2020)

Ryhmässä toimiminen ja siinä tapahtuvat erilaiset vuorovaikutukset voivat edistämisen sijasta jossain tapauksissa heikentää matemaattista luovuutta (Levenson ja Molad 2022). Ryhmä ei esimerkiksi aina luo enemmän ideoita mitä sen jäsenet loisivat yhteenlaskettuna yksinään. Ryhmän luovaa työskentelyä saattaa häiritä muun muassa se, että ryhmän jäsenistä osa on niin sanottuja siipeilijöitä tai jopa ryhmän toimintaa häiritseviä jäseniä, ryhmän jäsenillä on vaikeuksia ottaa huomioon toisten ideoita tai ryhmän jäsenet kuuntelevat niin sanotusti liikaa muiden ideoita eivätkä siten luo itse ideoita tai että heillä ei ole riittävästi aikaa pohtia ja reflektoida muiden ideoita, jotta he voisivat luoda omia ideoitansa. Myös pelko siitä, että toiset ryhmäläiset arvioivat tai arvostelevat saattaa vaikuttaa ryhmäläisen luovaan matemaattiseen toimintaan negatiivisesti. (Goos ja Galbraith 1996; Jung 2001; Levenson 2011) Ryhmätoimintaan vaikuttaa suuresti myös ryhmän jäsenten välinen kommunikaatio. Jos kommunikaatio on huonoa tai tuottamatonta saatetaan monet toimivat ideat sivuttaa, jolloin ei päästä haluttuun lopputulokseen.

4.1 Yksilöllisen matemaattisen luovuuden ja ryhmäluovuuden suhde

Ryhmäkontekstissa yksilöllistä matemaattista luovuutta ja matemaattista ryhmäluovuutta on erittäin vaikeaa erottaa toisistaan. Ryhmä muodostuu yksilöistä, jotka työskentelevät saman matemaattisen ongelman parissa. Nämä yksilöt antavat ryhmälle omia ideoitansa, oivalluksiansa ja ohjeitansa strategioista ja erilaisista lähestymistavoista, jotka lopulta rakentavat yhdessä kollektiivisen luovan ratkaisun. Ryhmän jäsenet tuovat tunnistettavia henkilökohtaisia panoksia ryhmän toimintaan, mutta ratkaisu on silti koko ryhmän kollektiivisen prosessin lopputulos. (Aljarrah 2020)

Omaperäinen ratkaisu voi syntyä monen erilaisen reitin kautta. Toiminnan hetkellä ei välttämättä ole selkeää, mitkä kaikki edeltävät toiminnat ja/tai vuorovaikutukset ovat siihen vaikuttaneet. (Levenson ja Molad 2022) Syntynyt idea saattaa tietyllä hetkellä vaikuttaa ryhmän yhden jäsenen aikaansaannokselta, vaikka todellisuudessa ryhmän muiden jäsenten aikaisemmilla vuorovaikutuksilla on saattanut olla syntyneeseen ideaan erittäin suuri vaikutus. Lopussa voidaankin pohtia ideoiden kulkua ja päätellä, miten tietty toiminta on vaikuttanut lopputulokseen.

4.2 Kommunikaation vaikutus

Kommunikaatiolla on suuri vaikutus ryhmän työskentelyyn ja sitä myötä myös ryhmän matemaattiseen luovuuteen. Ne oppilaat, joilla on huonot kommunikaatiotaidot, hyötyvät todennäköisesti vähemmän ryhmässä työskentelystä, koska he eivät pysty kommunikoimaan matemaattista päättelyään, esittämään kysymyksiä tai tarjoamaan rakentavaa kritiikkiä muille ryhmän jäsenille. (Kramarski ja Mevarech 2003) Erilaiset ryhmäprosessit, kuten esimerkiksi erimielisyydet, arvioinnit, ryhmän rakenne ja monimuotoisuus tai statuskysymykset voivat joko tukea tai rajoittaa matemaattista luovuutta. Muun muassa M. M. Chiu kirjoittaa tästä erittäin kattavasti artikkelissaan Effects of argumentation on group-micro-creativity: Statistical discourse analyses of algebra students’ collaborative problem solving, jossa tutkitaan yläasteikäisten oppilaiden kommunikointia ryhmässä heidän työskennellessään matemaattisen ongelman parissa. Seuraavan osuuden asiasisältö on kirjoitettu tämän artikkelin pohjalta.

Ryhmät, joilla on paljon erilaisia näkemyksiä ja kyky arvostaa toistensa erilaista panosta, voivat kehittää enemmän matemaattisia ideoita, perusteluja ja ratkaisuehdotuksia. Ryhmän jäsenten erilaiset näkökulmat voivat myös auttaa matemaattisten ideoiden tarkastelussa uusia ideoita luodessa, ideoiden pätevyyden perustelemisessa sekä niiden puutteiden tunnistamisessa. Uusia ideoita saattaa syntyä esimerkiksi herätettyjen ajatusten, ideoiden yhteen kokoamisen tai luovien väärintulkintojen kautta. Virheellinen idea ei siten välttämättä aina johda ryhmää harhaan, sillä siitä voi kehkeytyä myös uusi kunnollinen idea. Täten ryhmän monimuotoisuus voi lisätä matemaattista luovuutta.

Ryhmän tehdessä yhdessä töitä sen jäsenet tarkastelevat ja arvioivat toistensa matemaattisia ideoita ja toimintaa. Jäsenet voivat ohjata ryhmän toimintaa joko olemalla samaa tai eri mieltä toisten ryhmän jäsenten kanssa. Yhteisymmärrykset kannustavat jatkamaan nykyistä ongelmanratkaisupolkua, kun taas erimielisyydet yrittävät muuttaa sitä.

Erimielisyydet voivat edistää matemaattista luovuutta sekä suorasti että epäsuorasti. Erimielisyyden osoittaminen herättää ryhmän jäsenten kollektiivisen huomion, jolloin voi syntyä luovia tilanteita. Esimerkiksi yhden ryhmän jäsenen osoittaessa virheellistä päättelyä ryhmän matemaattisessa ideassa voivat kaikki ryhmän jäsenet ajatella luovasti yrittäessään keksiä ratkaisua tähän ilmenneeseen ongelmaan. Erimielisyydet voivat myös opastaa ryhmää pohtimaan matemaattista ongelmaa useammista eri näkökulmista ja niiden esille tuominen voi kannustaa ja rohkaista ryhmän jäseniä tuomaan epätavallisempia ideoita ja ajatuksia ilmi. Siten erheellinenkin erimielisyys, esimerkiksi tilanne, jossa yksi ryhmän jäsen on käsittänyt jonkin asian väärin, voi synnyttää luovuutta ryhmän kesken. Kohteliaat erimielisyydet sekä tukevat sosiaalisia suhteita sekä edistävät ryhmän toimintaa ja sitä myötä matemaattista luovuutta, kun jäsenet yrittävät ymmärtää kritiikkiä, perustella omia alkuperäisiä ideoitansa paremmin tai tunnistaa tehtyjä virheitä sekä luoda uusia toimivampia ideoita. Erityisesti kohteliaat erimielisyydet edistävät matemaattista luovuutta, vaikka joissain tilanteissa myös töykeät erimielisyyden osoittamiset rohkaisevat matemaattiseen luovuuteen. Erityisesti sellaiset tilanteet, jossa töykeä erimielisyys osoittaa virheen aiemmassa ideassa, kannustavat ryhmäläisiä uuden näkökulman etsintään ja luovaan ajatteluun. Erimielisyyksien esille tuomien on erittäin tärkeää, sillä usein niiden puuttuessa virheelliset ideat poikivat lisää virheellisiä ideoita. Erimielisyyksien lisäksi ryhmäläiset voivat ilmaista havaitsemiansa ongelmia tai vaikeuksia myös kysymysten avulla.

Kysymykset voivat matemaattisessa ryhmätyöskentelyssä viitata joko yksilön tai koko ryhmän ymmärryksen puutteeseen tai tietämättömyyteen. Riippuen kysymyksien ominaisuuksista niillä on hyvin erilaisia vaikutuksia ryhmäluovuuteen. Yksilöllisen ymmärryksen puutteeseen tai tietämättömyyteen viittaavilla kysymyksillä tarkoitetaan kysymyksiä, joissa kysyjän ymmärryksessä on jonkinlainen aukko tehtävänkontekstissa. Näihin kysymyksiin löytyy vastaus vanhasta, aiemmin esille tulleesta matemaattisesta ideasta tai ajatuksesta. Yksilölliset kysymykset rohkaisevat siten vanhojen matemaattisten ideoiden tarkastelua, joka vie aikaa uusien matemaattisten ideoiden luomisesta ja voi siten vaikuttaa haitallisesti matemaattiseen ryhmäluovuuteen. Jos kysymys on sellainen, johon yksikään ryhmän jäsen ei tiedä vastausta, se voi motivoida matemaattista ryhmäluovuutta sekä osoittaa suuntaa, minne päin lähteä ongelmanratkaisupolulla.

Ryhmäprosessit voivat matemaattisen luovuuden tukemisen sijasta niin ikään rajoittaa matemaattista luovuutta. Esimerkiksi edellä mainitut töykeät erimielisyyden osoittamiset voivat jossain tilanteissa aiheuttaa kitkaa ryhmän jäsenten välille, jolloin yhdessä työskentelyn laatu ja samassa yhteydessä ryhmän matemaattinen luovuus heikkenee. Tätä saattaa tapahtua muun muassa silloin, kuin erimielisyydet kulkeutuvat ongelmanratkaisun kontekstista sosiaaliseen kontekstiin, jolloin ryhmän jäsenet voivat suojata omia julkisia minäkuviansa tai statustansa sen sijasta, että he edistäisivät yhteistä tavoitetta.

Jokaisella ryhmän sisällä tapahtuvalla arvioinnilla on vaikutuksia ryhmän matemaattisen työskentelyn lisäksi arvioinnin kohteena olevan henkilön julkiseen minäkuvaan eli käsitykseen siitä, millainen ihminen hän on ja esimerkiksi millaista tietoa tai taitoa hän omaa. Arvioinnit voivat olla joko kohteliaita, neutraaleja tai töykeitä. Kohteliaat arvioinnit tukevat ryhmän jäsenten välisiä suhteita. Jos ryhmän jäsenet ovat yksimielisiä, he tukevat toisiaan ja luovat yhteistä perustaa, vahvistavat sosiaalisia suhteitaan sekä edistävät arvioitavan julkista minäkuvaa. Tällainen toiminta liittyy usein ryhmän korkeampaan tehokkuuteen sekä vaikuttavuuteen, mutta saattaa myös samalla rajoittaa uusien ideoiden ilmaisua. Jos ryhmän jäsenellä on sekä tukevaa että ristiriitaista tietoa ryhmän yhteiseen matemaattiseen näkemykseen, on tällä taipumus olla samaa mieltä sekä antaa tukea. Vaikka molemmat tiedot huomioitaisiin, on yhteinen tieto yleensä uskottavampaa ja vakuuttavampaa kuin yksittäisten henkilöiden epätavallinen idea. Yksimielisyydet siis vahvistavat arvioitavan julkista minäkuvaa, mutta saattavat rajoittaa uusien matemaattisten ideoiden ilmaisemista. Yksimielisyydet saattavat myös haitata ryhmän yhteistä matemaattista toimintaa, vaikka ne vahvistaisivatkin arvioitavan julkista minäkuvaa. Ääripääesimerkkinä ryhmän jäsen saattaa kieltäytyä olemasta eri mieltä ryhmän toisen jäsenen kanssa vältelläkseen eri mieltä olemista, vaikka tämä toinen ryhmän jäsenen olisikin selkeästi väärässä. Tässä tilanteessa heidän sosiaalinen suhteensa paranee ryhmän yhteisen matemaattisen toiminnan kustannuksella. Tällainen toiminta mahdollistaa virheellisten ideoiden jatkumisen sekä sen, että potentiaaliset uudet matemaattiset ideat jätetään ilmaisematta. Neutraaleja arviointeja ovat esimerkiksi monet keskustelun hallintaan liittyvät toimet, kuten esimerkiksi puheenaiheen vaihtamiset. Nämä toimet eivät tue eivätkä uhkaa kenenkään ryhmäläisen julkista minäkuvaa. Töykeät erimielisyydet sen sijaan voivat uhata arvioitavan ryhmäläisen julkista minäkuvaa kyseenalaistamalla tämän matemaattinen pätevyys asiassa. Sen sijaan että kohdehenkilö yrittäisi ymmärtää saamaansa kritiikkiä voi tämä ryhtyä puolustamaan matemaattista ideaansa hyökkäämällä impulsiivisesti ja samalla kostamaan emotionaalisesti pelastaakseen oman julkisen minäkuvansa. Töykeät erimielisyydet siis uhkaavat julkisia minäkuvia ja eskaloivat konflikteja sekä sosiaalista turvattomuutta ryhmäläisten välillä ja siten heikentävät ryhmän työskentelyä ja siten matemaattista luovuutta. Vaikka ryhmän yhteistyö jatkuisikin töykeän erimielisyyden jälkeen, voi se johtaa ryhmän jäseniä pidättelemään matemaattisia ideoitansa sen sijaan, että he uskaltaisivat tuoda ne ilmi julkisen minäkuvansa heikentymisen uhalla. Pahimmassa tapauksessa töykeiden erimielisyyksien kierre tuhoaa ryhmän kaiken yhteistyön.

Ryhmän jäsenten julkisen minäkuvan kysymyksiin liittyy vahvasti myös statuskilpailu, eli kilpailu korkeammasta sijoituksesta nimellisessä arvojärjestyksessä. Statuskysymykset voivat hankaloittaa ryhmän yhteistyötä esimerkiksi silloin, kun ryhmän jäsenet tavoittelevat korkeaa statusasemaa tai korkeamman aseman omaavat ryhmän jäsenet saavat suuremman vaikutusvallan ja hallitsevat vuorovaikutusta. Statuskilpailuja syntyy, kun ryhmän jäsenet kilpailevat korkeammasta asemasta sillä tällöin saa usein enemmän huomiota ja ryhmäresursseja. Statuskilpailun aikana tahalliset töykeät toimet, kuten erimielisyydet, voivat parantaa omaa julkista minäkuvaa toisen ryhmän jäsenen julkisen minäkuvan kustannuksella. Kun kyseinen arvojärjestys on muodostettu, vaikuttaa se odotuksiin yksittäisiä ryhmän jäseniä kohtaan. Korkeamman aseman jäseniltä odotetaan enemmän, jolloin heidän matemaattisia ideoitansa ja mielipiteitänsä kuunnellaan herkemmin kuin alemman aseman jäsenten matemaattisia ideoita ja mielipiteitä, joita saatetaan helposti aliarvioida tai jättää kokonaan huomiotta. Ryhmän jäsenet saattavat myös pitää korkeamman statuksen jäseniä usein matemaattisesti parempina ja hakea näiltä itsevarmentavia arvioita. Koska helposti ryhmän jäsenet alkavat arvostamaan ja tukemaan mieluummin jo aiemmin toimivaksi todettuja matemaattisia ideoita sen sijaan, että he esittelisivät uusia ideoita, saattavat varsinkin alemman statuksen omaavat jäsenet pidätellä omia ideoitansa alitajuisesti toteuttaen statustansa. Tämä johtaa ryhmän matemaattisen luovuuden heikkenemiseen. Matematiikan oppilaiden ryhmätyöskentelyssä ensisijainen statusominaisuus on usein aiemmat saavutukset.

Ryhmän jäsenet, joilla on matematiikka-ahdistusta, saavat usein matalamman statuksen sillä he eivät osallistu menestyksekkäästi ryhmän toiminnan alkuvaiheisiin.

Töykeiden erimielisyyksien lisäksi myös käskyt haittaavat ryhmän matemaattista luovuutta epäkohteliaan luontonsa takia. Käskyt sanelevat tietyn toiminnan ilman perusteluja ja odottavat sekä vaativat kohdejäseneltä toimintaa loukaten tämän vapautta ja estäen tämän luomasta uusia matemaattisia ideoita.

Ryhmän ominaisuudet ja viimeaikaiset toimet voivat siis vaikuttaa suurestikin ryhmän matemaattiseen luovuuteen ja tätä myötä ryhmän yleiseen matemaattiseen suoriutumiseen. Yleisesti epäkohtelias tai töykeä käytös voi vahingoittaa sekä ryhmän toimintaa että ryhmän jäsenten välisiä sosiaalisia suhteita, kun taas kohtelias käytös tukee näitä. Menestyvillä ryhmillä on todennäköisesti enemmän sellaisia ryhmäprosesseja, jotka tukevat matemaattista luovuutta ja vähemmän sellaisia, jotka rajoittavat sitä. Toimivissa ja menestyvissä ryhmissä kommunikaatio on avointa ja vastavuoroista, jolloin matemaattisia ideoita on helppo jakaa sekä niitä on mukava työstää yhdessä. Ryhmässä annetaan ja saadaan palautetta sekä uskalletaan olla myös eri mieltä toistensa kanssa. Onnistuneella kommunikaatiolla päästään kompromisseihin, jotka vievät kohti ryhmän tavoitetta. Ryhmätyöskentelyssä on tärkeää, että jokainen ryhmän jäsen saa oman äänensä kuuluvaksi. Kun ryhmän jäsen tuntee turvalliseksi esimerkiksi ehdottaa epätavallista matemaattista ideaa tai olla eri mieltä muiden ryhmän jäsenten kanssa, matemaattinen luovuus voi lisääntyä hänen itsensä lisäksi myös hänen ryhmässään kokonaisuutena (Jung 2001).

4.3 Johtamistyylin vaikutus

Ryhmätyöskentelyyn liittyy usein se, että ryhmällä on jonkinlainen johtaja. Johtajuus ryhmissä määrittelee ryhmän tavoitteet, hallinnoi tarvittavia resursseja ja antaa mahdollisuuden tarjota kannustimia interaktiivisen johtamisprosessin avulla (Jung 2001). Tutkimukset ovat osoittaneet, että erilaiset johtamistyylit myös johtavat erilaisiin ryhmätyöskentelytapoihin, jotka vaikuttavat matemaattiseen luovuuteen eri tavoilla (Levenson 2011; Levenson ja Molad 2022). Siten myös johtamistyylillä on suuri vaikutus ryhmän matemaattiseen luovuuteen. Yksi ryhmän johtajan tärkeimmistä tehtävistä matemaattisen luovuuden edistämisen näkökulmasta on luoda ryhmäläisille ympäristö, jossa nämä kokevat olonsa turvalliseksi ja inspiroituneiksi kokeilla uusia innovatiivisia lähestymistapoja tai näkökulmia matemaattiseen ideaan tai ongelmaan ilman pelkoa siitä, että epäonnistumisista rangaistaisiin (Jung 2001; Levenson 2011). Ryhmäläisten pitää myös tuntea olonsa turvalliseksi kyseenalaistamaan sekä omia että muiden ryhmäläisten, mukaan lukien ryhmän johtajan matemaattisia uskomuksia. Oikeanlainen johtaminen edistää sekä matemaattista luovuutta että yhteistyötä. (Levenson ja Molad 2022)

Tutkimuksissa on löydetty tukea sille, että transformoiva johtavuus edistää ryhmän matemaattista luovuutta (Jung 2001; Levenson 2011). Transformoivalla johtajuudella tarkoitetaan aktiivisia ja emotionaalisia suhteita ryhmän johtajien sekä muiden ryhmän jäsenten välillä. Transformoivan johtajan tarkoituksena on kannustaa ryhmänsä jäseniä pyrkiä saavuttamaan mahdollisimman korkeita tavoitteita muun muassa näyttämällä suuntaa, tekemällä yhdessä, syventämällä oppimista ja varmistamalla vaikuttavuutta (Jung 2001).

Matematiikan oppitunneilla ryhmän johtajana voi toimia joko opettaja tai yksi ryhmän oppilaista tai opiskelijoista. Ryhmällä ei välttämättä kuitenkaan tarvitse olla minkään tasoista johtajahahmoa ollakseen luova, vaan se voi työskennellä ilmankin (Levenson ja Molad 2022).

4.3.1 Opettaja

Matematiikan oppitunneilla opettajalla on todella iso ja tärkeä rooli oppilaiden luovuuden herättelemisessä. Opettajan tehtävänä on esimerkiksi opettaa matemaattisen tiedon perusrakenteet ja luoda turvallinen oppimisympäristö, jotka yhdessä luovat perusteet ja rakennetta luoville matemaattisille prosesseille sekä toimia luokan fasilitaattorina eli henkilönä, joka tukee ryhmän yhdessä toimimista. (Levenson 2011) Opettaja fasilitaattorina rohkaisee ryhmän jäsenten välistä yhteistyötä sekä ryhmän yhdessä toimimista ja tukee ryhmän ajattelua muun muassa vastaamalla oppilaiden odottamattomiin kysymyksiin sekä johtamalla ryhmää oikeaan suuntaan esimerkiksi erilaisten vihjeiden avustuksella. Tähän tarvitaan sekä korkeatasoista pedagogista että matemaattista sisältötietoa ja -taitoa. (Levenson 2011)

Opettajan on matematiikan oppitunneilla matemaattisen yhteisön edustaja ja asiantunteva osallistuja. Hän hajottaa uuden matemaattisen sisällön osiin ja yhdistää sen aiemmin opittuun sekä tarjoaa taustalla olevan matematiikan eritellyn toiminnan. Tämänlainen toiminta mahdollistaa tietä matemaattiselle luovuudelle, kun oppilaat tai opiskelijat saavat mahdollisuuden soveltaa oppimaansa myös muille matemaattisille konsepteille. (Levenson 2011; Levenson ja Molad 2022) Yhteistoiminnallisissa matemaattisissa tilanteissa opettaja toimii sekä ryhmän jäsenenä että sen johtajana. Tämän voidaan katsoa olevan transformoivaa johtajuutta, sillä opettaja luo emotionaalisen yhteyden oppilaisiinsa osallistumalla ryhmän jäsenenä, joka motivoi ryhmän muita jäseniä seuraamaan hänen näyttämäänsä esimerkkiä. (Levenson 2011) Tehokasta matemaattista ryhmäluovuutta oppitunneilla edistää yhteistyö opettajan sekä oppilaiden kesken heidän luodessaan yhdessä uusia matemaattisia ideoita ja ratkaisuja annettuun ongelmaan opetussuunnitelman puitteissa (Aljarrah 2020).

Matematiikan opettaja voi esimerkiksi edistää luokan tai ryhmän kollektiivista sujuvuutta, kun hän yhteistoiminnallisessa oppimistilanteessa kannustaa luokkaa työskentelemään yhdessä tuottamaan mahdollisimman monta erilaista ratkaisua samaan matemaattiseen ongelmaan (Levenson 2011) Kollektiivista omaperäisyyttä opettaja voi avustaa hyväksymällä ryhmäläisten uudet matemaattiset ideat oikeiksi ja kannustaa jatkamaan vielä pidemmälle, jos se on sopivaa (Levenson 2011). Opettajan oma joustava matemaattinen ajattelu ja toiminta yhdessä ryhmäläisten kanssa voi myös edistää ryhmäläisten kollektiivista joustavuutta, sillä opettajan toiminta tässä tilanteessa luo puitteet sille (Levenson 2011). Kollektiivinen matemaattinen luovuus ylipäätään on jossain määrin tulosta ympäristöstä, joka sallii vapaan ajattelun ja joustavasta opettajasta, joka edistää tätä. Opettaja voi esimerkiksi muuttaa tunnin kulun suuntaa sen mukaan mihin oppilaiden luovat matemaattiset ideat sitä vievät, sen sijaan että hän pysyisi täsmällisesti tuntisuunnitelmassaan.

Opettaja voi edistää matemaattista luovuutta myös muilla tavoilla. Tutkimukset ovat osoittaneet, että useiden erilaisten esitystapojen tarjoaminen matemaattisille käsitteille, ideoilla ja ongelmille edistää matemaattista luovuutta. (Aljarrah 2020; Bicer 2021) Erilaiset esitystavat voivat olla esimerkiksi visuaalisia tai sanallisia kontekstista riippuen. Opettaja voi myös kannustaa opiskelijoitansa keksimään uusia matemaattisia ideoita monella eri tavalla, esimerkiksi pyytämällä ilman kontekstia tai kontekstin kanssa tai antamalla vihjeitä tai samankaltaisia esimerkkejä toisista konteksteista (Adiredja ja Zandieh 2020). Myös vaihtelevien tehtävien valinta ja käyttö on tärkeää, jotta oppilaat pääsevät soveltamaan matemaattisia tietojansa sekä taitojansa sekä keskustelemaan asiasta ryhmäläistensä kanssa (Kramarski ja Mevarech 2003). Opettajan on tärkeää kannustaa oppilaitansa tai opiskelijoitansa myös poikkeavaan matemaattiseen ajatteluun, jotta nämä pohtisivat ongelmia mahdollisimman monista näkökulmista.

4.3.2 Vertainen

Opettajan lisäksi ryhmätyöskentelyssä johtajan roolin voi ottaa myös yksi (tai joissain tapauksissa useampi) ryhmän jäsenistä. Tällöin tästä kyseisestä ryhmän jäsenestä tulee niin kutsuttu ryhmän sosiaalinen johtaja ja asiantuntija, jolle usein annetaan valtuudet päättää, onko ryhmän aikaan samaa työ matemaattisesti oikein ja jonka puoleen usein käännytään matemaattisissa kysymyksissä. Yleisesti asiantuntija eroaa muista usein kokemuksensa, pätevyytensä ja sisällön tuntemuksensa perusteella, joten usein tähän rooliin päätyy matemaattisesti lahjakas opiskelija. (Levenson ja Molad 2022)

Vertainen opiskelija voi olla hyvä ryhmänjohtaja. Ryhmän jäsenet voivat helposti samaistua tähän ja tuntea olonsa turvalliseksi tuoda saamiaan ideoita esiin ja tutkia niitä eteenpäin. Ryhmän välistä yhteistyötä vahvistaa ryhmän jäsenten välinen arvostus ja esimerkiksi hyvien ideoiden tai hyvin toteutettujen suunnitelmien kehuminen. Tällöin yhteistyöllinen kollektiivinen luovuus saattaa johtaa kollektiiviseen joustavuuteen (Levenson ja Molad 2022). Ryhmän kollektiiviseen matemaattiseen luovuuteen voi vaikuttaa kuka tahansa ryhmän jäsenistä keräämällä ideoita ja esittämällä niitä ryhmälleen, sillä kuuntelemalla ja arvostamalla muiden ryhmäläisten panoksia ryhmän jäsen kartuttaa kykyänsä rakentaa muiden ideoiden varaan (Levenson ja Molad 2022).

Vertainen opiskelija voi kuitenkin olla myös huono ryhmänjohtaja (Levenson ja Molad 2022). Tämä voi esimerkiksi hylätä muiden ryhmäläisten potentiaalisia matemaattisia ideoita tai luoda sellaisen ilmapiirin, jossa ryhmän muut jäsenet eivät uskalla tuoda matemaattisia ideoitansa esille.

Ryhmän jäsenet voivat myös yksilöllisesti vaikuttaa sen matemaattiseen luovuuteen eri tavoilla. Vaikka ryhmän asiantuntija olisi torjunut jonkun ryhmälaisen saaman idean, tämä voi pysyä siinä ja etsiä matemaattisesti relevantteja selityksiä sille, miksi hänen ideansa hylättiin ja miten tämän idean voisi saada toimimaan kyseisessä kontekstissa. Tällöin hän ei kuitenkaan kilpaile ryhmän asiantuntijan kanssa älyllisestä paremmuudesta ja laske ryhmän yhteishenkeä. Lopulta tämä voi johtaa ainutlaatuiseen alkuperäiseen matemaattiseen ratkaisuun idean keksijän tai toisen ryhmäläisen toimesta. (Levenson ja Molad 2022)

4.4 Yhteistyön erot

Englannin kielellä yhteistyötä voidaan kuvata kahdella eri sanalla, collaboration ja cooperation, jotka kummatkin kääntyvät suomen kielelle sanaksi yhteistyö. Nämä kuitenkin eroavat toisistaan siinä, että ensimmäisen voidaan kuvata tarkoittavan tapauksia, jossa ryhmäläiset työskentelevät saman tehtävän parissa, yhdistävät huomionsa ja koordinoivat toimintaansa sekä kommunikoivat sanojen, eleiden tai yhteisten esineiden avulla, kun taas jälkimmäisen tarkoittavan tapauksia, jossa ryhmäläiset työskentelevät yksilöinä myös saman tehtävän parissa, mutta eivät jaa huomiota toistensa työhön tai kommunikoi keskenään (Abdu ja Schwartz 2020; Levenson ja Molad 2022). Ryhmä saattaa vaihdella useitakin kertoja näiden kahden erilaisen yhteistyön muodon välillä ratkaistessaan heille annettua matemaattista tehtävää.

Jotta ryhmäläiset voivat työskennellä yksilöinä saman matemaattisen tehtävän parissa ilman kommunikaatiota toistensa välillä, täytyy jokaisen ryhmäläisen olla ymmärtänyt mistä on kyse ja mitä seuraavaksi tulisi tehdä (Levenson ja Molad 2022). Tällöin jokainen voi työskennellä omaan tahtiinsa yksilöllisesti edistääkseen ryhmän yhteisiä tavoitteita (Levenson ja Molad 2022). Tämänlainen yhteistyö lisää yksilöllistä matemaattisten väitteiden ja argumenttien luomista sekä nostattaa niiden laatua, sillä ryhmän jäsenillä on ollut aikaa ajatella kontekstia ja sisäistää sen keskeisimmät ideat sekä ongelmat yksilöllisesti. Tämä voi johtaa yksilön matemaattisen luovuuden kasvamisen lisäksi myös ryhmän matemaattisen luovuuden kasvamiseen erityisesti sujuvuuden näkökulmasta. (Abdu ja Schwartz 2020; Levenson ja Molad 2022) Näin toimiva ryhmä voi tuottaa ennalta-arvaamattomia alkuperäisiä ratkaisuja (Levenson ja Molad 2022). Tutkimuksissa tätä yhteistyön muotoa käyttävät ryhmät ovat olleet onnistuneempia kuin ne ryhmät, jotka työskentelevät tiiviisti yhdessä koko ajan ilman aikaa yksilölliselle ajattelulle. Tämä osoittaa yksilöllisen ajattelun tärkeyden myös ryhmäkontekstissa matematiikassa. (Abdu ja Schwartz 2020)

Tämänlaisen työskentelyn on katsottu olevan erityisen hyödyllistä esimerkiksi silloin, kun ryhmän tarkoituksena on keksiä mahdollisimman paljon erilaisia matemaattisia ratkaisuja (Abdu ja Schwartz 2020). Jokainen ryhmän jäsen saa työskennellä omaan tahtiinsa ja mahdollisuuden ajatella matemaattisesti luovasti ja luoda omia ratkaisujansa. Ilman yksilöllistä toimintaa menettelevien ryhmien jäsenten on taipumus mukautua ryhmän yhtenäiseen ajatuslinjaan, jolloin he voivat usein pelätä kritiikin esittämistä tai esittää potentiaalinen matemaattisen ideansa vähätellen siten, ettei sitä lähdetäkään kehittämään eteenpäin. (Abdu ja Schwartz 2020) Tällöin yksittäiset matemaattiset ideat saavat liian vähän huomiota (Levenson ja Molad 2022). Toisaalta liiallinen yksilöllinen työskentely ryhmässä ei mahdollista matemaattisten ideoiden ja argumenttien yhteiskäsittelyä (Abdu ja Schwartz 2020; Levenson ja Molad 2022). Yksilöllisen toiminnan lisääminen ryhmän työskentelyyn takaa sen, että kaikki voivat osallistua, joka pienentää sen mahdollisuutta, että joku ryhmän jäsenistä siipeilee ryhmän mukana melkein kuin vahingossa. Yksilöllisen työskentelyn aikana toinen ryhmän jäsen saattaa myös ammentaa toiselta ryhmän jäseneltä lähtöisin olevaa matemaattista ideaa ja tuottaa siitä ennalta-arvaamattoman alkuperäisen ratkaisun, jota kumpikaan ei olisi osannut tuottaa täysin yksinään (Levenson ja Molad 2022). Samalla tavalla ryhmän jäsen voi myös muodostaa ryhmässä saadun ratkaisun pohjalta kattavamman lisäratkaisun yksilöllisen työskentelyn aikana, joka voidaan käydä läpi ja sisäistää muidenkin ryhmäläisten toimesta seuraavan yhteistyöepisodin aikana (Abdu ja Schwartz 2020). Tämä prosessi voi toimia myös iteratiivisesti, jolloin matemaattiset ideat synnyttävät toistuvasti uusia matemaattisia ideoita. Työn jakaminen osiin ryhmän jäsenien kesken voi myös auttaa tutkimaan enemmän erilaisia tapauksia, joiden tutkimisen jälkeen ryhmän jäsenet voivat yhdessä vertailla tuloksiansa, joiden avulla kehittää yhteisiä strategioita tai päätyä lopulliseen ratkaisuun (Abdu ja Schwartz 2020).

Molemmat näistä yhteistyön muodoista ovat kuitenkin oleellisia prosesseja matemaattisessa yhteistyössä, eikä voida sanoa toisen olevan tärkeämpää tai toimivampaa kuin toinen. Tutkimukset ovat osoittaneet, että kun näiden kahden yhteistyön muodon tasapaino saavutetaan, tulee ryhmässä toimimisesta tehokkaampaa ja tuottavampaa ja ryhmäntyöskentely voi suosia ja edistää kollektiivisen matemaattisen luovuuden eri puolia. (Abdu ja Schwartz 2020; Levenson ja Molad 2022) Tämän tasapainon löytyminen on hyödyksi myös yksilölliselle kehittymiselle (Abdu ja Schwartz 2020). Kommunikaatio on näin ollen välttämätöntä yhteistyölle (Levenson ja Molad 2022). Näiden kahden yhteistyön muodon vuorottelemisen oppiminen on siis tärkeä taito ryhmässä työskentelyssä ja matemaattisen luovuuden edistämisessä (Abdu ja Schwartz 2020). Tämä näkyy esimerkiksi siinä, että kun ryhmän jäsenet ovat saaneet ensin aikaa yksin sisäistää kontekstin ja luoda rauhassa omia ideoitaan, ovat he halukkaampia esittämään niitä muulle ryhmälle yhteistyön yhteydessä (Abdu ja Schwartz 2020).

4.5 Erilaiset ryhmät

Erilaiset ryhmien ominaisuudet voivat myös vaikuttaa ryhmän matemaattiseen luovuuteen joko positiivisesti tai negatiivisesti.

Monimuotoisen ryhmän jäsenten erilaiset taustat ja tietopohja voivat tarjota pohdittavaksi monenlaisia näkökulmia, mutta toisaalta monimuotoisuus voi olla niin mittavaa, että se haittaa ryhmän jäseniä heidän yrittäessään ymmärtää muiden erilaisia ideoita ja löytää yhteinen ratkaisu. Monimuotoisuuden puute voi kuitenkin rajoittaa ryhmän matemaattista luovuutta erityisesti sujuvuuden osalta. (Levenson 2011) Myös ryhmän koolla on merkittävää vaikutusta sen matemaattiseen luovuuteen erityisesti joustavuuden osalta (Jung 2001). Vaikka suurempi määrä ryhmän jäseniä tuo lisää näkökulmia, voi ryhmätyötilanteissa silti vain yksi puhua kerrallaan, jolloin monet ryhmän jäsenet saattavat jäädä täysin kuulematta.

Ryhmävalmistelut, kuten esimerkiksi esitysten käsikirjoitukset ja roolit ovat osoittaneet ristiriitaisia tuloksia. Tämä pohjautuu mahdollisesti eroihin toteutuksissa. Tehokas ryhmävalmistelu voi edistää matemaattista luovuutta lisäämällä toivottuja ryhmäprosesseja kuten kohteliasta kanssakäymistä ja vähentämällä epätoivottuja ryhmäprosesseja kuten töykeää kanssakäymistä. (Chiu 2008)

Ryhmässä saattaa myös esiintyä kilpailua, jolloin vähintään kaksi ryhmän jäsenistä kilpailee älyllisestä paremmuudesta tai suvereniteetista. Tämä voi vaikuttaa matemaattiseen luovuuteen negatiivisesti, jos esimerkiksi yksi ryhmän jäsen pysäyttää toisen ryhmän jäsenen potentiaalisen idean käsittelemisen. (Levenson ja Molad 2022)

Monet tutkimukset ovat ehdottaneet keinoja, jotka voivat parantaa matemaattista ryhmäluovuutta. Näistä merkitsevin on turvallinen ympäristö, jossa ryhmän jäsenet tuntevat turvalliseksi kertoa omia uusia matemaattisia ideoitansa. Myös avun kysyminen sekä antaminen, tiedon soveltamisen uuteen kontekstiin ja vahvistamisen on katsottu edistävän matemaattista luovuutta ryhmätyöskentelyssä. Myös yksilön vastuuntunto ryhmäänsä kohtaan voi kannustaa ryhmän jäseniä työskentelemään yhdessä yhteisen matemaattisen ongelman ratkaisemiseksi eri taustoista tulemisesta huolimatta. (Levenson 2011) Artikkelin (Goos ja Galbraith 1996) mukaan yhdessä toimiminen matemaattisten ongelmien parissa on tehokkainta, jos nämä ovat tietojen ja taitojen kanssa samalla tasolla sekä kunnioittavat toistensa mahdollisesti erilaisia näkökulmia.

5 Pohdinta ja johtopäätökset

Matematiikka on tärkeä osa tämän hetken maailmaa ja luovuus on merkittävä osa sitä. Jokainen yksilö voi omalla luovalla toiminnallaan vaikuttaa ratkaisevasti yhteiseen toimintaan. Tämän vuoksi matemaattisen luovuuden harjoittaminen on tärkeää, koska sillä voi olla kauaskantoisia positiivisia vaikutuksia.

Artikkeleista käy ilmi, että kun opetuksessa otetaan huomioon luovuus, oppilaiden ja opiskelijoiden matematiikan osaaminen voi parantua huomattavasti. Opettajalla on tässä suuri rooli, sillä hänen luovan opettamisen katsomuksellaan on tähän vaikutusta. Matematiikan opetukseen tulisi sisältöopetuksen rinnalle sisällyttää luovaa opetusta ja tämä olisi hyvä ottaa huomioon jo opettajankoulutuksessa.

5.1 Merkitys koulutukselle

Matemaattisen luovuuden edistäminen on tärkeä tavoite matematiikan koulutukselle (Molad, Levenson ja Levy 2020). Globalisaation aikakaudella työnkuvien muuttuessa soveltavimmiksi on tärkeää, että eri lähtökohdista ja koulutussuunnista tulevat ihmiset osaavat yhdistää taitonsa ja tietonsa ratkaistakseen heidän eteensä tulevia ongelmia yhtenä kollektiivina. Tutkimukset ovat myös osoittaneet, että yhteistyöllinen luovuus voi olla yksilöllistä luovuutta paljon tehokkaampaa ja merkityksellisempää (Aljarrah 2020).

Yhteistyön ja luovien ajattelutapojen oppiminen on tärkeää jo koulussa, sillä nämä taidot kulkevat ihmisen mukana koulusta tämän tulevaisuuteen. Luovia ajattelutapoja voi harjoitella ja kehittää, sillä luovan ajattelun taidot muodostuvat ihmisen kertyneestä harjoittelusta ja aiempaan kokemukseen perustuvasta asiantuntemuksesta. Matemaattista luovuutta, kuten esimerkiksi ideointia, voidaan oppia (Molad, Levenson ja Levy 2020). Matemaattisen luovuuden voidaan katsoa olevan suuntautuneisuutta tai taipuvaisuutta matemaattiseen toimintaan. Tätä voidaan edistää kouluissa monilla eri tavoilla. (Levenson 2011; Molad, Levenson ja Levy 2020)

Luova asenne matematiikkaan edistää uusien ratkaisujen muotoilua, näkökulmien vaihtamista ja uusien ratkaisujen sekä ratkaisupolkujen tuottamista. Nämä seikat yhdessä voivat auttaa torjumaan opiskelijoiden keskuudessa sitä harhakäsitystä, että matematiikassa olisi kyse ainoastaan sääntöjen ehdottomasta noudattamisesta ja siitä, että jokaisessa tehtävässä olisi olemassa täsmälleen yksi oikea vastaus ja yksi oikea ratkaisupolku. (Molad, Levenson ja Levy 2020) Tämä edistää matemaattista luovuutta entuudestaan.

Koulussa matemaattisen luovuuden yhtenä tärkeimpänä ilmentymänä voidaan katsoa jokapäiväisiä luovia ja merkityksellisiä oivalluksia, joita opiskelijat kokevat oppiessaan esimerkiksi uusia käsitteitä (Molad, Levenson ja Levy 2020). Tämänlainen luovuus keskittyy kokemusten, tekojen ja tapahtumien uuteen ja henkilökohtaisesti merkitykselliseen tulkintaan, joka on sopiva matemaattiseen kontekstiin (Levenson 2011). Matemaattisten ongelmien luovaan ratkaisemiseen tarvitaan sekä matemaattista tietoa että yleisiä luovan ajattelun taitoja. Opettajien tulee olla tietoisia molemmista edistääkseen oppilaiden matemaattista luovuutta. (Schoevers, Kroesbergen ja Kattou 2018) Matematiikan luokkahuoneessa luovia prosesseja ovat esimerkiksi osallistuminen ongelman ratkaisemiseen ja ideoiden luomiseen, ideoiden tai lähestymistapoja yhdistäminen uudella tavalla, ongelman analysointi useilla eri tavoilla, mallien tarkastelu ja mielikuvituksen käyttäminen (Levenson ja Molad 2022).

Matemaattista luovuutta voidaan edistää luokkahuoneissa monilla eri tavoilla. Esimerkiksi opiskelijoiden rohkaiseminen tarkastelemaan matemaattisia ongelmia eri näkökulmista voi kannustaa opiskelijoita näkemään uusia yhteyksiä erilaisten matemaattisten sisältöalueiden ja esityksien välillä. (Molad, Levenson ja Levy 2020) Myös keskeisiin matemaattisiin kysymyksiin keskittyminen voi lisätä luovuutta (Levenson ja Molad 2022). Useiden tutkimusten mukaan myös useiden erilaisten tehtävien käyttö edistää matemaattista luovuutta ja sen arviointia (Levenson 2011). Tehtävien tulee olla sopivia ja asianmukaisia käsiteltävään aihepiiriin, jotta matemaattista luovuutta voi esiintyä (Aljarrah 2020). Kun opiskelijoita rohkaistaan käyttämään heidän olemassa olevia tietojaan ja taitojaan, joita he tuntevat olevansa päteviä käyttämään, on matemaattisen luovuuden kannalta tärkeää ruokkia heidän uteliaisuuttaan siitä, mihin nämä tiedot ja taidot voivat johtaa (Levenson ja Molad 2022).

Myös sosiaalinen näkökulma on tärkeä ottaa huomioon, kun halutaan edistää matemaattista luovuutta luokkahuoneessa. Opettajien on tärkeää pyrkiä luomaan sellainen ilmapiiri, jossa matemaattinen luovuus voi esiintyä ja jossa se voi edistyä. Tähän auttaa esimerkiksi oppilaiden rohkaisu arvioimaan toistensa ajatuksia huolellisesti, kommunikoimaan kohteliaasti ja välttämään töykeää käytöstä ja siitä aiheutuvia luovuutta estäviä toimia. Opettajat voivat pyytää oppilaita harkitsemaan uusia ideoita huolellisesti, luopumaan impulsiivisista käytöstavoista ja tukemaan kohteliasta kanssakäymistä toistensa kanssa. Jos töykeää käytöstä esiintyy, on opettajan tärkeää osata reagoida tähän asianmukaisella tavalla.

Hän voi kuunnella ja kannustaa sekä poimia keskustelusta tärkeät ideat ja ohjata kommunikaatiota oikeaan suuntaan. (Chiu 2008; Kramarski ja Mevarech 2003)

Monissa matematiikan luokkahuoneessa esiintyvissä oppimistilanteissa yksilölliset asetukset voivat olla turhan haastavia. Tällöin opettajan on hyvä rohkaista ryhmätyöskentelyyn oppimisen edistämiseksi. (Abdu ja Schwartz 2020)

Monet tutkimukset ovat myös osoittaneet, että oppilaiden kyky siirtää heidän jo olemassa olevia matemaattisia tietojaan ja taitojaan uusiin tilanteisiin on melko rajallinen (Kramarski ja Mevarech 2003). Tätä voidaan auttaa ja edistää kouluttamalla oppilaita vastaamaan metakognitiivisiin kysymyksiin (Kramarski ja Mevarech 2003) Yleinen metakognitiivinen tieto on ongelmanratkaisuprosessien tuntemista riippumatta siitä, mistä erityisalueesta ratkaistavat ongelmat ovat peräisin. Toimialuekohtainen metakognitiivinen tieto keskittyy kunkin toimialueen ainutlaatuisiin piirteisiin ja vaihtelee siksi alueittain. (Kramarski ja Mevarech 2003) Matemaattiselle luovuudelle nämä kummatkin ovat tärkeitä, sillä tutkimukset osoittavat metakognitiiviseen koulutukseen altistuneiden oppilaiden suoriutuvan huomattavasti muita oppilaita paremmin esimerkiksi kaavioiden tulkinnassa ja argumenttien käyttämisessä päättelynsä perustelemiseksi. He voivat saavuttaa korkeamman tason matemaattisia saavutuksia ja pystyvät paremmin selittämään matemaattisia ajatuksiaan myös kirjallisesti. (Kramarski ja Mevarech 2003)

5.2 Hyödyt ja merkitys tulevaisuudessa

Kiinnostus luovuuden edistämiseen ryhmätyöskentelyssä matematiikassa on lisääntynyt, sillä yksilöiden luovilla ponnisteluilla on katsottu olevan merkittävä vaikutus yhteiseen suorituskykyyn sosiaalisten ja teknologisten muutoksien maailmassa (Jung 2001).

5.2.1 Ryhmälle

Joskus annettu matemaattinen tehtävä on turhan iso tai vaikea tehdä yksilöllisesti, jolloin tarvitaan ryhmätyöskentelyä. Ryhmätyöskentelyssä on monia tunnettuja etuja, mutta näiden kehittyminen saattaa viedä reilustikin aikaa (Molad, Levenson ja Levy 2020). Siksi ryhmätyöskentelytaitojen oppiminen mahdollisimman aikaisin on tärkeää. Ryhmätyöskentely myös altistaa opiskelijat erilaisille ideoille ja ongelmanratkaisustrategioille, jolloin he saavat mahdollisuuden kriittisesti tutkia ja tarkastella päättelytapoja ja rakentaa syvempää ymmärrystä matemaattisista käsitteistä (Molad, Levenson ja Levy 2020). Tällöin ryhmän jäsenet voivat tulevaisuudessa osoittaa suurempaa kontrollia tekemisestään ja heillä on myös todennäköisesti enemmän oikeita ratkaisuja (Molad, Levenson ja Levy 2020).

5.2.2 Yksilölle

Yksilö saattaa saada hyötyä ryhmässä työskentelystä myös omaan yksilölliseen työskentelyynsä tulevaisuudessa (Molad, Levenson ja Levy 2020). Ryhmissä työskennelleet opiskelijat ovat tutkimuksen mukaan osoittaneet myöhemmin enemmän matemaattista sujuvuutta ja joustavuutta kuin yksilöllisesti saman tehtävän parissa työskennelleet opiskelijat. Kyseinen tutkimus ei löytänyt eroja opiskelijoiden matemaattisessa omaperäisyydessä. (Molad, Levenson ja Levy 2020) Edistämällä kollektiivista matemaattista luovuutta voidaan myös mahdollisesti edistää yksilöllistä matemaattista luovuutta. Vaikka erilaisten arviointien pelko voi tukahduttaa yksilöllistä matemaattista luovuutta ryhmässä työskenneltäessä, ryhmässä työskentely voi antaa ryhmän jäsenille heiltä puuttuvaa sinnikkyyttä matemaattisen ajatteluun tai rohkeutta kokeilla jotain täysin uutta, jota hän ei itsenäisesti työskennellessään uskaltaisi kokeilla. (Levenson 2011)

Ryhmässä työskentelemisestä matemaattisten ongelmien parissa opiskelijoille voi jäädä muitakin hyödyllisiä ominaisuuksia, jotka ovat syntyneet ryhmässä työskentelyn yhteydessä, mutta jäävät, kun opiskelija työskentelee itsenäisesti. Yksi näistä on metakognitiivisen kontrollin lisääntyminen, joka ilmenee esimerkiksi tietyn ongelman olosuhteiden huomioimisessa, erilaisten suunnitelmien tai strategioiden pohdinnoissa, uuden ja vanhan tiedon välisen suhteen huomioimisessa ja edistyksen huomioonottamisessa. (Molad, Levenson ja Levy 2020) Tämänlaisesta toiminnasta voi olla runsaasti hyötyä oppilaille ja opiskelijoille myös matematiikan ulkopuolella. Erään tutkimuksen mukaan metakognitiivisiin kysymyksiin vastaamisella oli myönteinen vaikutus oppilaiden matemaattisiin suorituksiin sekä kykyyn selittää omaa päättelyään. Kyseiseen tutkimukseen osallistuneet oppilaat menestyivät paremmin erilaisissa saavutusmittauksissa ja ongelmanratkaisuissa myös matematiikan ulkopuolella. (Kramarski ja Mevarech 2003)

5.3 Miten matemaattista luovuutta voi lisätä?

Matemaattisen luovuutta edistämistä ja opettamista on tutkittu paljon. Näissä tutkimuksissa on käytetty välineinä muun muassa matemaattista mallintamista, avoimia ongelmanratkaisutehtäviä sekä ongelmanmuodostustehtäviä. (Jung ja Lee 2019; Kirisci, Sak ja Karaback 2020) Tutkimuksissa on käytetty myös useita erilaisia lähestymistapoja, kuten esimerkiksi asiantuntija ja noviisi -käsitettä sekä erilaisia kontrolliryhmiä (Goos ja Galbraith 1996).

Matematiikan oppitunneilla opettajat voivat edistää positiivisia ryhmätyöskentelyn toimintoja, kun he ymmärtävät, miten erilaiset seikat, kuten esimerkiksi kommunikaatio tai erilaiset johtamistyylit vaikuttavat kollektiiviseen matemaattiseen luovuuteen. Opettaja voi myös ohjata opiskelijasryhmiä, joilla on potentiaalia saada aikaan matemaattista luovuutta, oikeaan suuntaan jo alkuvaiheessa, jos hän tietää miten erilaiset strategiat toimivat ryhmissä ja minkälaiseen matemaattiseen luovuuteen ne johtavat. (Levenson ja Molad 2022)

5.3.1 Esimerkkejä

Matemaattiseen luovuuden edistämiseksi on todettu toimivan muun muassa opiskelijoiden altistaminen ongelmanratkaisutehtäville, kuten esimerkiksi avoimille tehtäville, joissa on useampi kuin yksi lopullinen ratkaisu ja useita erilaisia strategioita, jotka johtavat näihin ratkaisuihin (Levenson ja Molad 2022). Muita matemaattista luovuutta edistäviä tehtävämuotoja ovat esimerkiksi huonosti strukturoidut tehtävät, ongelmien konstruktiotehtävät, tehtävät, joilla on loputtomasti ratkaisuja ja tehtävät, joissa ongelmanratkaisua rajoitetaan jollakin tavalla.

Artikkelissa (Levenson ja Molad 2022) esitettiin Geoboard -tehtävä (Liite 1), jossa opiskelijoiden tehtävänä oli piirtää mahdollisimman monta määrätyn kokoista toisistaan eroavaa, ei yhtenäistä monikulmiota. Kyseinen tehtävä perustui artikkeliin (Haylock 1997), jossa artikkelin kirjoittaja havaitsi kyseisen tehtävän herättävän opiskelijoiden keskuudessa matemaattista sujuvuutta, joustavuutta ja omaperäisyyttä.

Artikkelissa (Sengil-Akar ja Yetkin-Ozdemir 2022) esitettiin peitto-ongelma (Liite 2), jossa oppilaille annettiin tehtäväksi laatia yleiset menettelyohjeet, miten luoda oikean kokoisia ja muotoisia mallikappaleita sellaiselle peitolle, jonka kuva on annettu. Tämän lisäksi heille annettiin kuva säännöllisesti kuvioidusta peitosta ja sen todellisista mitoista, joiden avulla oppilaiden piti havainnollistaa esimerkkien kera laatimiensa menettelyohjeiden noudattamista. Kyseinen ongelma valittiin tähän tutkimukseen aiemmin julkaistusta artikkelista (Lesh ja Harel 2003), sillä sen uskottiin reflektoivan kaikkia matemaattisen luovuuden osa-alueita ja ulottuvuuksia oppilaiden keskuudessa.

6 Oma pohdinta

Tätä kirjallisuuskatsausta tehdessäni minulle heräsi monenlaisia kysymyksiä.

Voivatko samantyyppiset tehtävät, joilla edistetään yksilöllistä matemaattista luovuutta, edistää myös kollektiivista matemaattista luovuutta? Itse näen että kyllä, sillä yksilöllinen ajattelu on erittäin tärkeä osa ryhmän toimintaa. Ryhmässä toimiminen mahdollistaa vaikeammat tehtävät, sillä ratkaisijoita on useampi. Tehtävien pitää vain olla tarpeeksi haastavia, jotta ne aikaansaavat luovia matemaattisia ajatuksia. Jos tehtävät ovat liian helppoja, ne ovat ainoastaan rutiinitehtäviä eivätkä herätä sen kummempaa matemaattista luovuutta.

Millä tavalla ryhmäläisten, eli tässä tilanteessa oppilaiden tai opiskelijoiden, ikä vaikuttaa matemaattiseen luovuuteen? En itse näe mitään siihen viittaavaa, että ikä itsessään vaikuttaisi matemaattiseen luovuuteen, mutta iän tuomat aiemmat kokemukset saattavat vaikuttaa jollain tasolla. Ihmiset voivat aina oppia vanhoista kokemuksistaan ja ammentaa niistä tietoja ja taitoja uusiin haasteisiin. Tähän lukeutuu sekä alakohtainen spesifi tietous, kuten tässä tilanteessa matematiikan sisältötieto, kuin sosiaaliset taidotkin. Tätä tutkielmaa tehdessäni luin tutkimusartikkeleja, jotka käsittelivät joko peruskouluikäisiä oppilaita tai lukioikäisiä tai sitä vanhempia opiskelijoita, mutta en näe ongelmaa, että miksei tutkimuksista saatuja tuloksia voisi yleistää kummallekin ikäluokalle ja siitä eteenpäinkin.

Miten kollektiivinen matemaattinen luovuus eroaa pienissä ryhmissä työskennellessä verrattuna koko luokan ryhmätyöskentelyyn? Pienissä ryhmissä toimiminen voi olla luontevampaa. Vaikka näkökulmia on vähemmän, on todennäköisempää, että kaikki pääsevät halutessaan osallistumaan. Mitä isompi ryhmä, sitä todennäköisempää on, että joku ei saa ääntään kuuluviin, vaikka haluaisi olla enemmän mukana. Isossa ryhmässä on myös helpompi siipeillä ja olla sivussa tekemättä mitään, toisin kuin pienemmissä ryhmissä työskennellessä.

Miten se vaikuttaa, ovatko ryhmäläiset toisilleen entuudestaan tuntemattomia tai tuntevatko he jo entuudestaan? Uskoisin, että se voi vaikuttaa jonkin verran. Aikaisemmin tehdyt olettamukset toisten tiedoista ja taidoista voivat vaikuttaa suurestikin siihen, miten ryhmä lähtee toimimaan, jos kaikki tuntevat toisensa jo entuudestaan. Jos ryhmäläiset ovat toisilleen uusia, tämänlaisia ennakko-olettamisia ei ole ja ryhmä voi lähteä toimimaan ihan eri tavalla. Toisaalta kolikolla on aina kääntöpuoli, sillä samalla tavalla myös oppilaat ja opiskelijat voivat kokea työskentelyn tuttujen ryhmäläisten kanssa rennommaksi ja uskaltavat kommunikoida enemmän, kun taas uusien ryhmäläisten kanssa saattaa pidättäytyä ideoiden jakamisessaan ja kommunikaatiossaan, jos pelkää tulevansa olemaan väärässä uusien ryhmäläisten edessä.

Miten vakiintuneet luokkahuoneen sosiomatemaattiset normit, eli esimerkiksi oppilaille tai opiskelijoille muodostuneet käsitykset matematiikasta ja sen ominaisuuksista, voivat vaikuttaa matemaattiseen luovuuteen? Varmasti paljonkin. Matematiikka nähdään tiukkojen sääntöjen sanelemana tieteenalana, joka saattaa joskus rajoittaa luovaa käytöstä matemaattisen ongelman parissa. Oppilaalta tai opiskelijalta saattaa myös jäädä jokin idea kertomatta, jos hän pelkää, että se ei täytä hyvän matemaattisen perustelun ominaisuuksia, jotka tämä on tunneilta oppinut.

Missä määrin näissä artikkeleissa saadut tulokset voidaan yleistää muille matematiikan osa-alueille, kuin niille, missä niitä on käsitelty? En itse näe ongelmaa, että miksei matemaattinen luovuus toimisi ainakin vastaavasti toisella alueella kuin niillä, joissa sitä on tutkittu. Matematiikassa kaikki nivoutuu yhteen, joten olisi vain loogista, että myös matemaattinen luovuus kulkisi toiselta osa-alueelta toiselle. Tietysti tietyn tyyppiset tehtävät saattavat toimia joillakin osa-alueilla huonommin kuin toisilla, tai olla jopa kokonaan toimimatta. Mutta uskoisin, että jokaiselle osa-alueelle on olemassa sellaisia ongelmanratkaisutehtäviä, jotka kannustavat matemaattiseen luovaan ajatteluun ja edistävät sitä.

Lähteet

R. Abdu & B. Schwarz: Split up, but stay together: Collaboration and cooperation in mathematical problem solving. Instructional Science 48(3), 313–336. (2020)

A. P. Adiredja & M. Zandieh: Everyday Examples in Linear Algebra: Individual and Collective Creativity. Journal of Humanistic Mathematics 10(2), 40-75. (2020)

A. Aljarrah: Describing collective creative acts in a mathematical problem-solving environment. The Journal of Mathematical Behavior 60, 100819. (2020)

A. Bicer: Multiple representations and mathematical creativity. Thinking Skills and Creativity 42, 100960. (2021)

M. M. Chiu: Effects of argumentation on group micro-creativity: Statistical discourse analyses of algebra students' collaborative problem solving. Contemporary Educational Psychology 33(3), 382-402. (2008)

M. Goos & P. Galbraith: Do It This Way! Metacognitive Strategies in Collaborative Mathematical Problem Solving. Educational Studies in Mathematics 30(3), 229-260. (1996)

D. Haylock: Recognizing Mathematical Creativity in Schoolchildren. ZDM – Mathematics Education, 27(2), 68–74. (1997)

D. I. Jung: Transformational and Transactional Leadership and Their Effects on Creativity in Groups. Creativity Research Journal 13(2), 185-195. (2001)

H. Jung & K. Lee: Development of group creativity in mathematical modeling. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University, Utrecht, Netherlands. (2019)

N. Kirisci, U. Sak & F. Karabacak. The effectiveness of the selective problem solving model on students' mathematical creativity: A Solomon four-group research. Thinking Skills and Creativity 38, 100719. (2020)

B. Kramarski & Z. R. Mevarech: Enhancing Mathematical Reasoning in the Classroom: The Effects of Cooperative Learning and Metacognitive Training. American Educational Research Journal 40(1), 281-310. (2003)

R. Lesh & G. Harel: Problem Solving, Modeling, and Local Conceptual Development. Mathematical Thinking and Learning, 5(2-3), 157-189. (2003)

E. Levenson: Exploring Collective Mathematical Creativity in Elementary School. The Journal of Creative Behavior 45(3), 215-234. (2011)

E. S. Levenson & O. Molad: Analyzing collective mathematical creativity among post high-school students working in small groups. ZDM Mathematics Education 54(1), 193–209. (2022)

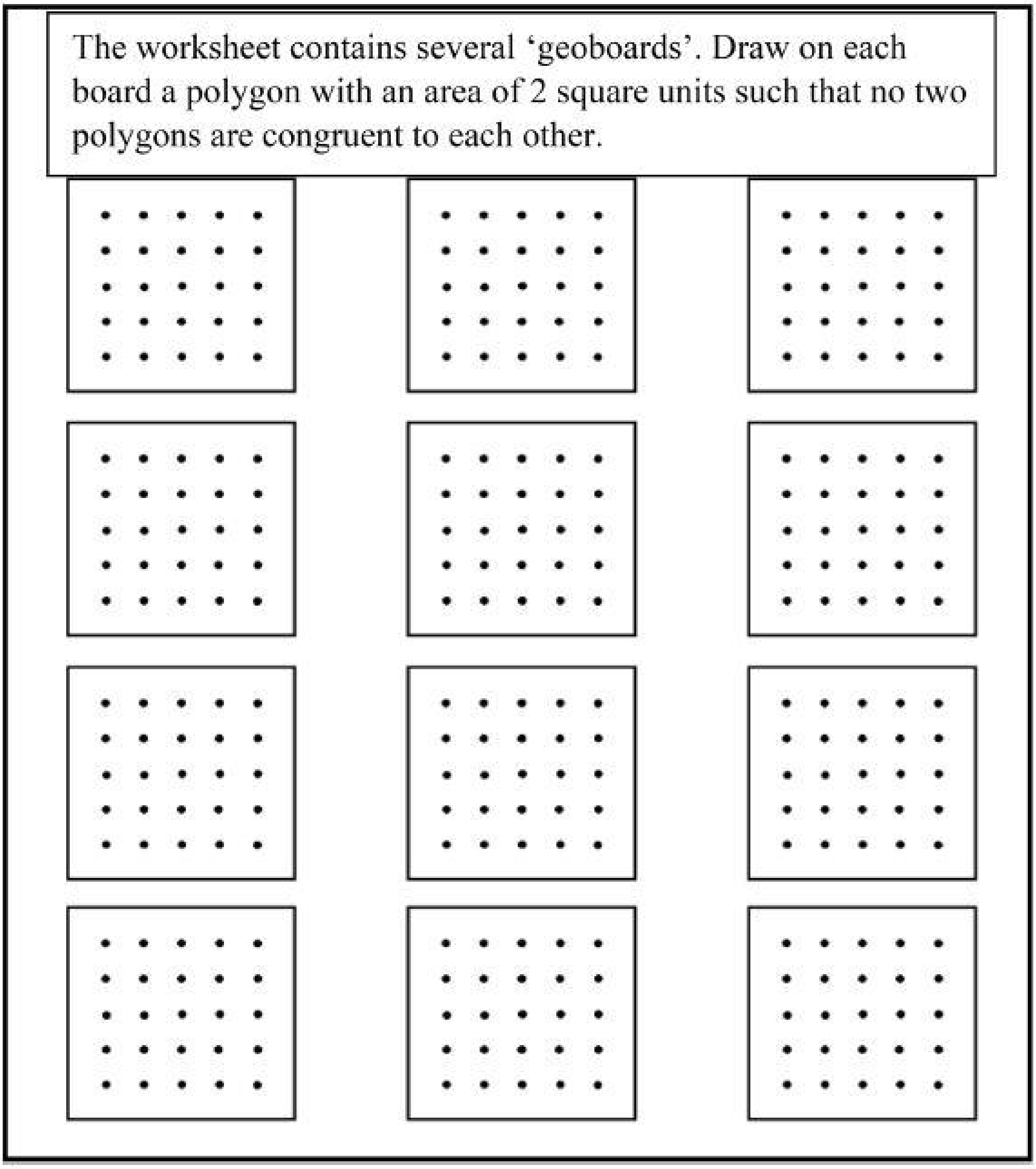
O. Molad, E. S. Levenson & S. Levy: Individual and group mathematical creativity among post-high school students. Educational Studies in Mathematics 104(2), 201–220. (2020)

E. M. Schoevers, E. H. Kroesbergen & M. Kattou: Mathematical Creativity: A Combination of Domain-general Creative and Domain-specific Mathematical Skills. The Journal of Creative Behavior 54(2), 242-252. (2018)

S. Sengil-Akar & I. E. Yetkin-Ozdemir: Investigation of mathematical collective creativity of gifted middle school students during model-eliciting activities: the case of the quilt problem. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 53(2), 337-363. (2022)

Liitteet

Liite 1. Artikkelin (Levenson ja Molad 2022) Geoboard-tehtävä



Kuva 1 Geoboard-tehtävä

Liite 2. Artikkelin (Sengil-Akar ja Yetkin-Ozdemir 2022) peitto-ongelma-tehtävä

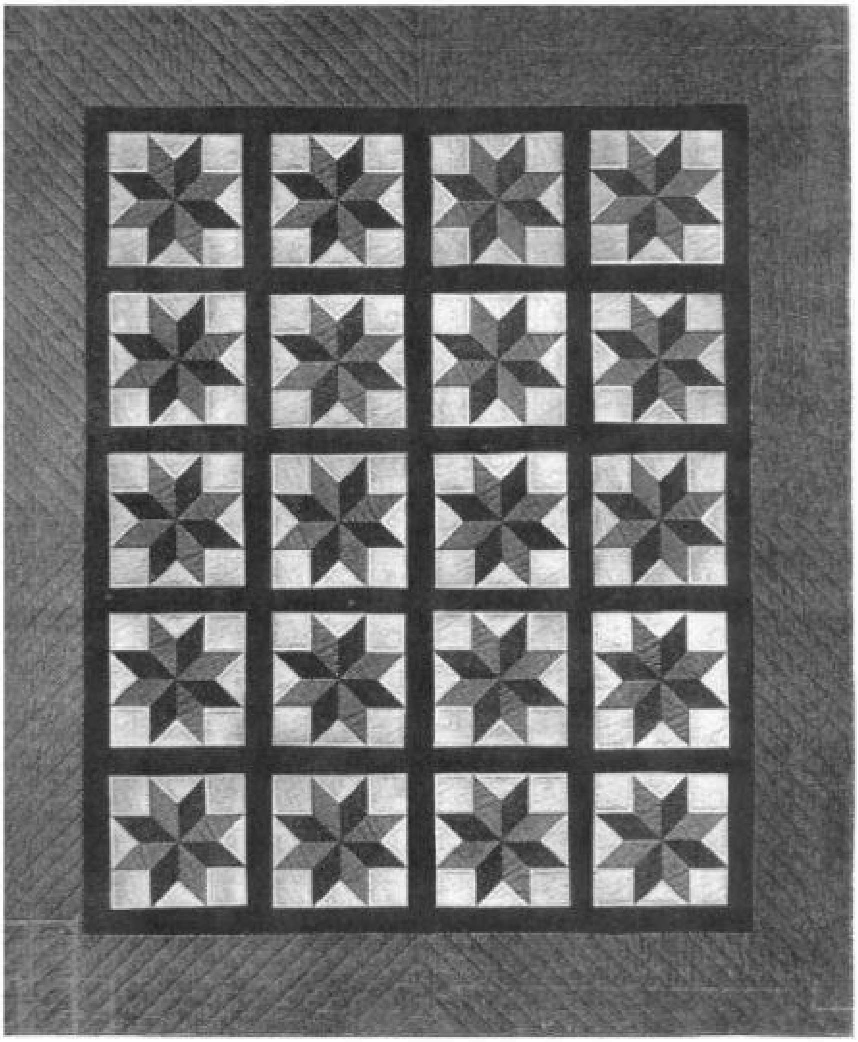


FIGURE 4 Example photograph of a quilt.

The problem statement described how quilt club members sometimes had difficulties when they tried to use photographs to make templates that were exactly the right size and shape to make quilts that club members found in books, newspapers, and magazines. So, the job for the students was to write a letter that did two things for the members of the quilting club. (a) First, the letter should describe procedures for making template pieces that were exactly the right size and shape for any quilt whose photograph they might find. (b) Second, the letter should include examples of how to follow their procedures by making templates for each of the pieces of the quilt that is shown in Figure 4.

Note: The quilt that is shown was for a double bed. So, the finished size needed to be approximately 78" by 93".

Kuva 2 Peitto-ongelma