



**TURUN
YLIOPISTO**

YLEISTETTY KÄÄNTEISMATRIISI

Wille Jäntti

Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2024

Tarkastajat:
Dos. Aleksi Saarela
Dos. Ilkka Törmä

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

WILLE JÄNTTI: Yleistetty käänteismatriisi
Pro gradu -tutkielma, 29 s., 0 liites.
Matematiikka
Toukokuu 2024

Tämän matematiikan opettajalinjan pro gradu -tutkielman aiheena ovat matriisit ja yhtälöryhmät.

Tutkielmassa käydään ensin läpi matriisien perusteita. Erityistä huomiota kiinnitetään matriisien ja yhtälöryhmien väliseen yhteyteen ja käänteismatriiseihin. Tämä alkuosa tutkielmasta on pyritty kirjoittamaan tavalla, joka ei vaadi lukijalta esitietoja.

Tämän jälkeen käsitellään hieman yleisemmällä ja vähemmän yksityiskohtaisella tasolla vektoriavaruuksia. Lopuksi esitellään yleistetty käänteismatriisi ja sen yhteys lineaarisen yhtälöryhmän pienimmän neliösumman standardoituun minimiratkaisuun.

Asiasanat: lineaariset yhtälöryhmät, matriisit, yleistetty käänteismatriisi.

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Matriisien perusteet	2
2.1	Matriisit	2
2.2	Matriisien laskutoimituksia	4
2.3	Matriisien laskulakeja	5
2.4	Vektorit ja yhtälöryhmät	7
2.5	Matriisin aste	10
3	Neliömatriisin käänteismatriisi	12
3.1	Neliömatriisin käänteismatriisin määritelmä ja 2×2 käänteismatriisi	12
3.2	Neliömatriisin ominaisuuksia	14
3.3	Neliömatriisin käänteismatriisin muodostaminen	15
4	VektoriavaruuDET	17
4.1	VektoriavaruuS ja aliavaruuS	17
4.2	Vektorien virittäMä avaruuS ja lineaarinen riippuvuuS sekä riippumattomuus	18
4.3	Kanta ja dimensio	20
4.4	Matriisin kuva ja ydin	21
5	Ortogonaalisuus	22
5.1	Ortogonaalisuuden ominaisuuksia	23
6	Yleistetty käänteismatriisi	24
6.1	YleistetyN käänteismatriisin perusteet	24
6.2	Pienimmän neliösumman standardoitu minimiratkaisu	26
7	Yhteenveto	28

1 Johdanto

Lineaarialgebrassa todella usein törmätään lineaarisiin yhtälöihin ja yhtälöryhmiin. Lineaarisissa yhtälöryhmissä on vain ensimmäisen asteen muuttujia. Muuttujien ja yhtälöiden määrä voi vaihdella yhtälöryhmissä. Osalle lineaarisista yhtälöryhmistä voidaan löytää ratkaisu, mutta osalle ei löydetä.

Lineaarisia yhtälöryhmiä voidaan ratkaista monella tapaa. Esimerkiksi kahden yhtälön yhtälöryhmä, jossa on kaksi muuttujaa, on kohtalaisen helppo ratkaista. Voidaan ensin eliminoida ensimmäisestä yhtälöstä pois toinen muuttuja, jonka jälkeen ratkaistaan jäljellä oleva muuttuja yhtälöstä. Tämän jälkeen saatu tulos sijoitetaan toiseen yhtälö, jolloin saadaan jäljellä oleva muuttuja ratkaistuksi. Muuttujien ja yhtälöiden määrän kasvaessa tilanne vaikeutuu. Silloin matriiseista on avuksi ratkaisemiseen.

Osalla matematiikan osa-alueista törmätään käänteisfunktioihin tai käänteislukuihin. Matriisien kohdalla vastaava käsite on käänteismatriisi. Kaikilla matriiseilla ei ole käänteismatriisia, mutta kaikilla on niin kutsuttu yleistetty käänteismatriisi.

Matriisien ja yhtälöryhmien yhteys on, että yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa matriisien avulla eli matriisimuodossa. Matriiseilla voidaan ratkaista yhtälöryhmiä ainakin kolmella tavalla. Yksi tapa on tehdä matriisiin alkeisrivimuunnoksia, jonka jälkeen matriisi on muodossa, josta yhtälöryhmä on helppo ratkaista tai ratkaisu näkyy suoraan. Toisessa tavassa neliömatriisin käänteismatriisin avulla voidaan ratkaista yhtälöryhmä. Kolmas tapa on yleistetty käänteismatriisi, jolla voidaan saada likimääräinen ratkaisu yhtälöryhmälle, jolla ei ole ratkaisua. Tämä pro gradu -tutkielma perehtyy matriisien perusteisiin edeten ensin käänteismatriisin muodostamiseen neliömatriiseille ja sen jälkeen yleistettyyn käänteismatriisiin.

Työ perustuu Devi Prasadin kirjaan [1], Peter J. Olverin ja Chehrzad Shakibanin kirjaan [2], Guorong Wangin, Yimin Wein ja Sanzheng Qiaon kirjaan [3], Thomas S. Blythin ja Edmund F. Robertsonin kirjaan [4] ja Gilbert W. Stewartin kirjaan [5].

2 Matriisien perusteet

Tässä luvussa perehdytään siihen, minkälaisia ovat matriisit ja miten niillä voidaan laskea.

2.1 Matriisit

Tässä alaluvussa tutustutaan matriiseihin pitkälti määritelmien ja esimerkkien avulla.

Määritelmä 1. Matriisiksi kutsutaan kaaviota

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

jossa on vaakasuoria rivejä ja pystysuoria sarakkeita. Matriisin tyyppiä merkitään $m \times n$, jossa m kertoo rivien määrän ja n sarakkeiden määrän. Yksittäistä kohtaa matriisissa kutsutaan alkioiksi. Rivin i ja sarakkeen j alkioita merkitään a_{ij} .

Määritelmä 2. Jos matriisin A rivien lukumäärä on yhtä suuri kuin sarakkeiden eli $m = n$ matriisia kutsutaan neliömatriisiksi ja merkitään $A = (a_{ij})_n$.

Esimerkki 1. Matriisi A on tyyppiä 4×5 ja matriisi B on neliömatriisi, joka on tyyppiä 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 15 & 2 \\ 7 & 2 & 5 & -2 & 3 \\ -1 & 8 & \frac{3}{4} & 4 & 0 \\ 9 & 2 & 6 & 7 & 20 \end{pmatrix} \quad ja \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -5 \\ \frac{1}{3} & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Matriisin A alkio a_{32} on 8.

Määritelmä 3. Diagonaalimatriisiksi kutsutaan neliömatriisia, jossa alkiot ovat nollia, paitsi ne alkiot a_{ij} joissa $i = j$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Esimerkki 2. Matriisi F on diagonaalimatriisi:

$$F = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Määritelmä 4. Identiteettimatriisiksi kutsutaan diagonaalimatriisia, jossa $a_{ii} = 1$ kaikilla $i = 1, 2, 3, \dots, n$ eli kaikki lävistäjällä olevat alkiot ovat ykkösiä.

Esimerkki 3. Matriisi I on identiteettimatriisi:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Määritelmä 5. Matriisia kutsutaan nollamatriisiksi, kun kaikki alkiot ovat nollia ja sitä merkitään $O_{m \times n}$.

Määritelmä 6. Matriisilla $A = (a_{ij})_{m \times n}$ on olemassa vastamatriisi $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$.

Määritelmä 7. Matriisia $A = (a_{ij})_n$ kutsutaan yläkolmiomatriisiksi, jos $a_{ij} = 0$ kun $i > j$. Matriisia $B = (b_{ij})_n$ kutsutaan alakolmiomatriisiksi, jos $b_{ij} = 0$ kun $i < j$.

Esimerkki 4. Matriisi U on yläkolmiomatriisi ja matriisi L on alakolmiomatriisi:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad ja \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 3 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Määritelmä 8. Matriisia $B = (b_{ij})$ kutsutaan matriisin $A = (a_{ij})$ transpoosiksi, jos $b_{ij} = a_{ji}$ jokaisella i, j ja merkitään $B = A^T$.

Kun matriisi transponoidaan, matriisin vaakarivit vaihdetaan pystysarakkeiksi ja pystysarakkeet vaihdetaan vaakariveiksi eli $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ja $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$.

Esimerkki 5. Transponoidaan matriisi $C = (c_{ij})_{4 \times 3}$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 8 & -1 \end{pmatrix} \quad ja \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nähdään, että transponoitu matriisi C^T on tyyppiä 3×4 .

Määritelmä 9. Matriisia A kutsutaan symmetriseksi, jos se on yhtäsuuri sen transpoosin kanssa eli $A = A^T$. Toisin sanoen matriisi A on symmetrinen, jos ja vain jos matriisi on neliömatriisi ja alkiot toteuttavat $a_{ij} = a_{ji}$ kaikilla i, j .

Esimerkki 6. Matriisi S on symmetrinen:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -4 & 2 & 8 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -4 & 2 & 8 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} = S^T.$$

2.2 Matriisien laskutoimituksia

Tässä alaluvussa käsitellään miten matriiseilla voidaan laskea.

Määritelmä 10. Olkoot matriisit $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ja $B = (b_{ij})_{m \times n}$. Matriiseja voidaan laskea yhteen, jos ne ovat samaa tyyppiä $m \times n$. Niiden summa on

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}. \quad (3)$$

Matriisien erotus voidaan myös laskea, jos ne ovat samaa tyyppiä $m \times n$. Niiden erotus on

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}. \quad (4)$$

Esimerkki 7. Samaa tyyppiä olevia matriiseja voidaan laskea yhteen ja niiden erotus voidaan laskea:

$$\begin{aligned} C + D &= \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} \\ C - D &= \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Määritelmä 11. Matriisi $A = (a_{ij})_{m \times n}$ voidaan kertoa luvulla, jolloin puhutaan matriisin skalaarimonikerrasta:

$$cA = (ca_{ij})_{m \times n} \quad (5)$$

missä $c \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 8. Matriiseja voidaan kertoa luvulla, jolloin kaikki alkiot kerrotaan tällä luvulla:

$$3B = 3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -5 \\ 3 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 6 & 21 & -15 \\ 9 & 0 & -36 \end{pmatrix}.$$

Määritelmä 12. Olkoot matriisit $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ja $B = (b_{ij})_{n \times p}$. Matriisitulo AB on määritelty, kun matriisin A sarakkeiden lukumäärä vastaa matriisin B rivien lukumäärää. Tällöin määritellään

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p} \quad (6)$$

missä matriisin C alkiot muodostetaan

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}. \quad (7)$$

Huomautus 1. Matriisitulo ei ole kommutatiivinen eli $AB \neq BA$.

Esimerkki 9. Matriisi A on tyyppiä 2×3 ja matriisi B tyyppiä 3×3 , jolloin voidaan laskea AB , mutta matriisituloa BA ei voida laskea:

$$\begin{aligned} A_{2 \times 3} B_{3 \times 3} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 7 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + (-5) \cdot 0 & 2 \cdot 4 + 7 \cdot 7 + (-5) \cdot 6 & 2 \cdot 0 + 7 \cdot (-2) + (-5) \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 16 & 2 \\ 23 & 27 & -19 \end{pmatrix} = C_{2 \times 3}. \end{aligned}$$

Matriisitulossa riveillä kerrotaan sarakkeita eli ensin matriisin A ensimmäisellä rivillä kerrotaan matriisin B sarakkeita yksi kerrallaan. Kun kaikki kolme saraketta on kerrottu, kerrotaan matriisin A toisella rivillä matriisin B sarakkeita taas yksi kerrallaan. Näin ollaan saatu matriisitulo eli matriisi C .

Esimerkki 10. Tässä esimerkissä näytetään tilanne, jossa matriisit voidaan kertoa sekä AB että BA , mutta silti $AB \neq BA$:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 11 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.3 Matriisien laskulakeja

Seuraavaksi perehdytään matriisien osalta perinteisiin laskulakeihin.

Lause 1. Matriisit A ja B ovat tyyppiä $m \times n$ ja skalaarit $c, d \in \mathbb{R}$, silloin

1. $c(A + B) = cA + cB$;
2. $(c + d)A = cA + dA$;
3. $c(dA) = (cd)A$;
4. $(-1)A = -A$;
5. $0 * A = O_{m \times n}$.

Todistus. Olkoot matriisit $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ja $B = (b_{ij})_{m \times n}$ ja skalaarit $c, d \in \mathbb{R}$. Tulokset saadaan

1. $c(a_{ij} + b_{ij}) = ca_{ij} + cb_{ij}$.
2. $(c + d)a_{ij} = ca_{ij} + da_{ij}$.
3. $c(da_{ij}) = (cd)a_{ij}$.
4. $(-1)a_{ij} = -a_{ij}$.

5. $0 * a_{ij} = 0$.

□

Lause 2. *Kun matriisitulo on määritelty, matriisitulo toteuttaa assosiatiivilain*

$$A(BC) = (AB)C \quad (8)$$

Todistus. Olkoot matriisit $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{jk})_{n \times p}$ ja $C = (c_{kl})_{p \times q}$. Laskemalla $A(BC) = (u_{il})_{m \times q}$ saadaan

$$u_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij} b_{jk} c_{kl}.$$

Laskemalla $(AB)C = (v_{il})_{m \times q}$ saadaan

$$v_{il} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} c_{kl}.$$

Selvästi nähdään $A(BC) = (AB)C$.

□

Lause 3. *Kun matriisitulo ja matriisien summat ovat määritelty, matriisitulo toteuttaa distributiivilait*

$$A(B + C) = AB + AC \quad (9)$$

$$(B + C)A = BA + CA \quad (10)$$

Todistus. Olkoot matriisit $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{jk})_{n \times p}$ ja $C = (c_{jk})_{n \times p}$. Merkitään $A(B + C) = (v_{ik})_{m \times p}$, $AB + AC = (u_{ik})_{m \times p}$, $AB = (s_{ik})_{m \times p}$, $AC = (t_{ik})_{m \times p}$ ja $s_{ik} + t_{ik} = u_{ik}$. Ensimmäisessä tapauksessa $A(B + C) = AB + AC$ saadaan

$$v_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk} = s_{ik} + t_{ik}$$

joka todistaa tuloksen, koska AB ja AC ovat tyyppiä $m \times p$ eli summa voidaan laskea. Toinen tapaus saadaan todistettua samalla tapaa, mutta silloin matriisit B ja C ovat tyyppiä $m \times n$ ja matriisi A tyyppiä $n \times p$. □

Lause 4. *Kun matriisitulo AB on määritelty, kaikille skalaareille c on voimassa skalaarinsiirto*

$$c(AB) = (cA)B = A(cB) \quad (11)$$

Todistus. Olkoot matriisit $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{jk})_{n \times p}$ ja skalaari $c \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan alkioiden tasolla tilannetta, jolloin saadaan

$$c \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) = \sum_{j=1}^n (c a_{ij}) b_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (c b_{jk})$$

mistä tulos seuraa. □

Seuraavaksi perehdytään muutamaan transpoosin laskukaavaan.

Lause 5. *Kun matriisien summat ja matriisitulot ovat määriteltty, silloin*

$$(A^T)^T = A, \quad (12)$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad (13)$$

$$(cA)^T = cA^T \quad (14)$$

$$(AB)^T = B^T A^T. \quad (15)$$

Todistus. Kolme ensimmäistä yhtälöä seuraa suoraan transpoosin määritelmästä (8). Olkoot matriisit $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ja $B = (b_{ij})_{n \times p}$, jolloin $(AB)^T$ ja $B^T A^T$ ovat tyyppiä $p \times m$. Merkitään $B^T A^T = (w_{ji})_{p \times m}$ ja $AB = (v_{ij})_{m \times p}$. Sitten saadaan

$$w_{ji} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = v_{ij}$$

mistä voidaan päätellä $(AB)^T = B^T A^T$. □

2.4 Vektorit ja yhtälöryhmät

Tässä alaluvussa hahmotetaan vektorien sekä yhtälöryhmien yhteys matriiseihin.

Esimerkki 11. Matriisi A on tyyppiä 4×1 ja matriisi B on tyyppiä 1×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ja \quad B = \left(10 \quad 6 \quad -\frac{1}{2} \right).$$

Esimerkin 11 matriiseja kutsutaan vektoreiksi. Yleisesti vektoria $1 \times n$ kutsutaan rivivektoriksi ja vektoria $m \times 1$ kutsutaan sarakevektoriksi. Tässä pro gradu -tutkielmassa sarakevektoreita kutsutaan vektoreiksi, koska niitä käytetään paljon enemmän matriisien kanssa.

Esimerkki 12. Muodostetaan matriisin A ja vektorin \mathbf{x} matriisitulo $A\mathbf{x}$:

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 4z \\ x + 3y + 2z \\ -2x + 4y \end{pmatrix}$$

Esimerkin 12 matriisitulo näyttää yhtälöryhmältä. Tästä havainnosta päästään yhteen matriisien käyttötarkoitukseen eli matriiseilla voidaan ratkaista yhtälöryhmiä.

Määritelmä 13. Lineaarinen yhtälöryhmä, jossa yhtälöiden määrä on m ja tuntemattomien muuttujien määrä on n , voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &= b_i \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \quad (16)$$

Sama lineaarinen yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa myös matriisimuodossa:

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad (17)$$

missä matriisi $A_{m \times n}$ on kerroinmatriisi, vektori \mathbf{x} on tuntemattomien muuttujien vektori ja vektori \mathbf{b} on yhtälöryhmän yhtäsuuruusmerkin oikeasta puolesta muodostettu vektori. Lyhyesti voidaan tämä matriisimuoto kirjoittaa:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (18)$$

Määritelmä 14. Jos lineaarisessa yhtälöryhmässä yhtäsuuruusmerkin oikealla puolella kaikki ovat nollia eli matriisimuodossa kirjoitettuna

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (19)$$

silloin sanotaan yhtälöryhmän olevan homogeeninen ja $\mathbf{0}$ on nollavektori.

Seuraavaksi käsitellään muutama määritelmää, jotka auttavat matriiseilla ratkaisemaan yhtälöryhmiä.

Määritelmä 15. Matriiseille voidaan tehdä alkeisrivimuunnoksia:

1. rivi voidaan kertoa luvulla a , missä $a \neq 0$;
2. kahden rivin paikkaa voidaan vaihtaa;
3. kertomalla rivi luvulla $a \neq 0$ ja lisäämällä saatu rivi toiseen riviin.

Määritelmä 16. Jos matriisit A ja B ovat samaa tyyppiä ja toisen matriisin voi muodostaa toisesta matriisista alkeisrivimuunnoksien avulla, sanotaan matriisien A ja B olevan riviekvivalentit ja sitä merkitään $A \sim B$.

Määritelmä 17. Laajennetussa matriisissa on yhdistetty matriisi ja vektori toisiinsa, jolloin laajennettu matriisi on tyyppiä $m \times (n + 1)$ ja sitä merkitään

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right). \quad (20)$$

Edellisistä määritelmistä voidaan päätellä, että jokainen yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa laajennettuna matriisina sekä jokainen laajennettu matriisi voidaan kirjoittaa yhtälöryhmänä. Alkeisrivimuunnokset vastaavat operaatiota, joita voidaan tehdä yhtälöryhmille ja nämä operaatiot muuttavat yhtälöryhmän ekvivalentiksi yhtälöryhmäksi.

Laajennettua matriisia voidaan käyttää yhtälöryhmän ratkaisemiseen tekemällä siihen alkeisrivimuunnoksia tavoitteena saada laajennettu matriisi yksinkertaiseen muotoon, josta näkee helposti ratkaisut tai muotoon, mistä on helppo ratkaista muuttujat. Seuraavaksi ratkaistaan lineaariset yhtälöryhmät tällä kyseisellä tavalla.

Esimerkki 13. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}2x - y + 5z &= -4 \\x + 3y + 2z &= 1 \\x + y + 2z &= -3\end{aligned}$$

matriisimuodossa käyttäen apuna alkeisrivimuunnoksia. Aloitetaan laajennetulla matriisilla, jolloin saadaan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right).$$

Ensimmäinen matriisi on aloitustilanne. Toisessa matriisissa on vaihdettu ensimmäisen ja kolmannen rivin paikkaa. Kolmannessa matriisissa ensimmäinen rivi on kerrottu luvulla -1 ja lisätty toiseen riviin ja samaan aikaan ensimmäinen rivi on kerrottu luvulla -2 ja lisätty kolmanteen riviin. Neljäs matriisi on saatu kertomalla toinen rivi luvulla $\frac{3}{2} = 1,5$ ja lisäämällä kolmanteen riviin. Nyt voitaisiin jatkaa ratkaisemista tässä matriisimuodossa, mutta voidaan myös ratkaista loppu yhtälöryhmänä

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= -3 \\2y &= 4 \\z &= 8\end{aligned}$$

josta saadaan $x = -21$, $y = 2$ ja $z = 8$. Ratkaistaan vielä matriisimuodossa loppuun asti:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right).$$

Ensimmäinen matriisi on tilanne, johon viimeksi jäätiin. Toisessa matriisissa toinen rivi on kerrottu luvulla $\frac{1}{2}$. Kolmannessa matriisissa toinen rivi on kerrottu luvulla -1 ja lisätty ensimmäiseen riviin. Neljännessä matriisissa on kerrottu luvulla -2 ja lisätty ensimmäiseen riviin. Neljännessä matriisista nähdään suoraan sama ratkaisu kuin aikaisemmin jo saatiin.

Esimerkki 14. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}x - 2y + 3z &= 4 \\-x + 5y - 4z &= 6 \\2x + 2y + 4z &= -3.\end{aligned}$$

Muodostetaan laajennettu matriisi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -4 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 6 & -2 & -11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -31 \end{array} \right).$$

Päädyttiin tilanteeseen, jossa kolmas yhtälö on muotoa $0 = -31$, mikä ei voi olla mahdollista, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Esimerkki 15. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} 3x - 9y + 12z &= 3 \\ -4x + 8y - 8z &= 12. \end{aligned}$$

Muodostetaan laajennettu matriisi:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 12 & 3 \\ -4 & 8 & -8 & 12 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Nyt yhtälöryhmä on muodossa

$$\begin{aligned} x - 2z &= -11 \\ y - 2z &= -4 \end{aligned}$$

josta saadaan ratkaistua $x = 2z - 11$ ja $y = 2z - 4$, jolloin yhtälöryhmän ratkaisu on riippuvainen muuttujasta z , joka tarkoittaa, että ratkaisuita on äärettömän monta, koska muuttuja z voi saada mitä tahansa arvoja ja silti yhtälöryhmä ratkeaa.

Nyt ollaan käsitelty kolme erilaista esimerkkiä, jolloin ollaan huomattu, että lineaarisella yhtälöryhmällä on vain yksi ratkaisu tai äärettömän monta ratkaisua tai ei ollenkaan ratkaisua.



Kuva 1: Tasojen kolme erilaista tapaa leikata toisensa.

Kuvassa 1 on esimerkki tasojen erilaisista ratkaisuista. Vasemmanpuoleinen kuvaa äärettömän montaa ratkaisua, keskimäinen kuvaa vain yhtä ratkaisua ja oikeanpuoleinen kuvaa tilannetta, jossa ei ole ratkaisua.

2.5 Matriisin aste

Tässä alaluvussa käsitellään matriisin aste, joka on tärkeä ominaisuus matriiseille.

Ensin tutustutaan porrasmatriisiin, joka auttaa käsittämään helpommin matriisin astetta.

Määritelmä 18. Matriisia $P_{m \times n}$ kutsutaan porrasmatriisiksi, kun sillä on porrask rakenne

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \otimes & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \otimes & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \otimes & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \otimes & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

missä \otimes kutsutaan ensialkioksi ja niiden tulee olla $\otimes \neq 0$. Matriisin P ensimmäiset r riviä sisältävän tarkalleen yhden ensialkion, mutta kaikkilla sarakkeilla ei tarvitse olla ensialkiota. "Portaiden" yläpuolella $*$ voivat olla mitä tahansa, mutta portaiden alapuolella tulee olla pelkästään nollia. Viimeiset $m - r$ riviä ovat pelkkiä nollarivejä, joilla ei ole ensialkiota.

Seuraavaksi käsitellään todistamatta lause, joka yhdistää porrasmatriisin kaikkiin muihin matriiseihin.

Lause 6. Jokainen matriisi voidaan alkeisrivimuunnoksien avulla muokata porrasmatriisimuotoon ja ensialkioiden määrä tällaisessa porrasmatriisissa on yksikäsitteinen.

Määritelmä 19. Olkoon matriisi A tyyppiä $m \times n$. Matriisin A aste on sen porrasmatriisimuodon ensialkioiden lukumäärä ja sitä merkitään $\text{rank}(A)$. Aste toteuttaa ehdon

$$0 \leq \text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}. \quad (22)$$

Esimerkki 16. Matriisi R on porrasmatriisi:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ja sen aste on $\text{rank}(R) = 3$.

Määritelmä 20. Kun lineaarisen yhtälöryhmän matriisimuoto $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ on saatu porrasmuotoon, muuttujia kutsutaan perusmuuttujiksi, jos niitä vastaavilla sarakkeilla on ensialkio. Jos muuttujia vastaavilla sarakkeilla ei ole ensialkiota, muuttujia kutsutaan vapaiksi muuttujiksi.

Esimerkki 17. Tämän esimerkin tarkoitus on ymmärtää, mitä ovat perusmuuttujat ja vapaat muuttujat. Tutkitaan yhtälöryhmää missä on muuttujat x, y, z, w ja u . Yhtälöryhmässä on 4 yhtälöä, joista yksi on $2x + y - 3z + w - 2u = 1$. Tämän

tarkoitus oli vain näyttää, missä järjestyksessä muuttujat ovat yhtälössä. On saatu matriisimuotoinen $A\mathbf{x} = b$ lineaarinen yhtälöryhmä porrasmuotoon, missä

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tästä nähdään, että muuttujat x , z ja u ovat perusmuuttujia ja muuttujat y ja w ovat vapaita muuttujia.

3 Neliömatriisin käänteismatriisi

Tässä luvussa käsitellään neliömatriisien käänteismatriisi ja miten käänteismatriisi voidaan löytää.

Luvuilla on käänteisluku, jonka kanssa kerrottaessa saadaan luku 1. Esimerkiksi luvun 3 käänteisluku on $\frac{1}{3}$, koska $3 * \frac{1}{3} = 1$. Samoin osalla matriiseilla on käänteismatriisi. Jos matriisi kerrotaan sen käänteismatriisin kanssa, saadaan identiteettimatriisi. Nyt perehdytään löytämään neliömatriisille käänteismatriisi.

3.1 Neliömatriisin käänteismatriisin määritelmä ja 2×2 käänteismatriisi

Määritelmä 21. Olkoon neliömatriisi A tyyppiä $n \times n$. Tyyppiä $n \times n$ olevaa matriisia X kutsutaan matriisin A käänteismatriisiksi, kun se toteuttaa ehdon

$$XA = I = AX \tag{23}$$

missä I on identiteettimatriisi, joka on tyyppiä $n \times n$. Jos matriisilla on käänteismatriisi, matriisia sanotaan säännölliseksi. Käänteismatriisia voidaan merkitä A^{-1} .

Huomautus 2. Matriisitulo ei ole kommutatiivinen, jonka takia neliömatriisin käänteismatriisin määrittämisessä vaaditaan sekä vasemmanpuoleinen $XA = I$ että oikeanpuoleinen $AX = I$ käänteismatriisi.

Esimerkki 18. Yleisesti tyyppiä 2×2 oleva matriisi voidaan kirjoittaa $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ muotoon. Selvitetään, minkälainen sen käänteismatriisi $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ on. Oikeanpuoleisen käänteismatriisin tilanne

$$AX = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

toteutuu, jos ja vain jos muuttujat x , y , z ja w toteuttavat seuraavan yhtälöryhmän:

$$\begin{aligned} ax + bz &= 1 \\ ay + bw &= 0 \\ cx + dz &= 0 \\ cy + dw &= 1. \end{aligned}$$

Ratkaistaan kolmannelta yhtälöstä x , jolloin saadaan $x = -\frac{dz}{c}$, joka sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan yhtälö muotoon

$$\begin{aligned} a * \left(-\frac{dz}{c}\right) + bz &= 1 \\ -adz + bcz &= c \\ z(-ad + bc) &= c \\ z &= \frac{c}{-ad + bc} \\ z &= -\frac{c}{ad - bc} \end{aligned}$$

ja samalla tapaa saadaan ratkaistua muut muuttujat. Täten saadaan tuloksiksi:

$$x = \frac{d}{ad - bc}, \quad y = -\frac{b}{ad - bc}, \quad z = -\frac{c}{ad - bc}, \quad w = \frac{a}{ad - bc}$$

missä kaikilla on yhteinen nimittäjä $ad - bc \neq 0$. Sijoittamalla matriisiin X saadut muuttujat x, y, z ja w saadaan oikeanpuoleisen käänteismatriisin muodoksi

$$X = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Kun tarkastellaan vasemmanpuoleista käänteismatriisia saadaan

$$XA = \begin{pmatrix} xa + yc & xb + yd \\ za + wc & zb + wd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

mistä saadaan ratkaistua samanlainen tulos kuin oikeanpuoleisella käänteismatriisilla, jolloin voidaan todeta matriisin X olevan matriisin A käänteismatriisi eli $X = A^{-1}$.

Esimerkissä 18 löydettiin yleinen kaava, miten saadaan muodostettua käänteismatriisi matriiseille, jotka ovat tyyppiä 2×2 ja joissa $ad - bc \neq 0$.

Esimerkki 19. Muodostetaan matriisille $F = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi F^{-1} . Kaavan 24 avulla saadaan

$$F^{-1} = \frac{1}{3 * 6 - 5 * 2} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{8} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{2}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Tarkastetaan tilanne laskemalla FF^{-1} ja $F^{-1}F$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} FF^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{8} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{2}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ F^{-1}F &= \begin{pmatrix} \frac{6}{8} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{2}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

jonka jälkeen voidaan todeta matriisin F käänteismatriisi F^{-1} löydetyksi.

3.2 Neliömatriisin ominaisuuksia

Seuraavaksi käsitellään muutama lemma, jotka käsittelevät käänteismatriisin perusominaisuuksia.

Lemma 1. *Jos neliömatriisilla on olemassa käänteismatriisi, se on yksikäsitteinen.*

Todistus. Matriisit X ja Y toteuttavat yhtälön 23:

$$XA = I = AX \quad \text{ja} \quad YA = I = AY.$$

Sitten assosiatiiivilain avulla saadaan

$$X = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y.$$

□

Lemma 2. *Jos matriisi A on säännöllinen, matriisi A^{-1} on myös säännöllinen ja $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Todistus. Käänteismatriisin yhtälö $A^{-1}A = I = AA^{-1}$ todistaa matriisin A olevan matriisin A^{-1} käänteismatriisi. □

Lemma 3. *Jos matriisit A ja B ovat säännöllisiä ja tyyppiä $n \times n$, silloin niiden matriisitulo AB on säännöllinen ja toteuttaa*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (25)$$

Todistus. Merkitään $X = B^{-1}A^{-1}$. Sitten assosiatiiivilain avulla saadaan

$$\begin{aligned} X(AB) &= B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I, \\ (AB)X &= ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I. \end{aligned}$$

Ollaan näytetty matriisin X olevan matriisitulon AB vasemmanpuoleinen ja oikeanpuoleinen käänteismatriisi, mikä todistaa tuloksen. □

Esimerkki 20. Lasketaan matriisin $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ja matriisin $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matriisitulon $AB = C$ käänteismatriisi C^{-1} . Matriisituloksi saadaan

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

josta saadaan muodostettua käänteismatriisi $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Tarkistetaan käänteismatriisi käyttämällä lemmän 3 tulosta laskemalla $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Matriisien A ja B käänteismatriisit ovat $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ja $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Käänteismatriisien matriisituloksi saadaan

$$C^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

joka on sama kuin aikaisemmin saatu tulos.

Lemma 4. Jos matriisi A on säännöllinen, niin on myös sen transpoosi A^T . Transponoidun matriisin käänteismatriisi toteuttaa yhtälön

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \quad (26)$$

Todistus. Olkoon $X = (A^{-1})^T$. Sitten lauseen 5 tuloksen 15 avulla saadaan

$$A^T X = A^T (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = I^T = I$$

mikä todistaa oikeanpuoleisen käänteismatriisin. Vasemmanpuoleinen käänteismatriisi $X A^T$ saadaan todistettua samalla tapaa, jolloin saadaan todettua $X = (A^T)^{-1}$. \square

Esimerkki 21. Olkoon matriisi $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Transponoidaan se, jolloin saadaan $C^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Muodostetaan tämän transponoidun matriisin käänteismatriisi, jolloin saadaan $(C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Tutkitaan vielä matriisin C käänteismatriisia, joka on $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Transponoidaan saatu käänteismatriisi, jolloin saadaan $(C^{-1})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Huomataan $(C^T)^{-1} = (C^{-1})^T$, joka on lemmän 4 tulos.

3.3 Neliömatriisin käänteismatriisin muodostaminen

Tässä alaluvussa perehdytään mekaaniseen tapaan muodostaa neliömatriisille käänteismatriisi.

Aikaisemmin käsiteltiin laajennettu matriisi määritelmässä 17 matriisille ja vektorille. Seuraavaksi määritellään laajennettu matriisi uudelleen kahdelle neliömatriisille.

Määritelmä 22. Laajennetussa matriisissa voidaan yhdistää kaksi samaa tyyppiä olevaa neliömatriisia, jolloin laajennettu matriisi on tyyppiä $n \times 2n$.

Laajennettua matriisia yleensä käytetään löytämään matriisille A sen käänteismatriisi A^{-1} . Tällöin lähdetään tilanteesta, missä vasemmalla puolella on matriisi A ja oikealla puolella identiteettimatriisi I , jolloin saadaan aloitustilanne $(A|I)$. Tämän jälkeen tehdään alkeisrivimuunnoksia tavoitteena muodostaa laajennetun matriisin vasemmalle puolelle identiteettimatriisi I , jolloin oikealle puolelle on saatu muodostettua jokin matriisi B . Voidaan osoittaa tämän matriisin B olevan käänteismatriisi A^{-1} eli lopputilanne on $(I|A^{-1})$. Todistus sivuutetaan, mutta seuraavassa esimerkissä havainnollistetaan idea.

Esimerkki 22. Koetetaan etsiä esimerkin 13 matriisille $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi:

$$\begin{aligned} (A|I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1,5 & -3,5 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1,5 & -3,5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -0,5 & 1,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1,5 & -3,5 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3,5 & 8,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1,5 & -3,5 \end{array} \right) = (I|A^{-1}) \end{aligned}$$

Tässä tehtiin samat alkeisrivimuunnokset kuin esimerkissä 13. Tarkistetaan saadun matriisin olevan etsitty käänteismatriisi:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3,5 & 8,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 1 & 1,5 & -3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ja todetaan matriisin $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3,5 & 8,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 1 & 1,5 & -3,5 \end{pmatrix}$ olevan etsitty käänteismatriisi.

Lause 7. Jos matriisi A on säännöllinen, silloin $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu matriisimuodossa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ annetulle lineaariselle yhtälöryhmälle.

Todistus. Kerrotaan yhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vasemmalta matriisilla A^{-1} , jolloin saadaan $A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, mistä tulee $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Lisäksi yhtälöön $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sijoittamalla $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ saadaan $A\mathbf{x} = AA^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}$, mikä todistaa lauseen. \square

Lause 7 merkitsee, että käänteismatriisin avulla voidaan myös ratkaista yhtälöryhmä.

Esimerkki 23. Ratkaistaan esimerkin 13 yhtälöryhmä käänteismatriisin avulla. Esimerkissä 22 löydettiin käänteismatriisi A^{-1} . Lauseen 7 avulla saadaan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3,5 & 8,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 1 & 1,5 & -3,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Saatu ratkaisu on sama kuin esimerkissä 13 saatu ratkaisu.

4 Vektoriavaruudet

Tässä luvussa käsitellään vektoriavaruuksien perusominaisuuksia tarkoituksena päästä määrittelemään kuva ja ydin, joita tarvitaan yleistetyn käänteismatriisin luvussa. Tässä kohtaa oletetaan yliopiston ensimmäisen vuoden kurssit esitiedoksi ja näiden kurssien tarpeelliset tiedot palautetaan mieleen ilman todistuksia, mutta määritelmiä havainnoillistetaan esimerkeillä.

4.1 Vektoriavaruus ja aliavaruus

Tässä alaluvussa käsitellään vektoriavaruuden ja aliavaruuden määritelmät.

Määritelmä 23. Vektoriavaruus on joukko V , jossa on voimassa kaksi operaatiota:

1. yhteenlasku: kun vektorit $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, silloin myös summa $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$;
2. skalaarilla kertominen: vektorin $\mathbf{w} \in V$ kertominen skalaarilla $c \in \mathbb{R}$ tuottaa vektorin $c\mathbf{w} \in V$;

ja jossa lisäksi seuraavat aksioomat ovat voimassa kaikille vektoreille $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ja kaikille skalaareille $c, d \in \mathbb{R}$:

1. summan kommutatiivisuus: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$;
2. summan assosiativisuus: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$;
3. nollavektori: on olemassa vektori $\mathbf{0} \in V$, joka toteuttaa ehdon $\mathbf{w} + \mathbf{0} = \mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{w}$;
4. vastavektori: jokaiselle vektorille $\mathbf{w} \in V$ on olemassa vektori $-\mathbf{w} \in V$, joka toteuttaa ehdon $\mathbf{w} + (-\mathbf{w}) = \mathbf{0} = (-\mathbf{w}) + \mathbf{w}$;
5. distributiivisuus: $(c + d)\mathbf{w} = (c\mathbf{w}) + (d\mathbf{w})$ ja $c(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (c\mathbf{v}) + (c\mathbf{w})$;
6. skalaarilla kertomisen assosiativisuus: $c(d\mathbf{w}) = (cd)\mathbf{w}$;
7. yksikkökerroin: skalaari $1 \in \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon $1\mathbf{w} = \mathbf{w}$.

Aksioomilla saadaan seuraava lause.

Lause 8. *Seuraavat tulokset ovat voimassa vektoriavaruudessa V kaikilla vektoreilla $\mathbf{w} \in V$ ja kaikilla skalaareilla $c \in \mathbb{R}$:*

1. $0\mathbf{w} = \mathbf{0}$;
2. $(-1)\mathbf{w} = -\mathbf{w}$;
3. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$;
4. jos $c\mathbf{w} = \mathbf{0}$, silloin $c = 0$ tai $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Esimerkki 24. Esimerkki vektoriavaruudesta on Euklidinen avaruus \mathbb{R}^n .

Seuraavaksi perehdytään aliavaruuteen, joka on tärkeä vektoriavaruuden osajoukko.

Määritelmä 24. Aliavaruus W on vektoriavaruuden V osajoukko, joka on vektoriavaruus samojen operaatioiden suhteen kuin V .

Lause 9. *Epätyhjä osajoukko $W \subset V$ on vektoriavaruuden V aliavaruus, jos ja vain jos seuraavat ehdot toteutuvat:*

1. jokaisille vektoreille $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ on voimassa $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$;
2. jokaiselle vektorille $\mathbf{w} \in W$ ja jokaiselle skalaarille $c \in \mathbb{R}$ on voimassa $c\mathbf{w} \in W$.

Esimerkki 25. Tutkitaan Euklidisen avaruuden \mathbb{R}^3 aliavaruuksia. Triviaali aliavaruus on $W = \{\mathbf{0}\}$. Tämä voidaan havainnollistaa helposti, koska siellä on vain yksi alkio $\mathbf{0} \in W$. Summa toteutuu $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in W$ ja jokaisella skalaarilla c toteutuu $c\mathbf{0} = \mathbf{0} \in W$.

Koko vektoriavaruus $W = \mathbb{R}^3$ on aliavaruus, koska se täyttää oman vektoriavaruutensa ehdot eli vektoriavaruus on itsensä aliavaruus.

4.2 Vektorien virittämä avaruus ja lineaarinen riippuvuus sekä riippumattomuus

Tässä alaluvussa käsitellään määritelmät, miten vektorit virittävät aliavaruuden ja milloin vektorijoukko on joko lineaarisesti riippuva tai riippumaton.

Määritelmä 25. Olkoot vektorit $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ vektoriavaruudessa V . Summaa

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \dots + c_k\mathbf{w}_k = \sum_{i=1}^k c_i\mathbf{w}_i \quad (27)$$

missä kertoimet c_1, c_2, \dots, c_k ovat mitä tahansa skalaareita, kutsutaan vektorien $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ lineaariseksi kombinaatioksi. Vektorien sanotaan virittävän osajoukon W , joka sisältää kaikki vektorien lineaariset kombinaatiot.

Lause 10. *Vektorien $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in V$ virittämä osajoukko W on vektoriavaruuden V aliavaruus.*

Esimerkki 26. Olkoon aliavaruus $W \subset \mathbb{R}^3$ vektorien $\mathbf{w}_1 = (1, -2, 1)^T$ ja $\mathbf{w}_2 = (2, -3, 1)^T$ virittämä taso avaruudessa \mathbb{R}^3 . Tutkitaan kuuluuko vektorit $\mathbf{v} = (0, 1, -1)^T$ tai $\mathbf{u} = (1, 0, 0)^T$ aliavaruuteen W . Asian selvittäminen edellyttää skalaarien c_1 ja c_2 löytämistä, jotka toteuttavat yhtälön $\mathbf{v} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2$. Tästä saadaan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ -2c_1 - 3c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

mistä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= 0 \\ -2c_1 - 3c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= -1. \end{aligned}$$

Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä $c_1 = -2c_2$, joka voidaan sijoittaa toiseen tai kolmanteen yhtälöön, jonka jälkeen saadaan $c_2 = 1$. Tämän jälkeen sijoittamalla $c_2 = 1$ mihin tahansa yhtälöön saadaan $c_1 = -2$. Näin löydettiin skalaarit, jotka toteuttavat halutun yhtälön, joka saadaan muotoon $\mathbf{v} = -2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ ja voidaan todeta vektorin \mathbf{v} kuuluvan viritettyyn aliavaruuteen W .

Seuraavaksi tutkitaan vektorin \mathbf{u} tilanne:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ -2c_1 - 3c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

josta nähdään, että ei ole mahdollista löytää skalaareita, jotka toteuttaisivat yhtälön $\mathbf{u} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2$. Todetaan, että vektori \mathbf{u} ei kuulu aliavaruuteen W .

Seuraavaksi perehdytään, milloin vektorijoukon vektorit ovat lineaarisesti riippuvia tai riippumattomia.

Määritelmä 26. Vektoriavaruuden V vektoreita $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in V$ kutsutaan lineaarisesti riippuviksi, jos on olemassa skalaarit c_1, \dots, c_k , joista vähintään yksi on $c_j \neq 0$ ja yhtälö

$$c_1\mathbf{w}_1 + \dots + c_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0} \tag{28}$$

toteutuu. Jos vektorit eivät ole lineaarisesti riippuvia, ne ovat lineaarisesti riippumattomia.

Esimerkki 27. Tutkitaan ovatko vektorit $\mathbf{w}_1 = (1, 2, -1)^T$, $\mathbf{w}_2 = (0, 3, 1)^T$ lineaarisesti riippuvia vai riippumattomia. Koetetaan löytää skalaarit c_1 ja c_2 , jotka toteuttavat yhtälön $c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$. Skalaarit voi koettaa löytää kokeilemalla erilaisia arvoja skalaareilla, mutta lähdetään kunnolla ratkaisemaan tilanne:

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 + 3c_2 \\ -c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

josta nähdään, että skalaarit ovat $c_1 = 0$ ja $c_2 = 0$ eli vektorit \mathbf{w}_1 ja \mathbf{w}_2 ovat lineaarisesti riippumattomia.

Lisätään joukkoon vielä vektori $\mathbf{w}_3 = (-1, 4, 3)^T$ ja tutkitaan ovatko vektorit \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 ja \mathbf{w}_3 lineaarisesti riippuvia vai riippumattomia. Saadaan

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} c_1 - c_3 \\ 2c_1 + 3c_2 + 4c_3 \\ -c_1 + c_2 + 3c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mistä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}c_1 - c_3 &= 0 \\2c_1 + 3c_2 + 4c_3 &= 0 \\-c_1 + c_2 + 3c_3 &= 0\end{aligned}$$

josta muodostetaan laajennettu matriisi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Nyt saadaan helposti yhtälöistä $c_1 - c_3 = 0$ ja $c_2 + 2c_3 = 0$ skalaarit, jolloin saadaan $c_1 = c_3$ ja $c_2 = -2c_3$, jolloin ollaan tilanteessa, että ratkaisuja on äärettömän monta. Esimerkiksi arvoilla $c_1 = 1$, $c_2 = -2$ ja $c_3 = 1$ yhtälö $\mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$ toteutuu tarkoittaen vektorien \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 ja \mathbf{w}_3 olevan lineaarisesti riippuvia.

Seuraavaksi käsitellään lauseita ja lemma, jotka yhdistävät vektoriavaruuden virittämisen, lineaarisen riippuvuuden ja riippumattomuuden matriiseihin.

Lause 11. *Olko vektorit $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$ ja olkoon matriisi $A = (\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_k)$ tyyppiä $n \times k$, jossa matriisin sarakkeet vastaavat annettuja vektoreita. Silloin seuraavat tulokset ovat voimassa:*

1. *Vektorit $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$ ovat lineaarisesti riippuvia, jos ja vain jos vektori $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ on ratkaisu matriisimuodossa $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ annetulle homogeeniselle lineaariselle yhtälöryhmälle.*
2. *Vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos triviaali ratkaisu $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ on ainoa ratkaisu matriisimuodossa $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ annetulle homogeeniselle yhtälöryhmälle.*
3. *Vektori \mathbf{b} kuuluu vektorien $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ virittämään avaruuteen jos ja vain jos matriisimuotoisella $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ lineaarisella yhtälöryhmällä on vähintään yksi ratkaisu.*

Lemma 5. *Kokoelma vektoriavaruuden \mathbb{R}^n vektoreita, joiden lukumäärä on k , on lineaarisesti riippuvia, jos $k > n$.*

Lause 12. *Olkoon matriisi A tyyppiä $n \times k$. Matriisin A sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos matriisin A aste on k .*

Lause 13. *Kokoelma vektoreita, joiden lukumäärä on k , virittää vektoriavaruuden \mathbb{R}^n , jos ja vain jos vektoreita vastaavan tyyppiä $n \times k$ olevan matriisin A aste on n .*

4.3 Kanta ja dimensio

Seuraavaksi käsitellään kannan ja dimension määritelmät.

Määritelmä 27. Vektoriavaruuden V kannaksi kutsutaan vektorijoukkoa $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ jos vektorijoukko toteuttaa ehdot:

1. vektorit virittävät vektoriavaruuden V
2. vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Esimerkki 28. Vektorit $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$ ja $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ virittävät vektoriavaruuden \mathbb{R}^3 ja ovat lineaarisesti riippumattomia eli vektorit \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 ja \mathbf{e}_3 ovat vektoriavaruuden \mathbb{R}^3 kanta. Kuitenkin pitää huomata, että on olemassa muita kombinaatioita eri vektoreista, jotka voivat olla vektoriavaruuden \mathbb{R}^3 kantana.

Lause 14. Jokainen vektoriavaruuden \mathbb{R}^n kanta sisältää tarkalleen n vektoria. Vektorijoukko $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^n$ on vektoriavaruuden \mathbb{R}^n kanta, jos ja vain jos tyyppiä $n \times n$ olevan matriisin $A = (\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_n)$ aste on $\text{rank}(A) = n$ ja matriisi A on säännöllinen.

Määritelmä 28. Olkoon kanta K vektoriavaruudessa V . Jos vektorien lukumäärä kannassa K on n , silloin vektoriavaruutta V kutsutaan n -ulotteiseksi ja sen dimensio sanotaan olevan n ja sitä merkitään $\dim V = n$.

Lause 15. Olkoon vektoriavaruus V n -ulotteinen. Silloin on voimassa seuraavat tulokset:

1. jokainen vektoriavaruuden V vektorijoukko, jossa on enemmän vektoreita kuin n , on lineaarisesti riippuvainen;
2. vektorijoukko, jossa on vähemmän vektoreita kuin n , ei viritä vektoriavaruutta V ;
3. vektorijoukko $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^n$ muodostaa kannan, jos ja vain jos vektorijoukko virittää vektoriavaruuden V ;
4. vektorijoukko $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^n$ muodostaa kannan, jos ja vain jos vektorijoukko on lineaarisesti riippumaton.

Lause 16. Jos vektorit $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ virittävät vektoriavaruuden V , silloin $\dim V \leq m$.

Lemma 6. Vektorit $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ muodostavat vektoriavaruuden V kannan, jos ja vain jos jokainen vektori $\mathbf{x} \in V$ voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti kannan vektoreiden lineaarikombinaatioina seuraavasti:

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{w}_1 + \dots + c_n \mathbf{w}_n = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{w}_i \quad (29)$$

missä c_1, \dots, c_n ovat skalaareja.

4.4 Matriisin kuva ja ydin

Seuraavaksi määritellään matriisin kuva ja ydin.

Määritelmä 29. Olkoon matriisi A tyyppiä $m \times n$. Sen kuva on aliavaruus, jonka virittävät sen sarakevektorit ja sitä merkitään

$$\text{Im}(A) = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{b} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m. \quad (30)$$

Matriisin A ydin on aliavaruus, joka muodostuu vektoreista, jotka toteuttavat määritelmän

$$\text{Ker}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (31)$$

Matriisin kuvaa voidaan myös kutsua sarakeavaruudeksi ja ydintä voidaan kutsua nolla-avaruudeksi.

Lause 17. Jos matriisi A on tyyppiä $m \times n$, silloin seuraavat tulokset ovat ekvivalentteja:

1. $\text{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$ eli matriisimuodossa $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogeenisella yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
2. $\text{rank} = n$;
3. matriisimuodossa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineaarisella yhtälöryhmällä ei ole vapaita muuttujia;
4. matriisimuodossa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineaarisella yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu jokaiselle vektorille $\mathbf{b} \in \text{Im}(A)$.

Hyvin samanlainen lause saadaan neliömatriiseille.

Lause 18. Jos neliömatriisi on tyyppiä $n \times n$, silloin seuraavat tulokset ovat ekvivalentteja:

1. A on säännöllinen;
2. $\text{rank} = n$;
3. $\text{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$;
4. $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.

Luvun lopuksi käsitellään lineaarialgebran peruslause.

Lause 19. Olkoon matriisi A tyyppiä $m \times n$ ja olkoon sen aste r . Silloin on voimassa seuraava tulos:

$$\dim \text{Im}(A) = \text{rank}(A) = r \quad (32)$$

$$\dim \text{Ker}(A) = n - r. \quad (33)$$

5 Ortogonaalisuus

Tässä luvussa käsitellään muutama ortogonaalisuuteen liittyvä määritelmä, joita tarvitaan yleistetyn käänteismatriisin tuloksissa.

5.1 Ortogonaalisuuden ominaisuuksia

Ensimmäiseksi palautetaan mieleen pistetulon määritelmä, jossa vektorien alkiot kerrotaan keskenään ja tulot summataan yhteen.

Määritelmä 30. Vektorien \mathbf{v} , \mathbf{w} pistetuloa merkitään $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ ja se määritellään kaavalla

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

Pistetulo toteuttaa seuraavat kolme aksioomaa kaikille vektoreille \mathbf{u} , \mathbf{v} , $\mathbf{w} \in V$ ja kaikille skalaareille c , $d \in \mathbb{R}$:

1. bilineaarisuus:

$$\begin{aligned}\langle c\mathbf{u} + d\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= c\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + d\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \\ \langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} + d\mathbf{w} \rangle &= c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + d\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle;\end{aligned}$$

2. symmetrisyys: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$;

3. positiivisuus: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ aina, kun $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, samalla $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = 0$.

Pistetuloa voidaan myös kutsua sisätuloksi.

Esimerkki 29. Sarakevektoreiden pistetulo voidaan laskea transponoimalla ensimmäinen ja laskemalla matriisikertolasku. Olkoon vektorit $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ ja $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, silloin niiden pistetulo on

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n.$$

Määritelmä 31. Vektoriavaruudessa V jokaiselle vektorille $\mathbf{v} \in V$ voidaan laskea normi $\|\mathbf{v}\|$, joka on ei-negatiivinen reaaliluku $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$. Normilla on voimassa seuraavat kolme aksioomaa kaikille vektorille \mathbf{v} , $\mathbf{w} \in V$ ja kaikille skalaareille $c \in \mathbb{R}$:

1. positiivisuus: $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ ja $\|\mathbf{v}\| = 0$, jos ja vain jos $\mathbf{v} = \mathbf{0}$;

2. homogeenisyys: $\|c\mathbf{v}\| = |c| \|\mathbf{v}\|$;

3. kolmioepäyhtälö: $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

Normia kutsutaan myös pituudeksi. Seuraavaksi käsitellään vektorien ortogonaalisuuden määritelmä.

Määritelmä 32. Kahta vektoria kutsutaan ortogonaaliseksi, jos niiden pistetulo on nolla.

Määritelmä 33. Olkoot vektoriavaruus V ja aliavaruus W olemassa ja $W \subset V$. Aliavaruuden W ortogonaalikomplementtia merkitään W^\perp ja se määritellään vektorijoukkona, joka on ortogonaalinen suhteessa aliavaruuteen W :

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \text{ kaikilla } \mathbf{w} \in W\}. \quad (34)$$

Määritelmä 34. Neliömatriisia Q kutsutaan ortogonaaliseksi, jos se toteuttaa ehdon:

$$Q^T Q = Q Q^T = I. \quad (35)$$

Tämä voidaan myös määritellä näin:

$$Q^{-1} = Q^T. \quad (36)$$

Lause 20. *Olkoot vektorit \mathbf{v} ja \mathbf{w} vektoriavaruudessa V . Jos vektorit \mathbf{v} ja \mathbf{w} ovat ortogonaalisia, niin seuraava yhtälö on voimassa:*

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2. \quad (37)$$

Todistus. Oletetaan vektorien \mathbf{v} ja \mathbf{w} olevan ortogonaalisia eli $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$. Määritelmän 31 mukaan $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ kaikilla vektoreilla \mathbf{x} ja määritelmän 30 bilineaarisuuden avulla saadaan:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 &= \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 \end{aligned}$$

mikä todistaa tuloksen. □

6 Yleistetty käänteismatriisi

Tässä viimeisessä luvussa käsitellään pro gradu -tutkielman päätulos eli löydetään yleisesti matriiseille käänteismatriisi.

6.1 Yleistetyn käänteismatriisin perusteet

Määritelmä 35. Olkoot A sekä X matriiseja ja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Silloin kun X täyttää Penrosen ehdot

1. $AXA = A$,
2. $XAX = X$,
3. $(AX)^T = AX$,
4. $(XA)^T = XA$

sitä kutsutaan Moore–Penrosen yleistetyksi käänteismatriiriksi matriisista A . Sitä merkitään A^\dagger

Seuraavaksi käsitellään yleistetyn käänteismatriisin yksikäsitäinen olemassaolo mille tahansa matriisille $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Lause 21. *Kaikilla matriiseilla A on olemassa yksikäsitteinen yleistetty käänteismatriisi X , joka täyttää Penrosen ehdot 1.–4.*

Todistus. Olkoon A matriisi ja $A \in \mathbb{R}_r^{m \times n}$, silloin voidaan osoittaa, että matriisilla A on hajotelma $A = Q^T R P$, missä matriisit Q ja P ovat ortogonaalisia matriiseja, jotka ovat tyyppisiä m ja n ja

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & O \\ O & O \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

missä R_{11} on säännöllinen yläkolmiomatriisi, joka on tyyppiä r . Todistus löytyy kirjasta [5]. Merkitään

$$R^\dagger = \begin{bmatrix} R_{11}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

silloin $X = P^T R^\dagger Q$ täyttää Penrosen ehdot 1. – 4. Todellakin

$$\begin{aligned} AXA &= Q^T R P P^T R^\dagger Q Q^T R P = Q^T R P = A, \\ XAX &= P^T R^\dagger Q Q^T R P P^T R^\dagger Q = P^T R^\dagger Q = X, \\ (AX)^T &= (Q^T R P P^T R^\dagger Q)^T = \left(Q^T \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q \right)^T = AX, \\ (XA)^T &= (P^T R^\dagger Q Q^T R P)^T = \left(P^T \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} P \right)^T = XA. \end{aligned}$$

Tällöin mille tahansa $A \in \mathbb{R}_r^{m \times n}$ on olemassa $X = A^\dagger$. Todistetaan seuraavaksi matriisin X olevan yksikäsitteinen. Jos molemmat matriisit X_1 ja X_2 toteuttavat Penrosen ehdot 1. – 4., silloin

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1 A X_1 = X_1 A X_2 A X_1 \\ &= X_1 (A X_2)^T (A X_1)^T = X_1 (A X_1 A X_2)^T \\ &= X_1 (A X_2)^T = X_1 A X_2 \\ &= X_1 A X_2 A X_2 = (X_1 A)^T (X_2 A)^T X_2 \\ &= (X_2 A X_1 A)^T X_2 = (X_2 A)^T X_2 \\ &= X_2 A X_2 = X_2. \end{aligned}$$

Tämä täydentää todistuksen. □

Sitten tutustutaan muutamaa yleistetyn käänteismatriisin ominaisuuteen, joita ei kuitenkaan todisteta.

Lause 22. *Olkoon matriisi $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, silloin*

1. $(A^\dagger)^\dagger = A$;
2. $(\lambda A)^\dagger = \lambda^\dagger A^\dagger$, missä $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda^\dagger = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0; \end{cases}$
3. $(A^T)^\dagger = (A^\dagger)^T$;

4. $(AA^T)^\dagger = (A^T)^\dagger A^\dagger$; $(A^T A)^\dagger = A^\dagger (A^T)^\dagger$;
5. $A^\dagger = (A^T A)^\dagger A^T = A^T (AA^T)^\dagger$;
6. $A^T = A^T AA^\dagger = A^\dagger AA^T$;
7. jos $\text{rank}(A) = n$, silloin $A^\dagger A = I_n$; jos $\text{rank}(A) = m$, silloin $AA^\dagger = I_m$;
8. $(UAV)^\dagger = V^T A^\dagger U^T$, kun matriisit U ja V ovat ortogonaalisia.

Lauseen 22 tulokset saadaan todistettua määritelmän 35 avulla.

Lause 23. *Matriisien kuvilla ja ytimillä on seuraavat perusominaisuudet:*

1. $\text{Im}(A) = \text{Im}(AA^\dagger) = \text{Im}(AA^T)$;
2. $\text{Im}(A^\dagger) = \text{Im}(A^T) = \text{Im}(A^\dagger A) = \text{Im}(A^T A)$;
3. $\text{Im}(I - A^\dagger A) = \text{Ker}(A^\dagger A) = \text{Ker}(A) = \text{Im}(A^T)^\perp$;
4. $\text{Im}(I - AA^\dagger) = \text{Ker}(AA^\dagger) = \text{Ker}(A^\dagger) = \text{Ker}(A^T) = \text{Im}(A)^\perp$;
5. $\text{Im}(AB) = \text{Im}(A) \Leftrightarrow \text{rank}(AB) = \text{rank}(A)$;
6. $\text{Ker}(AB) = \text{Ker}(B) \Leftrightarrow \text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$.

Todistus. Todistetaan esimerkkinä kolmannen kohdan yhtälöt. Muiden kohtien todistukset sivuutetaan. Jos $\mathbf{x} \in \text{Im}(I - A^\dagger A)$, niin $\mathbf{x} = (I - A^\dagger A)\mathbf{y}$ jollakin \mathbf{y} ja tällöin $A^\dagger A\mathbf{x} = A^\dagger A(I - A^\dagger A)\mathbf{y} = A^\dagger A\mathbf{y} - A^\dagger A A^\dagger A\mathbf{y} = A^\dagger A\mathbf{y} - A^\dagger A\mathbf{y} = \mathbf{0}$, joten $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A^\dagger A)$. Jos taas $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A^\dagger A)$, niin $A^\dagger A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ja siis $\mathbf{x} = \mathbf{x} - A^\dagger A\mathbf{x} = (I - A^\dagger A)\mathbf{x} \in \text{Im}(I - A^\dagger A)$. Näin ollen on osoitettu, että $\text{Im}(I - A^\dagger A) = \text{Ker}(A^\dagger A)$.

Jos $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A^\dagger A)$, niin $A^\dagger A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ja siis $A\mathbf{x} = AA^\dagger A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, joten $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A)$. Jos taas $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A)$, niin $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ja siis $A^\dagger A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, joten $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A^\dagger A)$. Näin ollen on osoitettu, että $\text{Ker}(A^\dagger A) = \text{Ker}(A)$.

Jos $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A)$ ja $A^T \mathbf{y} \in \text{Im}(A^T)$, niin $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{y} = (A\mathbf{x})^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$, joten \mathbf{x} on ortogonaalinen kaikkien joukon $\text{Im}(A^T)$ vektoreiden kanssa ja siis $\mathbf{x} \in \text{Im}(A^T)^\perp$. Jos taas $\mathbf{x} \in \text{Im}(A^T)^\perp$, niin $\langle \mathbf{x}, A^T \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ kaikilla $A^T \mathbf{y} \in \text{Im}(A^T)$, ja siis $(A\mathbf{x})^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ kaikilla \mathbf{y} . Tämä on mahdollista vain, jos $(A\mathbf{x})^T = \mathbf{0}$, ja siten $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eli $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A)$. Näin ollen on osoitettu, että $\text{Ker}(A) = \text{Im}(A^T)^\perp$. Muut kohdat saadaan todistettua samalla tyylillä. \square

6.2 Pienimmän neliösumman standardoitu minimiratkaisu

Määritelmä 36. Olkoon matriisi $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja vektori $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, silloin vektoria $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ kutsutaan pienimmän neliösumman ratkaisuksi yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jos $\|A\mathbf{u} - \mathbf{b}\| \leq \|A\mathbf{v} - \mathbf{b}\|$ kaikille vektoreille $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Lineaaraisella yhtälöryhmällä voi olla monta pienimmän neliösumman ratkaisua. Näistä vaihtoehdoista tarkastellaan pienimmän neliösumman ratkaisua, joka on standardoitu minimi eli kaikista pienin.

Määritelmä 37. Olkoon matriisi $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja vektori $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, silloin vektoria $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ kutsutaan pienimmän neliösumman standardoiduksi minimiratkaisuksi yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jos \mathbf{u} on pienimmän neliösumman ratkaisu yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ja $\|\mathbf{u}\| < \|\mathbf{w}\|$ kaikille muille pienimmän neliösumman ratkaisuille \mathbf{w} .

Kun $\mathbf{b} \in \text{Im}(A)$, lineaarinen yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on johdonmukainen, silloin ratkaisu ja pienimmän neliösumman ratkaisu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ovat selvästi yhtäpitävät. Seuraava lause näyttää yhteyden Moore–Penrosen käänteismatriisin A^\dagger ja pienimmän neliösumman standardoidun minimiratkaisun välillä.

Lause 24. *Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, silloin $A^\dagger \mathbf{b}$ on pienimmän neliösumman standardoitu minimiratkaisu.*

Todistus. Olkoon $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, missä

$$\mathbf{b}_1 = AA^\dagger \mathbf{b} \in \text{Im}(A) \quad \text{ja} \quad \mathbf{b}_2 = (I - AA^\dagger) \mathbf{b} \in \text{Im}(A)^\perp,$$

silloin $A\mathbf{x} - \mathbf{b}_1 \in \text{Im}(A)$ ja

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}_1 + (-\mathbf{b}_2)\|^2 = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{b}_2\|^2.$$

Täten \mathbf{x} on pienimmän neliösumman ratkaisu jos ja vain jos \mathbf{x} on ratkeavan yhtälöryhmän ratkaisu $A\mathbf{x} = AA^\dagger \mathbf{b}$. Selvästi $A^\dagger \mathbf{b}$ on jokin tietty ratkaisu. Lauseesta 23 saadaan

$$\text{Ker}(A) = \{(I - A^\dagger A)\mathbf{h} : \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n\},$$

näin ratkeavan yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = AA^\dagger \mathbf{b}$ yleinen ratkaisu on muodossa

$$\mathbf{x} = A^\dagger \mathbf{b} + (I - A^\dagger A)\mathbf{h}, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Sitten

$$\begin{aligned} \|A^\dagger \mathbf{b}\|^2 &< \|A^\dagger \mathbf{b}\|^2 + \|(I - A^\dagger A)\mathbf{h}\|^2 \\ &= \|A^\dagger \mathbf{b} + (I - A^\dagger A)\mathbf{h}\|^2, \quad (I - A^\dagger A)\mathbf{h} \neq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

joten $\mathbf{x} = A^\dagger \mathbf{b}$ on pienimmän neliösumman standardoitu minimiratkaisu. □

Lause 24 tarkoittaa, että on mahdollista löytää yleistetyin käänteismatriisin avulla likimääräinen ratkaisu. Tämä ominaisuus on hyödyllinen, jos esimerkiksi yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Esimerkki 30. Tutkitaan yhtälöryhmää:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

jolla selvästikään ei ole ratkaisua. Etsitään yhtälöryhmälle pienimmän neliösumman standardoitu minimiratkaisu. Muodostetaan yhtälöryhmästä matriisi:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tutkitaan toteuttaako matriisi $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Moore–Penrosen ehdot:

$$\begin{aligned}
 WJW &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = W, \\
 JWJ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = J, \\
 (WJ)^T &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = WJ, \\
 (JW)^T &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = JW.
 \end{aligned}$$

Selvästi matriisi J toteuttaa Moore–Penrosen ehdot, jolloin matriisin W yleistetty käänteismatriisi on matriisi $J = W^\dagger$. Lauseen 24 avulla saadaan pienimmän neliösumman standardoitu minimiratkaisu:

$$\mathbf{x} = W^\dagger \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pienimmän neliösumman standardoitu minimiratkaisu on $x = 0$ ja $y = \frac{1}{2}$.

7 Yhteenveto

Tässä tutkielmassa on perehdytty matriiseihin ja erityisesti siihen, miten lineaarisia yhtälöryhmiä voidaan esittää ja ratkaista matriisien avulla.

Osalle neliömatriiseista voidaan löytää käänteismatriisi. Käänteismatriiseilla on tulos, jonka mukaan voidaan ratkaista yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ käänteismatriisin avulla: $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Käänteismatriisi voidaan muodostaa laajennetun matriisin ja alkeisrivimuunnoksien avulla.

Jokaiselle matriisille A voidaan löytää matriisi W , joka toteuttaa Moore–Penrosen neljä ehtoa, jolloin matriisia W kutsutaan yleistetyksi käänteismatriisiksi ja sitä merkitään A^\dagger . Yleistetyn käänteismatriisin avulla voidaan laskea pienimmän neliösumman standardoitu minimiratkaisu $\mathbf{x} = A^\dagger \mathbf{b}$. Yleistettyä käänteismatriisia voidaan siis käyttää löytämään likimääräinen ratkaisu yhtälöryhmälle, jolla ei ole ratkaisua.

Viitteet

- [1] D.Prasad: *Elementary linear algebra*. Alpha Science Internationa, Oxford, 2012
- [2] P.J.Olver, C.Shakiban: *Applied linear algebra*. Springer Cham, 2018
- [3] G.Wang, Y.Wei, S.Qiao: *Generalized inverses: theory and computations*. Springer Singapore, 2018
- [4] T.S.Blyth, E.F.Robertson: *Basic Linear Algebra*. Springer London, London, 1998
- [5] G.W.Stewart: *Introduction to Matrix Computation*. Academic Press, New York, 1973