



ERÄITÄ HYPERBELIEN GEOMETRISIA OMINAISUUKSIA

Cecilia Tili

Kandidaatintutkielma
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Marraskuu 2024

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

CECILIA TILLI: Eräitä hyperbelien geometrisia ominaisuuksia
Kandidaatintutkielma, s. 20
Matematiikka
Marraskuu 2024

Tässä tutkielmassa tarkastellaan hyperbelejä, jotka ovat tietyn tyyppisiä kartioleikkauksia, niiden geometrisia ominaisuuksia matemaattisten laskujen ja esitysten avulla. Loppupuolella käsitellään kahden hyperbelin erityistapaus, vektoriesitys hyperbelin käyrän haaran etäisyyksille sekä lasketaan hyperbelin käyrän ja koordinaattiakselin rajaaman alueen pinta-ala.

Toisessa luvussa esitetään lyhyt yleiskatsaus kartioleikkauksiin, hyperbelin määrittelmä, neljä erillistä tapaus, miten hyperbelin käyrä voidaan piirtää tasoon ja tutkitaan hyperbelin akseleita ja muutamia pisteitä. Luvussa käsiteltävät pisteet ovat huiput ja polttopisteet.

Kolmannessa luvussa tarkastellaan erityistapaus, jossa kaksi hyperbeliä piirretään samaan koordinaatistoon. Tapaus tunnetaan liittohyperbelinä. Käsitellään tässäkin tapauksessa muutamia pisteitä ja kahta suoraa, joiden välissä hyperbelien käyrät ovat.

Neljännessä luvussa tutkitaan, miten hyperbelin yhtälö muuttuu, kun sitä siirretään uuteen tason pisteeseen.

Viidennessä luvussa esitetään tason vektoreilla esitykset hyperbelin oikean puolen haaran etäisyyksille.

Lopuksi kuudennessa luvussa lasketaan hyperbelin käyrän ja koordinaattiakselin rajaaman alueen pinta-ala.

Asiasanat: hyperbeli, polttopiste, huippu, polttoakseli, liittohyperbeli, asymptootti.

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Hyperbelin määritelmä	2
2.1	Lyhyesti kartioleikkauksista	2
2.2	Hyperbelit tasossa	2
2.3	Hyperbelin huiput ja akselit	5
3	Hyperbelin yhtälö	6
3.1	Liittohyperbeli	10
3.2	Hyperbelin asymptootit	11
4	Hyperbelin siirtäminen tasossa	13
5	Hyperbelin etäisyysominaisuus	13
6	Hyperbelin rajaamia aloja	17

1 Johdanto

Monet tärkeät löydöt sovelletussa ja puhtaassa matematiikassa on liitetty kartioleikkauksiin. Jo 300 eaa. (ennen ajanlaskun alkua) Apollonius Pergeläinen tutki geometrisia operaatioita, erityisesti kartioleikkauksia. Lähes 2000 vuotta myöhemmin Galileo Galilei totesi, että heitettäessä kappale vaakasuunnassa tornin päältä, se putoaa paraabelin muotoista lentorataa pitkin alas maahan. Eräs astronomian historian käännekohdista sijoittuu 1600-luvulle, kun Johannes Kepler esitti, että planeetat liikkuvat ellipsin muotoisilla radoilla. 80 vuotta myöhemmin Isaac Newton havainnollisti, että ellipsin muotoinen, planetaarinen rata edellyttää painovoimaisen vetovoiman käänteisen neliön lakia.

Edellä esitetyt ovat varhaisia löydöksiä ja tutkimuksia geometrisista kartioista. Kartioleikkaus saadaan, kun taso leikkaa kartion erisuuruudessa kulmassa. Tarkemmin ajatellen taso voi leikata kartion kolmella tavalla, minkä seurauksena myös kartioleikkauksia on kolmea eri tyyppiä. Nämä kolme kartioleikkausta tunnetaan paraabelina, ellipsinä ja hyperbelinä. Hyperbelit eroavat paraabeleista ja ellipseistä siten, että niillä käyrä koostuu kahdesta symmetrisestä haarasta, kun taas paraabeleilla ja ellipseillä käyrä on yhtenäinen. Kartioleikkauksia esiintyy paitsi planeettojen ja satelliittien kiertoratoina myös atomien hiukkasten liikeratoina. Kartioleikkauksia hyödynnetään muun muassa linssien suunnittelussa, peileissä ja arkkitehtuurissa.

Eräs kartioleikkausten määritelmä perustuu tunnettuihin pisteisiin, jotka tunnetaan polttopisteinä (yksittäinen polttopiste). Ellipsi voidaan määritellä niiden pisteiden käyränä tasossa, joiden summa $d_1 + d_2$, etäisyyksille d_1 ja d_2 pisteistä F_1 ja F_2 (ellipsin polttopisteet), on vakio. Hyperbeli voidaan määritellä niiden pisteiden käyränä tasossa, joiden erotus $d_1 - d_2$, etäisyyksille d_1 ja d_2 pisteistä F_1 ja F_2 (hyperbelin polttopisteet), on vakio. Paraabeli on puolestaan niiden pisteiden käyrä tasossa, joiden etäisyys pisteestä F (paraabelin polttopiste) on sama kuin näiden etäisyys eräästä suorasta, jota sanotaan johtosuoraksi. Tässä tutkielmassa tarkastellaan hyperbelejä, jotka eroavat muista kartioleikkauksista siten, käyrä ei ole yhtenäinen, vaan koostuu kahdesta haarasta.

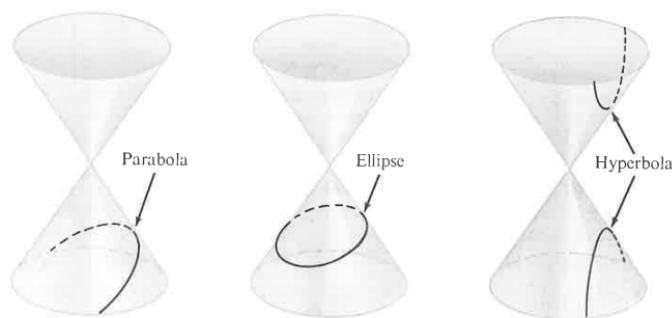
Tämän tutkielman päälähteenä on käytetty Tom M. Apostolin oppikirjaa *Calculus, Introduction with vectors and analytic geometry* ja sähköisen oppimisympäristön Mathematics LibreTexts analyyttisen geometrian kurssin lukua *Locating the Vertices and Foci of a Hyperbola*. Tutkielmassa esitetyt kuvat perustuvat Apostolin oppikirjassa ja Markku Koppisen luentomonisteen *Analyttinen geometria* esiintyviin kuviin.

2 Hyperbelin määritelmä

Tutustutaan hyperbeleihin yleisellä tasolla. Tätä varten on syytä tutustua kartioleikkauksiin, joita käsitellään seuraavassa alaluvussa. Lyhyesti sanottuna asetetaan kaksi kartiota päällekkäin kohtisuorasti niin, että niiden kärjet ovat vastakkain, mitä leikataan pystysuoran koordinaattiakselin suuntaisella tasolla. Tällöin kartioiden leikkauspinnasta saadaan hyperbelin muotoinen. Peruskoulussa hyperbelit esiteltiin kaksiosaisina toisen asteen käyriä. Tämä pätee, mutta ne ovat lisäksi joukko tason pisteitä, joiden kahdesta kiinnitetystä pisteestä mitattu etäisyys on vakio.

2.1 Lyhyesti kartioleikkauksista

Kartioleikkaus saadaan, kun kartiota ja erityisesti ympyräkartiota leikataan tasolla. Taso voi leikata kartion kolmella tavalla, mitkä esitetään alla kuvassa 1. Jos taso leikkaa kartion siten, että leikkauspinnasta saadaan suljettu, leikkauskäyrä on ellipsin muotoinen. Jos taso leikkaa kartion siten, että leikkauskäyrä on kaksiosainen, leikkauspinnasta tulee hyperbelin muotoinen. Näiden rajalla tasoa kallistamalla leikkauskäyrä muuttuu suljetusta avoimeksi. Tässä tapauksessa leikkauspinta on paraabelin muotoinen. Kartioleikkaukset esitetään kuvassa 1.



Kuva 1: Kartioleikkausten tyypit. Kuvassa kartiot on asetettu päällekkäin siten, että niiden kärjet eli huiput ovat vastakkain.

Huomataan, että hyperbelin käyrä koostuu kahdesta haarasta, jotka eivät kulje minäkään saman pisteen kautta. Esitetään seuraavaksi yleinen kartioleikkauksen yhtälö.

Määritelmä 1. Olkoot luvut a, \dots, f reaalityyppisiä. Kartioleikkauksen yhtälö on

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Näin saatiin käsitys kartioleikkauksista. Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan hyperbelejä kaksiulotteisessa tasossa.

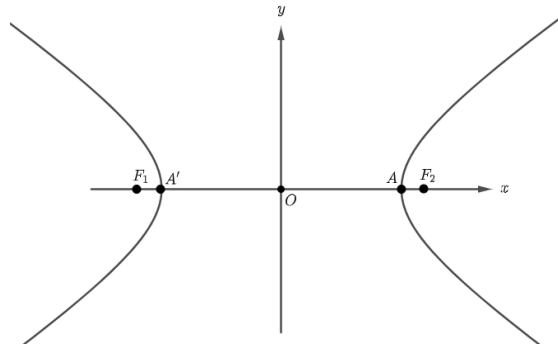
2.2 Hyperbelit tasossa

Kuten edellä mainittiin, hyperbeli on eräs kartioleikkaus ja sen yhtälössä voi esiintyä korkeintaan toisen asteen termejä. Tämä ei vielä kerro, miksi tietyntyyppiset käyrät ovat hyperbelejä. On siis tarpeellista esittää hyperbelin tarkempi määritelmä.

Määritelmä 2. Olkoot F_1 ja F_2 tason kaksi eri pistettä. Hyperbeli on niiden pisteiden joukko, joiden etäisyyksien erotus pisteistä F_1 ja F_2 on vakio. Tällöin pisteitä F_1 ja F_2 sanotaan hyperbelin *polttopisteiksi*.

Hyperbeli voi esiintyä koordinaatistossa ja tasossa neljällä tavalla, joista piirretään havainnollistavat kuvat.

Tapaus 1: Polttopisteet valitaan x -akselilta symmetrisesti pisteen O suhteen.



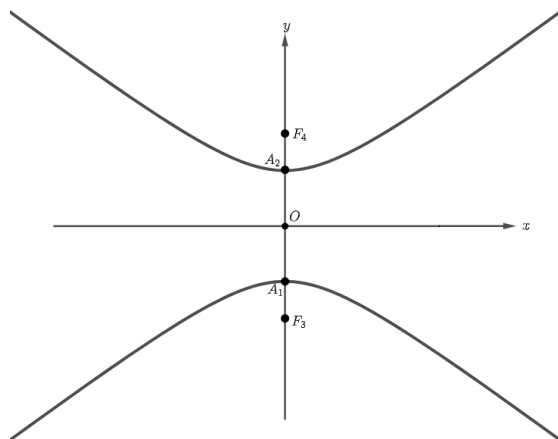
Kuva 2: Hyperbeli polttopisteitä merkitään F_1 ja F_2 . Olkoon O origo.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan pääosin tällaista hyperbeliä, jonka yhtälö on muotoa

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

missä $a, b > 0$. Sanotaan kuvan 2 mukaista hyperbeliä *x -akselin suuntaiseksi*.

Tapaus 2: Polttopisteet valitaan y -akselilta symmetrisesti pisteen O suhteen.



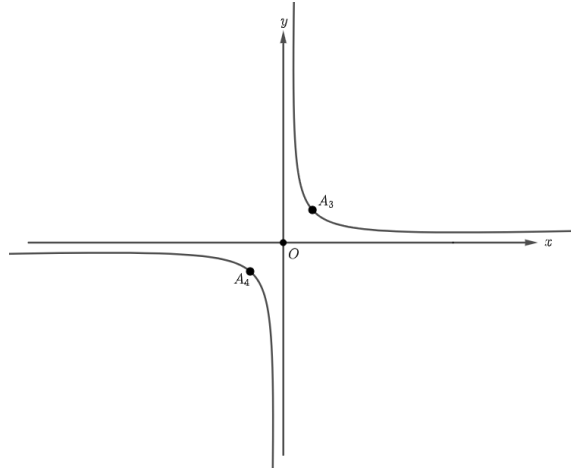
Kuva 3: Hyperbelin polttopisteitä merkitään F_3 ja F_4 . Olkoon O origo.

Tällaisen hyperbelin yhtälö on

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

missä $a, b > 0$. Kuvan 3 hyperbeliä sanotaan *y-akselin suuntaiseksi*. Huomataan, että tapausten 1 ja 2 yhtälöt ovat muuten samat mutta kuvan 3 hyperbelin yhtälössä termien etumerkit vaihtuvat.

Tapaus 3: Tapausten 1 ja 2 hyperbelejä käännetään 90 astetta vastapäivään, jolloin hyperbelin käyrän haarat lähestyvät vähitellen x - ja y -akseleita.



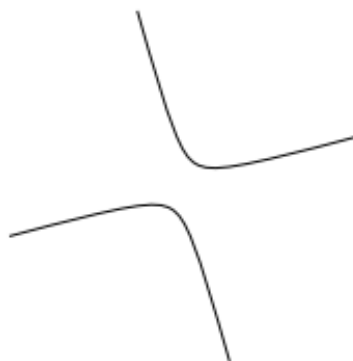
Kuva 4: Hyperbelin huiput A_3 ja A_4 ovat suoralla $y = x$, jolloin myös polttopisteet (ei ole piirretty kuvaan) ovat tällä samalla suoralla.

Kuvan 4 hyperbelin yhtälö on

$$xy = a,$$

missä $a > 0$. Huomataan, että yhtälö on yksinkertaisemmassa muodossa kuin kahdessa edellisessä tapauksessa.

Tapaus 4: Hyperbeliä käännetään ja siirretään mielivaltaiseen kohtaan tasossa.

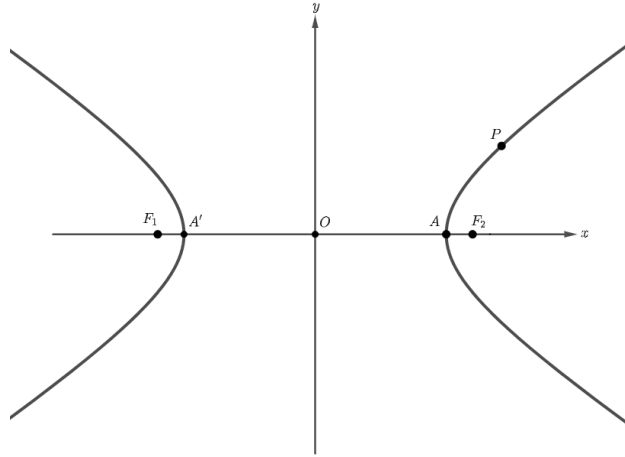


Kuva 5: Tason yleinen hyperbeli

Nyt tiedetään, miten hyperbeli voi tasossa olla. Jatketaan hyperbelin tarkastelua mutta edetään osien tasolle.

2.3 Hyperbelin huiput ja akselit

Tässä alaluvussa tutustutaan hyperbelin geometriaan ja määritellään erilaiset hyperbelin osat ja pisteet. Valitaan tarkasteluun x -akselin suuntainen hyperbeli (kuvan 2 mukainen). Esitetään seuraavassa kuvassa tällaisen hyperbelin käyrä ja muutama tärkeä piste, minkä jälkeen ne määritellään.



Kuva 6: Tarkastellaan hyperbelin geometrisia pisteitä.

Olkoon piste $P = (x, y)$ mielivaltainen käyrän piste.

Määritelmä 3. Olkoot pisteet A ja A' ne pisteet x -akselilta, joissa hyperbelin käyrä leikkaa tuon akselin. Lisäksi nämäkin pisteet ovat symmetriset pisteen O suhteen. Tällöin pisteitä A ja A' sanotaan hyperbelin *huipuiksi*.

Huomautus 1. Kuvasta 6 huomataan, että huippujen väliin muodostuu jana $A'A$, joka kulkee pisteen O kautta. Tämän perusteella jana $A'A$ on hyperbelin *poikittaisakseli*.

Määritelmä 4. Jana $A'A$ on osa suoraa $\overline{A'A}$. Edellä todettiin, että suora $\overline{A'A}$ kulkee pisteen O kautta. Lisäksi suora $\overline{A'A}$ kulkee polttopisteiden kautta. Tällaista suoraa sanotaan hyperbelin *polttoakseliksi*.

Määritelmä 5. Poikittaisakselin keskipistettä sanotaan hyperbelin *keskipisteeksi*.

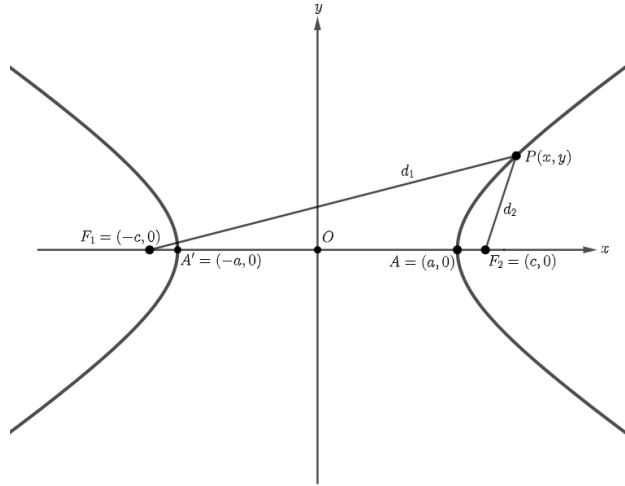
Huomautus 2. Kuvan 6 hyperbelin keskipiste on origo, jonka merkinnäksi on valittu O .

Huomautus 3. Hyperbeli on siis symmetrinen keskipisteensä suhteen.

Tässä alaluvussa esitetty auttaa ymmärtämään hyperbelin geometriaa, mitä seuraavassa alaluvussa syvennetään matemaattisesti.

3 Hyperbelin yhtälö

Aiemmin määritettiin polttopisteet F_1 ja F_2 ja huiput A' ja A , joita tässä alaluvussa tarkastellaan koordinaatistossa. Valitaan polttopisteet siten, että $F_1 = (-c, 0)$ ja $F_2 = (c, 0)$. Valitaan huiput siten, että $A' = (-a, 0)$ ja $A = (a, 0)$. Olkoon piste $P = (x, y)$ mielivaltainen hyperbelin käyrän piste. Tällöin voidaan merkitä, että d_1 on pisteen F_1 etäisyys pisteestä P ja puolestaan d_2 pisteen F_2 etäisyys pisteestä P . Tehdään havainnollistava kuva 7.



Kuva 7: Hyperbelin polttopisteiden ja pisteen P väliset etäisyydet.

Tällöin voidaan muodostaa etäisyyksien erotus

$$||F_1P| - |PF_2|| = |d_1 - d_2| = h,$$

missä h on jokin mielivaltainen vakio. Kun vaihdetaan huippu A pisteeksi P , niin polttopisteen F_1 etäisyys huipusta A on $a - (-c) = a + c$ ja polttopisteen F_2 etäisyys huipusta A on $c - a$. Kun näille muodostetaan erotus, saadaan yhtälö

$$(a + c) - (c - a) = 2a,$$

minkä seurauksena vakion h sijaan käytetään vakiota $2a$. Silloin

$$|d_1 - d_2| = 2a.$$

Huomautus 4. Jos tätä erotuslauseketta sievennetään, huomataan, että se noudattaa kahden pisteen etäisyyttä tasossa. Tällöin lausekkeeksi saadaan

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

missä tason pisteitä merkitään $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$.

Kuvan 7 tapauksessa etäisyyksille d_1 ja d_2 saadaan lausekkeet

$$d_1 = |PF_1| = \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

ja

$$d_2 = |PF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Tällöin voidaan muodostaa erotus $d_1 - d_2$. Saadaan lauseke [1]

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

missä yhtälön oikean puolen vakion etumerkki määräytyy sen mukaan, onko $d_1 > d_2$ vai $d_1 < d_2$. Kuvassa 7 pätee tapaus $d_1 > d_2$, joten käytetään positiivista vakiota.

Johdetaan seuraavaksi etäisyyksien kaava. Muodostetaan siis lauseke erotukselle $d_1 - d_2$ edellä esitettyjen lausekkeiden avulla. Sievennetään lauseketta ja korotetaan kahteen kertaan neliöön, jotta päästään eroon neliöjuurista. Aloitetaan lausekkeesta

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Siirretään jälkimmäinen neliöjuuri summaamalla yhtälön oikealle puolelle

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Korotetaan yhtälö puolittain toiseen eli tehdään neliöönkorotus [2]:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$

mistä seuraa

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Sievennetään molempia puolia

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

mistä saadaan

$$2cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx.$$

Siirretään yhtälön oikealta puolelta termi $2cx$ toiselle puolelle:

$$4cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

mikä voidaan jakaa puolittain luvulla 4:

$$cx = a^2 \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Siirretään termi a^2 vasemmalle puolelle, jolloin saadaan

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Korotetaan yhtälö toisen kerran puolittain neliöön [2]:

$$(cx - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2.$$

Seuraavaksi sievennetään molempia puolia:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2),$$

minkä seurauksena tulee yhtälö

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Tätä voidaan sieventää edelleen:

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4.$$

Siirretään termejä, jotta voidaan ottaa yhteinen tekijä molemmilta puolilta:

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Seuraavaksi sijoitetaan puolittain $b^2 = (c^2 - a^2)$ ja saadaan

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Huomataan, että yhtälö voidaan jakaa puolittain termillä a^2b^2 :

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}.$$

Tällöin yhtälö sievenee lopulta muotoon

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

joka tunnetaan hyperbelin yhtälön yleisenä muotona. Saatiin johdettua aliluvun 2.1 tapauksen 1 (kuva 2) hyperbelin yhtälö. Kuvasta 7 huomataan, että käyrä ei leikkaa y -akselia. Tälle löytyy selitys.

Huomautus 5. Hyperbelin käyrän yleinen yhtälö ei toteudu millään arvolla y , jos $x = 0$.

Jos ratkaistaan yleinen yhtälö muuttujan y suhteen, saadaan kaksi ratkaisua

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Esitetään yleiselle yhtälölle laskut, joissa käytetään neliöön korotusta, jotta päädytään edellä esitettyihin kahteen ratkaisuun. Aloitetaan ensimmäisen termin siirtämisellä yhtälön toiselle puolelle:

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

Kerrotaan molemmat puolet termillä $-b^2$, jotta vasemmalle jää vain ratkaistava termi y . Tällöin saadaan

$$y^2 = -b^2 - \frac{x^2}{a^2} \cdot (-b^2).$$

Sievennetään yhtälöä muotoon

$$y^2 = -b^2 + \frac{x^2 b^2}{a^2},$$

jonka oikealta puolelta voidaan ottaa yhteinen tekijä:

$$y^2 = b^2 \left(-1 + \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Seuraavaksi lavennetaan murtoluvut sulkujen sisällä samannimisiksi, minkä jälkeen yhtälön oikeaksi puoleksi tulee

$$y^2 = b^2 \left(-\frac{a^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Otetaan yhteinen tekijä

$$y^2 = b^2 \cdot \frac{1}{a^2} (-a^2 + x^2),$$

jonka jälkeen yhtälö sievenee:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (-a^2 + x^2).$$

Seuraavaksi otetaan puolittain neliöjuuri, jotta päästään eroon toisesta potenssista

$$\sqrt{y^2} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} (-a^2 + x^2)}.$$

Tällöin yhtälössä

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{-a^2 + x^2}$$

termien paikkoja voidaan vaihtaa ja päädytään haluttuihin muuttujan y ratkaisuihin

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

jonka mukaan mikään piste $P = (x, y)$ ei ole hyperbelin käyrällä, jos $x^2 < a^2$. Tämän nojalla hyperbelin käyrä koostuu kahdesta haarasta (kuten kuvassa 7): vasemmanpuoleisella haaralla huipun piste on $A' = (-a, 0)$, jolle $x = -a$, ja oikeanpuoleisella kyseinen piste on puolestaan $A = (a, 0)$, jolle $x = a$. Tällöin yleinen yhtälö johtaa ehtoon

$$\frac{y^2}{b^2} < \frac{x^2}{a^2},$$

mikä on yhtäpitävä epäyhtälön

$$-\frac{b}{a}|x| < y < \frac{b}{a}|x|$$

kanssa. [1] Johdetaan tämä epäyhtälö sivulla 8 esitetystä hyperbelin yleisestä yhtälöstä

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 > 0.$$

Yhtälö on yhtäpitävä yllä olevalle ehdolle. Tästä seuraa

$$\frac{x^2}{a^2} > \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow y^2 < \left(\frac{b}{a}x\right)^2,$$

mikä toteuttaa ehdon

$$|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2.$$

Edellisen ehdon nojalla saadaan

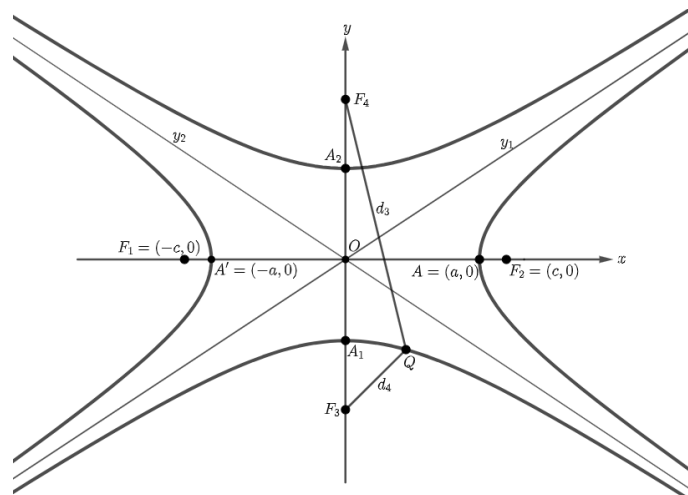
$$\begin{aligned} |y| &\leq \left|\frac{b}{a}x\right| \Leftrightarrow |y| \leq \frac{b}{a}|x| \\ &\Leftrightarrow -\frac{b}{a}|x| \leq y \leq \frac{b}{a}|x|. \end{aligned}$$

Huomautus 6. Hyperbeli kulkee aina suorien $y = \frac{b}{a}x$ ja $y = -\frac{b}{a}x$ välissä.

Tässä vaiheessa tunnetaan hyperbelin geometriaa ja matematiikkaa. Seuraavan alaluvun käsitteet ovat yhteydessä tähän asti esitettyihin. Tämä ja edelliset alaluvut tarkastelivat hyperbeliä, jolla polttopisteet ja huiput ovat x -akselilla. Seuraavassa alaluvussa samaan koordinaatistoon piirretään toinen hyperbeli, jonka polttopisteet ja huiput ovat y -akselilla.

3.1 Liittohyperbeli

Tarkastellaan pintapuolisesti mielenkiintoista erikoistapausta, joissa alaluvun 2.1 tapausten 1 ja 2 hyperbelien käyrät ovat yhtä aikaa koordinaatistossa. Piirretään kuvaan 8 tapausten 1 ja 2 hyperbelit.



Kuva 8: Pisteet F_1 , F_2 , A' , A ja O määriteltiin alaluvussa 2.2.

Tarkastellaan hyperbeliä, jonka huippuja merkitään A_1 ja A_2 ja polttopisteet ovat $F_3 = (0, -c)$ ja $F_4 = (0, c)$. Tämän nojalla kuvassa 8 hyperbelin polttoakseli on

$\overline{A_1A_2}$. Olkoon Q mielivaltainen hyperbelin käyrän piste. Merkitään, että d_3 on pisteen F_4 etäisyys pisteestä Q ja d_4 pisteen F_3 etäisyys pisteestä Q . Etäisyydet ovat

$$d_3 = |F_4Q|$$

ja

$$d_4 = |QF_3|,$$

joille pätee myös, että $|d_3 - d_4|$ on vakio. Laskemalla samoin kuin aiemmin, saadaan yhtälö:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Huomataan, että janat $A'A$ ja A_1A_2 ovat toisiaan vasten kohtisuorassa. Lisäksi huomataan, että yleiset yhtälöt muistuttavat toisiaan. Tällöin kuvan 8 hyperbelejä sanotaan toistensa *liittohyperbeleiksi*, eli ne ovat toistensa *konjugaatteja*. Käsitellään seuraavaksi kuvan 8 origon kautta kulkevia suoria ℓ_1 ja ℓ_2 .

3.2 Hyperbelin asymptootit

Tarkastellaan suoria (kuva 8), joita merkitään nyt ℓ_1 ja ℓ_2 , joiden yhtälöt ovat $\ell_1 = -\frac{b}{a}x$ ja $\ell_2 = \frac{b}{a}x$. Jos valitaan muuttuja x siten, että se on arvoltaan mahdollisimman suuri, luku $\sqrt{x^2 - a^2}$ on likimain muuttujan x suuruinen. Ratkaistun lausekkeen oikeaksi puoleksi tulee

$$\pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

joka on likimain $\pm \frac{b}{a}x$. Suoran ℓ_2 y -koordinaatti y_2 voidaan korvata hyperbelin käyrän y -koordinaatilla $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. Seuraavaksi osoitetaan, että suoran ℓ_1 ja hyperbelin käyrän (kuva 7) y -koordinaatin y erotus lähestyy nollaa, kun muuttuja x kasvaa rajatta. Muodostetaan erotus

$$y_1 - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Otetaan oikealta puolelta yhteinen tekijä:

$$\frac{b}{a} \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right).$$

Lavennetaan murtolukua lausekkeella $(x + \sqrt{x^2 - a^2})$:

$$\frac{b(x + \sqrt{x^2 - a^2})(x - \sqrt{x^2 - a^2})}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})}.$$

Tällöin osoittajaan voidaan käyttää kaavaa $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ oikealta vasemalle ja nimittäjässä kerrotaan sulut auki:

$$\frac{b(x^2 - (\sqrt{x^2 - a^2})^2)}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})}.$$

Näin osoittajasta häviää neliöjuuri:

$$\frac{b(x^2 - (x^2 - a^2))}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})}.$$

Kerrotaan seuraavaksi osoittajassa ja nimittäjässä sulut auki, mistä saadaan

$$\frac{b x^2 - (x^2 - a^2)}{a x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Sievennetään edelleen osoittajaa ja nimittäjää:

$$\frac{b x^2 - x^2 + a^2}{a x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Supistetaan termejä:

$$\frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Murtoluvulle pätee tällöin ehto

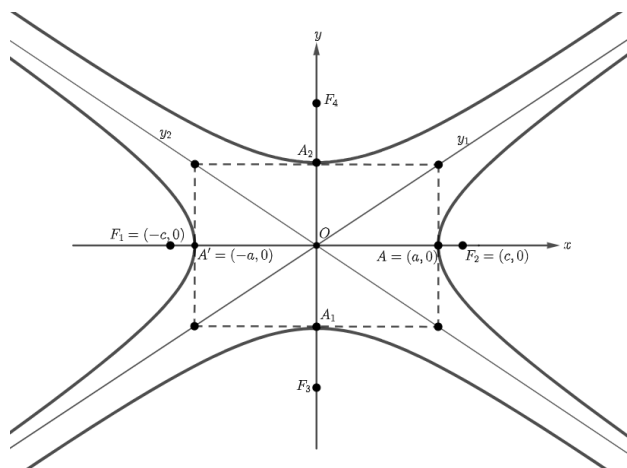
$$\frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} < \frac{ab}{x},$$

jossa oikea puoli lähestyy nollaa, kun x kasvaa rajatta.

Määritelmä 6. Jos hyperbelin käyrän haarat lähestyvät suoria $l_1 = y_1$ ja $l_2 = y_2$, niitä sanotaan *asymptoottisuoriksi*.

Tästä seuraa, että suoran $y_1 = \frac{b}{a}x$ ja hyperbelin (kuva 7) oikeanpuoleisen haaran y -koordinaattien välinen etäisyys lähestyy nollaa. Määritelmän 7 perusteella, voidaan todeta, että hyperbelin käyrä lähestyy *asymptoottisesti* suoria l_1 ja l_2 .

Seuraavaksi huippujen A' , A , A_1 ja A_2 kautta piirretään koordinaattiakselien suuntaiset suorat, minkä seurauksena muodostuu suorakulmio kuvan 9 mukaisesti.



Kuva 9: Huomataan, että hyperbelien huiput ovat suorakulmion sivujen keskipisteet.

Kuvassa koordinaattiakselien suuntaisten suorien ja asymptoottien leikkauspisteet yhdistetään, jolloin muodostuu suorakulmion muotoinen alue.

Huomautus 7. Aiemmin todettiin, että hyperbelien poikittaisakselit $A'A$ ja A_1A_2 ovat kohtisuorassa toisiaan vasten eli $A'A \perp A_1A_2$. Tämä pätee myös kuvan 9 tapauksessa.

Suorat y_1 ja y_2 kulkevat suorakulmion kärkien kautta eli ne lävistävät suorakulmion.

Saatiin yleiskatsaus liittohyperbelistä ja määritettiin asymptootit. Jatketaan seuraavaksi tapaukseen, jossa liittohyperbeli ja asymptootit siirretään mielivaltaiseen kohtaan tasossa.

4 Hyperbelin siirtäminen tasossa

Lopuksi tarkastellaan tapausta, jossa kuvan 9 hyperbelit, piste O ja asymptootisuorat siirretään mielivaltaiseen kohtaan tasossa. Tällöin piste O löytyy kohdasta (x_0, y_0) sekä hyperbelien ja asymptootisuorien yhtälöt saavat uudet muodot. Saadaan hyperbelien uusiksi yhtälöiksi

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

ja

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1.$$

Samoin asymptootisuorien yhtälöt muuttuvat muotoon

$$y_1 - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) = \frac{b(x - x_0)}{a}$$

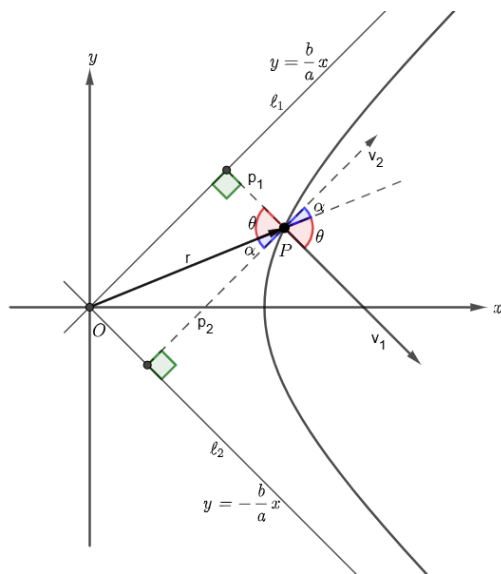
ja

$$y_2 - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0) = -\frac{b(x - x_0)}{a}.$$

Tutustuttiin lyhyesti liittohyperbelien ja asymptoottien siirtoon tasossa. Seuraavassa luvussa otetaan käyttöön tason yksikkövektorit ja laaditaan asymptootisuorien ja hyperbelin oikean puolen haaran etäisyydet. Menetelmä tunnetaan hyperbelin etäisyysominaisuutena.

5 Hyperbelin etäisyysominaisuus

Tarkastellaan laskemalla hyperbelin oikean puoleisen haaran ja asymptootin y_1 välinen etäisyys tason yksikkövektoreilla i ja j . Kun lasketaan minkä tahansa hyperbelin pisteen etäisyydet asymptootista, niiden tulo on aina sama. Tämä osoitetaan seuraavaksi. Aloitetaan kuvalla 10.



Kuva 10: Ensin lasketaan hyperbelin käyrän etäisyys asymptootista ℓ_1 , jota merkitään p_1 . Tämän jälkeen lasketaan etäisyys asymptootista ℓ_2 , jota merkitään p_2 .

Huomautus 8. Oletetaan, että kuvan hyperbelin käyrä on sama kuin aiemmissa luvuissa.

Olkoon p_1 asymptoottisuoran ℓ_1 ja pisteen P välinen etäisyys. Samoin p_2 on asymptoottisuoran ℓ_2 ja pisteen P välinen etäisyys. Olkoon \vec{r} vektori, jonka alkupiste on O ja päätepiste P . Olkoon vektorin esitys $\vec{r} = xi + yj$. Kuvasta huomataan, että jatkamalla suoraa p_2 ja vektoria \vec{r} , muodostuu kahdet ristikulmat $\alpha = \alpha$ ja $\theta = \theta$. Kulma θ muodostuu vektorin \vec{r} ja suoran p_1 väliin. Kulma α muodostuu vektorin \vec{r} ja suoran p_2 väliin.

Nyt voidaan muodostaa kulmien θ ja α lausekkeet. Käytetään kosinia ja saadaan

$$\cos \theta = \frac{p_1}{|\vec{r}|},$$

mistä saadaan ratkaistua etäisyyden p_1 lauseke

$$p_1 = |\vec{r}| \cos \theta.$$

Samalla tavalla kulman α lausekkeeksi saadaan

$$\cos \alpha = \frac{p_2}{|\vec{r}|},$$

mistä saadaan etäisyyden p_2 lauseke

$$p_2 = |\vec{r}| \cos \alpha.$$

Kuvasta huomataan, että asymptootti ℓ_1 ja vektori \vec{v}_1 ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli $\ell_1 \perp \vec{v}_1$. Toisin sanoen tämä vektori on suoran ℓ_1 normaali. Vastaavasti

asymptootti ℓ_2 ja \vec{v}_2 ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli $\ell_2 \perp \vec{v}_2$. Tämä vektori on tällöin suoran ℓ_1 normaali. Vektorin \vec{v}_1 esitys yksikkövektorien avulla on

$$\vec{v}_1 = bi - aj,$$

minkä avulla saadaan suoran ℓ_1 suunnaksi

$$ai + bj,$$

mikä seuraa siitä, että ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Samoin vektorille \vec{v}_2 saadaan esitys yksikkövektoreilla

$$\vec{v}_2 = bi + aj,$$

minkä avulla saadaan suoran ℓ_2 suunnaksi

$$ai - bj,$$

mikä seuraa niiden kohtisuoruudesta.

Seuraavaksi muodostetaan vektoreille \vec{v}_1 ja \vec{v}_2 pistetulot

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{r} = |\vec{v}_1| |\vec{r}| \cos \theta$$

ja

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{r} = |\vec{v}_2| |\vec{r}| \cos \alpha.$$

Tällöin saadaan etäisyyden p_1 lausekkeeksi

$$p_1 = |\vec{r}| \cos \theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{r}}{|\vec{v}_1|}.$$

Sijoitetaan osoittajaan edellä esitetyt yksikkövektoriesitykset ja nimittäjään vektorin pituus

$$\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{r}}{|\vec{v}_1|} = \frac{(bi - aj) \cdot (xi + yj)}{\sqrt{b^2 + a^2}}.$$

Sievennetään ja saadaan

$$\frac{bx - ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Samalla tavalla etäisyyden p_2 lausekkeeksi tulee

$$p_2 = |\vec{r}| \cos \alpha = \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{r}}{|\vec{v}_2|}.$$

Sijoitetaan osoittajaan yksikkövektoriesitykset ja nimittäjään vektorin pituus

$$\frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{r}}{|\vec{v}_2|} = \frac{(bi + aj) \cdot (xi + yj)}{\sqrt{b^2 + a^2}}.$$

Sievennetään ja saadaan

$$\frac{bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Korvataan molempiin lausekkeisiin nimittäjä $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, saadaan yksinkertaisemmat muodot

$$p_1 = \frac{bx - ay}{c}$$

ja

$$p_2 = \frac{bx + ay}{c}.$$

Lopuksi muodostetaan etäisyyksien tulo ja lasketaan

$$p_1 p_2 = \frac{(bx - ay)}{c} \cdot \frac{(bx + ay)}{c}.$$

Sievennetään osoittajaa

$$\frac{(bx - ay)(bx + ay)}{c^2} = \frac{(bx)^2 + bx \cdot ay - ay \cdot bx - (ay)^2}{c^2}.$$

Sieventämällä saadaan muotoon

$$\frac{b^2 x^2 - a^2 y^2}{c^2}.$$

Otetaan yhteinen tekijä

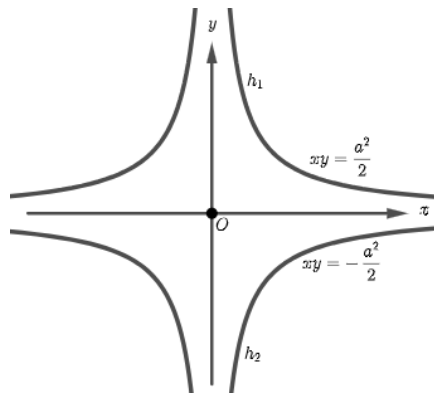
$$\frac{b^2 a^2}{c^2} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

missä sulkujen sisus on 1, koska se on hyperbelin yleinen yhtälö, joka on 1. Saatiin kaava

$$p_1 p_2 = \frac{b^2 a^2}{c^2},$$

joka on vakio. Pisteellä P ei siis ole vaikutusta etäisyyksien tuloon.

Jos hyperbeliä, joka on muotoa $x^2 - y^2 = 1$ (sanotaan *yksikköhyperbeliksi*), kierretään $\frac{\pi}{4}$ astetta vastapäivään, uuden hyperbelin pisteellä (x, y) etäisyydet p_1 ja p_2 ovat $p_1 = |x|$ ja $p_2 = |y|$. Täten kaavaksi tulee $|xy| = \text{vakio}$. Uuden hyperbelin haarat ovat koordinaatistossa I ja III neljänneksessä, joten x ja y ovat samanmerkkiset.

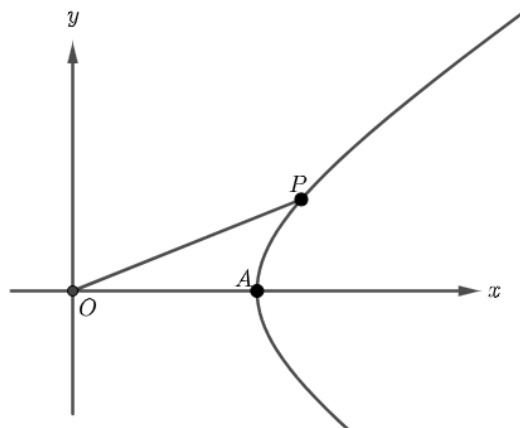


Kuva 11: Liittohyperbeliä käännetään vastapäivään $\frac{\pi}{4}$ astetta.

Kuvan tilanteessa hyperbelin yhtälö on $xy = \text{vakio}$. Näin saatiin laskettua hyperbelin oikean haaran etäisyydet asymptotoista. Seuraavassa luvussa lasketaan vielä hyperbelin haaran, x -akselin ja janan (pisteestä O ja käyrän pisteeseen P) rajaaman alueen pinta-ala.

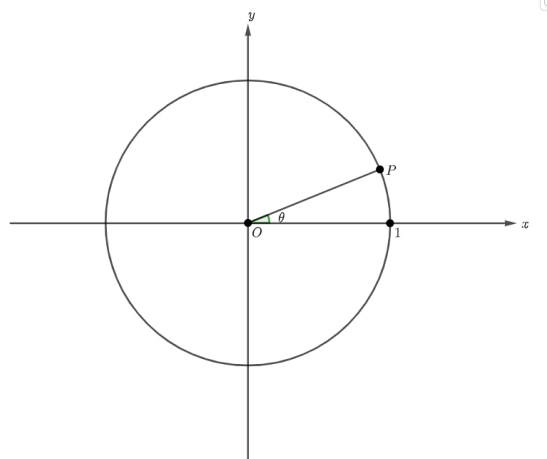
6 Hyperbelin rajaamia aloja

Lopuksi lasketaan kuvan 12 alueelle pinta-ala.



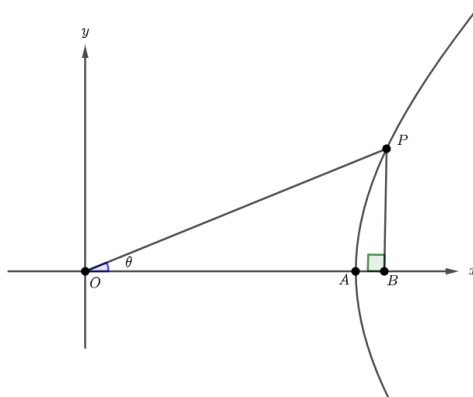
Kuva 12: Kuvion OAP kärkipisteet ovat O , A ja P . Kuvion sivuiksi muodostuu OA , OP ja AP .

Huomataan, että sivu AP ei ole suora, minkä takia lasketaan ensin ympyrän, jonka eräs kehän piste on P ja säde OP , sektorin ala. Tässä laskussa ympyrä on kuvan 13 mukainen.



Kuva 13: Ympyrän sektori, jonka kehän piste on nyt P ja keskuskulma θ .

Sektori ratkaistaan *ympyrän sektorin* kaavalla. Muodostetaan kuvan 12 alueesta suorakulmainen kolmio (kuva 14), jonka ala lasketaan ensin. Puhutaan kuvan 14 tilanteesta.



Kuva 14: Kuvan 12 alueesta saadaan suorakulmainen kolmio OBP .

Tämän jälkeen lasketaan ala sille alalle, joka jää kuvien 12 ja 14 kuvioden yhteisten alueiden ulkopuolelle. Toisin sanoen lasketaan siis kuvion ABP ala. Lopuksi muodostetaan kuvion OAP ala, mikä on suorakulmaisen kolmion OBP ja kuvion ABP erotus.

Kuvassa 13 kulma θ on keskuskulma ja kehän piste P valitaan siten, että $P = (\cos \theta, \sin \theta)$. Ympyrän yhtälö on tämän perusteella

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Saadaan yksikköympyrän sektorin alaksi A_{sektori}

$$A_{\text{sektori}} = \frac{\theta \cdot r^2}{2},$$

missä $r = |OP| = 1$ on säde.

Piste P valittiin siten, että $P = (\cosh \theta, \sinh \theta)$. Valitaan huipun piste $A = (1, 0)$. Hyperbelin käyrän yhtälöksi saadaan

$$x^2 - y^2 = 1,$$

josta ratkaistaan muuttuja y :

$$y^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Siirrytään ratkaisemaan kuvan 14 alueiden pinta-alat. Muodostetaan kolmion OBP pinta-ala

$$A_{OBP} = \frac{1}{2} \cdot \cosh \theta \sinh \theta$$

ja kuvion ABP pinta-ala

$$A_{ABP} = \int_1^{\cosh \theta} \sqrt{x^2 - 1} \, dx.$$

Tehdään sijoitus $x = \cosh u$, jolloin $dx = \sinh u du$. Sijoitetaan tämä ja integroidaan:

$$\int_0^\theta \sqrt{\cosh^2 u - 1} \sinh u du.$$

Sieventämällä integraalista tulee

$$\int_0^\theta \sinh^2 u du.$$

Käytetään hyperbelifunktioiden ominaisuuksia:

$$\int_0^\theta \frac{1}{2}(\cosh 2u - 1) du,$$

josta saadaan

$$\left/ \begin{array}{l} \theta \\ 0 \end{array} \right. \frac{1}{4} \sinh 2u - \frac{1}{2}u.$$

Tehdään sijoitukset ja ylärajasta vähennetään alaraja:

$$\left(\frac{1}{4} \sinh 2\theta - \frac{1}{2}\theta \right) - \left(\frac{1}{4} \sinh 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \right).$$

Saadaan

$$\left(\frac{1}{4} \sinh 2\theta - \frac{1}{2}\theta \right).$$

Yhtälöä sieventämällä:

$$\frac{1}{4}(2 \sinh \theta \cosh \theta) - \frac{1}{2}\theta.$$

Jatketaan sieventämistä:

$$\frac{1}{2}(\sinh \theta \cosh \theta - \theta).$$

Lopuksi muodostetaan erotus, jotta saadaan kuvion OAP ala. Muodostetaan pinta-alan lauseke

$$A_{OAP} = A_{OPB} - A_{ABP} = \left(\frac{1}{2} \cosh \theta \sinh \theta \right) - \left(\frac{1}{2} (\sinh \theta \cosh \theta - \theta) \right).$$

Sievennetään sulkulausekkeita

$$\left(\frac{1}{2} \cosh \theta \sinh \theta \right) - \left(\frac{1}{2} \sinh \theta \cosh \theta - \frac{1}{2}\theta \right).$$

Voidaan poistaa sulut:

$$\frac{1}{2} \cosh \theta \sinh \theta - \frac{1}{2} \sinh \theta \cosh \theta + \frac{1}{2}\theta.$$

Ensimmäiset termit kumoutuvat, minkä jälkeen saadaan haluttu pinta-ala:

$$A_{OAP} = \frac{1}{2}\theta.$$

Yksikköympyrän ja yksikköhyperbelin keskuskulman θ rajoittaman sektorin ja sektorimaisen alueen pinta-ala on sama.

Viitteet

- [1] T. M. Apostol: *Calculus, Volume I, Introduction with vectors and analytic geometry*, Blaisdell Publishing Company, Second Printing, 1962.
- [2] P. Heiskanen, P. Kaakinen, J. Lehtonen, ym.: *TEKIJÄ Pitkä matematiikka 8 Juuri- ja logaritmfunktiot*, Sanoma Pro Oy, 1. painos, 2017.
- [3] M. Koppinen: *Analyttinen geometria*, Turun yliopisto, 2016.
- [4] Lumen Learning – College Algebra: *Deriving the Equation of a Hyperbola Centered at the Origin*, kuvaan Figure 5 asti, OpenStax, 2023.
<https://courses.lumenlearning.com/odessa-collegealgebra/chapter/deriving-the-equation-of-a-hyperbola-centered-at-the-origin/>,
luettu 9.11.2024.
- [5] Mathematics LibreTexts: *Locating the Vertices and Foci of a Hyperbola*, The LibreTexts libraries, NICE CXone Expert.
[https://math.libretexts.org/Bookshelves/Precalculus/Precalculus_1e_\(OpenStax\)/10%3A_Analytic_Geometry/10.02%3A_The_Hyperbola](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Precalculus/Precalculus_1e_(OpenStax)/10%3A_Analytic_Geometry/10.02%3A_The_Hyperbola),
luettu 4.11.2024.