Aritmeettisesta derivaatasta

Susanna Suoranta

LuK-tutkielma
Joulukuu 2024

Tarkastaja:
Väitöskirjatutkija Mikko Jaskari

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

SUSANNA SUORANTA: Aritmeettisesta derivaatasta
LuK-tutkielma, 13 s.
Matematiikka
Joulukuu 2024

Tässä tutkielmassa esitellään ja määritellään aritmeettinen derivaatta ensin luonnollisille luvuille, minkä jälkeen perehdytään aritmeettisen derivaatan ominaisuuksiin ja määritelmää laajennetaan aina rationaalilukuihin asti. Tämän jälkeen käsitellään aritmeettista integraalia sekä differentiaalilaskentaa, johon erityisesti liittyy paljon avoimia kysymyksiä. Lopuksi esitellään aritmeettisen derivaatan sovelluksia.

Asiasanat: aritmeettinen derivaatta, alkuluku, aritmeettinen integraali, aritmeettinen differentiaaliyhtälö, lukuteoria

Sisällys

1 Johdanto

Aritmeettinen derivaatta antaa toisenlaisen tarkastelunäkökulman lukuteoriaan ja lukuihin. Funktioiden sijaan tarkoituksena on derivoida lukuja, minkä avulla voidaan tutkia muun muassa erilaisten alkulukujen ja lukujoukkojen ominaisuuksia. Muutaman yksinkertaisen säännön avulla teoriaa on saatu rakennettua melko pitkälle. Aritmeettiseen derivaattaan liittyy vielä monia avoimia kysymyksiä sekä otaksumia, joita ei ole vielä osoitettu todeksi.

Ensimmäisen matemaattisen julkaisun aiheesta teki kanadalainen matemaatikko Edward Barbeau [5]. Hänen artikkeliansa *Remarks on an Arithmetic Derivative* vuodelta 1961 [2] ennen aritmeettinen derivaatta oli esiintynyt Putnam Prize -matematiikkakilpailussa vuonna 1950 [1]. Silloin puhuttiin yleisesti funktioista eikä vielä käytetty käsitettä "aritmeettinen derivaatta".

Tässä tutkielmassa esitellään ja määritellään aritmeettinen derivaatta ensin luonnollisille luvuille, sitten kokonaisluvuille ja lopuksi rationaaliluvuille. Lisäksi tutkielmassa käsitellään aritmeettista osittaisderivaattaa ja mainitaan muita lukujoukkoja sekä matematiikan osa-alueita, joihin määritelmä on mahdollista laajentaa. Luvussa 4 käsitellään aritmeettista integraalia sekä aritmeettisia differentiaaliyhtälöitä. Avoimia tutkimuskysymyksiä löytyy erityisesti differentiaaliyhtälöitä tarkasteltaessa, ja luvussa 5 käydään läpi muita mahdollisia sovelluskohtia. Tutkielman seuraaminen edellyttää lukuteorian perusteiden hallintaa.

Tutkielman päälähteenä on Victor Ufnarovskin ja Bo Åhlanderin artikkeli *How to differentiate a number* (2013) [1], jota seurataan vahvasti. Muita lähteitä on käytetty pääosin yksittäisissä määritelmissä tai alaluvuissa. Lisäksi apuna on käytetty kahta aiheesta tehtyä suomenkielistä Pro gradu -tutkielmaa: Onni Keinäsen tutkielmaa *Aritmeettinen derivaatta* keväältä 2024 [5] ja Veera Rosaman samannimistä tutkielmaa syksyltä 2013 [6].

2 Aritmeettisen derivaatan esittely ja määrittely

Tässä luvussa esitellään ja määritellään aluksi tutkielman kannalta olennaiset käsitteet, joita ovat luonnolliset luvut, funktio, alkuluvut sekä alkutekijähajotelma. Tämän jälkeen esitellään ja määritellään aritmeettinen derivaatta luonnollisille luvuille ja osoitetaan määritelmän olevan hyvinmääritelty.

2.1 Yleistä

Luonnolliset luvut ovat joukko $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Jos luku 0 sisällytetään luonnollisten lukujen joukkoon, käytetään merkintää $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Kokonaislukujen joukosta käytetään symbolia $\mathbb{Z}$ ja rationaalilukujen joukosta symbolia $\mathbb{Q}$. Määritellään seuraavaksi käsitteet funktio, alkuluku ja alkutekijähajotelma, jotka luovat tärkeän pohjan aritmeettisen derivaatan teorialle.

Määritelmä 1. *Funktio.* Funktio $f : A \to B$ kuvaa jokaisen lähtöjoukon A alkion yksikäsitteisesti joksikin maalijoukon B alkioksi.

Määritelmä 2. *Alkuluvut.* Luonnollinen luku $p > 1$ on alkuluku, jos se on jaollinen vain luvuilla p ja 1. Alkulukujen joukosta käytetään merkintää $\mathbb{P}$. Alkulukujen jono $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sisältää kaikki alkuluvut suuruusjärjestyksessä, milloin
$(p_i)_{i\in\mathbb{N}} = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$

Määritelmä 3. *Alkutekijähajotelma.* Alkutekijähajotelma tarkoittaa luvun esittämistä sen alkutekijöiden tulona. Luvun a alkutekijähajotelma on

$$a = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i},$$

kun $a_i \in \mathbb{N}_0$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $p_i^{a_i}$ jakaa luvun a, mutta $p_i^{a_i+1}$ ei.

Aritmetiikan peruslauseesta tiedetään, että jokaista $a \in \mathbb{N}$ kohden on olemassa yksikäsitteinen määritelmän 3 mukainen eksponenttien $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jono, jolle alkutekijähajotelman mukainen yhtälö on voimassa. Koska alkutekijähajotelman mukainen tulo suppenee, niin jokaista tällaista jonoa kohden on myös olemassa sellainen $I \in \mathbb{N}$, että $a_i = 0$ kaikille $i \geq I$. Tällöin $\prod_{i=I}^{\infty} p_i^{a_i} = 1$. Havainnollistetaan tätä seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 1. Esitetään luvut 9 ja 22 alkutekijähajotelman muodossa. Koska $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$, eksponentti $a_2 = 2$ ja $a_i = 0$, kun $i \neq 2$. Luvun 9 alkutekijähajotelma on

$$9 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdots = 1 \cdot 3^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdots .$$

Luku $22 = 2 \cdot 11$, jolloin $a_1 = a_5 = 1$ ja $a_i = 0$, kun $i \neq 1, 5$. Luvun 22 alkutekijähajotelma on

$$22 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^1 \cdot 13^0 \cdots = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 1 \cdots .$$

.

Tavallisesti luvulla 1 ei tulkita olevan alkutekijähajotelmaa. Määritelmän 3 mukaisesti luku 1 voidaan kuitenkin esittää tulona $1 = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}$, kun $a_i = 0$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

2.2 Aritmeettinen derivaatta

Määritellään seuraavaksi aritmeettinen derivaatta ja osoitetaan, että se on hyvinmääritelty.

Määritelmä 4. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Aritmeettinen derivaatta $n' : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ määritellään kahden aksiooman avulla:

$$p' = 1, \text{ kun } p \in \mathbb{P} \text{ ja} \tag{A1}$$
$$(ab)' = a'b + ab', \text{ kun } a, b \in \mathbb{N}_0. \tag{A2}$$

Määritelmän jälkimmäinen aksiooma A2 tunnetaan tulon derivoimissääntönä ja sitä kutsutaan myös Leibnizin säännöksi.

Esimerkki 2. Lasketaan lukujen 22, 1 ja 0 aritmeettiset derivaatat Leibnizin säännön A2 avulla. Luvun 22 aritmeettinen derivaatta on

$$22' = (2 \cdot 11)' = 2' \cdot 11 + 2 \cdot 11' = 1 \cdot 11 + 2 \cdot 1 = 13.$$

Luvun 1 aritmeettinen derivaatta on

$$1' = 1' \cdot 1 + 1 \cdot 1' = 2 \cdot 1', \text{ jolloin } 1' = 2 \cdot 1'.$$

Tästä voidaan pätellä, että $1' = 0$. Lasketaan vielä luvun 0 aritmeettinen derivaatta:

$$0' = (0 \cdot 0)' = 0' \cdot 0 + 0 \cdot 0' = 0 \cdot (2 \cdot 0') = 0.$$

Näin ollen $1' = 0$ ja $0' = 0$. Seuraavaksi osoitetaan, että aritmeettinen derivaatta on hyvinmääritelty osoittamalla, että määritelmän 4 mukainen kuvaus on funktio.

Lause 1. *Aritmeettinen derivaatta* $n' : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *on funktio ja kun* $n \in \mathbb{N}$, *sen arvon voi laskea kaavalla*

$$n' = n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{p_i}, \tag{1}$$

missä $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{n_i}$ *on luvun* n *alkutekijähajotelma* [1, Theorem 1].

Todistus. Esimerkissä 2 on laskettu, että $0' = 0$. Havaitaan, että yhtälön (1) mukaan kaikilla alkuluvuilla p

$$p' = p\left(\frac{1}{p}\right) = 1$$

kuten aksiooman A1 mukaan pitääkin olla. Tarkastellaan vielä luonnollisten lukujen a ja b tuloa ab, kun $a = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}$ ja $b = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{b_i}$ ovat kyseisten lukujen alkutekijähajotelmat. Nyt yhtälön (1) mukaan

$$(ab)' = ab \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{a_i + b_i}{p_i}\right).$$

Summan osittelulain avulla yhtälön oikeaa puolta voidaan muokata muotoon

$$ab \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{p_i} + ab \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{p_i}.$$

Järjestämällä termit a ja b toisin saadaan

$$\left(a \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{p_i}\right) b + a \left(b \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{p_i}\right). \tag{2}$$

Havaitaan, että termit a' ja b' ovat yhtälön (1) mukaisessa muodossa ja siten myös lauseke (2) on Leibnizin säännön A2 muodossa $(ab)' = a'b + ab'$. Tämän perusteella aritmeettisen derivaatan kuvaus on funktio eli se on hyvinmääritelty. □

Havainnollistetaan seuraavaksi lausetta 1.

Esimerkki 3. Lasketaan lukujen 22, 50 ja 720 aritmeettiset derivaatat. Luvun 22 aritmeettinen derivaatta on

$$22' = (2 \cdot 11)' = 22 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{11}\right) = 13.$$

Päädytään samaan vastaukseen kuin esimerkissä 2. Luvun 50 aritmeettinen derivaatta on

$$50' = (2 \cdot 5^2)' = 50 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) = 45$$

ja luvun 720 aritmeettinen derivaatta on

$$720' = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5)' = 720 \cdot \left(\frac{4}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = 2064.$$

3 Ominaisuuksia

Tässä luvussa tarkastellaan aritmeettisen derivaatan yleisiä ominaisuuksia sekä laajennetaan aritmeettinen derivaatta ensin kaikille kokonaisluvuille ja lopuksi kaikille rationaaliluvuille. Lisäksi tarkastellaan aritmeettista osittaisderivaattaa ja mahdollisuuksia määritelmän laajentamisesta muille lukujoukoille.

3.1 Aritmeettinen derivaatta ja lineaarisuus

Määritelmä 5. *Lineaarikuvaus.* Olkoot $x, y \in A$ ja $a \in \mathbb{R}$. Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on lineaarikuvaus, kun se toteuttaa kaksi ehtoa:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ja
2. $f(ax) = af(x)$,

jotka voidaan yhdistää ehdoksi

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y). \tag{3}$$

Kun funktio toteuttaa lineaarikuvauksen ehdon, sen sanotaan olevan *lineaarinen.*

Yleisesti aritmeettinen derivaatta ei ole lineaarinen funktio eli $(m+n)' \neq m' + n'$. Esimerkiksi luku 22 voidaan esittää muodossa

$$22 = 11 + 11$$

ja

$$11' + 11' = 1 + 1 = 2 \neq 22' = 13,$$

milloin lineaarisuus ei ole voimassa.

On olemassa yksittäistapauksia, joissa lineaarisuus on voimassa. Esimerkiksi lukujen 4 ja 8 tapauksessa

$$(4 + 8)' = 12' = (2^2 \cdot 3)' = 12 \cdot \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) = 16 \text{ ja}$$

$$4' + 8' = (2^2)' + (2^3)' = 4 \cdot \frac{2}{2} + 8 \cdot \frac{3}{2} = 4 + 12 = 16.$$

Esitetään seuraavaksi, mitä lineaarisuuden voimassaolosta seuraa.

Lause 2. *Oletetaan, että $k, m, n \in \mathbb{N}_0$. Jos $(m+n)' = m' + n'$, silloin myös*

$$(km + kn)' = (km)' + (kn)'. \tag{4}$$

Todistus. Katso [1, Theorem 2]. Muutetaan yhtälön (4) vasen puoli muotoon

$$(km + kn)' = (k(m+n))'.$$

Yllä oleva lauseke kuvaa tulon derivaattaa, milloin

$$(k(m+n))' = k'(m+n) + k(m+n)' = k'm + k'n + k(m+n)'.$$

Koska lineaarisuus ja $(m+n)' = m' + n'$ ovat voimassa, niin

$$k'm + k'n + k(m+n)' = k'm + k'n + km' + kn'.$$

Nyt

$$(k'm + km') + (k'n + kn') = (km)' + (kn)'.$$

□

3.2 Kokonaisluvun aritmeettinen derivaatta

Tässä alaluvussa laajennetaan aritmeettisen derivaatan määritelmä koskemaan koko kokonaislukujen joukkoa $\mathbb{Z}$. Luvussa 2 aritmeettinen derivaatta on määritelty joukolle $\mathbb{N}_0$. Laajennetaan määritelmä koskemaan kaikkia kokonaislukuja.

Lause 3. *Jos negatiivisen kokonaisluvun $-x$ aritmeettisen derivaatan $(-x)'$ oletetaan olevan olemassa, niin tällöin aritmeettisen derivaatan kuvaus $m' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ on funktio, kun Leibnizin säännön A2 oletetaan olevan voimassa kaikille kokonaisluvuille. Tällöin*

$$(-x)' = -x'. \tag{5}$$

Todistus. Koska $(-1)^2 = 1$, Leibnizin säännön A2 avulla voidaan laskea

$$1' = (-1 \cdot (-1))' = (-1)' \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1)' = -2 \cdot (-1)'.$$

Esimerkissä 2 laskettiin, että $1' = 0$, minkä perusteella nyt $-2 \cdot (-1)' = 0$. Tästä seuraa, että $(-1)' = 0$. Tällöin, kun x on ei-negatiivinen kokonaisluku, niin

$$(-x)' = ((-1) \cdot x)' = 0 \cdot x' + (-1) \cdot x' = -x'.$$

Kun $x > 0$, aritmeettinen derivaatta kuvaa jokaisen negatiivisen kokonaisluvun $-x$ yksikäsitteisesti arvoon $-x'$. Lauseen 1 mukaan kuvaus x' on funktio, joten kaava (5) on hyvinmääritelty.

Tarkastetaan vielä, että Leibnizin säännön A2 olettaminen on hyvinmääritelty. Oletetaan, että $a, b > 0$. Nyt

$$((-a) \cdot b)' = -(a \cdot b)' = -(a' \cdot b + a \cdot b') = -a' \cdot b + (-a) \cdot b' = (-a)' \cdot b + (-a) \cdot b'. \tag{6}$$

□

Esimerkki 4. Lasketaan lukujen -5, -32 ja -150 aritmeettiset derivaatat. Luvun -5 aritmeettinen derivaatta on

$$(-5)' = -5' = -1,$$

luvun -32 aritmeettinen derivaatta on

$$(-32)' = -(32') = -((2^5)') = -\left(32 \cdot \frac{5}{2}\right) = -80$$

sekä luvun -150 aritmeettinen derivaatta on

$$(-150)' = -(150') = -((2{\cdot}3{\cdot}5^2)') = -\left(150{\cdot}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\right) = -(75+50+65) = -185.$$

.

3.3 Rationaaliluvun aritmeettinen derivaatta

Laajennetaan määritelmää seuraavaksi kokonaisluvuista rationaalilukujen joukkoon. Jokainen positiivinen rationaaliluku voidaan esittää yksikäsitteisesti alkutekijähajotelmana seuraavasti:

Rationaaliluvun $x = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ alkutekijähajotelma muodostetaan luonnollisten lukujen a ja b alkutekijähajotelmien avulla. Olkoot $a = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}$ ja $b = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{b_i}$ lukujen a ja b alkutekijähajotelmat. Rationaaliluvun x alkutekijähajotelma on

$$x = \frac{a}{b} = \frac{\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}}{\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{b_i}} = \prod_{i=1}^{\infty} (p_i^{a_i - b_i}) = \prod_{i=1}^{\infty} p^{c_i},$$

kun $c_i = a_i - b_i$.

Esimerkki 5. Tarkastellaan seuraavaksi rationaaliluvun $\frac{60}{231}$ alkutekijähajotelmaa. Rationaaliluvun $\frac{60}{231}$ osoittajan alkutekijähajotelma on $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ja nimittäjän $231 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$. Rationaaliluku voidaan ilmaista tekijöidensä avulla muodossa

$$\frac{60}{231} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5}{3^2 \cdot 7 \cdot 11}.$$

Kun rationaaliluvun alkutekijähajotelma esitetään osamäärän sijaan tulona, osottajan tekijöiden eksponentit ovat positiivisia ja nimittäjän tekijöiden eksponentit negatiivisia kokonaislukuja. Täten rationaaliluvun $\frac{60}{231}$ alkutekijähajotelma on

$$\frac{60}{231} = 2^2 \cdot 3 \cdot 3^{-2} \cdot 5 \cdot 7^{-1} \cdot 11^{-1} = 2^2 \cdot 3^{-1} \cdot 5 \cdot 7^{-1} \cdot 11^{-1}.$$

Laajennetaan aritmeettinen derivaatta kaikille rationaaliluvuille soveltamalla lauseita 1 ja 3.

Lause 4. *Jos mielivaltaisen rationaaliluvun x aritmeettinen derivaatta x' on olemassa ja Leibnizin säännön A2 oletetaan olevan voimassa rationaaliluvuille, niin aritmeettisen derivaatan kuvaus $q' : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ on funktio, joka toteuttaa ehdot:*

$$x' = x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{p_i}, \tag{7}$$

kun $x > 0$ ja $x = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{x_i}$ on luvun x alkutekijähajotelma sekä

$$(-x)' = -x' \tag{8}$$

kaikilla $x \in \mathbb{Q}$.

Todistus. Koska kaava (7) on kaavan (1) yleisempi muoto ja lauseen 1 todistus yleistyy tähän tilanteeseen, niin kaavan (7) ja Leibnizin säännön A2 voidaan todeta olevan voimassa positiivisille rationaaliluvuille. Lauseen 3 todistuksen yleistyksen avulla ehdon (8) sekä Leibnizin säännön negatiivisille rationaaliluvuille voidaan todeta olevan voimassa. Siten aritmeettisen derivaatan kuvaus $q' : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ on funktio. □

Esimerkki 6. Lasketaan esimerkkinä kahden rationaaliluvun, $\frac{5}{7}$ ja $\frac{4}{55}$, aritmeettiset derivaatat. Rationaaliuvun $\frac{5}{7}$ aritmeettinen derivaatta on lauseen 4 mukaan

$$\left(\frac{5}{7}\right)' = (5^1 \cdot 7^{-1}) = \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{-1}{7}\right) = \frac{5}{35} + \frac{-5}{49} = \frac{7-5}{49} = \frac{2}{49}$$

ja rationaaliluvun $\frac{4}{55}$ aritmeettinen derivaatta on

$$\left(\frac{4}{55}\right)' = (2^2 \cdot 5^{-1} \cdot 11^{-1}) = \frac{4}{55} \cdot \left(\frac{2}{2} + \frac{-1}{5} + \frac{-1}{11}\right) = \frac{156}{3025}.$$

Rationaalilukujen aritmeettista derivaattaa käsitellessä on syytä tarkastella myös osamäärän derivoimissääntöä.

Lause 5. *Olkoon $a, b \in \mathbb{Q}$ ja $b \neq 0$. Tällöin*

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}. \tag{9}$$

Todistus. Positiivisten rationaalilukujen a ja b alkutekijähajotelmat ovat $a = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}$ ja $b = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{b_i}$. Nyt

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \left(\frac{\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}}{\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{b_i}}\right)' = \left(\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i - b_i}\right)' = \left(\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i - b_i}\right) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i - b_i}{p_i}.$$

Yllä olevan yhtälön toisen ja kolmannen välivaiheen välillä on hyödynnetty potenssien laskusääntöjä. Viimeisin yhtäsuuruus seuraa lauseesta 4.

Hyödyntämällä laventamista $\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2}$ saadaan

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{p_i} - \left(\frac{ab}{b^2}\right) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{p_i} = \frac{1}{b} \cdot \left(a \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{p_i}\right) - \frac{a}{b^2} \cdot \left(b \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{p_i}\right)$$

$$= \frac{a'}{b} - \frac{ab'}{b^2} = \frac{a'b - ab'}{b^2}.$$

Tämä tulos voidaan lopulta yleistää negatiivisille rationaaliluvuille yhtälön (8) mukaisesti.

□

Havainnollistetaan vielä lauseen 5 kaavan (9) käyttöä. Lasketaan esimerkin 6 rationaaliluvuille aritmeettiset derivaatat osamäärän derivoimissäännön avulla.

Esimerkki 7. Osamäärän derivointisääntöä käyttäen

$$\left(\frac{5}{7}\right)' = \frac{5' \cdot 7 - 5 \cdot 7'}{7^2} = \frac{1 \cdot 7 - 5 \cdot 1}{49} = \frac{2}{49}$$

ja

$$\left(\frac{4}{55}\right)' = \frac{4' \cdot 55 - 4 \cdot 55'}{55^2}.$$

Lasketaan lukujen 4 ja 55 derivaatat:

$$4' = 2' \cdot 2 + 2 \cdot 2' = 2 + 2 = 4$$

ja

$$55' = (5 \cdot 11)' = 55 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{11}\right) = 16.$$

Näin luvun $\frac{4}{55}$ derivaataksi saadaan

$$\frac{4 \cdot 55 - 4 \cdot 16}{3025} = \frac{156}{3025}$$

eli molemmille luvuille saadaan sama vastaus kuin esimerkissä 6.

3.4 Aritmeettinen osittaisderivaatta

Osittaisderivaatta on tärkeä osa differentiaalilaskentaa. Määritellään seuraavaksi aritmeettinen osittaisderivaatta.

Määritelmä 6. Olkoon $a = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}$ luvun $a \in \mathbb{N}$ alkutekijähajotelma. Luvun a *osittaisderivaatta* $\frac{\partial a}{\partial p_i}$ on tällöin

$$\frac{\partial a}{\partial p_i} = a \frac{a_i}{p_i}. \tag{10}$$

Lauseesta 1 seuraa suoraan, että $a' = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial a}{\partial p_i}$. Lisäksi on mahdollista määritellä korkeamman asteen osittaisderivaattoja sekä tutkia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. [4, Definition 31]

Lasketaan luvulle 15750 viisi osittaisderivaattaa yhtälön (10) avulla.

Esimerkki 8. Luvun $15750 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ osittaisderivaattoja ovat esimerkiksi

$$\frac{\partial(15750)}{\partial(2)} = 15750 \cdot \frac{1}{2} = 7875,$$
$$\frac{\partial(15750)}{\partial(3)} = 15750 \cdot \frac{2}{3} = 10500,$$
$$\frac{\partial(15750)}{\partial(5)} = 15750 \cdot \frac{3}{5} = 9450,$$
$$\frac{\partial(15750)}{\partial(7)} = 15750 \cdot \frac{1}{7} = 2250 \text{ ja}$$
$$\frac{\partial(15750)}{\partial(11)} = 15750 \cdot \frac{0}{11} = 0.$$

3.5 Määritelmän laajentaminen muille lukujoukoille

Aritmeettinen derivaatta on nyt määritelty kaikille rationaaliluvuille. Lisäksi on määritelty aritmeettinen osittaisderivaatta, joka laajentaa lukujen differentiaalilaskennan teoriaa. Määritelmää voidaan vielä laajentaa muun muassa logaritmeihin, potensseihin sekä joihinkin irrationaalilukuihin, mutta mainitut laajennukset jätetään tämän tutkielman ulkopuolelle. Aiheeseen voi tutustua esimerkiksi Ufnarovskin ja Åhlanderin artikkelissa [1].

4 Aritmeettiset differentiaaliyhtälöt

Differentiaalilaskennasta on luontaista edetä differentiaaliyhtälöihin ja integraalilaskentaan. Määritellään tässä luvussa aritmeettinen integraali ja sen jälkeen käsitellään aritmeettisia differentiaaliyhtälöitä sekä niiden sovelluskohteita. Integraaleja sekä differentiaaliyhtälöitä käsitellään tässä tutkielmassa vain pintapuolisesti.

4.1 Aritmeettinen integraali

Analyysissa integraalifunktio tunnetaan myös antiderivaattana. Tämän vuoksi on kiinnostavaa tutkia vastaavankaltaista yhteyttä myös aritmeettisen integraalin kautta. Määritellään seuraavaksi aritmeettinen integraali. Tämä alaluku perustuu Kovičin artikkeliin [4].

Määritelmä 7. Lukua a, joka toteuttaa yhtälön

$$a' = b,$$

kutsutaan luvun b *integraaliksi.* Luvun b kaikista integraaleista koostuvalle joukolle käytetään merkintää $I(b)$.

Yhdellä luvulla voi siis olla useampi eri integraali eli aritmeettinen integraali ei siten yleisesti ole funktio. Koska jokaisen alkuluvun aritmeettinen derivaatta on 1 aksiooman A1 mukaan, näin luvun 1 integraalien joukko on kaikkien alkulukujen joukko eli $I(1) = \mathbb{P}$, mikä vielä todistetaan myöhemmin lauseessa 8.

Esimerkki 9. Luvun 14 integraaleja ovat esimerkiksi 49 ja 33, sillä

$$49' = (7^2)' = 47 \cdot \frac{2}{7} = 14$$

ja

$$33' = (3 \cdot 11)' = 3' \cdot 11 + 3 \cdot 11' = 1 \cdot 11 + 3 \cdot 1 = 14.$$

Jokaiselle rationaaliluvulle on mahdollista laskea aritmeettinen derivaatta, kuten tutkielman edellisessä luvussa on osoitettu. On kuitenkin olemassa lukuja, joilla ei ole aritmeettista integraalia. Kovič on osoittanut, että esimerkiksi luvuilla 2, 3 ja 17 ei ole aritmeettista integraalia [4, Corollary 21].

4.2 Aritmeettisista differentiaaliyhtälöistä

Esitellään pintapuolisesti muutamia differentiaaliyhtälöitä, joita käsitellään luonnollisten lukujen joukossa. Differentiaalilaskentaan ja -yhtälöihin liittyy sovelluskohtia sekä otaksumia, joita ei vielä ole pystytty todistamaan. Tämä alaluku perustuu Ufnarovskin ja Åhlanderin artikkeliin [1].

4.2.1 Yhtälö $n' = n$

Todistetaan aluksi kaksi lemmaa, joiden avulla voidaan tarkastella differentiaaliyhtälöä $n' = n$. Merkintä $n^{(k)}$ tarkoittaa luvun n kertaluvun k derivaattaa.

Lemma 1. *Olkoon $p \in \mathbb{P}$ ja $m \in \mathbb{N}$. Jos $n = p^p \cdot m$, niin $n' = p^p(m + m')$ ja $\lim_{k\to\infty} n^{(k)} = \infty$.*

Todistus. Koska lauseen 1 mukaan $(p^p)' = p^p\left(\frac{p}{p}\right) = p^p$, jolloin aksiooman A2 mukaan $n' = (p^p)' \cdot m + p^p \cdot m' = p^p(m+m') > n$. Edelleen induktiolla voidaan osoittaa, että $n^{(k)} \geq n + k$. □

Tarkastellaan seuraavan lemman avulla tilannetta, jossa alkuluvun p eksponentti on lukua p pienempi.

Lemma 2. *Olkoon p^k suurin mahdollinen alkuluvun p potenssi, joka jakaa luvun $n \in \mathbb{N}$. Jos $0 < k < p$, niin p^{k-1} on suurin luvun p potenssi, joka jakaa luvun n'. Erityisesti jonon $n, n', n'', \ldots, n^{(k)}$ kaikki jäsenet ovat keskenään erisuuria.*

Todistus. Olkoon $n = p^k m$. Kun $syt(p, m) = 1$, luvun n aritmeettinen derivaatta on $n' = kp^{k-1}m + p^k m' = p^{k-1}(km + pm')$. Koska km ei ole jaollinen luvulla p, luku $(km + pm')$ ei myöskään ole jaollinen luvulla p. □

Tarkastellaan nyt differentiaaliyhtälöä $n' = n$ kahden edellisen lemman avulla.

Lause 6. *Yhtälön $n' = n$ ratkaisu on muotoa $n = p^p$, kun p on mikä tahansa alkuluku.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $n = p^p$. Lauseen 1 mukaan luvun n aritmeettinen derivaatta on $n' = (p^p)' = n \cdot \frac{p}{p} = n$. Oletetaan seuraavaksi, että $n' = n$ ja alkuluku p jakaa luvun n. Lemmassa 2 on osoitettu, että luku n on jaollinen joko luvulla p^p tai $n \neq n'$. Jälkimmäinen vaihtoehto on ristiriidassa lemman oletusten kanssa, jolloin luvun n on välttämätöntä olla jaollinen luvulla p^p. Luku n voidaan nyt ilmaista muodossa $n = p^p m$, jolloin sen aritmeettinen derivaatta on lemman 1 mukaan $n' = p^p m + p^p m'$. Kun oletukset yhdistetään,

$$n' = n \Leftrightarrow p^p m + p^p m' = p^p m \Leftrightarrow p^p m' = 0.$$

Tällöin $m' = 0$, joten $m = 1$. Eli $n = p^p$. □

Esitetään yhtälölle $n' = n$ kaksi ratkaisua käyttäen apuna edellistä lausetta 6.

Esimerkki 10. Luvut $2^2 = 4$ ja $3^3 = 27$ ovat pienimmät muotoa p^p olevat alkulukupotenssit. Luvun 4 derivaataksi lasketaan

$$4' = (2^2)' = 4 \cdot \frac{2}{2} = 4 \cdot 1 = 4$$

ja luvun 27 derivaataksi

$$27' = (3^3)' = 27 \cdot \frac{3}{3} = 27 \cdot 1 = 27.$$

Molemmat luvut toteuttavat yhtälön $n' = n$.

4.2.2 Yhtälö $n' = a$

Käsitellään differentiaaliyhtälöä edelleen luonnollisten lukujen joukossa. Aloitetaan ensin yhtälön yksinkertaisimmilla muodoilla $n' = 0$ ja $n' = 1$.

Lause 7. *Kun $n \in \mathbb{N}$ differentiaaliyhtälöllä $n' = 0$ on vain yksi ratkaisu $n = 1$.*

Todistus. Todistus seuraa suoraan lauseesta 1. □

Lause 8. *Differentiaaliyhtälön $n' = 1$ ratkaisut ovat alkulukuja.*

Todistus. Aksiooman A1 mukaan alkuluvun p aritmeettinen derivaatta on aina 1. Jos luku ei ole alkuluku, se on yhdistetty luku. Tällöin Leibnizin säännön A2 mukaan luvun derivaatta voidaan kirjoittaa kahden positiivisen kokonaisluvun summana, milloin se on suurempi kuin 1. □

Muilla differentiaaliyhtälöillä $n' = a$ on äärellinen määrä ratkaisuja. Ufnarovski ja Åhlander ovat todistaneet lauseen artikkelissaan [1, Corollary 3]. Muotoa $n' = a$ oleviin differentiaaliyhtälöihin liittyy useampi otaksuma, joita ei vielä ole pystytty todistamaan. Esitetään niistä Goldbachin konjektuuri.

Goldbachin konjektuuri. Jokainen parillinen luku, joka on suurempi kuin 3, on kahden alkuluvun summa.

Goldbachin konjektuuri voidaan muotoilla uudelleen aritmeettisen differentiaaliyhtälön avulla. Konjektuuri on yhtäpitävä seuraavan otaksuman kanssa. Olkoon $b \in \mathbb{N}$ ja $b > 1$. Tällöin differentiaaliyhtälöllä $n' = 2b$ on aina olemassa ratkaisu, joka on muotoa $n = pq$, kun $p, q \in \mathbb{P}$.

4.2.3 Yhtälö $n'' = 1$

Toisen asteen differentiaaliyhtälöllä voidaan käsitellä lisää tunnettuja otaksumia.

Differentiaaliyhtälön $n'' = 1$ ratkaisujen määrä. Differentiaaliyhtälöllä $n'' = 1$ on äärettömän monta ratkaisua luonnollisten lukujen joukossa. [1, Conjecture 9]

Alkulukukaksoskonjektuuri. On olemassa ääretön määrä alkulukupareja p, $p + 2$.

Alkulukukaksoskonjektuurin kanssa ekvivalentti väite on, että differentiaaliyhtälöllä $n'' = 1$ on olemassa ääretön määrä ratkaisuja, jotka ovat muotoa $n = 2p$, kun $p \in \mathbb{P}$.

5 Sovelluksia

Aritmeettista derivaattaa voidaan soveltaa erityisesti lukuteorian alalla, sillä teoria ja sen sovellukset perustuvat pohjimmiltaan alkulukuihin, tekijöihin ja lukujoukkoihin. Esimerkiksi luvun n derivaatan ollessa 1 tiedetään, että kyseessä on alkuluku lauseen 8 mukaan. Aritmeettista derivaattaa voidaan käyttää apuna alkulukujen tunnistamisessa ja sen avulla voidaan ymmärtää paremmin alkulukujen ainutlaatuista käyttäytymistä.

Alkulukuja ja niiden ainutlaatuisia ominaisuuksia pohditaan erityisesti alaluvun 4.2 otaksumissa, joita ei ole vielä pystytty todistamaan. Aihepiirinä aritmeettinen derivaatta on vielä suhteellisen uusi ja tuore, joten avoimia tutkimuskysymyksiä riittää vielä pitkään ja löytynee ajan mittaa lisää.

Luvun 4.2 otaksumien lisäksi Ufnarovski ja Åhlander esittelevät artikkelissaan [1] otaksumia aritmeettisista derivaatoista eri lukujoukkojen välillä. Vielä ei tiedetä, onko olemassa yleistettyä derivaattaa x', jonka kuvaus on bijektio luonnollisten lukujen joukossa. Kirjoittajat otaksuvat, että vastaus kysymykseen olisi kielteinen.

Aritmeettisen derivaattan avulla voidaan myös tutkia tarkemmin erilaisia lukujoukkoja sekä niiden sisäistä rakennetta. Esimerkiksi Rosama on Pro gradu - tutkielmassaan [6] tutkinut aritmeettisen derivaatan avulla Sophie Germanin alkulukujen ja Cunninghamin ketjujen ominaisuuksia.

6 Yhteenveto

Tutkielmassa on käsitelty aritmeettista derivaattaa, aritmeettista integraalia sekä hieman aritmeettisia differentiaaliyhtälöitä. Luvussa 2 määriteltiin aritmeettinen derivaatta. Määritelmä perustuu muutamaan yksinkertaiseen aksioomaan, joiden avulla teoriaa pystytään rakentamaan yllättävän pitkälle. Nämä kaksi aksioomaa ovat: A1 alkuluvun derivaatta $p' = 1$ ja A2 luonnollisille luvuille a ja b
$(ab)' = a'b + ab'$.

Luvussa 3 tarkasteltiin aritmeettisen derivaatan yleisiä ominaisuuksia sekä laajennettiin määritelmää luonnollisten lukujen joukosta ensin kaikkiin kokonaislukuihin ja lopulta rationaalilukuihin. Määritelmää on mahdollista laajentaa vielä muihinkin lukujoukkoihin. Luvun lopussa määriteltiin myös aritmeettinen osittaisderivaatta.

Monet aritmeettisen derivaatan sovelluskohteista ja avoimista tutkimuskysymyksistä liittyvät differentiaalilaskentaan, jota käsiteltiin luvussa 4. Aluksi määritettiin aritmeettinen integraali, jonka jälkeen esiteltiin muutama aritmeettinen differentiaaliyhtälö sekä niihin liittyviä otaksumia. Aritmeettinen derivaatta on erityisesti lukuteorian alalla mielenkiintoinen työkalu, joka tarjoaa uudenlaisen tarkastelunäkökulman muun muassa lukuihin, tekijöihin ja lukujoukkoihin.

Viitteet

[1] V. Ufnarovski, B. Åhlander: *How to Differentiate a Number*, Journal of Integer Sequences, Vol. 6 (2003), artikkeli 03.3.4 luettu 9.10.2024

[2] E. Barbeau: *Remarks on an Arithmetic Derivative*, Canadian Mathematical Bulletin, Vol. 4.2 (1961): 117-122 https://doi.org/10.4153/CMB-1961-013-0 luettu 9.10.2024

[3] P. Haukkanen, K. Merikoski, T. Tossavainen: *The arithmetic derivative and Leibniz-additive functions*, (2018). https://doi.org/10.48550/arxiv.1803.06849, luettu 9.10.2024

[4] J. Kovič: *The Arithmetic Derivative and Antiderivative*, Journal of Integer Sequences, Vol. 15 (2012), artikkeli 12.3.8 luettu 16.11.2024

[5] O. Keinänen: *Aritmeettinen derivaatta*, Pro gradu -tutkielma, Tampereen yliopisto (2024). https://urn.fi/URN:NBN:fi:tuni-202405175976 luettu 9.10.2024

[6] V. Rosama: *Aritmeettinen derivaatta*, Pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto (2013). https://ethesis.helsinki.fi/repository/handle/10138.1/3368 luettu 9.10.2024