



**TURUN  
YLIOPISTO**

GEOGEBRA-OHJELMISTOON LIITTYVISTÄ VIRHEISTÄ  
YLIOPPILASKIRJOITUSTEN GEOMETRIAN TEHTÄVISSÄ

Sini Mäenpää

Pro gradu -tutkielma  
Tammikuu 2025

Tarkastajat:  
Prof. Vesa Halava  
Dos. Kalle Parvinen

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatujaarjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

SINI MÄENPÄÄ: Geogebra-ohjelmistoon liittyvistä virheistä ylioppilaskirjoitusten geometrian tehtävissä

Pro gradu -tutkielma, 35 s.

Matematiikka

Tammikuu 2025

---

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan, millaisia virheitä Geogebra-ohjelmistolla ylioppilaskokeiden geometrian tehtävissä yleisimmin tehdään. Geometria on keskeinen osa matematiikan opetusta, ja sen hallinta edistää opiskelijoiden matemaattista ajattelua sekä loogista päättelykykyä. Teknologian rooli matematiikan opetuksessa on kasvanut merkittävästi, erityisesti sähköisten ylioppilaskokeiden myötä, ja Geogebra on yksi laajasti käytetyistä välineistä. Kuitenkin ohjelmistojen käyttö voi johtaa virheisiin, erityisesti silloin, kun opiskelijat eivät täysin ymmärrä ohjelmiston toimintaa tai matematiikan käsitteitä.

Tutkimus perustuu kolmeen geometrian tehtävään sähköisistä ylioppilaskokeista vuosilta 2020–2021, ja analysoi niitä vastauksia, joissa Geogebra on ollut osa ratkaisuprosessia. Analysoitava aineisto on saatu Ylioppilastutkintolautakunnan tutkimuskäyttöön luovuttamasta korpusaineistosta, joka sisältää 100 satunnaisesti valittua anonyymia vastausta kustakin tarkasteltavasta tehtävästä. Tutkimuksen tavoitteena on tunnistaa yleisimmät virheet ja arvioida niiden taustalla olevia syitä.

Yleisimmät virheluokat tutkimuksessa olivat virheellisesti piirretty kuvio, puutteellinen dokumentointi ja selitykset, geometrinen virhe, virheellinen laskentaprosessi sekä Geogebra-ohjelmistosta saadun tuloksen soveltaminen. Tyypillisiä virheitä olivat esimerkiksi kuvakaappaukset ilman perusteluja, selityksiä tai komentoja sekä virheelliset käsitykset siitä, minkä muotoisista osista kuvio koostuu. Lisäksi yleisiä virheitä olivat vastausten antaminen epätarkkoina arvioina ja väärin mitatut kulmat.

Asiasanat: Geogebra, geometria, virhekäsitykset, virhe, matematiikan ylioppilaskoe



# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Geometria lukion matematiikassa</b>	<b>3</b>
2.1	Geometria lukion matematiikan opetussuunnitelmassa . . . . .	3
2.2	Sähköiset ylioppilaskokeet . . . . .	4
2.3	Geogebra-ohjelmisto . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Virheet ja virhekäsitykset</b>	<b>7</b>
3.1	Virheen ja virhekäsityksen muodostuminen . . . . .	7
3.2	Virhekäsitykset matematiikassa . . . . .	7
3.3	Virheet ja virhekäsitykset dynaamisella matematiikkaohjelmistolla . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Tutkimuksen toteutus</b>	<b>11</b>
4.1	Tutkimusaineisto ja tutkimuskysymykset . . . . .	11
4.2	Analyysiprosessin kuvaus . . . . .	11
4.3	Tehtävänannot ja hyvän vastauksen piirteet . . . . .	13
4.3.1	Kevät 2020, lyhyt oppimäärä, tehtävä 7. Suklaarasia . . . . .	13
4.3.2	Syksy 2020, pitkä oppimäärä, tehtävä 5. Kolmiot . . . . .	14
4.3.3	Syksy 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 7. Avaruuskappale . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Tulokset</b>	<b>17</b>
5.1	Kevät 2020, lyhyt oppimäärä, tehtävä 7. Suklaarasia . . . . .	17
5.2	Syksy 2020, pitkä oppimäärä, tehtävä 5. Kolmiot . . . . .	19
5.3	Syksy, 2020, pitkä oppimäärä, tehtävä 7. Avaruuskappale . . . . .	21
5.4	Yhteenveto . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Tulosten tarkastelua ja luotettavuus</b>	<b>29</b>
6.1	Luotettavuus . . . . .	29
6.2	Tulosten tarkastelua . . . . .	29
6.3	Johtopäätökset . . . . .	32
<b>7</b>	<b>Viitteet</b>	<b>33</b>



# 1 Johdanto

Geometria on olennainen osa matematiikan opetusta, ja sen hallinta tarjoaa opiskelijoille perustan monipuolisten matemaattisten taitojen kehittämiseen. Geometria kehittää opiskelijoiden kykyä tehdä yleistyksiä, perusteltuja johtopäätöksiä sekä tarkentaa käsitteitä, mikä edistää myös muun matematiikan oppimista ja hallintaa. (Joutsenlahti et al, 2018.) Suomen lukiokoulutuksessa geometriaa käsitellään sekä pitkän että lyhyen matematiikan oppimäärissä, ja sen opettamista ohjaavat valtakunnalliset opetussuunnitelman perusteet. Geometrialla on keskeinen rooli, sillä se ei ainoastaan edistä matemaattista ajattelua, vaan myös kehittää opiskelijoiden loogista päättelykykyä ja kykyä soveltaa matematiikkaa käytännön ongelmissa (Joutsenlahti et al, 2018).

Viime vuosikymmenen aikana teknologian rooli matematiikan opetuksessa on kasvanut merkittävästi, erityisesti sähköisten ylioppilaskokeiden käyttöönoton myötä, mikä on lisännyt digitaalisten välineiden merkitystä opetuksessa (Ylioppilastutkintolautakunta). Yksi näistä välineistä on Geogebra, laajasti käytetty matematiikan ohjelmisto eri koulutusasteilla. Geogebra tarjoaa lukion matematiikan opetuksessa erityisesti geometrian oppimisen tukena monipuolisia mahdollisuuksia (Geogebra, n.d.). Dynaamiset matemaattiset ohjelmistot mahdollistavat opiskelijoille matemaattisten konseptien tutkimisen ja syvällisemmän ymmärtämisen. Kuitenkin ohjelmistojen käyttö voi johtaa virheisiin ja virhekäsityksiin, erityisesti silloin, kun opiskelijat eivät ymmärrä ohjelmistojen toimintaa tai matematiikan käsitteitä riittävän hyvin (Brown et al., 2016).

Matematiikan luonne on sellainen, että säännöt ja toimintatavat voivat vaihdella suuresti eri konseptien ja laskutoimitusten välillä, mikä voi helposti johtaa virhekäsityksiin. Tämä ilmenee erityisesti silloin, kun opiskelijat turvautuvat mekaaniseen oppimiseen ja ulkoa opeteltujen sääntöjen soveltamiseen ilman syvempää käsitteellistä ymmärrystä. (Ojose, 2015.) Sama pätee myös dynaamisten matemaattikkaohjelmistojen käyttöön, kuten Geogebra, jossa ohjelmiston väärinkäyttö tai sen toimintaperiaatteiden ymmärtämättömyys voi johtaa virheisiin. Jos opiskelijat eivät täysin ymmärrä ohjelmiston soveltamista matematiikan käsitteisiin, voivat ohjelmistot jopa vahvistaa väärinymmärryksiä ja virhekäsityksiä. Tällöin on usein vaikea erottaa, johtuvatko virheet opiskelijan matemaattisista väärinymmärryksistä vai ohjelmiston virheellisestä käytöstä. Virheiden syyt ohjelmistojen käytössä voidaan usein jakaa kahteen pääkategoriaan: matematiikan käsitteiden väärinymmärryksiin ja teknologian virheelliseen käyttöön. (Brown et al., 2016.)

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan, millaisia virheitä Geogebra-ohjelmistolla ylioppilaskokeiden geometrian tehtävissä yleisimmin tehdään. Tutkimuksen päämääränä on tunnistaa yleisimmät virheet ja arvioida niiden taustalla olevia syitä. Tutkimusaineisto perustuu kolmeen geometrian tehtävään matematiikan sähköisistä ylioppilaskokeista vuosilta 2020–2021. Näistä yksi tehtävä on peräisin lyhyen oppimäärän kokeesta ja kaksi pitkän oppimäärän kokeesta. Kokeiden sisällöt pohjautuvat vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman perusteisiin. Analysoitava aineisto on saatu Ylioppilastutkintolautakunnan tutkimuskäyttöön luovuttamasta korpusaineistosta, joka sisältää 100 satunnaisesti valittua anonyymia vastausta kustakin tarkasteltavasta tehtävästä. Tässä tutkimuksessa tarkastellaan ainoastaan niitä vastauksia, joissa

tehtävä on ratkaistu kokonaan Geogebralla tai Geogebra on ollut osa ratkaisuprosessia.

Tutkielman toisessa luvussa tarkastellaan geometriaa lukion opetussuunnitelmasa, sähköisiä ylioppilaskokeita sekä Geogebra-ohjelmistoa. Luvussa kolme käsitellään virheiden ja virhekäsitysten muodostumista, virhekäsityksiä matematiikassa sekä virheitä ja virhekäsityksiä dynaamisissa matematiikkaohjelmistoissa. Tutkimuksen tehtäväkohtaiset tulokset ja yhteenveto esitellään luvussa neljä. Tutkielman lopuksi arvioidaan tutkimuksen luotettavuutta (luku 5) sekä pohditaan tutkimuksen tuloksia ja niiden merkitystä.

## 2 Geometria lukion matematiikassa

### 2.1 Geometria lukion matematiikan opetussuunnitelmassa

Tässä kappaleessa tarkastellaan geometrian opetuksen sisältöjä ja tavoitteita lukion opetussuunnitelmissa. Pääasiallisena lähteenä on vuoden 2015 opetussuunnitelman perusteet (Opetushallitus, 2015), ellei toisin mainita, sillä tämän tutkimuksen aineisto koostuu vuosien 2019–2021 ylioppilaskokeista. Lopuksi tarkastellaan lyhyesti uuden opetussuunnitelman tuomia muutoksia.

Matematiikan opetuksen keskeisenä tavoitteena on tarjota opiskelijoille välineet matemaattisten käsitteiden ymmärtämiseen ja soveltamiseen. Oppiaineen tehtävänä on muun muassa perehdyttää opiskelijat matematiikan peruskäsitteisiin, perusideoihin ja rakenteisiin sekä opettaa heitä hyödyntämään matematiikkaa ilmaisuvälineenä. Lisäksi oppiaineen yleisissä tavoitteissa korostetaan ilmiöiden mallintamista ja käytännön ongelmien ratkaisemista matemaattisin keinoin. Matematiikan opetuksen tavoitteissa ja tehtävissä korostuu myös teknologian rooli matematiikan oppimisessa. Opetuksen tehtävänä on harjaannuttaa opiskelija käyttämään tarkoituksenmukaisia tietokoneohjelmistoja. Samalla he oppivat kriittisesti arvioimaan ohjelmistojen tuottamia tuloksia. Lukiossa on mahdollisuus opiskella matematiikkaa joko lyhyen tai pitkän oppimäärän mukaan. Molemmilla oppimäärillä on omat sisältönsä ja oppimistavoitteensa.

Pitkän matematiikan oppimäärän tavoitteena on totuttaa opiskelija pitkäjänteiseen työskentelyyn, opettaa hänelle käytännön ongelmien mallintamista ja ratkaisemista sekä otaksujen tekemisen ja niiden yleistettävyyden arvioimisen taitoja. Syksystä 2016 käyttöön otetussa opetussuunnitelmassa geometriaa käsitellään kursilla MAA3 Geometria. Kurssin keskeisiin sisältöihin kuuluvat kuvioden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus, sini- ja kosinilause, ympyrän geometria sekä pituuksien, kulmien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen. "Geometria-kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- Harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa sekä muotoa koskevaa tietoa sekä kaksi- että kolmiulotteisissa tilanteissa
- Oppii muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrasta tietoa käsitteleviä lauseita
- Oppii ratkaisemaan geometrisia ongelmia hyödyntämällä kuvioden ja kappaleiden ominaisuuksia, kuten yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan lausetta sekä trigonometrisia periaatteita suora- ja vinokulmaisissa kolmioissa
- kykenee hyödyntämään teknisiä apuvälineitä kuvioden ja kappaleiden tutkimisessa ja geometriaan liittyvien sovellusongelmien ratkaisemisessa."

Kurssin kokonaisuus edistää opiskelijoiden matemaattista ajattelua ja valmiuksia soveltaa geometriaa käytännön tilanteissa.

Lyhyen matematiikan oppimäärän keskeisenä tavoitteena on tarjota opiskelijoille valmiudet hankkia, käsitellä ja ymmärtää matemaattista tietoa sekä soveltaa matematiikkaa erilaisissa elämän tilanteissa. Opetus pyrkii tuomaan opiskelijalle esiin matematiikan merkitystä yhteiskunnan kehityksessä ja sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä ja eri tieteissä. Oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija oppii hyödyntämään matematiikkaa jokapäiväisessä elämässään, saa myönteisiä oppimiskokemuksia ja vahvistaa luottamustaan omiin kykyihinsä. Geometriaa käsitellään lukion opetussuunnitelman perusteissa 2015 kurssilla MAB3 Geometria. Kurssin keskeiset sisällöt sisältävät geometriaan liittyvien käsitteiden ja menetelmien hallinnan. Se sisältää yhdenmuotoisuuden, suorakulmaisen kolmion trigonometrian ja Pythagoraan lauseen ja sen käänteislauseen. Lisäksi kurssilla käsitellään kuvioiden ja kappaleiden pinta-alojen sekä tilavuuksien määrittämistä sekä geometrian menetelmien käyttöä koordinaatistossa. "Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- Oppii tekemään havaintoja ja päätelmiä kuvioiden ja kappaleiden geometrisista ominaisuuksista
- Parantaa kykyään piirtää tasokuvioita ja kolmiulotteisia kappaleita
- Osaa käyttää geometriaa käytännön ongelmien ratkaisemisessa
- Oppii käyttämään teknisiä apuvälineitä kappaleiden ja kuvioiden tutkimisessa ja geometriaan liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa."

Lukion opetussuunnitelman perusteet uudistettiin vuonna 2019 ja sen linjaukset otettiin käyttöön 2021 syksyllä. Uudistuksen myötä kurssit muuttivat muotoaan lukio-opintopisteitä kerryttäväksi moduuleiksi. Nykyisessä opetussuunnitelmassa geometriaan liittyvät sisällöt käsitellään moduuleissa MAA3 Geometria ja MAB3 Geometria. Moduulien keskeiset sisällöt ja tavoitteet ovat pääosin pysyneet samoina kuin aikaisemmassa opetussuunnitelmassa. Eroavaisuuksia opetussuunnitelmien 2015 ja 2029 välillä on kuitenkin havaittavissa muun muassa matematiikan ohjelmistojen käytön osalta. Vuoden 2015 opetussuunnitelmassa painotetaan ohjelmistoja enemmänkin apuvälineenä, kun taas vuoden 2021 opetussuunnitelmassa ohjelmistojen, kuten Geogebrian, käyttö on integroitu selkeämmin osaksi oppimisprosessia. (Opetushallitus, 2019; Opetushallitus 2015).

## 2.2 Sähköiset ylioppilaskokeet

Seuraavaksi käsitellään matematiikan ylioppilaskokeen rakennetta, arviointiperiaatteita ja syksyllä 2024 voimaan tulleita muutoksia. Kappaleen tieto perustuu Ylioppilastutkintolautakunnan verkkosivustoon.

Matematiikan ylioppilaskokeen laatii ylioppilastutkintolautakunta, ja se pohjautuu sekä matematiikan oppimäärän pakollisiin että valtakunnallisiin valinnaisiin opintoihin. Koetehtävät laaditaan Opetushallituksen hyväksymien opetussuunnitelman perusteiden mukaisesti. Kokeen tarkoituksena on arvioida, onko kokelas saavuttanut ne tiedot ja taidot, joita opetussuunnitelmassa edellytetään.

Sekä pitkän että lyhyen matematiikan kokeessa on yhteensä 13 tehtävää, joista kokelas vastaa kymmeneen. Kokeen tehtävät on jaettu kolmeen osaan: A, B1 ja B2.

A-osa sisältää neljä pakollista tehtävää, jotka tulee palauttaa ennen B-osan aloittamista. On kuitenkin mahdollista tarkastella B-osan tehtäviä jo A-osan tekemisen aikana. A-osan tehtävien suorittamiseen on käytössä vain rajoitetut laskinohjelmat (KCalc, SpeedCrunch ja GNOME-laskin), ja tämän osan palautuksen jälkeen kokelas ei voi enää palata siihen. Palautukselle ei ole asetettu aikarajaa, mutta vasta A-osan tehtyään kokelas saa käyttöönsä kaikki koejärjestelmän tarjoamat ohjelmistot.

B-osassa on käytössä laajempi valikoima teknisiä työkaluja, kuten LibreOffice Calc, GeoGebra ja TI-Nspire CAS, jotka tukevat erityisesti laskennallisia ja graafisia tehtäviä. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen, ja B2-osassa neljä tehtävää, joista niin ikään vastataan kolmeen. Kaikki kokeen tehtävät arvioidaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120. Digitaalisen koejärjestelmän käyttöön vaadittavat välineet on määritelty Ylioppilastutkintolautakunnan yleisissä määräyksissä ja ohjeissa.

Koesuoritukset tarkastaa ensin lukiokoulutusta järjestävän oppilaitoksen matematiikan opettaja, ja lopullinen arviointi tapahtuu Ylioppilastutkintolautakunnassa (L 502/2019, 18 §). Arvioinnissa kiinnitetään huomiota, kuinka hyvin kokelas on perustellut ratkaisunsa; tarvittavat laskut tai muut perustelut sekä lopputulos on oltava, ellei tehtävänannossa ole toisin mainittu. Vastauksen tulee olla riittävän selkeä, jotta opettaja ja sensorit ymmärtävät sen sisällön. Ohjelmia voi käyttää tehtävissä niiden luonteenomaisella tavalla, eikä niiden tuottamaa tulosta tarvitse kirjoittaa uudelleen, mikäli se on ymmärrettävää. Jos kokelas ylittää osakohtaisen enimmäismäärän vastauksia, lasketaan pisteet sallitusta määrästä, joiden yhteispistemäärä on pienin. Opettajan on merkittävät virheelliset kohdat ja perusteltava mahdolliset pistemäärän vähennykset.

Syksyn 2024 tutkinnosta alkaen matematiikan ylioppilaskokeiden rakenteita muutetaan. Ylioppilastutkintolautakunta kasvattaa A-osan painoarvoa, ja siihen lisätään valinnaisia tehtäviä, mikä mahdollistaa joustavamman osaamisen näyttämisen. Pitkässä matematiikassa B-osa jaetaan edelleen B1- ja B2 osaan. Lyhyessä matematiikassa on vain yksi B-osa, jossa on 12 tai 18 pisteen tehtäviä. 18 pisteen tehtävät ovat laajempia soveltamistaitoja mittaavia kokonaisuuksia.

## 2.3 Geogebra-ohjelmisto

Seuraavaksi keskitytään Geogebra-ohjelmistoon, tarkastellen sen syntyhistoriaa, keskeisiä ominaisuuksia ja tarjoamia mahdollisuuksia geometrian taitojen syventämiseen.

Geogebra on monipuolinen matematiikan opetukseen suunniteltu ohjelmisto, joka soveltuu kaikille koulutusasteille. Se tarjoaa työkaluja muun muassa geometriaan, algebraan, funktioiden käsittelyyn, tilastotieteeseen, taulukkolaskentaan sekä differentiaali- ja integraalilaskentaan. (Geogebra, n.d.) Ohjelmisto yhdistää dynaamisesti geometrian ja algebran, mistä sen nimikin tulee, ja sen avulla käyttäjät voivat reaaliajassa muokata piirroksia esimerkiksi liukusäätimien, taulukon arvojen tai lausekkeiden avulla, sekä yksinkertaisesti tarttumalla ja siirtämällä kuvioita piirtoalueella. (Korhonen et al, 2013.)

Geogebbran kehitys alkoi Itävallassa 2000-luvun alussa, kun Markus Hohenwar-

ter loi sen maisterin opinnäytetyönään. Ohjelmiston avoin koodipohja houkutteli nopeasti samanhenkisiä kehittäjiä mukaan, ja Hohenwarterin väitöskirjan valmistuttua vuonna 2006 Geogebra laajeni maailmanlaajuiseksi yhteisprojektiksi. (Korhonen et al, 2013.) Nykyään Geogebrian laaja käyttäjäyhteisö, johon kuuluu miljoonia käyttäjiä eri puolilta maailmaa, on nostanut sen johtavaksi dynaamisen matematiikan ohjelmistoksi, jota käytetään laajasti STEM-aineiden (luonnontieteet, teknologia, insinööritieteet ja matematiikka) opetuksessa. (Geogebra, n.d.)

Java-pohjaisena Geogebra on käyttöjärjestelmästä riippumaton, ja ohjelmisto kehittyi jatkuvasti vastaten käyttäjien tarpeisiin. Lisäksi sen ilmainen saatavuus on tehnyt siitä erittäin suosittua ja saavutettavan oppimisvälineen. Geogebrian käyttöliittymä on joustava ja mukautettavissa eri ikä- ja taitotasolle, ja Näkymä-valikosta löytyy monia valmiita vaihtoehtoja eri käyttäjäryhmille. Käyttöliittymä koostuu ikkunoista, valikoista, työvälineistä ja syöttökentästä, mutta ohjelman ydintoiminnot ovat piirtoalue ja algebraikkuna. Piirtoalueella käyttäjät voivat piirtää ja muokata graafisia objekteja joko työvälineillä tai antamalla komentoja syöttökentän kautta. (Korhonen et al, 2013.)

Geogebrian tunnusomainen ominaisuus on se, että sama objekti näkyy piirtoalueella, algebraikkunassa ja taulukossa eri esitysmuodoissa. Objekti voi olla näkyvissä molemmilla piirtoalueilla, vain toisella tai kokonaan piilossa. Kun objektin lauseketta muokataan algebraikkunassa, sen graafinen esitys päivittyy välittömästi piirtoalueella, ja samoin piirtoalueella tehtävät muutokset heijastuvat algebraikkunan esitykseen. Kyseessä ei siis ole pelkästään dynaaminen geometriaohjelma, vaan monipuolinen dynaaminen matematiikkaohjelma (engl. DMS dynamic mathematics software). (Korhonen et al, 2013.) Ylioppilaskirjoitusten siirtyminen sähköiseen muotoon Suomessa on osaltaan lisännyt tarpeen hyödyntää teknologiaa matematiikan opetuksessa. Geogebra on yksi niistä ohjelmista, joita Ylioppilastutkintolautakunta on hyväksynyt matematiikan kokeissa käytettäväksi (Ylioppilastutkintolautakunta). Tämän seurauksena Geogebra on nykyisin laajalti käytössä erityisesti lukioissa. Geometria on yksi lukion oppiaineista, jossa Geogebrian käyttö on merkittävää.

Geogebra tarjoaa monipuolisia mahdollisuuksia syventää ja laajentaa geometrisia taitoja. Oppilaat voivat piirtää erilaisia graafisia objekteja, kuten suoria ja käyriä, ja tutkia niiden ominaisuuksia. Esimerkiksi he voivat tarkastella, miten suoran kulmakerroin vaikuttaa suoran sijaintiin koordinaatistossa. Ohjelma tukee myös kolmiulotteisten kuvioiden tutkimista, kuten kartioiden, lieriöiden ja pyramidien. Tämä mahdollistaa ajattelun siirtämisen kaksiulotteisesta maailmasta kolmiulotteiseen ympäristöön, mikä kehittää visuaalista ajattelua ja avaruudellista hahmottamista.

### 3 Virheet ja virhekäsitykset

Tässä osiossa käsitellään virheiden ja virhekäsitysten muodostumista sekä niiden tunnistamista, ja selvennetään näiden kahden käsitteen välistä eroa. Käydään myös läpi opiskelijoiden yleisiä virhekäsityksiä matematiikassa sekä keinoja niiden ennaltaehkäisemiseksi, ja tarkastellaan, millaisia virheitä ja virhekäsityksiä voi syntyä dynaamisen matematiikan ohjelmiston, kuten Geogebbran, käytön myötä.

#### 3.1 Virheen ja virhekäsityksen muodostuminen

*Virhekäsitykset* (eng. misconception) ovat väärinkäsityksiä ja virheellisiä tulkintoja, jotka pohjautuvat virheellisiin merkityksiin ja opiskelijoiden ”naiiveihin” teorioihin, jotka estävät järkevää päättelyä (Ojose, 2015). Virhekäsityksiä syntyy erityisesti silloin, kun opiskelijat eivät ymmärrä menetelmien taustalla olevia käsitteitä tai eivät osaa yhdistää käsitteitä niiden käytännön sovelluksiin (Dingman et al. 2019). Tällaisia väärinkäsityksiä voivat aiheuttaa monet tekijät, kuten opettajan epätarkasti välittämät käsitteet, opiskelijoiden omat ennakkokäsitykset ja joskus myös epäonnistuneet opetustavat (Riswandi, Nursalam ja Baharuddin, 2022). Koska virhekäsitykset ovat usein syvällä ajattelutavassa, niiden oikaiseminen on haastavampaa kuin pelkkien yksittäisten virheiden korjaaminen (Ryan & Williams, 2007).

*Virheet* (engl. errors) ovat usein siis pinnallisempia ja johtuvat esimerkiksi systemaattisista virheistä laskuissa tai siitä, että opiskelija ei osaa ratkaista tehtävää oikealla tavalla. Virheiden korjaamiseksi riittää usein, että opettaja osoittaa virheen, jolloin opiskelija itse havaitsee sen sijainnin ja oppii siitä. Virheitä esiintyy kaikissa ikäryhmissä ja ne johtuvat tyypillisesti esimerkiksi huolimattomuudesta, väärin muistetusta kaavasta tai hätiköidyistä johtopäätöksistä. (Ryan & Williams, 2007.)

Opiskelijoiden tekemät virheet voidaan jakaa kahteen päätyyppiin: käsitteellisiin virheisiin ja suoritusvirheisiin (Ojose, 2015). Käsitteelliset virheet johtuvat siitä, että opiskelija ei ymmärrä käsitteiden merkityksiä tai tulkitsee ne väärin (Kadarisma, Fitriani ja Amelia, 2020). Tämä voi näkyä esimerkiksi niin, että opiskelija ei hahmota ongelman eri osien välisiä yhteyksiä tai ymmärrä ratkaisemiseen tarvittavia periaatteita. Lisäksi aiemmat kokemukset voivat johtaa satunnaisiin virheisiin, joissa opiskelija jättää tiettyjä ongelman ehtoja huomiotta. Suoritusvirheet taas tapahtuvat silloin, kun opiskelija tietää, mitä pitäisi tehdä, mutta jokin vaihe jää kesken tai epäonnistuu. Näissä virheissä ei siis ole kyse siitä, ettei ymmärrettäisi ongelman ratkaisua, vaan siitä, että ratkaisun edellyttämät toimenpiteet eivät toteudu oikein. (Ojose, 2015.)

#### 3.2 Virhekäsitykset matematiikassa

Opiskelijat tekevät usein toistuvia virheitä useissa ongelmissa erityisesti silloin, kun he ovat opetelleet säännöt ulkoa ja tukeutuvat mekaaniseen oppimiseen. Kun heidän täytyy soveltaa oppimiaan sääntöjä uuden ongelman ratkaisemiseksi, he huomaavat, ettei sääntöjen mekaaninen käyttö riitä tehtävän ratkaisuun, vaan se vaatisi syvempää käsitteellistä ymmärrystä. (Ojose, 2015.) Näissä tilanteissa opiskelijat alkavat kehittää virheellisiä toimintatapoja, jotka johtavat toistuviin ja systemaattisiin virheisiin (Dingman et al. 2019). Ilman riittävää ohjausta opiskelijat saattavat soveltaa

vääriä sääntöjä tehtäviin, mikä puolestaan kasvattaa matemaattisia väärinkäsityksiä. Matematiikan luonteen vuoksi tällaiset virhekäsitykset ilmenevät helposti. (Ojose, 2015.)

Matematiikan luonne on sellainen, että säännöt ja toimintatavat voivat vaihdella suuresti eri konseptien ja laskutoimitusten välillä. Esimerkiksi desimaalilukujen yhteenlaskussa  $0,4 + 0,7$  antaa tulokseksi  $1,1$  (yksi desimaalikohta), kun taas kertolaskussa  $0,4 \cdot 0,7$  antaa  $0,28$  (kaksi desimaalikohtaa). Tämä ero yhteenlaskun ja kertolaskun välillä voi aiheuttaa virhekäsityksiä opiskelijoille. Lisäksi matematiikan haasteena on, että virheellisesti käytetty menetelmä saattaa joskus johtaa oikeaan lopputulokseen, mikä voi vahvistaa väärinkäsitystä. Esimerkiksi, jos opiskelijat jakavat murtolukuja virheellisesti jakamalla osoittajat ja nimittäjät erikseen, kuten  $\frac{1}{9}$  ja  $\frac{1}{3}$  antaen  $\frac{1}{3}$ , he saattavat silti saada oikean vastauksen, vaikka laskutapa on väärä. Tällaisissa tilanteissa on opettajan vastuulla korjata virhe ja ohjata opiskelijat oikeaan menetelmään. (Ojose, 2015.)

Virheiden syiden selvittäminen on olennainen askel opiskelijoiden matemaattisen ymmärryksen kehittämisessä (Ashlock, 2006). Opiskelijat ovat usein kiintyneet tunteellisesti ja älyllisesti virhekäsityksiinsä, sillä he ovat itse ne aktiivisesti rakentaneet. Tämän vuoksi on vaikea hyväksyä uusia ratkaisuja, jotka ovat erilaisia heidän aiemmista käsityksistään (Mohyuddin & Khalil, 2016). On tärkeää antaa opiskelijalle mahdollisuus selittää päättelyään, sillä tämä auttaa sekä opettajaa että opiskelijaa havaitsemaan virheellisen päättelyn (Dingman et al. 2019).

Ymmärrys virhekäsityksistä on keskeinen askel matematiikan opetuksen parantamiseksi. Kun opettaja havaitsee opiskelijoilta virhekäsityksiä, hänen tulisi kehittää strategioita, jotka auttavat näiden käsitysten voittamisessa. Virheiden luonteen ja lähteen tunteminen voi opettajille tarjota arvokasta tietoa opetuksen suunnittelussa. (Ojose, 2015.) Pelkkä virheiden korjaaminen ei kuitenkaan riitä opiskelijoiden virhekäsitysten poistamiseen (Dingman et al. 2019). Opettajien tulisi käyttää tehokkaita opetustekniikoita opiskelijoiden auttamiseksi virhekäsitysten ja systemaattisten virheiden korjaamiseksi (Ojose, 2015).

On tärkeää varmistaa, etteivät virhekäsitykset jää opiskelijoille pitkäksi aikaa, sillä ne voivat vaikuttaa merkittävästi myöhempään matematiikan ymmärrykseen. Koska matematiikan käsitteet ovat toisiinsa liittyviä, yhden peruskäsitteen virhe voi johtaa toisiin virheisiin. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia, 2020.) Opettajien tulee aktiivisesti pyrkiä havaitsemaan opiskelijoidensa mahdolliset virhekäsitykset ja tehdä työtä niiden korjaamiseksi. Tämä on erityisen tärkeää, jotta opiskelijat eivät siirry luokka-asteesta toiseen virhekäsitysten kanssa. (Ojose, 2015.)

### 3.3 Virheet ja virhekäsitykset dynaamisella matematiikkaohjelmistolla

Dynaamiset matemaattiset ohjelmistot, kuten GeoGebra, tarjoavat opiskelijoille mahdollisuuden tutkia ja ymmärtää matemaattisia konsepteja (Brown et al., 2016). Kuitenkin ohjelmistojen käyttö voi johtaa erilaisiin virheisiin ja virhekäsityksiin. Tässä osiossa tarkastellaan virheitä ja virhekäsityksiä, joita opiskelijat tekevät työskennellessään dynaamisten ohjelmistojen parissa, sekä niiden syitä. Virheiden syyt ohjelmistojen käytössä voidaan usein jakaa kahteen pääkategoriaan: matematiikan sisäl-

lön väärinymmärrykset ja teknologian virheellinen käyttö (Brown et al., 2016).

Matemaattiset virheet johtuvat usein perustietojen puutteesta tai staattisen geometrian siirtämisestä dynaamiseen muotoon (Vaníček, 2007). Lisäksi matemaattiset virheet ilmenevät, kun opiskelijat laskevat tai käyttävät käsitteitä väärin, mikä johtaa väärin sovellettuihin teknologisiin työkaluihin (Brown et al., 2016). Nämä virheet voivat myös ilmetä tilanteissa, joissa ohjelmistolla oikein piirretty kuvio on väärin hyödynnetty laskutoimituksissa. Esimerkiksi vaikka opiskelijat onnistuvat piirtämään geometrian osat oikein, he saattavat käyttää mittauksia tai suhteita väärin laskelmissa, mikä johtaa virheellisiin tuloksiin (Olsson, 2018). Tällaiset virheet korostavat tarvetta ymmärtää matemaattisten käsitteiden taustalla olevat periaatteet ja niiden oikea soveltaminen dynaamisissa ohjelmistoissa (Olsson, 2018).

Teknologian virheellinen käyttö voi johtua vääristä käsityksistä ohjelmiston toiminnasta (Brown et al., 2016). Opiskelijat saattavat kokea ohjelmiston käytön hankalaksi, mikä johtuu riittämättömästä kokemuksesta teknologisista työkaluista. Erittäisesti syöttöikkunassa käytettävien komentojen ymmärtäminen voi olla vaikeaa, mikäli opiskelijoilla ei ole aiempaa ohjelmointikokemusta. (Wassie & Zergaw, 2019.) Geogebra itsessään ei myöskään tarjoa käyttäjille tarkkaa vaiheittaista ohjeistusta, ja osa toimintojen välivaiheista jää käyttäjältä piiloon. Tämä voi johtaa virheisiin tulkittaessa kuvaajia ja saatuja tuloksia, sillä se vaatii käyttäjältä kykyä huomioida myös ohjelmiston toiminnasta johtuvat rajoitukset. (Olsson, 2018.)

Lisäksi tutkimuksissa on havaittu, että opiskelijat usein muistavat näppäinpainalluksia ja komentoja ulkoa ilman syvällistä ymmärrystä niiden merkityksestä. Tämä teknologian kanssa tapahtuva syntaktinen vuorovaikutus voi johtaa tilanteisiin, joissa opiskelijat saavat aikaan oikeita tuloksia, mutta eivät osaa selittää, miksi ja miten komennot toimivat. Tämän tyyppinen käytös voi luoda virhekäsityksiä, joissa opiskelijat eivät ymmärrä matemaattisten toimintojen taustalla olevia periaatteita. (Brown et al., 2016.)

Virheitä ilmenee myös silloin, kun opiskelijat eivät perustele tai dokumentoi vastauksiaan riittävästi GeoGebrassa, mikä voi johtua liiallisesta luottamuksesta ohjelman tarjoamiin visuaalisiin esityksiin. Hähkiöniemi ja Leppäaho tuovat esiin teknologisten ohjelmien käytön vaaran: opiskelijat saattavat nojata sokeasti ohjelmiston antamiin vastauksiin ilman matemaattisia perusteluja. Tällainen sokea teknologiankäyttö voi estää syvällisemmän matematiikan oppimisen (Hähkiöniemi & Leppäaho, 2010). Kun opiskelijat keskittyvät pelkästään ohjelman tuottamaan kuvaan tai graafiseen esitykseen, he eivät välttämättä ymmärrä, ettei visuaalinen esitys yksin riitä ratkaisun oikeellisuuden osoittamiseen. Tämän vuoksi on tärkeää, että opiskelijat esittävät myös käyttämänsä komennot ja vaiheet, jotka johtavat lopulliseen tulokseensa. Opettajien tulisi aktiivisesti ohjata opiskelijoita vaatimaan ratkaisujensa perusteita (Hähkiöniemi & Leppäaho, 2010).

Opiskelijat voivat tehdä myös virheitä, kun he luottavat liikaa kokeilun kautta löydettyyn ratkaisuun Geogebassa sen sijaan, että pyrkisivät analyyttiseen lähestymistapaan. Esimerkiksi Hähkiöniemen ja Leppäahon (2010) kuvaamassa tilanteessa oppilas piirsi satunnaisen paraabelin ja käytti raahaustoimintoa arvioidakseen halutun paraabelin muotoa, mutta ei huomionnut mahdollisia pyörästysvirheitä. Tämä johti tulokseen, joka ei ollut välttämättä täysin pätevä (Hähkiöniemi & Leppäaho, 2010).

Aina ei ole helppo tunnistaa johtuuko opiskelijoiden virheet matematiikan sisälön väärinymmärryksestä vai teknologian käytöstä (Brown et al., 2016). Esimerkiksi Vaníčekin (2007) tutkimuksessa todettiin, että tällaiset virheet voivat liittyä opiskelijan kykyyn ymmärtää ja soveltaa dynaamisen geometrian mahdollisuuksia. Vaníčekin mukaan dynaamisen mielikuvituksen puute ja väärinkäsitykset dynaamisen geometrian ohjelmistojen käytöstä ovat keskeisiä syitä, miksi opiskelijat saattavat tehdä tämän kaltaisia virheitä.

Tutkimuksessa viitattiin dynaamisen mielikuvituksen puutteeseen opiskelijoiden kyvyssä visualisoida, miten heidän luomansa rakenteet käyttäytyvät dynaamisessa ympäristössä. Opiskelijat voivat rakentaa kohteita, jotka eivät toimi oikein, koska he eivät osaa kuvitella, mitä tapahtuu, kun rakenteita ohjataan. Tällainen dynaamisen mielikuvituksen puute voi estää opiskelijoita kehittämästä innovatiivisia ratkaisuja ongelmiin, vaikka he hallitsisivatkin ohjelmiston perustoiminnallisuudet. (Vaníček, 2007.)

Väärinkäsitys dynaamisen geometrian ohjelmistosta ilmenee myös opiskelijoiden kyvyttömyydessä ymmärtää ohjelmistojen toimintaperiaatteita. He saattavat olettaa, että kaikki ohjelmistossa luodut kohteet ovat itsenäisiä ja voivat liikkua vapaasti, vaikka todellisuudessa ne voivat olla riippuvaisia muista kohteista. Tämä väärinkäsitys johtaa virheellisiin oletuksiin ohjelmiston käsitellessä geometrisia kohteita ja voi estää opiskelijoita hyödyntämästä ohjelmiston tarjoamia mahdollisuuksia tehokkaasti. Näin ollen pelkkä matematiikan tuntemus ja tietokonetaito eivät automaattisesti riitä menestykseen dynaamisten matematiikkaohjelmistojen parissa. (Vaníček, 2007.)

## 4 Tutkimuksen toteutus

Tässä luvussa käsitellään tutkimuksessa käytetty aineisto ja tutkimuskysymykset (luku 4.1), analyysiprosessi (luku 4.2) sekä tehtävänannot ja hyvän vastauksen piirteet (luku 4.3).

### 4.1 Tutkimusaineisto ja tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää, millaisia virheitä tai virhekäsityksiä Geogebra-ohjelmistoa käytettäessä ilmenee yleisimmin matematiikan pitkän ja lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeiden geometrian tehtävissä. Lisäksi tutkimuksessa pohditaan virheiden syntyyn vaikuttavia tekijöitä.

Tutkimuskysymys on:

- Millaisia virheitä Geogebra-ohjelmistolla ylioppilaskokeiden geometrian tehtävissä yleisimmin tehdään?

Tutkimukseen valittiin kolme geometriaan liittyvää tehtävää matematiikan sähköisistä ylioppilaskokeista vuosilta 2020–2021. Kokeiden sisältö perustuu vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman perusteisiin. Analysoitava aineisto koostuu Ylioppilastutkintolautakunnan tutkimuskäyttöön luovuttamasta korpusaineistosta, johon sisältyy 100 satunnaisesti valittua anonyymia vastausta kuhunkin analysoitavaan tehtävään. Kokelaiden ratkaisuihin on liitetty tieto heidän saamistaan pisteistä tehtävissä.

Yksi analysoiduista tehtävistä on lyhyen oppimäärän kokeesta ja kaksi pitkän oppimäärän kokeista. Kaikki tehtävät on valittu B1-osiosta. Näistä tehtävistä yksi on neliosainen ja tarkoitettu ratkaistavaksi ohjelmistolla, mutta sen voi myös ratkaista algebrallisesti. Kaksi muuta tehtävää on suunniteltu algebrallisesti ratkaistavaksi, mutta ne voi ratkaista myös kokonaan Geogebraa tai käyttää Geogebraa osana ratkaisua. Tutkimuksessa tarkasteltiin vain niitä vastauksia, joissa tehtävä oli ratkaistu kokonaan Geogebraa tai Geogebraa oli käytetty osana ratkaisua.

### 4.2 Analyysiprosessin kuvaus

Aineiston analyysi aloitettiin käymällä kokelaiden tehtäviin esittämät ratkaisut systemaattisesti läpi tehtävä kerrallaan. Ratkaisuihin ilmenneet virheet yksinkertaistettiin sanalliseen muotoon ja taulukoitiin tehtävä- ja kokelaskohtaisesti. Mikäli jonkin virheen luokittelu jäi epäselväksi, se merkittiin keltaisella, ja näihin epäselviin kohtiin palattiin myöhemmin, kunnes luokittelu saatiin tarkennettua. Lisäksi virheiden sanallisia kuvauksia muokattiin, jos ensimmäisen kierroksen yksinkertaistus ei kuvannut niitä riittävän täsmällisesti.

Analyysin toisessa vaiheessa yksinkertaistettuun muotoon kirjoitetut virheet ryhmiteltiin tehtäväkohtaisesti virhetyyppeihin, kuten ”mitattu väärä kulma” tai ”pelkkä kuvakaappaus ilman mittoja, komentoja ja perusteluja”. Samalla kuhunkin virhetyyppiin kuuluvien virheiden määrät kirjattiin ylös. Tehtävissä, joissa Geogebra ei ollut tarkoitettu ensisijaiseksi ratkaisuvälineeksi, virheet jaettiin lisäksi algebrassa

tehtyihin virheisiin, joissa Geogebra toimi aputyökaluna, sekä virheisiin, joissa tehtävä oli ratkaistu kokonaan Geogebralla. Mikäli Geogebraa käytettiin vain osittain, analyysistä rajattiin pois tapaukset, joissa sen käyttö ei vaikuttanut ratkaisuun.

Analyysin kolmannessa vaiheessa tehtäväkohtaiset virhetyypit ryhmiteltiin laajempiin virheluokkiin, kuten geometrisiin virheisiin (esim. ”mitattu väärä kulma”) ja puutteellinen dokumentointi ja selitykset -luokkaan (esim. ”pelkkä kuvakaappaus ilman mittoja, komentoja tai perusteluja”). Virheluokat auttoivat hahmottamaan, millaisia virheitä geometrian tehtävissä esiintyi ja mitä virhetyyppejä kuhunkin luokkaan kuului. Virheluokkien esiintyvyys dokumentoitiin, jotta voitiin tunnistaa yleisimmät virheluokat aineistosta. Näitä havaintoja hyödynnettiin tutkimuskysymykseen vastaamisessa.

### 4.3 Tehtävänannot ja hyvän vastauksen piirteet

#### 4.3.1 Kevät 2020, lyhyt oppimäärä, tehtävä 7. Suklaarasia

Suklaakonvehtirasia (kuva 1) on muodoltaan särmiö, jonka pohja on säännöllinen kahdeksankulmio. Kahdeksankulmion sivun pituus on 4,2 cm ja rasian korkeus 6,6 cm. Laske rasian tilavuus.



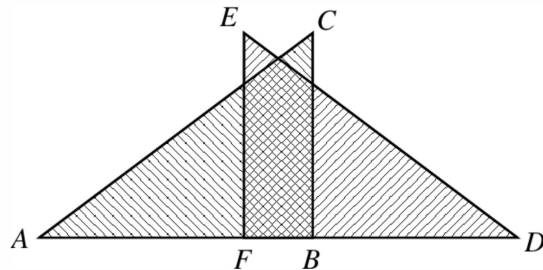
Kuva 1: Suklaarasia (YTL, 2020a)

Kahdeksankulmio saadaan neliöstä poistamalla jokaisesta kulmasta suorakulmainen kolmio.	(1)
Tällaisen kolmion kateetin pituus on $\frac{4,2}{\sqrt{2}} \approx 2,97$	2
ja pinta-ala $\frac{4,2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = 4,41$ .	2
Neliön pinta-ala on $(4,2 + 2 \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}})^2 \approx 102,81$ .	2
Kahdeksankulmion pinta-ala siis $(4,2 + 2 \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}})^2 - 2 \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}} \approx 85,17$ .	2
∇ Tilavuus saadaan pohjan pinta-alan ja korkeuden tulona	(1)
⇒ Tilavuus $(85,17 \cdot 6,6) \approx 562,14 \approx 560 \text{ cm}^3$	2
Tehtävän välivaiheet voi laskea myös desimaaliluvuilla.	
TAI	
Kahdeksankulmio muodostuu kahdeksasta tasakylkisestä kolmiosta.	(1)
Kärkikulma on $360^\circ/8 = 45^\circ$ .	(1)
Puolet kärkikulmasta on siis $22,5^\circ$	(1)
ja kolmion korkeus $h = \frac{2,1}{\tan(22,5^\circ)} \approx 5,07$ .	2
Kolmion ala on siis $\frac{1}{2} \cdot \frac{2,1}{\tan(22,5^\circ)} \cdot 4,2 \approx 10,65$ .	2
Kahdeksankulmion pinta-ala on $8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2,1}{\tan(22,5^\circ)} \cdot 4,2 \approx 85,17$ .	2
∇ Tilavuus saadaan pohjan pinta-alan ja korkeuden tulona	(1)
⇒ Tilavuus $(85,17 \cdot 6,6) \approx 562,14 \approx 560 \text{ cm}^3$	2
Tehtävän välivaiheet voi laskea myös desimaaliluvuilla.	
TAI (Geogebra tms ratkaisu)	
Piirretty konvekksi 8-kulmio.	2
Perusteltu säännöllisyys esim. kerrottu komento ”säännöllinen 8-kulmio”.	3
Piirroksessa mitattu jokaisen sivun pituudeksi 4,2 TAI muu perustelu.	2
Pinta-ala 85,17 ja perusteluna esim. komento.	(2)
∇ Tilavuus saadaan pohjan pinta-alan ja korkeuden tulona.	(1)
⇒ Tilavuus $(85,17 \cdot 6,6) \approx 562,14 \approx 560 \text{ cm}^3$	2

Kuva 2: Hyvän vastauksen piirteitä (YTL, 2020a)

### 4.3.2 Syksy 2020, pitkä oppimäärä, tehtävä 5. Kolmiot

Suorakulmaiset kolmiot  $ABC$  ja  $DEF$  leikkaavat kuvan 3 mukaisesti. Kolmioiden kateettien pituudet ovat  $AB=DF=4$  ja  $BC=EF=3$ . Lisäksi janan  $BF$  pituus on 1. Määritä kolmioiden yhteisen osan pinta-ala.



Kuva 3: Kolmiot (YTL, 2020b)

Kolmioiden yhteinen alue on viisikulmio, joka jakaantuu kahteen symmetriseen puolisuunnikkaaseen.	(1)
Puolisuunnikkaan leveys on $1/2$ .	1
(Yhdenmuotoisuuden perusteella) pidemmän pystysuoran sivun pituus $h$ toteuttaa yhtälön $h/(7/2) = 3/4$ ,	2
joten $h = 21/8$ .	1
Vastaavasti lyhyemmän pystysuoran sivun pituus $y$ toteuttaa yhtälön $y/3 = (21/8)/(7/2)$ ,	2
joten $y = 9/4$ .	1
Puolisuunnikkaan ala on $\frac{1}{2}(h+y) \cdot \frac{1}{2} = 39/32$ ,	2
joten kysytty ala on $2 \cdot 39/32 = 39/16$ .	2
Yhdenmuotoisuuden ideasta (pahasti) väärin sovellettuna riveiltä 3–6	1
TAI	
Leikkaus on viisikulmio, joka jakaantuu suorakulmioon ja kolmioon.	(1)
Kolmion/suorakulmion/viisikulmion leveys on 1.	1
Suorakulmion korkeus $9/4$ yhdenmuotoisuuden avulla.	3
Kolmion korkeus $3/8$ yhdenmuotoisuuden avulla.	3
Pinta-ala $1 \cdot 9/4 + 1/2 \cdot 1 \cdot 3/8$	1+2
$= 39/16$ .	1
TAI (GeoGebra)	
Kuvio oikeilla mitoilla.	2
Viisikulmion kärkipisteet poimittu.	3
Pinta-alan likiarvo (vähintään yksi desimaali) 2,4375.	(2)
Pinta-alan tarkka arvo.	2
Selitetty, mitä on tehty tai komennot näkyvissä, kärkipisteet poimittu leikkauspistekomennolla (kerrottu sanallisesti tai näkyy kommentoina), monikulmio luotu Monikulmio-komennolla (kerrottu sanallisesti tai näkyy kommentoina).	3
Välivaiheet laskettu likiarvoin.	max 10
Huomaa, että tarkka arvo voi olla annettu myös desimaaleina, sillä $\frac{39}{16} = 2,4375$ .	
Ratkaisusta tulee kuitenkin tulla selväksi, että kyseessä on tarkka arvo.	

Kuva 4: Hyvän vastauksen piirteitä (YTL, 2020b)

### 4.3.3 Syksy 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 7. Avaruuskappale

Tämä tehtävä on tarkoitettu ratkaistavaksi ohjelmistolla. Vastaukset voi antaa likiarvoina, ja perusteluiksi riittävät kuvakaappaukset tai selitykset, joista ilmenee mitä on mitattu. Tehtävän voi myös ratkaista algebrallisesti laskemalla. Tarkastellaan monitahokasta  $M=ABCDEF$ , jonka pohja  $ABCDE$  on säännöllinen viisikulmio ja jonka sivutahkot ovat tasasivuisia kolmioita.

1. Piirrä kuva monitahokkaasta  $M$ . (4 p.)
2. Määritä monitahokkaan  $M$  särmän  $AF$  ja pohjan välinen kulma. (2 p.)
3. Määritä monitahokkaan  $M$  tahkon  $ABF$  ja pohjan välinen kulma. (2 p.)
4. Määritä monitahokkaan  $M$  tilavuus, kun särmän pituus on  $a$ . (4 p.)

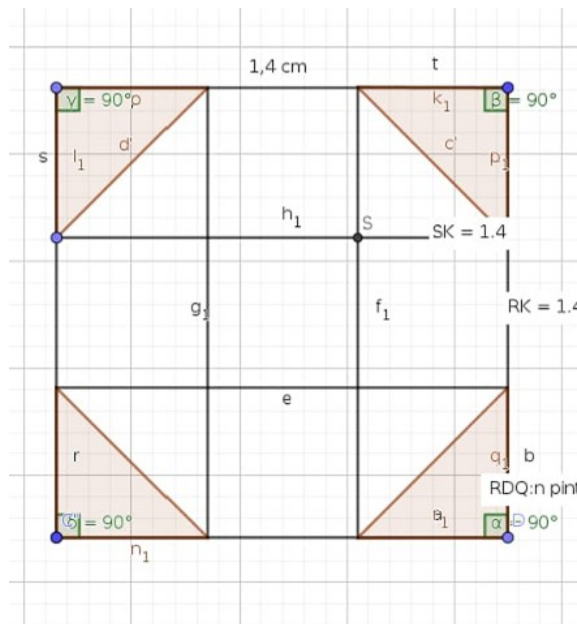
Pohja näyttää oikealta ja perustelu/komennot.	2 p.
Sivutahkot näyttävät oikeilta ja perustelu/komennot.	2 p.
Osatehtävän erillisohjeet:	
Perusteluksi ei riitä, että on mitattu yksittäisen sivun pituus tai kirjoitettu yksittäisen sivun pituus, vaan mikäli perustelu on tehty mittaamalla, täytyy olla mitattuna riittävä määrä sivuja ja niiden pituudet algebraikkunassa tai muussa luotettavassa lähteessä.	
Ratkaisu on tehty piirtämällä ensin kuva tilanteesta ja sen jälkeen lukemalla kuvasta GeoGebran komennoin kaikki oleellinen, esimerkiksi seuraavasti:	
<i>Konstruktio.</i> Käytetään viisikulmiotyökalua. Piirretään ympyrä kolmen kärjen kautta. Ympyrän keskipisteeseen piirretään $z$ -akseli. Kärkipisteeseen piirretään pallo(pinta), jonka säde on yhtä pitkä kuin viisikulmion sivu. Pallon ja $z$ -akselin leikkaus on piste $F$ .	
<i>Approksimaatio:</i> Piirretty ensin origokeskinen ympyrä $xy$ -tasoon käyttäen toimintoa, jolle annetaan ympyrän keskipiste ja yksi kehän piste. Tämän jälkeen saman kehän pisteen kautta on GeoGebran säännöllisen monikulmion toiminnon avulla piirretty viisikulmio, joka on zoomaamalla aseteltu ympyrälle. Sitten ympyrää on skaalattu niin, että viisikulmion sivuksi on saatu $1$ . Tämän jälkeen viisikulmiolta on valittu kaksi vierekkäistä kärkeä, joiden avulla on piirretty kolmio, jonka kolmas kärki on $z$ -akselilla. Kolmatta kärkeä on liu'utettu niin, että kolmion kaikki sivut on saatu ykkösen mittaisiksi. Tämän jälkeen $z$ -akselilla oleva piste on yhdistetty viisikulmion kärkiin.	
Käytetään Geogebrian kulmanmittaustoimintoa antamalla sille syötteeksi kartion huippu, yksi viisikulmion kärjistä ja viisikulmion keskipiste.	1 p.
Kulman suuruus on noin <b>31,72</b> astetta.	1 p.
Osatehtävän erillisohjeet:	
Oikea idea ja oikea tulos	1+1 p.
Sallittu tarkkuus <b>31 – 32</b>	
Jotta saada tahkon ja pohjan välinen kulma, määritetään ensin viisikulmion jonkin sivun keskipiste	1 p.
GeoGebran keskipisteen antavalla komennolla.	
Käytetään Geogebrian kulmanmittaustoimintoa antamalla sille syötteeksi kartion huippu, äsken määritetty keskipiste sekä viisikulmion keskipiste.	1 p.
Kulman suuruudeksi saadaan noin <b>37,38</b> astetta.	
Osatehtävän erillisohjeet:	
Oikea idea ja oikea tulos	1+1 p.
Sallittu tarkkuus <b>37 – 38</b>	
Viisikulmion piirtämiseen käytetty käsky antoi automaattisesti myös viisikulmion pohjan alan. Se on n. <b>1,72</b> ja kuvion korkeus on n. <b>0,53</b> .	1 p.
Kartion tilavuus on pohjan ja korkeuden tulo jaettuna kolmella. Tämän kappaleen tilavuus on siten $\frac{1}{3} \cdot 1,72 \cdot 0,53 \approx 0,3$ .	1 p.
Tehtävässä kartion sivujen pituus on $a$ . Piirroksessa se on $1$ , joten tilavuus on kerrottava luvulla $a^3$ .	1 p.
Tilavuus on siis $0,3a^3$ .	1 p.
TAI (algebraallinen ratkaisu)	
Pohjan ala on n. <b>1,72a<sup>2</sup></b> (laskettu oikein, järkevä tarkkuus tai tarkka arvo, $a$ mukana)	1 p.
Korkeus on n. <b>0,53a</b> (laskettu oikein, järkevä tarkkuus tai tarkka arvo, $a$ mukana)	1 p.
Tilavuus saadaan kertomalla pohjan ala korkeudella ja jakamalla kolmella.	1 p.
Tilavuus on siis n. <b>0,3a<sup>3</sup></b> .	1 p.
Osatehtävän erillisohjeet:	
Tilavuus suoraan työkalulla: Komento näkyvässä ja kappale oikea + sivujen pituus 1 tai normeeraus + kertominen luvulla $a^3$ + vastaus	1+1+1+1
Tehtävän ratkaisujen yleisohjeet:	
Approksimaatiokratkaisulla voi päätyä myös hieman poikkeaviin arvioihin kulumista.	
Jos kuva on väärin, mutta kuitenkin viisikulmiopohjainen kartio, eivätkä saadut mitat mahdu annettujen tarkkuuksien rajoihin, alakohdista 2–4: 1/1/3	
Jos kappale ei ole viisikulmiopohjainen kartio	0 p.

Kuva 5: Hyvän vastauksen piireitä (YTL, 2021)

## 5 Tulokset

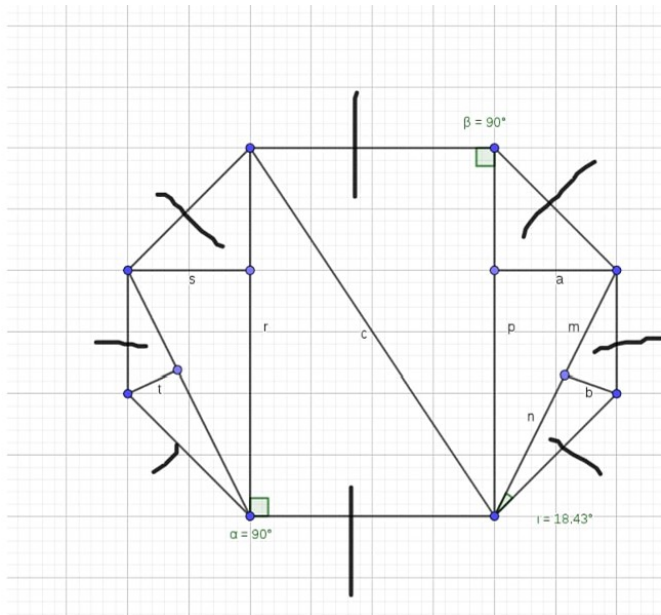
### 5.1 Kevät 2020, lyhyt oppimäärä, tehtävä 7. Suklaarasia

Tehtävässä oli tarkoitus laskea särmiön muotoisen suklaarasian tilavuus, jonka pohja on säännöllinen kahdeksankulmio. Tehtävässä esiintyi kolme eri virheluokkaa: virheellisesti piirretty kuvio, Geogebraan saadun tuloksen soveltaminen ja virheellinen laskentaprosessi. Yleisin virheluokka oli virheellisesti piirretty kuvio. Tyypillisintä oli, että oppilaat olivat ajatelleet pohjan koostuvan viidestä neliöstä ja neljästä suorakulmaisesta kolmiosta. Alla oleva kokelaan piirtämä kuvio on hyvä esimerkki tästä. Kokelas ei ole käyttänyt monikulmioityökalua, vaan kuvio on piirretty oman ajatuksen mukaisesti. Oppilaalla oli virheellinen käsitys siitä, minkä muotoisista osista säännöllinen kahdeksankulmio koostuu.



Kuva 6: Kokelas 60, virheellinen pohjakuvio.

Virheellisesti piirrettyjä kuvioita esiintyi muillakin tavoin. Muutamissa kuvioissa mittasuhteet eivät täsmänneet. Esimerkiksi alla olevassa kokelaan piirtämässä kuviossa oli virheellisesti piirretty kuvio, mutta toisin kuin virhe, jossa pohjan kuvitellaan koostuvan viidestä neliöstä ja neljästä suorakulmaisesta kolmiosta, tässä tapauksessa kokelas oli merkinnyt kaikki sivut saman pituisiksi. Mittasuhteet eivät silti pitäneet paikkaansa, eikä kuvio esittänyt oikeanlaista säännöllistä kahdeksankulmion muotoa. Kokelas ei ollut huomionnut säännöllisen kahdeksankulmion vaatimuksia, kuten sivujen ja kulmien oikeita suhteita.



Kuva 7: Kokelas 88, virhe kuvion toteutuksessa, vaikka sivujen pituus on tiedetty yhteneväksi.

Virheluokkana oli myös Geogebraista saadun tuloksen soveltaminen, jolloin Geogebrailla saadut tiedot eivät olleet oikein sovellettu algebrallisessa ratkaisussa. Esimerkiksi eräs kokelas oli Geogebraista saamansa kuvan perusteella todennut kolmion olevan tasakylkinen ja oletti, että kaikki kulmat ovat silloin 60 astetta. Tässä oli sekoitettu tasakylkisen ja tasasivuisen kolmion ominaisuuksia. Osa kokelaista käytti Geogebraista saatuja mittoja virheellisesti. Esimerkiksi alla olevassa ratkaisun osassa kokelas oli mitannut kolmion korkeuden Geogebrailla. Tätä mittaa hän ei kuitenkaan osannut soveltaa oikein kolmion pinta-alan laskemisessa, koska hän ei käyttänyt pinta-alan kaavaa oikein.

korkeus

$q \approx 5.07$

Kolmion pinta-ala

$$A = 4,2\text{cm} \cdot 5,07\text{cm} \approx 21,3\text{cm}^2$$

Kuva 8: Kokelas 15, Oikea mittaus, mutta virhe kolmion pinta-alan laskussa.

Kahdella kokelaalla tapahtui tehtävässä virheellinen laskentaprosessi. Toisella näistä kokelaista virhe tapahtui Geogebrian laskimen käytössä, ja toisella oli tapahtunut pyöristysvirhe Geogebrailla.

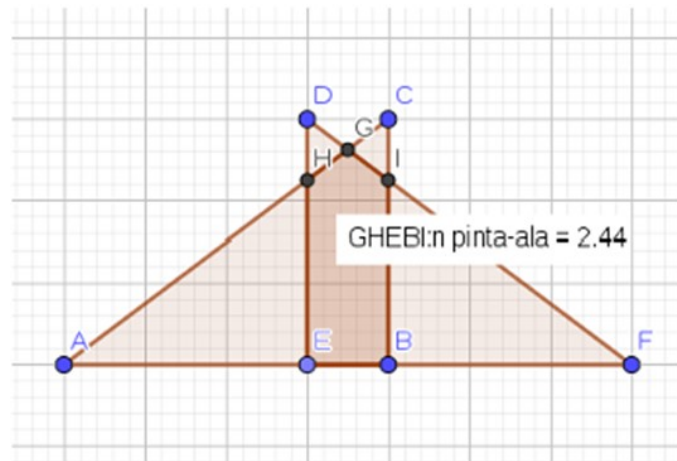
Tehtävässä esiintyneet virheluokat ja määrät koottu alla olevaan taulukkoon:

Taulukko 1: Tehtävässä esiintyneet virheet. Sama ratkaisu voi kuulua useampaan virheluokkaan.

Virheluokka	Määrä
Virheellisesti piirretty kuvio	11
Geogebraista saadun tuloksen soveltaminen	4
Virheellinen laskentaprosessi	2

## 5.2 Syksy 2020, pitkä oppimäärä, tehtävä 5. Kolmiot

Tehtävässä oli tarkoitus määrittää kolmioiden yhteisen osan pinta-ala. Tehtävässä ilmeni neljää erilaista virheluokkaa: puutteellinen dokumentointi ja selitykset, Geogebraista saadun tuloksen soveltaminen, virheellinen laskentaprosessi sekä geometrisen virhe. Yleisin virheluokka oli virheellinen laskentaprosessi. Tehtävässä edellytettiin tarkkoja arvoja välivaiheissa ja vastauksessa, mutta nämä vaatimukset eivät aina toteutuneet laskentaprosessissa. Monet kokelaat olivat laskeneet pinta-alan oikein Geogebralla, mutta he eivät olleet antaneet vastausta tarkkana arvona. Esimerkiksi kokelas 15 oli antanut pinta-alan likiarvona. Jotta vastaus olisi ollut tarkka, Geogebrian asetuksista olisi pitänyt lisätä desimaaleja.



Kuva 9: Kokelas 15, pelkkä likiarvo Geogebralla.

Puutteellinen dokumentointi ja selitykset olivat myös yleisiä virheitä tässä tehtävässä. Jos tehtävä on ratkaistu Geogebralla, on tärkeää selittää, mitä on tehty tai komennot tulisi olla näkyvissä. Oli hyvin yleistä, että oli otettu vain kuvakaappaus kuviosta ilman mitään perusteluita. Kokelaan 15 ratkaisu havainnollistaa myös hyvin tätä ilmiötä.

Geogebraasta saadun tuloksen soveltaminen oli tässä tehtävässä toiseksi yleisin virheluokka. Tyypillistä oli, että Geogebralla mitattuja sivujen pituuksia käytettiin väärin kolmion pinta-alan laskemisessa. Esimerkiksi alla olevan kokelaan ratkaisun osassa sivut oli mitattu oikein, mutta niitä ei osattu soveltaa asianmukaisesti. Kokelas käytti Pythagoraan lausetta pinta-alan laskemiseen, mikä johti virheelliseen tulokseen.

●	G = Leikkauspiste(j, k)	→ (0, 2.63)
●	H = Leikkauspiste(h, k)	→ (-0.5, 2.25)
●	I = Leikkauspiste(i, j)	→ (0.5, 2.25)
●	ℓ = Jana(H, I)	→ 1
●	m = Jana(H, G)	→ 0.63

Tällöin pinta-ala on kolmion HGI ala + nelikulmio FHIB ala

$$A_{FHIB} = 2,25 \cdot 1$$

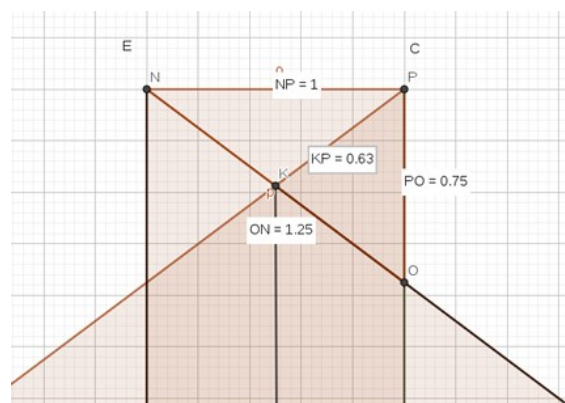
$$= 2,25$$

$$A_{HGI} = \sqrt{1^2 + 0,63^2} d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= 1,82$$

Kuva 10: Kokelas 53, virheellinen pinta-alan kaava.

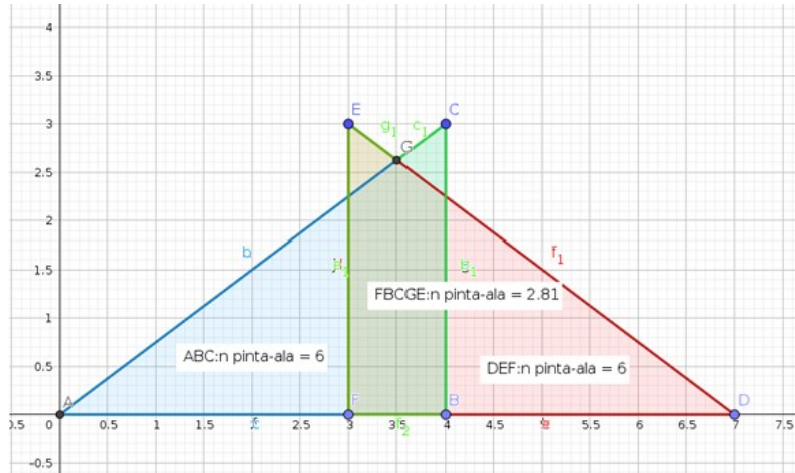
Kokelas 62 oli myös Geogebralla mitannut kolmion sivujen pituudet, mutta hän oli virheellisesti hahmottanut, mikä sivuista on kolmion kanta ja mikä korkeus, joten vastaus oli virheellinen.



$$\text{Kolmion NPO pinta-ala: } A_{kl} = \frac{1,25 \cdot 0,63}{2} = 0.39375$$

Kuva 11: Kokelas 62, virhe kysytyn kuvion hahmottamisessa.

Yhdellä kokelaista tehtävässä tapahtui myös geometrinen virhe. Alla oleva kuva havainnollistaa, miten hän on virheellisesti määrittänyt kolmioiden yhteisen osan pinta-alan laskemalla  $FBCDE$  pinta-alan, joka on laajempi kuin kolmioiden yhteinen osa. Oikea lähestymistapa olisi ollut ensin tarkasti määrittää se alue, joka syntyy kahden suorakulmaisen kolmion leikkaamisesta, ja laskea vain tämän alueen pinta-ala.



Kuva 12: Kokelas 71, geometrinen virhe.

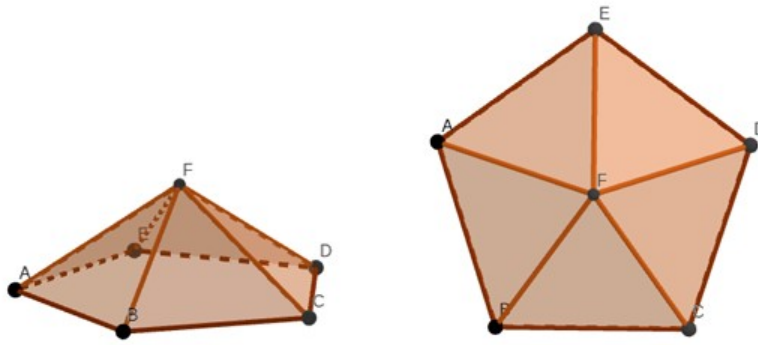
Tehtävässä esiintyneet virheluokat ja määrät koottu alla olevaan taulukkoon:

Taulukko 2: Tehtävässä esiintyneet virheet. Sama ratkaisu voi kuulua useampaan virheluokkaan.

Virheluokka	Määrä
Virheellinen laskentaprosessi	10
Geogebrasta saadun tuloksen soveltaminen	9
Puutteellinen dokumentointi ja selitykset	7
Geometrinen virhe	1

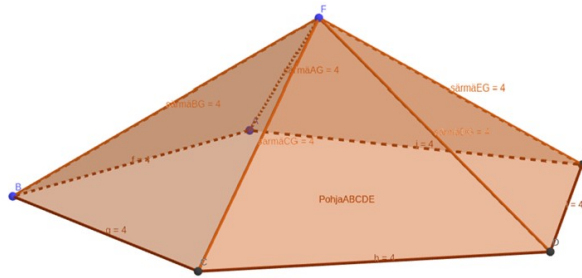
### 5.3 Syksy, 2020, pitkä oppimäärä, tehtävä 7. Avaruuskappale

Tehtävän ensimmäisessä kohdassa, jossa oli tarkoituksena piirtää kuva monitahokkaasta  $M$ , tehtävässä esiintyi kahta virheluokkaa: puutteellinen dokumentointi ja selitykset sekä virheellisesti piirretty kuvio. Puutteellinen dokumentointi ja selitykset olivat yleisin virheluokka, ja sen luokan virhetyyppejä esiintyi eri tavoin. Eniten ilmeni vastauksia, jossa oli kuvakaappaus monitahokkaasta ilman mitään mittoja, komentoja tai perusteluja, vaikka tehtävänanto olisi edellyttänyt niitä. Esimerkiksi alla olevassa ratkaisussa kokelas oli piirtänyt kuvion, mutta ei ollut lisännyt siihen mitään selityksiä tai perusteluja. Tällaisissa vastauksissa jäi epäselväksi, miten piirretty kuvio oli saatu aikaiseksi.



Kuva 13: Kokelas 33, ratkaisu ilman perusteluja.

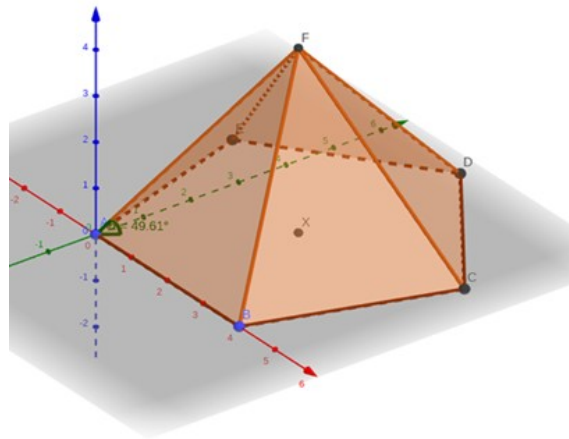
Samassa kategoriassa esiintyi myös useampia vastauksia, joissa kuvassa näkyivät mitat, mutta ei kommentoja, jotka olisivat selventäneet, miten mitat oli saatu. Seuraava ratkaisu havainnollistaa, miten pelkkä kuvakaappaus ei anna selvyyttä siitä, onko kokelas käyttänyt esimerkiksi mittatyökalua, liukusäätimen avulla mittaamista vai tekstityökalua mittojen merkitsemiseen.



Kuva 14: Kokelas 38, komennot eivät ole näkyvissä.

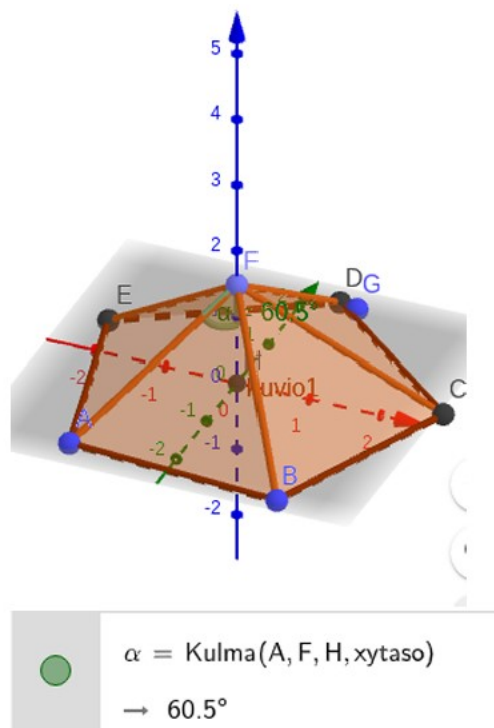
Toinen virheluokka oli virheellisesti piirretty kuvio. Yleisin virhe oli, ettei pyramidiin piirretty tasasivuisia kolmioita sivutahkoiksi. Esimerkiksi alla oleva kuva havainnollistaa, miten kokelas oli käyttänyt monikulmiotyökalua ja piirtänyt säännöllisen viisikulmion pohjaksi, mutta pyramidin sivutahkot eivät olleet tasasivuisia kolmioita, kuten tehtävänanto edellytti.





Kuva 16: Kokelas 20, kuvio on piirretty väärin, joten vastaus on väärin

Geometriä virheitä ilmeni kolmella tavalla. Osa kokelaista käytti väärää pistettä kulman mittaamiseen; esimerkiksi keskipisteen sijasta oli käytetty vastakkaisen janan keskipistettä, mikä johti epätarkkoihin tuloksiin. Lisäksi osa kokelaista teki virheellisiä oletuksia kulmien suuruudesta, kuten olettaen kulman olevan 45 astetta sillä perusteella, että yhden kulman ollessa 90 astetta kahden muun kulman ajateltiin automaattisesti olevan 45 astetta. Yleisin virhetyyppi oli kuitenkin väärän kulman mittaaminen. Esimerkiksi alla oleva kuva havainnollistaa, miten kokelas on mitannut sivutahkon kulman särmän kulman sijasta.



Kuva 17: Kokelas 60, mitattu väärä kulma

Puutteellinen dokumentointi ja selitykset -virheluokka ilmeni kahdella kokelaalla samalla tavalla. He olivat ilmoittaneet ainoastaan kulman suuruuden ilman mitään perusteluita.

Tehtävän kohdassa 2 esiintyneet virheluokat ja määrät on koottu alla olevaan taulukkoon:

Taulukko 4: Tehtävässä esiintyneet virheluokat. Sama ratkaisu voi kuulua useampaan virheluokkaan.

<b>Virheluokka</b>	<b>Määrä</b>
Virheellisesti piirretty kuvio	27
Geometrinen virhe	22
Puutteellinen dokumentointi ja selitykset	2

Kohdassa kolme oli tarkoitus määrittää monitahokkaan tahkon ja pohjan välinen kulma. Tässä tehtävässä muodostui samoja virheluokkia kuin kohdassa kaksi, mutta erojakin oli havaittavissa. Eniten esiintyi geometrisiä virheitä, ja kuten kohdassa kaksi väärän kulman mittaaminen oli yleisin virhetyyppi. Tyypillinen virhe oli myös virheelliset oletukset kulmien suuruudesta. Esimerkiksi oletettiin, että kulman suuruus olisi sama kuin kohdassa kaksi. Yksi kokelas perusteli tämän sillä, että monitahokkaan kolmioiden sivut ovat keskenään samanmittaisia, joten myös tahkon ja pohjan välinen kulma olisi sama kuin aiemmassa kohdassa. Geometrisissa virheissä toistui myös virheellisten pisteiden käyttäminen kulman mittaamiseen. Verrattuna kohtaan kaksi, kokelaat olivat käyttäneet keskipisteen sijasta kulman vastakkaista pistettä.

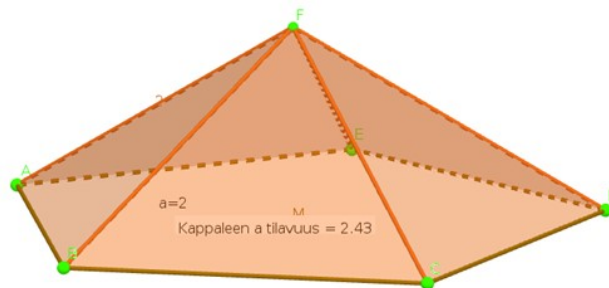
Lisäksi virheellisesti piirretty kuvio oli yleinen virheluokka, koska ensimmäisessä kohdassa tehty virhe vaikutti yhä myös tämän kohdan vastaukseen. Myös puutteellisen dokumentoinnin ja selitysten ongelmat toistuivat samalla tavalla kuin kohdassa kaksi.

Tehtävän kohdassa 3 esiintyneet virheluokat ja määrät on koottu alla olevaan taulukkoon:

Taulukko 5: Tehtävässä esiintyneet virheet. Sama ratkaisu voi kuulua useampaan virheluokkaan.

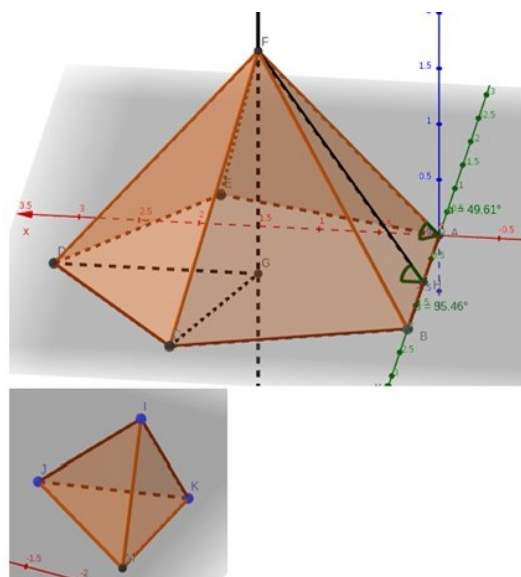
Virheluokka	Määrä
Geometrinen virhe	23
Virheellisesti piirretty kuvio	15
Puutteellinen dokumentointi ja selitykset	4

Kohdassa neljä oli tarkoitus määrittää monitahokkaan tilavuus, kun särmän pituus on  $a$ . Tässä tehtävässä esiintyi kahta virheluokkaa: virheellinen laskentaprosessi ja geometrinen virhe. Virheellinen laskentaprosessi oli selvästi yleisin virheluokka, ja se ilmeni pääasiassa kahdella eri tavalla. Yleisintä oli, että normeerausta ei ollut otettu huomioon. Toinen yleinen virhe oli se, että vastaus oli annettu pelkkänä kappaleen tilavuutena ilman huomioita siihen, että vastaus ei olekaan ainoastaan kappaleen tilavuus. Esimerkki alla havainnollistaa laskentaprosessin yleisimmät virheet: kokelas oli antanut vastaukseksi vain kappaleen tilavuuden. Lisäksi kokelas ei ole huomionnut normeerausta, sillä sivujen pituudet eivät ole skaalattuna standardi pituuteen.



Kuva 18: Kokelas 5, normeerausta ja tehtävän loppuosaa ei ole huomionnut.

Geometrinen virhe ilmeni puolestaan tetraedri-ajatteluna. Esimerkiksi alla olevassa vastauksessa kokelas oli yrittänyt jakaa monitahokkaan tetraedreihin ja laskea jokaisen tetraedrin pinta-alaa, mikä johti virheellisiin laskelmiin.



Kuva 19: Kokelas 13, tetraedri-ajattelu

Tehtävän kohdassa 4 esiintyneet virheluokat ja määrät on koottu alla olevaan taulukkoon:

Taulukko 6: Tehtävässä esiintyneet virheluokat. Sama ratkaisu voi kuulua useampaan virheluokkaan.

Virheluokka	Määrä
Virheellinen laskentaprosessi	34
Geometrinen virhe	3

## 5.4 Yhteenveto

Tehtävien ratkaisuisissa esiintyneet yleisimmät virheet voidaan jakaa viiteen virheluokkaan. Kyseiset virheluokat ovat: virheellisesti piirretty kuvio, puutteellinen dokumentointi ja selitykset, geometrinen virhe, virheellinen laskentaprosessi ja Geogebraista saadun tuloksen soveltaminen. Virheluokat ja määrät koottu taulukkoon 7.

Taulukko 7: Tehtävässä esiintyneet virheluokat. Sama ratkaisu voi kuulua useampaan virheluokkaan.

<b>Virheluokka</b>	<b>Määrä</b>
Virheellisesti piirretty kuvio	108
Puutteellinen dokumentointi ja selitykset	101
Geometrinen virhe	49
Virheellinen laskentaprosessi	46
Geogebraista saadun tuloksen soveltaminen	13

## 6 Tulosten tarkastelua ja luotettavuus

### 6.1 Luotettavuus

Tutkimuksen luotettavuuteen vaikuttaa aineiston koko ja käsittelytapa. Aineisto koostui Ylioppilastutkintolautakunnan kokoamista autenttisista oppilaiden ylioppilaskirjoitusten geometrian tehtävien ratkaisuksista, joissa oli edustettuina kaikki arvosanasotot I:stä L:ään. Suurin osa vastauksista kuului kuitenkin arvosanoille B, C ja M, jotka ovat myös yleisimpiä arvosanoja ylioppilaskokeissa. Näin ollen aineiston voidaan ajatella kuvaavan varsin kattavasti tyypillistä kokelasjoukkoa.

Otoskoko oli tämän tutkimuksen tavoitteisiin nähden riittävä, mutta johtopäätöksiä ei voida pitää täysin yleistettävänä, sillä tarkastelun kohteena oli vain kolme tehtävää. Tämä rajausta tarkoittaa, että erityyppisiä virheitä ja virheluokkia olisi voinut tulla esiin, jos tarkasteltavia tehtäviä olisi ollut enemmän tai jos kaikki matematiikan ylioppilaskokeiden geometrian tehtävät vuosilta 2019–2022 olisi analysoitu. Toisaalta tutkielman laajuus huomioiden laajempi aineisto olisi ollut haastavaa käsitellä perusteellisesti.

Tutkimuksen luotettavuuteen vaikuttivat myös aineiston käsittelyn subjektiiviset elementit. Virheiden ryhmittelyn ja luokittelun suoritti yksi henkilö, mikä mahdollistaa virheelliset tulkinnat tai sen, että osa virheistä on jäänyt huomaamatta tai tullut ryhmitellyksi virheellisesti. Tulkinnan luotettavuutta pyrittiin parantamaan käymällä aineisto läpi useamman kerran, mutta tulokset perustuvat tutkijan omaan analyysiin. Suppeat ja vähäisiä perusteluja sisältäneet vastaukset vaikeuttivat osaltaan virheiden syvällistä analysointia.

Huolimatta rajoitteista tutkimuksessa havaittiin toistuvasti samoja virhetyyppejä, mikä viittaa siihen, että yleisimmät virheet saattavat esiintyä myös muissa vastaavissa tehtävissä. Aineistoon perustuvat virheluokat ja niiden analyysi antavat näin arvokasta tietoa tyypillisistä virheistä ja virhekäsityksistä Geogebra-käytössä geometrian tehtävissä, vaikka tulokset eivät olisikaan täysin yleistettävissä kaikkiin ylioppilaskokeiden geometriatehtäviin.

### 6.2 Tulosten tarkastelua

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, millaisia virheitä Geogebra-ohjelmistolla ylioppilaskokeiden geometrian tehtävissä yleisimmin tehdään. Tutkimustulosten pohjalta pohditaan myös virheiden syntyyn vaikuttavia tekijöitä. Tutkitun aineiston pohjalta syntyi viisi virheluokkaa.

Kevään 2020 lyhyen oppimäärän tehtävässä 7 ja syksyn 2020 pitkän oppimäärän tehtävässä 5 ilmeni virheitä, kun opiskelijat pyrkivät soveltamaan Geogebraa saatuja tuloksia erityisesti kolmion pinta-alan laskemiseen. Virheet liittyivät usein siihen, että opiskelijat käyttivät ohjelmasta saatuja mittauksia tai suhteita väärin laskelmissa, vaikka geometriset kuviot oli piirretty oikein. Tämä havainto tukee aiempia tutkimuksia, joissa on todettu, että virheitä ilmenee usein, kun opiskelijat eivät osaa käyttää oikein mittauksia tai suhteita laskennassa, vaikka geometria olisi piirretty oikein (Olsson, 2018).

Trigonometrisissä tehtävissä opiskelijat tekevät virheitä usein valitessaan kaavan mallikuvan perusteella. Pelkän kaavan käyttäminen ei itsessään ole ongelmallista,

mutta virheitä syntyy, kun opiskelija valitsee väärän kaavan kyseiseen tilanteeseen. (Mensah, 2017.) Tällaiset virheet voivat heijastaa opiskelijoiden puutteellista ymmärrystä geometrian ja laskennan yhteydestä. Geogebra toimii apuvälineenä, mutta jos opiskelijat eivät ole tietoisia ohjelman rajoituksista tai mahdollisista väärinkäytön riskeistä, voivat he tehdä virheitä tulosten soveltamisessa. Tämä korostaa matemaattisten käsitteiden taustalla olevien periaatteiden ymmärtämisen tärkeyttä (Olsson, 2018), sillä ohjelmiston käyttö edellyttää myös sen rajallisuuksien huomioimista ja oikeanlaista soveltamista laskentatehtävissä.

Tutkimuksissa on todettu, että oppilaille tyypillisiksi virheiksi on havaittu myös vastauksen puutteellinen perustelu tai pelkän vastauksen antaminen (Özerem, 2012). Opiskelijat eivät välttämättä ymmärrä perustelujen merkitystä tai heillä on vaikeuksia yhdistää visuaalista ymmärrystään matemaattisiin selityksiin.

Tämä ilmiö ilmenee erityisesti syksyn 2020 pitkän oppimäärän tehtävässä 7, joka oli tarkoitettu Geogebralla ratkaistavaksi. Opiskelijat jättivät siis ratkaisunsa perustelut puutteellisiksi, erityisesti silloin, kun tehtävä oli ratkaistu kokonaan ohjelmistolla. Tällöin voi syntyä uskomus, että ohjelmisto itsessään antaa oikean vastauksen ilman, että matemaattisia perusteluja tarvitaan (Hähkiöniemi & Leppäaho, 2010). Tässä tapauksessa on kuitenkin tärkeää ymmärtää, että komennot eivät ole pelkästään ohjeita, vaan osa matemaattista päättelyä.

Virheluokaksi nimettiin tutkimuksen perusteella myös virheellinen laskentaprosessi. Tähän virheluokkaan sisältyi erityisesti tehtävänannossa annettujen tietojen virheellinen käyttö, niiden huomiotta jättäminen sekä pyöristysvirheet. Tehtävänannon tulkintaan liittyviä virheitä esiintyi erityisesti syksyn 2020 pitkän oppimäärän tehtävä 7 kohdassa 4. Tehtävänannossa ilmoitettiin särmän pituuden olevan  $a$ . Syntyi virheitä, kun ei huomioitu, miten geometrian osat tulisi skaalata tai pituuden tuli olla muuttuja eikä tietty arvo. Jos opiskelija ei tunnista muuttujan merkitystä ja roolia laskuissa, hän saattaa käyttää virheellisiä arvoja, kuten vakiolukuja (esim. 2), koska ei ole tietoinen siitä, että tehtävässä käytettävän muuttujan arvo on avoin ja se pitää määrittää laskennassa. Haasteena on voinut olla myös se, miten avoin muuttujan arvo otetaan huomioon Geogebraa piirretyn kuvion kannalta. Jos ohjelmointikomennot, mittauksen tarkkuus tai muuttujan määrittäminen ei ole hallussa, voi tapahtua väärinymmärryksiä, vaikka itse geometrian osat olisivat piirrettyinä oikein.

Tehtävänratkaisusta on vaikea erottaa, liittyvätkö virheet matematiikan sisällön väärinymmärryksestä vai teknologian käytöstä. Tämä ilmenee myös tutkimuksissa (Brown et al., 2016). Välttämättä kokelaat eivät ymmärtäneet tehtävänantoa oikein. Tehtävän huomiotta jättäminen ilmeni siinä, että vastauksessa ei otettu huomioon sivun pituutta, vaan annettiin pelkästään Geogebralla määritetty kappaleen tilavuus vastaukseksi.

Pyöristysvirheitä esiintyi erityisesti syksyn 2020 pitkän oppimäärän tehtävässä 5. Pyöristysvirheet ovat yleisiä geometrian tehtävissä myös aiemman tutkimuksen mukaan (Ojose, 2015). Haasteita tuotti erityisesti vastauksen antaminen tarkkana-arvona, vaikka lähtöarvot olivat tarkkoja lukuja. Syynä pyöristysvirheisiin voi olla harjoituksen puute tai se, että tehtävänantoon ei kiinnitetty tarpeeksi huomiota, ja opiskelijat olettivat Geogebra-antaman vastauksen olevan riittävä. Osa opiskelijoista ei välttämättä osannut muuttaa ohjelman asetuksia desimaalien lisäämiseksi.

Virheellisesti piirretty kuvio oli yleinen virheluokka, ja tämä ilmeni erityisesti syksyn 2020 pitkän oppimäärän tehtävässä 7. Tehtävässä opiskelijoiden tuli piirtää monitahokas, jonka sivutahkot olivat tasasivuisia kolmioita. Yleisin virhe oli, ettei pyramidia piirretty niin, että sen sivutahkot olisivat tasasivuisia kolmioita. Opiskelijat eivät todennäköisesti osanneet käyttää Geogebbran työkaluja riittävän hyvin tai olleet tietoisia siitä, mitä työkaluja tehtävän ratkaisemisessa olisi tullut hyödyntää. Opiskelijat saattavat kokea ohjelmiston käytön hankalaksi, erityisesti jos heillä on vähän kokemusta dynaamisista matematiikka ohjelmistoista, mikä on myös todettu aiemmissa tutkimuksissa (Brown et al., 2016). Lisäksi on mahdollista, että sotkettiin tasakylkisen ja tasasivuisen kolmion ominaisuudet keskenään. Tämä on yleinen virhe, joka on havaittu myös aiemmassa tutkimuksessa (Clements & Battista, 1992). Ei ole ymmärretty, että tasasivuisen kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, kun taas tasakylkisessä kolmiossa vain kaksi sivua ovat samanpituisia.

Kevään 2020 lyhyen oppimäärän tehtävässä 7 suklaarasian pohja piirrettiin usein virheellisesti. Yleisin lähestymistapa oli olettaa, että pohja koostuu viidestä neliöstä ja neljästä kolmiosta. Pohja oli piirretty ilman monikulmiotyökalua, minkä vuoksi se ei vastannut geometristen sääntöjen mukaisia pituussuhteita. Tässä tapauksessa opiskelijat näyttivät luottavan liikaa visuaaliseen intuitioonsa ja olettavan monitahokkaan pohjan olevan tietynlainen, vaikka se ei ollut geometrian sääntöjen mukainen. Mittaustyökalulla olisi ollut mahdollista havaita pohjan epäsäännönmukaisuudet. Tämä virheluokka tuo esille puutteet opiskelijoiden ymmärryksestä geometrian rakenteista sekä ohjelmiston tarjoamien työkalujen tarkoituksenmukaisesta hyödyntämisestä.

Geometriä virheitä esiintyi erityisesti syksyn 2020 pitkän oppimäärän tehtävän 7 kohdissa 2 ja 3, joissa opiskelijat joko olettivat kulman olevan tietyn kokoinen tai mittasivat väärän kulman. Tällöin Geogebbran käyttöön liittyvä tietämättömyys saattoi johtaa virheisiin: ilman ymmärrystä siitä, miten ohjelma mittaa kulmia, opiskelijat voivat helposti erehtyä mittaamaan väärää kulmaa. Tämä tukee aiemmin esitettyä väitettä siitä, ettei Geogebbran antamiin tuloksiin tulisi luottaa sokeasti, kuten tutkimuksessakin todetaan (Hähkiöniemi & Leppäaho, 2010). Opiskelijalla tulisi olla selkeä käsitys siitä, että oikea kulma on mitattu ja että ohjelma on käyttäytynyt odotetulla tavalla. Matemaattisten käsitteiden hallinta on olennainen osa myös näiden virheiden välttämistä.

Opiskelijat tekivät virheitä luottaessaan liikaa visuaaliseen arvioon tai yksinkertaistaessaan tehtävää liikaa, esimerkiksi olettaen kulman olevan tietyn tyyppinen pelkästään ulkonäön perusteella. Opiskelijat eivät välttämättä ymmärrä, miten kulmat, sivut ja rinnakkaiset viivat liittyvät toisiinsa (Özerem, 2012). Esimerkiksi oletettiin virheellisesti, että monitahokkaan pohjan ja särmän välinen kulma on sama kuin tahkon ja pohjan välinen kulma. Tämä virhe korostaa käsitteiden määrittelyn ja niiden merkityksen ymmärtämisen tärkeyttä geometriassa, mikä voi kuitenkin olla haastavaa vielä lukiotasonkin opiskelijoille (Joutsenlahti et al., 2018).

Geometrisia virheitä esiintyi samassa tehtävässä myös kohdassa neljä, jossa yläosan muodostava pyramidi tulkittiin koostuvan tetraedreista. Tästä johtuen opiskelijat käyttivät väärää kaavaa tilavuuden laskemiseen, nimittäin tetraedrin tilavuuskaavaa. Väärän kaavan käyttö pinta-alan ja tilavuuden laskennassa on ollut esillä myös aiemmassa tutkimuksessa (Özerem, 2012). Pyramidi ja tetraedri ovat molem-

mat kolmiulotteisia kappaleita, ja tetraedri on säännöllinen pyramidi, jossa pohja on kolmio. Tämä saattaa olla syynä siihen, että kokelaat olettivat niiden omaavan samanlaiset geometriset ominaisuudet. Vaikka niiden rakenne on samankaltainen, tilavuuslaskenta voi aiheuttaa sekaannusta, sillä pohjan muoto vaikuttaa kaavojen soveltamiseen eri tyyppisille pyramideille. Myös aiemmin mainittu havainto trigonometrisista virheistä, joissa opiskelijat tekevät virheitä usein kaavaa valitessaan mallikuvan perusteella, tukee tätä tulosta (Mensah, 2017).

Lisäksi muutama opiskelija oli ottanut mukaan ratkaisuun kuvakaappauksen Maolista löytyvästä tetraedrin tilavuuskaavasta. On siis hyvin mahdollista, että opiskelijat etsivät pyramidin tilavuuden kaavaa Maolista, mutta koska sitä ei löytynyt, he päätyivät käyttämään tetraedrin kaavaa.

### 6.3 Johtopäätökset

Virheiden taustalla on monia tekijöitä, kuten ohjelmiston käytön haasteet, käsitteiden ymmärtämättömyys ja virheelliset matemaattiset päätelmät. Vaikka Geogebra voi tukea geometriaan liittyvää oppimista, se ei yksinään takaa oikeita tuloksia, jos opiskelijat eivät hallitse matemaattisia periaatteita tai ohjelmiston käyttöä tarpeeksi hyvin. Tärkeää olisi, että opiskelijat saavat syvällistä ymmärrystä siitä, miten ohjelma toimii ja kuinka sen antamia tuloksia tulisi käsitellä ja soveltaa oikein. Kommentojen käyttäminen osana perusteluja on myös tärkeä osa opetusta, sillä opiskelijoiden kyky ymmärtää ohjelman toimintaa ja soveltaa sen antamia tuloksia oikein kehittyy vain, kun he osaavat yhdistää matemaattisen perustelun ja ohjelmiston käytön.

Tutkimuksen perusteella voidaan todeta, että Geogebrian käytössä yleisimmät virheet johtuvat usein opiskelijoiden puutteellisesta ymmärryksestä geometrian peruskäsitteistä ja lainalaisuuksista sekä puutteellisista perusteluista ratkaisujen yhteydessä. Virheiden juurisyy on usein geometrian ja ohjelmiston käytön yhdistäminen, sillä vaikka ohjelma auttaa visuaalisessa esittämisessä, sen tarjoamia tuloksia ei osata aina soveltaa oikein ilman vahvaa matemaattista taustaa. Tähän voidaan vaikuttaa parantamalla yleisesti geometrian osaamista, mutta myös vaatimalla Geogebraa käytetyille ratkaisuille perusteluja läpi lukiokoulutuksen.

On syytä huomioida, että tässä käsiteltiin vain virheluokkien yleisimpiä virhetyppejä, ja harvemmin esiintyvien virheiden syvällisempi tarkastelu rajattiin tutkielman ulkopuolelle. Tutkimuksessa tarkasteltiin vain pientä osaa geometrian ylioppilastehtävistä, joten olisi mielenkiintoista selvittää, nousevatko samat virheluokat esiin laajemmalla aineistolla. Lisäksi olisi kiinnostavaa tutkia, millaisia virheitä Geogebrella tehdään, jos käsiteltävä aihealue on erilainen, ja toistuuko siellä jokin sama virhetyyppi. Tutkimustulokset tarjoavat monia mielenkiintoisia jatkotutkimusmahdollisuuksia.

Tutkimusta voitaisiin hyödyntää muun muassa geometrian opetuksen parantamiseen keskittyvissä tutkimuksissa tai tutkimuksessa, jonka tavoitteena on vähentää virhekäsityksiä. Mielenkiintoista olisi myös tutkia, kuinka näitä virheitä ja virhekäsityksiä voitaisiin ehkäistä opetuksessa.

## 7 Viitteet

### Viitteet

Ashlock, R. B. (1998). *Error patterns in computation*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Brown, M., Bossé, M. J., & Chandler, K. (2016). Student Errors in Dynamic Mathematical Environments. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 17(1).

Clements, D. & Battista, M. (1992). *Geometry and Spatial Reasoning*. Teoksessa Grouws, D. (toim.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: (A Project of the National Council of Teachers of Mathematics)* (s. 420–464). National Council of Teachers of Mathematics.

Dingman, S. W. (2019). *The language of mathematics education: An expanded glossary of key terms and concepts in mathematics teaching and learning*. Vol. 1. Brill.

GeoGebra. (n.d.). "About GeoGebra". Saatavilla: <https://www.geogebra.org/about> [viitattu 15.10.2024].

Hähkiöniemi, M. & Leppäaho, H. (2010) Matematiikan aineenopettajaksi opiskelevien valmiudet ohjata opiskelijoita GeoGebra-avusteisissa tutkimustehtävissä. Teoksessa M. Asikainen, P. E. Hirvonen, & K. Sormunen (toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa* (s. 59–75). Joensuu.

Joutsenlahti, J., Räsänen, P., Silfverberg, H., & Aro, M. (2018). *Matematiikan opetus ja oppiminen* (1. painos.). Niilo Mäki Instituutti.

Kadarisma, G., Fitriani, N., Amelia, R. (2020). "Relationship between misconception and mathematical abstraction of geometry at junior high school". *Infinity Journal* 9.2, s. 213–222.

Korhonen, H., E. Luoma-aho & M. Rahikka (2013), *GeoGebra-opas*. Luku 13, MFKA-kustannus. ISBN: 978-952-207-049-4.

Mensah, F. (2017). Ghanaian Senior High School Students' Error in Learning of Trigonometry. *International Journal of Environmental and Science Education*, 12, 1709–1717.

Mohyuddin, R. G., & Khalil, U. (2016). Misconceptions of Students in Learning Mathematics at Primary Level. *Bulletin of Education and Research*, 38(1), 133-.

Ojose, B. (2015). Common misconceptions in mathematics : strategies to correct them. eng. Lanham, Maryland: University Press of America, Inc. ISBN: 0-7618- 5886-5.

Olsson, J. (2018). The Contribution of Reasoning to the Utilization of Feedback from Software When Solving Mathematical Problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(4), 715–735.

Opetushallitus. (2015). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015. Saatavilla: [https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124\\_lukion\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2015.pdf](https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf) [viitattu 16.10.2024].

Opetushallitus. (2019). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019. Saatavilla: [https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2019.pdf](https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf) [viitattu 16.10.2024].

Riswandi, A., Nursalam, N., Baharuddin, B. (2022). “Misconception Analysis of Math Class VII Using Three Tier-Test”. *MaPan: Jurnal matematika dan Pembelajaran* 10.1, s. 39–49.

Ryan, J., Williams, J. (2007). *Children’s Mathematics 4-15*. eng. 1. painos. Buckingham: McGraw-Hill Education. ISBN: 0335220428.

Vaníček, J. (2007). Dynamical Geometry: Analysis of Mistakes in Student Constructions. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 14(4), 197-.

Wassie, Y. A., & Zergaw, G. A. (2019). Some of the potential affordances, challenges and limitations of using GeoGebra in mathematics education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(8).

Ylioppilastutkintolautakunta. (n.d.). "Matematiikan kokeen koekohtaiset määräykset ja ohjeet". Saatavilla: <https://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/tutkinnon-toimeenpano/maaraykset-ja-ohjeet/koekohtaiset-maaraykset-ja-ohjeet/matematiikan-kokeen> [viitattu 9.10.2024].

Ylioppilastutkintolautakunta. (2020a). *Matematiikka (lyhyt oppimäärä)*, kevät 2020.

Saatavilla: <https://yle.fi/aihe/artikkeli/2020/02/11/2020-kevat-matematiikka-lyhyt-oppimaara> [viitattu 9.10.2024].

Ylioppilastutkintolautakunta. (2020b). *Matematiikka (pitkä oppimäärä)*, syksy 2020.

Saatavilla: <https://yle.fi/aihe/artikkeli/2020/08/19/2020-syksy-matematiikka-pitka-oppimaara> [viitattu 9.10.2024].

Ylioppilastutkintolautakunta. (2021). Matematiikka (pitkä oppimäärä), syksy 2021.

Saatavilla:<https://yle.fi/aihe/artikkeli/2021/08/24/2021-syksy-matematiikka-pitka-oppimaara> [viitattu 9.10.2024].

Özerem, A. (2012). Misconceptions In Geometry And Suggested Solutions For Seventh Grade Students. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 55, 720–729.