

Kaoottiset laserdiodit

Kandidaatintyö
Turun yliopisto
Fysiikka
2025
Perttu Piispanen
Tarkastaja:
FT T.K.

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO

Fysiikan laitos

Perttu Piispanen Kaoottiset laseriodit

Kandi, 37 s.

Fysiikka

Huhtikuu 2025

Tässä kandidaatintyössä tarkastellaan kaoottisten laseriodien dynamiikkaa ja niiden sovelluksia. Työssä käsitellään ensin kaaosteorian perusteita Lorenzin yhtälöiden avulla ja osoitetaan niiden yhteys lasereiden matemaattisiin malleihin. Lasereiden käyttäytymistä kuvataan nopeusyhtälöiden avulla, ja työssä keskitytään erityisesti puolijohdelasereihin, joiden dynaaminen vaste mahdollistaa kaoottisen käyttäytymisen tietyissä olosuhteissa.

Kaoottisen dynamiikan synnyttämiseen laseriodissa on useita menetelmiä, joista tässä työssä tarkastellaan optista takaisinkytkentää ja sähköistä modulaatiota. Näillä tavoilla voidaan lisätä järjestelmän vapausasteita, joka voi johtaa monimutkaisiin epälineaarisiin ilmiöihin, kuten periodin kahdentumiseen, mikä voi edelleen johtaa kaoottiseen käyttäytymiseen.

Työssä käsitellään myös kaoottisten laseriodien sovelluksia, kuten satunnaisluku-generaattoria ja kaoottista kommunikaatiota. Kaoottiset lasersignaalit voivat toimia nopeina ja turvallisina satunnaisuuden lähteinä esimerkiksi kryptografiassa ja tietoliikenteessä. Lisäksi kaoottisten lasereiden synkronointi mahdollistaa viestinnän, jossa kaoottinen signaali toimii kantajana, jolloin viestin salausta perustuu laserin kaoottiseen dynamiikkaan.

Asiasanat: dynaaminen systeemi, laser, laseriodi, kaaos, kaaosteoria, kaoottinen laser

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Kaaosteoria	2
2.1	Kaaoksen historia	2
2.2	Kaaoksen synty Lorenz-systeemissä	2
3	Laser ja laseriodit	6
3.1	Laserin toimintaperiaate klassisesti	6
3.2	Lasereiden matemaattinen mallintaminen	9
3.2.1	Nopeusyhtälöiden yhteys Lorenz yhtälöihin	11
3.3	Lasereiden luokittelu	13
3.4	Puolijohdelaser	14
3.4.1	Puolijohdelasereiden matemaattinen mallintaminen	16
4	Kaaoksen syntyminen laserdiodeissa	20
4.1	Kaaoksen syntymekanismit	20
4.2	Optinen takaisinkytkentä	21
4.3	Sähköinen modulaatio	25
5	Sovelluskohteet	28
5.1	Satunnaislukugeneraattori	28
5.2	Kaaos-kommunikaatio	30
6	Loppupäätelmät	35

1 Johdanto

Hermann Haken löysi yhteyden paljon tutkitun kaoottisen dynaamisen systeemin malliesimerkin *Lorenz-systeemin* ja laserin matemaattisen kuvauksen välillä. [1] Tämän seurauksena lasereiden epälineaarista ja kaoottista dynamiikkaa on tutkittu laajasti ja aiemmin tuntemattomille ilmiöille on voitu löytää selitys kaaosteorian avulla. Lasereiden mallintaminen dynaamisena systeeminä epälineaarisilla toisiinsa kytketyillä differentiaaliyhtälöillä mahdollistaa monipuolisten ja kokeellisesti havaittavien ilmiöiden tarkastelun ja niiden hyödyntämisen. Puolijohdelaserit ovatkin hyviä kandidaatteja kaoottisen dynamiikan hyödyntämiseen systeemin tilamuuttujien nopean vaihtelun takia ja voidaankin osoittaa, että niitä on mahdollista käyttää lukuisten nykyisten sovellusten lisäksi myös uusissa, kaoottisuutta hyödyntävissä sovelluksissa. [2]

Työssä tarkastellaan ensin Lorenzin systeemiä ja sen tasapainopisteiden kaoottisuutta. Seuraavaksi esitetään lasereiden toimintaperiaate ja matemaattinen kuvaus, jonka osoitetaan olevan ekvivalentti Lorenzin systeemin kanssa. Tämän jälkeen tarkastellaan puolijohdelasereiden (eli laserdiodien) toimintaa ja esitetään muutamia tapoja niiden ajamiseksi kaoottiseksi. Lopuksi työssä esitellään joitakin kaoottisten laserdiodien sovelluskohteita.

2 Kaaosteoria

2.1 Kaaoksen historia

Ruotsin kuningas Oscar II ilmoitti vuonna 1890 palkkiosta, jonka tulisi saamaan ensimmäinen tieteilijä, joka ratkaisisi n -kappaleen ongelman. Ranskalaisen matemaatikon Henri Poincarén vastaus voitti palkinnon, vaikkei hän saanutkaan ratkaistua kyseistä ongelmaa. Palkinto myönnettiin siitä huolimatta, sillä Poincaré toi uusia mullistavia havaintoja differentiaaliyhtälöiden ratkaisuihin. Nykyään Poincaréa pidetään kaaoksen löytäjänä. [3] [4] Poincarén jälkeen kaaoksen tutkiminen jatkui, mutta ei saavuttanut suurta mediahuomioita kuin vasta 1960-luvulla Edward N. Lorenzin, Yhdysvaltalaisen meteorologin, tutkiessa lämpötilaeron vaikutuksesta liikkuva fluidia. [5] Tässä dynaamisessa systeemissä on kolme epälineaarista toisiinsa kytkettyä differentiaaliyhtälöä, joita Lorenz yksinkertaistaa Saltzmanin (1962) tekemästä mallista, jolla kuvataan determinististä aperiodista virtausta. [4] Nykyään tämä malli tunnetaan yleisesti nimellä Lorenzin yhtälöt tai Lorenz-systeemi. [3] Lorenz osoitti, että tämä malli on erittäin herkkä alkuarvoille, mitä nykyään pidetään yhtenä vaatimuksista kaaottiselle systeemille.

2.2 Kaaoksen synty Lorenz-systeemissä

Lorenzin yhtälöt voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \tag{1}$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y, \tag{2}$$

$$\dot{z} = xy - \beta z, \tag{3}$$

missä σ , ρ ja β ovat järjestelmän fysikaaliset parametrit. Näiden merkitykset ovat seuraavat:

σ (**Prandtlin-luku**): Kuvaa liikemäärän ja lämmön diffuusion suhdetta. Se

määritellään matemaattisesti:

$$\sigma = \frac{\nu}{\alpha},$$

missä ν on kinemaattinen viskositeetti ja α on terminen diffuusiokerroin. [5] [6]

ρ (**Suhteellinen Rayleigh-luku**): Rayleigh-luvun R_a ja kriittisen Rayleigh-luvun R_c suhde:

$$\rho = \frac{R_a}{R_c}.$$

Suhde kertoo, kuinka paljon suurempi lämpötilagradientti on suhteessa kriittiseen arvoon R_c , jolloin konvektiovirtaukset fluidissa alkavat. Tällöin siis, jos $\rho < 1$: fluidi pysyy staattisena ja kun $\rho > 1$ konvektiovirtaukset syntyvät. [5]

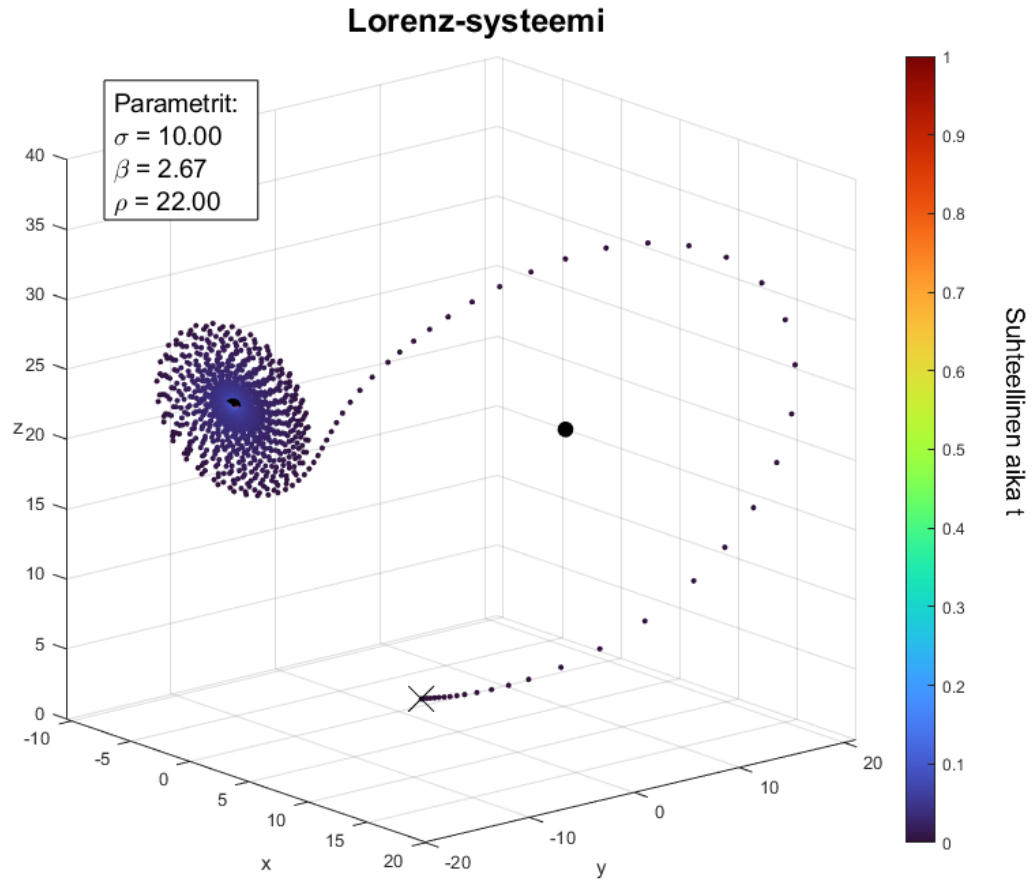
β (**Geometrinen parametri**): Liittyy konvektiokennon mittoihin. Se määritellään:

$$\beta = \frac{4}{1 + a^2},$$

missä a on konvektiokennon horisontaalinen aaltoluku. [5]

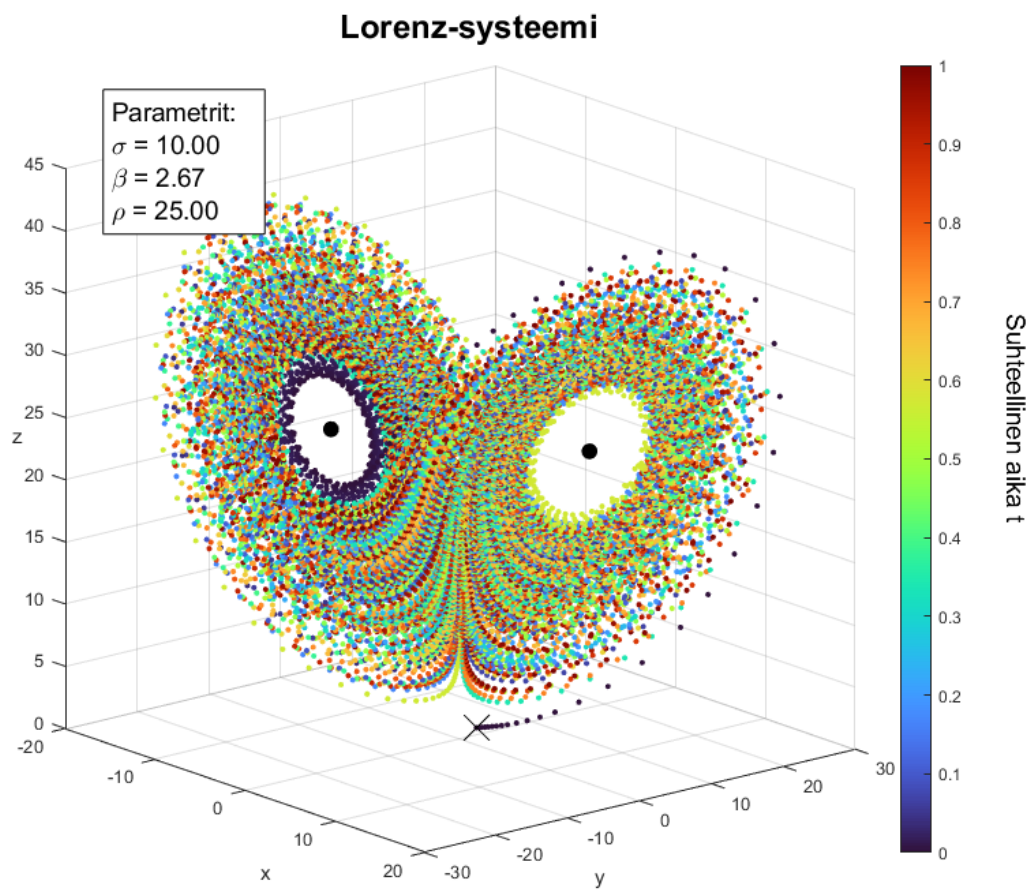
Yhtälöiden (1)-(3) kuvaamalla systeemillä on triviaaliratkaisuna stabiili tasapainopiste $(x,y,z) = (0,0,0)$. Kun $\rho > 1$, tämä tasapainopiste muuttuu epästabiiliksi, tapahtuu bifurkaatio ja syntyy kaksi uutta vakaata tasapainopistettä, $C^\pm = (x,y,z) = (\pm\beta\sqrt{\rho-1}, \pm\beta\sqrt{\rho-1}, \rho-1)$. Kaaoksen näkökulmasta on mielenkiintoista tarkastella, mitä systeemille tapahtuu, kun ρ arvoa kasvatetaan edelleen. Lorenz-systeemillä on olemassa ρ -arvo, $\rho_H = [\sigma(\sigma + \beta + 3)]/(\sigma - \beta - 1)$, jolloin tapahtuu nk. Hopf-bifurkaatio tasapainopisteissä C^\pm . [7]

Dynaamisten systeemien tiloja on mahdollista kuvata faasiavaruuden pisteinä, joissa toisistaan riippuvat muuttujat määrittävät faasiavaruuden ulottuvuudet. [4] Lorenz-systeemiä iteroidessa voidaan huomata, että kahden eri faasiavaruuden pisteen etäisyys toisistaan voi kasvaa eksponentiaalisesti. Attraktori on dynaamisen järjestelmän tila-avaruuden joukko, jota järjestelmän liikeradat lähestyvät asympotoottisesti.

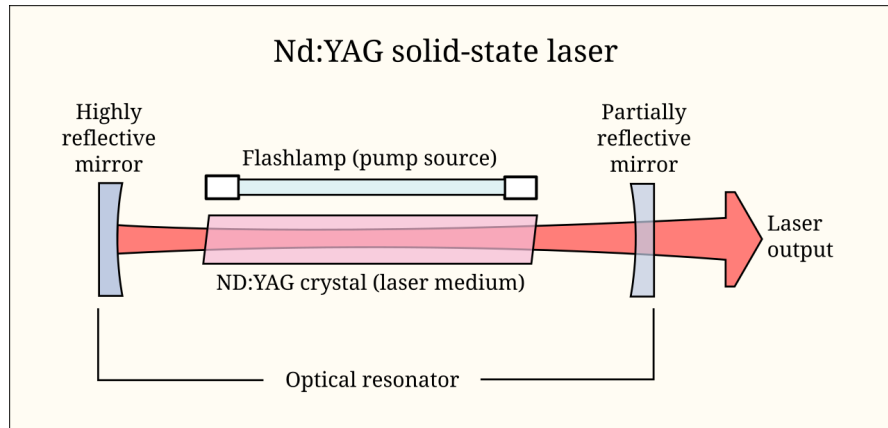


Kuva 1. Lorenz-systeemi, $\rho = 22$. Rasti merkitsee alkutilaa $(1,1,1)$ ja mustat pisteet merkitsevät laskettuja Lorenz-systeemin tasapainopisteitä.

Se vastaa siis tilaa tai tiloja, joita kohti dynaaminen systeemi ajautuu. [8] Kuvassa 1 on esitetty Lorenz-systeemin (kaavat (1)-(3)) liikerata faasiavaruudessa, kun $\rho = 22$. Kuvasta (1) huomataan, että ρ ollessa pienempi kuin kriittinen arvo, lähtöpisteestä $(1,1,1)$ systeemi ajautuu lopulta tasapainopisteeseen (musta piste vasemmalla), joka on syntynyt, kun $\rho > 1$. Toisaalta, jos ρ arvoa kasvatetaan, sen ylittäessä kriittisen arvon systeemin tasapainopisteet muuttuvat epästabiileiksi muodostaen niin kutsutun Lorenzin attraktorin (kuva 2).



Kuva 2. Lorenz-systeemi, $\rho = 25$.



Kuva 3. LASERin kaaviokuva. Kolme pääkomponenttia. [10]

3 Laser ja laseriodit

3.1 Laserin toimintaperiaate klassisesti

Laser (**L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation) on laite, joka tuottaa monokromaattista, koherenttia ja kollimoitua valoa stimuloidun emissioon avulla. Laseriin kuuluu yleensä kolme pääkomponenttia: laseroiva väliaine, pumppu sekä optinen resonattori (kuva 3). [9] Kolme prosessia, joiden avulla aine voi emittoitua tai absorboitua sähkömagneettista säteilyä, ovat absorptio, spontaani emissio ja stimuloitu emissio. Stimuloitu emissio voi tapahtua, kun virittyneessä tilassa oleva elektroni on vuorovaikutuksessa fotonin kanssa, jonka energia vastaa viritystilan ja alemman energiatilan välistä eroa. Tällöin energiatilassa E_2 oleva elektroni siirtyy alemmalle energiatilalle E_1 emittoiden fotonin, jonka suunta, vaihe ja taajuus ovat samat kuin elektroniin vuorovaikutuksessa olleella fotonilla (kuva 4). [9]

Laserointiolosuhteet stimuloidulle emissiolle luodaan laseroivassa väliaineessa, joka voi olla lasertyyppistä riippuen eri aineen olomuodossa. Yleisimmät laserit ovat kaasulaser, kiinteälaser (solid state laser engl.), puolijohdelaser ja värilaser (dye laser engl.). Laserissa väliaine asetetaan peilien väliin ja se muodostaa optisen resonattorin, jota kutsutaan Fabry–Perot-kammioksi. Se koostuu kahdesta kaarevasta peilistä, jotka ovat etäisyydellä L toisistaan. (kuva 3) Kun väliaineessa optisen reso-

naattorin sisällä saadaan tuotettua fotoneja, joiden aallonpituuden λ suhde kammion pituuteen on

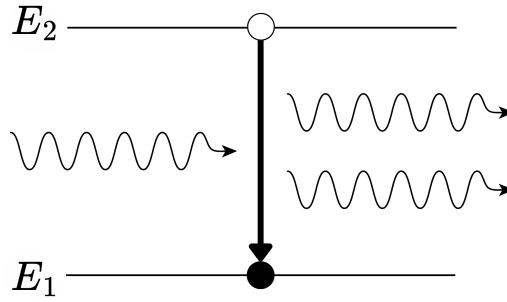
$$m\lambda = 2nL, \quad (4)$$

jossa m on positiivinen kokonaisluku ja n on taitekerroin, ne voivat muodostaa seisovia aaltoja kammion sisään. Valon vahvistus tapahtuu stimuloitulla emissiolla, jota varten väliaineeseen tarvitaan populaatioinversio. Tällä tarkoitetaan sitä, että ylemmän energiatilan miehitysluvun on oltava suurempi alempaan energiatilaan nähden. [11]

Elektronitransitioiden määrä johtuen stimuloitusta emissiosta kaksienenergiataso laserille (klassisesti määriteltynä)

$$\frac{dN_2}{dt} = B_{21}N_2W(f), \quad (5)$$

on verrannollinen ylemmän energiatilan miehityslukuun N_2 , missä B_{21} kuvastaa stimuloitun emission todennäköisyyttä (Einsteinin kerroin) ja $W(f)$ on taajuusriippuvainen energiatiheys. Tasapainotilanteessa stimuloitun ja spontaanin emission nopeus sekä absorptionopeus ovat yhtä suuret. Tällöin yhtä paljon elektroneja virittyy ylemmälle energiatilalle termisen virittymisen ja ftoniabsorption seurauksena kuin tippuu alemmalle energiatilalle ja vapauttaa energiansa hilavärähtelyä tai ftonina. Jotta stimuloitun emission määrä ylittäisi häviöt, tarvitaan populaatioinversio. Tällä voidaan kasvattaa stimuloitun emission todennäköisyyttä ja mahdollistaa se, että systeemissä voi tapahtua enemmän emissiota kuin absorptiota. Populaatioinversion aikaansaamiseksi systeemiin pitää tuoda ulkoista energiaa. Tätä prosessia hoitaa pumppu, joka virittää elektroneja jatkuvasti ylemmälle energiatilalle. Pumpun toimintamekanismi riippuu lasertyypistä ja se voi olla esimerkiksi laserdiodilla jännitelähde, tai ND:YAG kiinteälaserin tapauksessa, energiaeroa vastaavalla taajuusalueella toimiva lamppu (kuva 3). [11] Vaikka populaatioinversio olisi saavutettu kammiossa sijaitsevassa laseroivassa väliaineessa, voi laserointi tapahtua vain, jos



Kuva 4. Stimuloitu emissio.

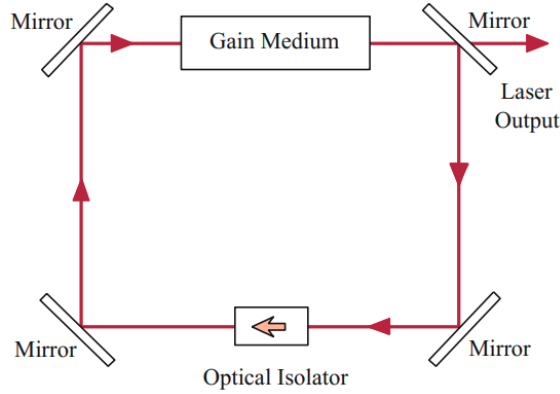
säteilyn kasvu laserointitaajuudella yhden edestakaisen matkan aikana ylittää kaikki kammiossa ja peileissä tapahtuvat häviöt. Systeemissä on siis oltava kynnyсарvo (gain threshold engl.) g_{th} liittyen intensiteetin kasvuun, jolloin laserointi tapahtuu. Se määritellään

$$g_{th} = \alpha - \ln R/L, \quad (6)$$

jossa α on absorptiokerroin, R on peilien reflektanssi ja L kammion pituus. [11]

Kun systeemin vahvistus ylittää kynnyсарvon ja systeemissä tapahtuu spontaani emissio siten, että aallonpituus on sopiva suhteessa kammion pituuteen (kaava (4)) ja fotonin suunta on kohtisuoraan peileihin nähden, se voi stimuloida muita fotoneja liikkeussaan kammion sisällä kohti peiliä. Kun aaltorintama heijastuu peilistä, se interferoi konstruktiivisesti saman moodin kanssa, mikä edelleen vahvistaa tietyn moodin ilmentymistä kammiossa. [11]

Jos pumppauksen voimakkuutta kasvatetaan, se lisää ylemmällä energiatilalla olevien elektronien määrää ja kasvattaa mahdollisuutta stimuloitulle emissiolle eli lasersäde voimistuu. Intensiteetti ei kuitenkaan kasva negatiivisen takaisinkytkennän takia mielivaltaisen suureksi. Jos vahvistus kasvaa, laserin intensiteetti voimistuu, mikä ajaa ylemmän energiatilan miehityslukua N_2 alas, mikä pienentää vahvistusta. Toisaalta, jos vahvistus pienenee, intensiteetti pienenee, jolloin N_2 kasvaa, mikä kasvattaa vahvistusta. Tätä energian vaihtoa stimuloitun ja spontaanin emission sekä absorption vaikutuksesta elektroneiden ja fotonien välillä voidaan kuvata laserin



Kuva 5. Kehäresonaattori-laserin kaaviokuva. [14]

nopeusyhtälöiden (laser rate equations engl.) avulla. [11] [12]

3.2 Lasereiden matemaattinen mallintaminen

Lasereiden dynamiikka on hyvin monimutkaista, mutta sitä voidaan mallintaa semiklassisesti yksinkertaisilla toisiinsa liitetyillä differentiaaliyhtälöillä eli laserin nopeusyhtälöillä. [13] Niiden johtaminen löytyy monista eri lasereita käsittelevistä oppikirjoista (esimerkiksi [14]) ja käsitelläänkin tässä vain (Ohtsubo 2017) saatuja tuloksia.

Maxwell-Bloch yhtälöt kuvaavat atomista kehäresonaattori-laseria (kuva 5), jossa valo ei ole Fabry-Perot kammiossa, vaan heijastuu peileistä kiertäen väliainessa vain yhteen suuntaan. Tarkasteltavassa mallissa oletetaan atomeilla olevan vain kaksi energiatasoa. Tämä ei ole aina toimiva malli oikeille lasereille, mutta sen matemaattinen käsittely on helppoa ja malli voidaan helposti laajentaa Fabry-Perot lasereille.

Maxwell-Bloch yhtälöt ovat

$$\frac{\partial E(z,t)}{\partial z} + \frac{\eta}{c} \frac{\partial E(z,t)}{\partial t} = i \frac{k}{2\epsilon_0 \eta^2} P(z,t) - \frac{\eta}{2T_{\text{ph}} c} E(z,t), \quad (7)$$

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} = -i(\omega_A - \omega_0)P(z,t) + \frac{i\mu^2}{2\hbar} E(z,t)W(z,t) - \frac{P(z,t)}{T_2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial W(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \{E(z,t)P^*(z,t) - E^*(z,t)P(z,t)\} + \frac{W_0 - W(z,t)}{T_1}. \quad (9)$$

Yhtälöiden kolme tilamuuttujaa ovat:

$E(z,t)$ (**sähkökentän amplitudi**): kuvaa miten laserväliaine vaikuttaa sähkökentän voimakkuuteen,

$P(z,t)$ (**väliaineen makroskooppinen polarisaatio**): kuvaa aineen vuorovaikutusta sähkömagneettisen kentän kanssa,

$W(z,t)$ (**makroskooppinen populaatioinversio**): viritystilan ja perustilan miehityslukujen erotus.

Muut tärkeimmät muuttujat yhtälöissä ovat:

W_0 (**populaatioinversio**): pumpun aiheuttama populaatioinversio laserointikynnyksellä.

T_1 (**populaatioinversion relaksaatioaika**): poikittainen (longitudinal engl.) relaksaatioaika. Kertoo, kauanko atomin populaatioinversio keskimäärin kestää.

T_2 (**polarisaation relaksaatioaika**): pitkittäinen (transverse engl.) relaksaatioaika. Kertoo, kauanko elektronin perustilan ja viritystilan kvanttimekaanisen vaiheeron relaksoituminen kestää. Pidempi polarisaation relaksaatioaika tarkoittaa, että elektronin polarisoituvat helpommin ja stimuloitu emissio tapahtuu todennäköisemmin. Matemaattisesti se määrittellään elektronitilojen todennäköisyysamplitudien vaihe-erosta.

T_{ph} (**fotonin relaksaatioaika**): kertoo, kauanko fotoni keskimäärin viettää kammiossa ennen poistumistaan tai absorboitumistaan.

w (**kulmataajuus**): w_0 on kammion ja väliaineen sallima taajuus ja w_a on atomin luonnollinen resonanssitaajuus. Nämä voivat poiketa toisistaan. Jos $w_0 = w_a$, polarisaatio on täysin koherenssissa sähkökentän kanssa, jolloin stimuloitu emissio on tehokkainta.

k (**aaltoluku**): määrittellään $k = \eta\omega_0/c$, jossa η on taitekerroin ja c valonnopeus.

3.2.1 Nopeusyhtälöiden yhteys Lorenz yhtälöihin

Saksalainen fyysikko Hermann Haken löysi 1970-luvulla yhteyden Maxwell-Bloch yhtälöiden ja Lorenz yhtälöiden välillä. Jos yhtälöissä (7)-(9) olevia muuttujia skaalataan oikealla tavalla, ne voidaan saattaa samaan muotoon Lorenzin yhtälöiden kanssa. [1] Asetetaan $\tilde{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 c \eta}{2}} E$, $\tilde{P} = \frac{k}{\epsilon_0 \eta^2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 c \eta}{2}} P$ ja $w = \sigma_s W$, jossa $\sigma_s = \frac{\mu^2 \omega_0 T_2}{2 \epsilon_0 \hbar c \eta}$ ja oletetaan $\partial E / \partial z$ häviävän pieneksi, jolloin saamme yhtälöt muotoon

$$\frac{d\tilde{E}(t)}{dt} = i \frac{c}{2\eta} \tilde{P}(t) - \frac{1}{2T_{\text{ph}}} \tilde{E}(t), \quad (10)$$

$$T_2 \frac{d\tilde{P}(t)}{dt} = -(1 - i\delta) \tilde{P}(t) + i \tilde{E}(t) w(t), \quad (11)$$

$$T_1 \frac{dw(t)}{dt} = w_0 - w(t) + \frac{\text{Im}[\tilde{E}^*(t) \tilde{P}(t)]}{I_{\text{sat}}}, \quad (12)$$

jossa $\delta = (\omega_0 - \omega_A) T_2$ on skaalattu polarisaation relaksaatioaika ja $I_{\text{sat}} = \frac{\hbar^2 c \eta \epsilon_0}{2 \mu^2 T_1 T_2}$ on saturaatiointensiteetti. Jos yhtälöitä muokataan edelleen käyttäen normalisoituja muuttujia $x = \sqrt{b/I_{\text{sat}}} \tilde{E}$, $y = i(cT_{\text{ph}}/\eta) \sqrt{b/I_{\text{sat}}} \tilde{P}$ ja $z = (\omega_0 - \omega) cT_{\text{ph}}/\eta$ ja skaalataan aika $t/T_2 \rightarrow t$, yhtälöt saadaan Lorenz-Haken muotoon

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\sigma \{x(t) - y(t)\}, \quad (13)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -(1 - i\delta)y(t) + \{r - z(t)\}x(t), \quad (14)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = -bz(t) + \text{Re}[x^*(t)y(t)], \quad (15)$$

jossa $\sigma = T_2/2T_{\text{ph}}$, $b = T_2/T_1$ ja $r = w_0 cT_{\text{ph}}/\eta$. Lorenz-Haken yhtälöt ovat lähes täysin identtiset Lorenz yhtälöiden (1)-(3) kanssa ja atominen kaksienegiataso laser onkin samanlainen kaoottinen systeemi, kuin Lorenz systeemi. [1] [14]

Systeemin stabiilisuutta voidaan tarkastella lineaarisen stabiilisuusanalyysin (linear stability analysis engl.) avulla. Käytännössä tasapainossa olevaan systeemiin tehdään pieni häiriö (eli sijoitetaan yhtälöihin (13)-(15) esim. $x(t) = x_s + \delta x(t)$) ja oletetaan lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisun olevan muotoa $\delta h_0 = e^{\gamma t}$, $h = x, y, z$, jolloin yhtälön ominaisarvot voidaan ratkaista karakteristisen yhtälön avulla. Ominaisarvon reaalin osa kertoo tasapainopisteen stabiilisuudesta: jos se on negatiiv-

vinen – pieni poikkeama tasapainopisteestä palautuu takaisin tasapainopisteeseen ja jos se on positiivinen – häiriö kasvaa eksponentiaalisesti, jolloin kyseinenen tasapainopiste on epästabiili. Ratkaisulla voi olla myös imaginäärinen osa, joka kuvaa systeemin relaksaatio-oskillaatio taajuutta häiriön jälkeen. Relaksaatio-oskillaatio on tärkeä ilmiö lasereissa ja se kuvaa häiriön kehittymistä ajassa ja toisaalta sitä, miten energia siirtyy eri muuttujien välillä [15]. Käytännössä se voi näkyä laserin tilamuuttujien vaimenevana oskillaationa tasapainopisteen ympärillä. Ilmiön kesto on nanosekuntiaikaskaalassa. [14]

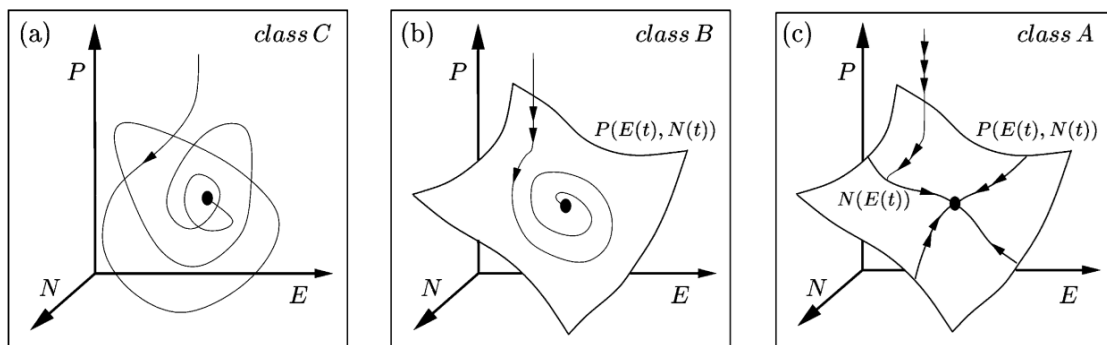
Jos ominaisarvon reaaliosa asetetaan nolaksi, voidaan karakteristisen yhtälön avulla ratkaista parametrille r kynnsarvo, jolla laser käynnistyy. r on pumppuparametri, eli se kuvaa populaatioinversion kasvattamisen voimakkuutta. Se voidaan ajatella analogisena Lorenz yhtälöissä esiintyvään ρ (Suhteellinen Rayleigh-luku) parametriin, joka kuvaa sitä, milloin konvektiovirtaukset Lorenz-systeemin fluidissa alkavat. Pumppuparametrin kynnsarvolle saadaankin samankaltainen tulos,

$$r_{\text{th}}^{(1)} = 1 + \frac{\delta^2}{(\sigma + 1)^2}, \quad (16)$$

joka on 1, kun pieni häiriö $\delta = 0$. Eli laserointi käynnistyy, kun $r = r_{\text{th}}^{(1)} = 1$. Yläindeksi (1) viittaa siihen, että laserille on olemassa toinenkin kynnsarvo

$$r_{\text{th}}^{(2)} = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}, \quad (17)$$

jossa tasapainopisteelle tapahtuu bifurkaatio ja jota suuremmilla arvoilla laser voi käyttäytyä kaoottisesti. [14]. Jotta laserilla olisi toinen kynnsarvo, saadaan yhtälön nimittäjästä ehto $\sigma > b - 1$, jota kutsutaan huonoksi kammion kunnoksi (bad cavity condition engl.), joka voidaan muotoilla $T_2/T_{ph} > T_2/T_1 - 1$. Tämä ehto voidaan tulkita niin, että polarisaation relaksaatioajan on oltava lyhyt (samaa luokkaa fotonin elinajan kanssa) verrattuna populaatioinversion relaksaatioon. Tällöin siis elektronien ja sähkömagneettisen kentän välinen vaihe-ero kasvaa nopeasti, eivätkä ne putoa alemmalle energiatilalle stimuloidun emission takia yhtä helposti ja sys-



Kuva 6. Tyypillisten tilamuuttujien liikeradan hahmotelmia, systeemin lähestyessä vakaata tasapainopistettä luokan C, luokan B ja luokan A vapaasti värähtelevissä lasereissa. [17]

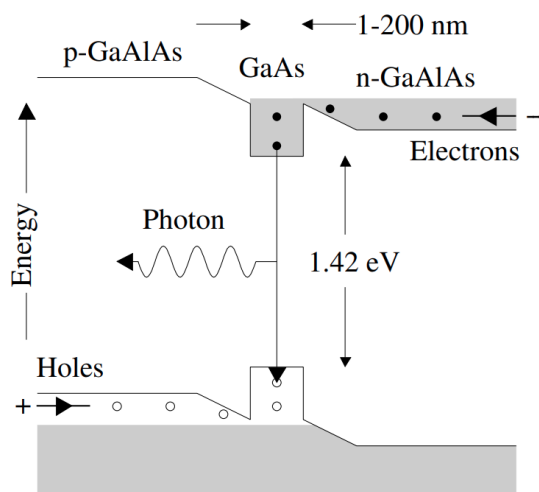
teemi on dissipatiivinen. Tämä voidaan havaita mm. spektriviivan levenemisenä. [14]

3.3 Lasereiden luokittelu

Laserit voidaan jakaa relaksaatioaikojen T_1 , T_2 ja T_{ph} avulla kolmeen eri luokkaan. [16]

Luokka C: Kun kaikki kolme relaksaatioaikaa, populaatiolle, polarisaatiolle ja kentälle (fotonin elinaika), ovat samaa kertaluokkaa, laser kuuluu luokkaan C. Tällöin tarvitaan täydet Maxwell-Bloch yhtälöt kuvaamaan laserin dynamiikkaa.

Luokka B: Jos systeemin populaatioinversio [16] tai polarisaatio [17] relaxoituu hitaasti, laserin dynamiikkaa voidaan mallintaa vain kentän ja polarisaation tai kentän ja populaatioinversion differentiaaliyhtälöillä. Polarisaation yhtälö (8) tai populaatioinversion yhtälö (9) voidaan eliminoida adiabaattisesti, joka tarkoittaa sitä, että populaation muutosta voidaan kuvata kentän ja populaatioinversion avulla, tai populaatioinversiota voidaan kuvata kentän ja polarisaation avulla. Tällöin tarvitaan siis vain kaksi differentiaaliyhtälöä kuvaamaan laserin dynamiikkaa, koska kolmas tilamuuttuja voidaan määrittää yksikäsitteisesti kahden muun tilamuuttujan avulla, eikä tällöin laserissa voi luonnostaan esiintyä kaoottista käyttäytymistä.



Kuva 7. Energiatasot DH-GaAlAs -laserissa. [11]

[4] [14]

Luokka A: Jos sekä populaatioinversion että polarisaation relaksaatioajat ovat pitkiä verrattuna kentän relaksaatioaikaan, differentiaaliyhtälöt populaatiolle ja polarisaatiolle voidaan eliminoida adiabaattisesti. Tällöin laseria voidaan kuvata pelkän kentän differentiaaliyhtälön avulla. Luokan A laserit ovat yleisesti kaikista stabiileimpia. [14] [16]

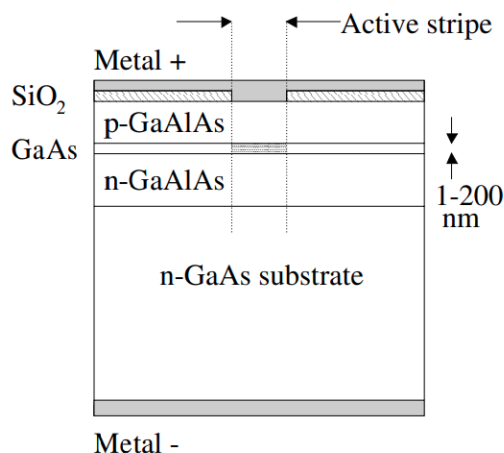
Tilamuuttujien dynamiikka on siis erilaista eri luokkien lasereissa (kuva 6). Kuitenkin myös luokkien B ja A laserit voidaan saattaa käyttäytymään kaoottisesti tuomalla systeemiin uusia vapausasteita, jolloin systeemin tilan kuvaaminen voi vaatia useampia toisiinsa kytkettyjä differentiaaliyhtälöitä. [16]

3.4 Puolijohdelaser

Yksi lasereissa yleisesti käytetty puolijohdemateriaali on galliumarsenidi (GaAs). Sitä voidaan douputa N-tyyppiseksi korvaamalla osa gallium-atomeista esimerkiksi tinalla tai piillä ja vastaavasti P-tyyppiseksi korvaamalla galliumia sinkillä tai kadmiumilla. P- ja N-tyypin puolijohteet yhdistämällä saadaan muodostettua PN-liitos eli diodi. [11] Kun diodiin syötetään kontaktipotentiaalia suurempi myötäsuuntai-

nen jännite (forward bias), saadaan elektroneja virtaamaan N-puolelta P-puolelle ja aukkoja virtaamaan vastakkaiseen suuntaan potentiaalivallin yli. (kuva 7). Ulkoinen jännitelähde vastaa laseriin toiminnan ylläpitämiseksi vaadittavaa pumpppua. Laser ei kuitenkaan emittoi koherenttia valoa ennen kuin virta ylittää kriittisen arvon (threshold current engl.). Tämä johtuu siitä, että stimuloitun emission täytyy kilpailla absorptio-prosessien kanssa, joissa elektroni-aukko pareja muodostuu ftoniabsorptiossa, mikä pienentää koherenttien fotonien määrää. Tämän lisäksi elektroni-aukko pareja rekombinoituu myös spontaanin emission takia. Kun ulkoista virtaa kasvatetaan tarpeeksi paljon, elektronien lukumäärä johtovyöllä kasvaa niin suureksi, että materiaalista tulee optisesti läpinäkyvää. Tällöin fotoneja absorboituu yhtä paljon, kuin stimuloitu emissio tuottaa, jolloin fotonien nettotuotto on nolla. Jos virta ylittää tämän kynnsarvon, stimuloitun emission todennäköisyys kasvaa absorptiota suuremmaksi, jolloin aktiivisessa alueessa voi tapahtua laserointia. Tämän lisäksi aktiivisen alueen täytyy olla esimerkiksi Fabry-Perot kammiossa, jotta kenttä voi voimistua. [18] Peilipinta voidaan puolijohteessa toteuttaa muodostamalla aktiivisen alueen päihin rajapinnat (cleaved facets) kahden eri taitekertoimen (GaAs ja ilma) välillä. [11]

Puolijohdelasereita voidaan parantaa, jos yhdestä puolijohdetyypistä tehty kerros (esim. GaAs) saadaan kahden, toisesta puolijohdesta koostuvien, N- ja P-tyypin puolijohde-kerrosten (cladding layers engl.) väliin (kuva 8). [18] Tällaista kolmikerroksista heterorakennetta, jossa laserointi tapahtuu kahden eri tyypin puolijohteen välissä, kutsutaan DH-laseriksi (double heterostructure engl.). DH-laserin energia-diagrammista (kuva 7) voidaan nähdä, että aktiivisen alueen, joka on erillinen GaAs-alue kahden eri puolijohteen välissä, energia-aukko on pienempi, jolloin radiatiivinen rekombinaatio saadaan ohjattua tapahtumaan tässä pienessä kerroksessa. Aktiivisen alueen paksuus on nanometriä luokkaa ja leveys muutamia mikrometrejä, yleensä samaa luokkaa laserin aallonpituuden kanssa. [11]

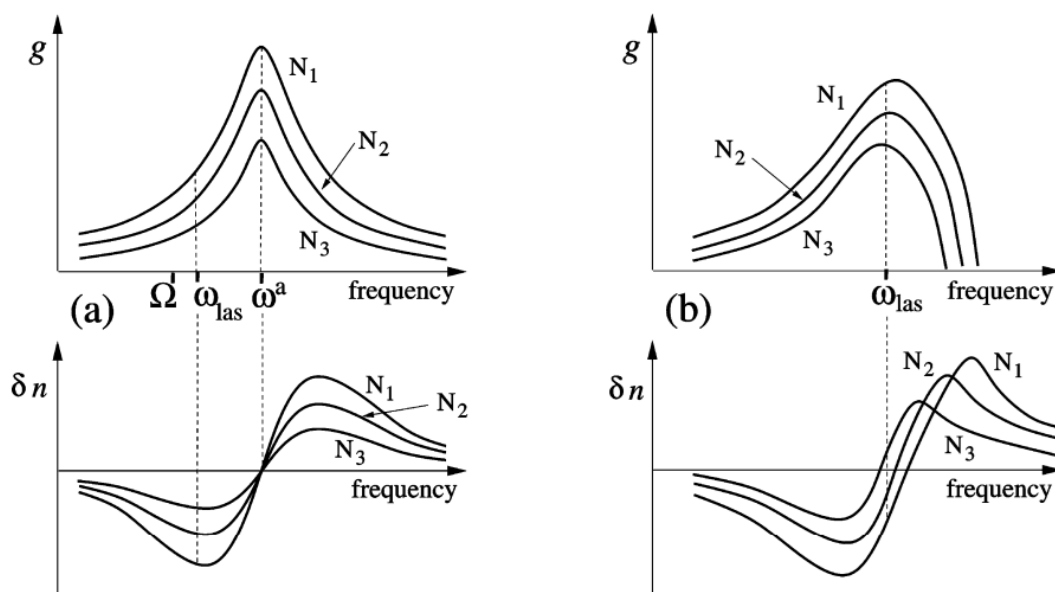


Kuva 8. Poikkileikkaus DH-laserista kohtisuorassa lasersäteen optiseen akseliin nähden. [11]

3.4.1 Puolijohdelasereiden matemaattinen mallintaminen

Puolijohdelaserit eivät ole kaksienergiatason systeemejä. Niitä voidaan kuitenkin mallintaa sellaisina olettaen, että valenssi- ja johtovyön sisäinen (intraband engl.) relaksaatioaika eli polarisaation relaksaatioaika $T_2 \approx 10^{-13}$ s on todella pieni [18], jolloin rekombinaation voidaan olettaa tapahtuvan vain kahden energiatason välillä. Puolijohdelaser kuuluu luokkaan B eli voimme kuvata sitä kahdella toisiinsa kytkeytyllä differentiaaliyhtälöllä. Matemaattiseen malliin otamme kuitenkin mukaan koko kompleksisen sähkömagneettisen kentän eli amplitudin lisäksi vaiheen, koska puolijohdelasereissa taitekerroin voi muuttua injektiovirran funktiona mikä muuttaa kentän vaihetta. [18]

Yksi tärkeä parametri puolijohdelasereissa on spektrilaajennuskertoimen (linewidth enhancement factor engl.) eli nk. α -kerroin. Se määrittää, miten taitekerroin muuttuu väliaineessa populaatioinversion takia. [17] On hyvä huomata, että α -kerroin on myös taajuusriippuvainen. Tämä tarkoittaa, että populaatioinversion muuttuessa vahvistuskaista siirtyy, koska kaviteetin luontainen oskillointitaajuus muuttuu taitekertoimen muuttuessa (kuva 9). Se määrittää väliaineen laseroskillaation aiheuttaman kompleksisen sähköisen susceptibiliteetin muutoksen χ_l reaali- ja imagi-



Kuva 9. Vahvistuskertoimen g ja taitekertoimen muutoksen δn hahmotelmat atomiselle laserille (a) (esim. kaasulaser) ja tyypilliselle puolijohdelaserille (b); $N_1 > N_2 > N_3$ kuvaavat eri viritystilan populaatiotiheyksiä. [17]

nääriosan suhteena

$$\alpha = \frac{\text{Re}[\chi_l]}{\text{Im}[\chi_l]} = -2 \frac{\omega}{c} \frac{\frac{\partial n}{\partial n}}{\frac{\partial g}{\partial n}}. \quad (18)$$

Voidaan osoittaa, että puolijohdelaserien spektrin viivanleveys on $1 + \alpha^2$ kertaa isompi kuin atomisen laserin. [14]

Puolijohdelaserin nopeusyhtälöt voidaan esittää muodossa

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} G_n \{n(t) - n_{th}\} A(t), \quad (19)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{2} \alpha G_n \{n(t) - n_{th}\}, \quad (20)$$

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{J}{ed} - \frac{n(t)}{\tau_s} - G_n \{n(t) - n_0\} A^2(t), \quad (21)$$

jossa tilamuuttujat ovat A (**kentän amplitudi**), ϕ (**kentän vaihe**) ja n (**varauksenkuljettajien tiheys**). Yhtälöistä voidaan huomata, että vaikka käytämme kolmea yhtälöä kuvaamaan laserin tilaa, niistä vain kaksi on kytketty toisiinsa. Vaihe ei siis vaikuta amplitudin tai varauksenkuljettajien tiheyden muutosnopeuteen.

Muita tärkeitä yhtälöissä (19)-(20) esiintyviä muuttujia ovat:

G_n (**lineaarinen vahvistukerroin**): vahvistuskertoimen alaindeksi n viittaa siihen, että se riippuu varaustenkuljettajien tiheydestä n . Se määritellään $G_n = v_g \frac{\partial g}{\partial n}$, jossa $v_g = c/\eta_e$ on ryhmänopeus, joka määritellään valonnopeuden ja efektiivisen taitekertoimen η_e suhteena ja jossa g on vahvistuskerroin. Kun laser toimii lähellä kynnystilaa, voidaan vahvistus $g(n)$ approksimoida lineaarisesti kantajatiheyden funktiona käyttämällä Taylorin sarjan ensimmäistä astetta:

$$g(n) \approx g_{\text{th}} + \frac{\partial g}{\partial n}(n - n_{\text{th}}),$$

missä g_{th} on vahvistus laseroinnin kynnyksellä ja on n_{th} kynnystiheys. Linearisointi yksinkertaistaa dynaamisia yhtälöitä ja mahdollistaa laserin käyttäytymisen analysoinnin pienillä poikkeamilla kynnystilasta. [14]

τ_s (**kantajien rekombinaatioaika**): kertoo kauanko elektronit ja aukot pysyvät viritystilassa ennen rekombinaatiota. Rekombinaatioaika on tarkemmin määriteltynä riippuvainen kantajatiheydestä

$$\frac{1}{\tau_s} = A_{\text{nr}} + Bn + Cn^2, \quad (22)$$

jossa A_{nr} on rekombinaatiotaajuus ei-radiatiivisille rekombinaatioille (esim. hilavärähtelyt), B on spontaaniin emissioon liittyvä rekombinaatiokerroin ja C on Augerkerroin. Vaikka τ_s yleisesti riippuukin kantajatiheydestä, analysoidessa laseriodin dynamiikkaa sitä voidaan käsitellä vakiona. [14]

Yhtälössä (21) esiintyvä termi J/ed kuvaa injektiovirrantiheyden J aiheuttamaa pumppausta, kun e on elektronin varaus ja d aktiivisen alueen paksuus.

Tasapainotilojen ratkaiseminen tapahtuu kuten atomilasereiden tapauksessa, eli ensin tilamuuttujien muutosnopeudet asetetaan nolllaksi, jolloin saadaan tasapainoti-

lan (steady state engl.) ratkaisuksi:

$$A_s^2 = \tau_{\text{ph}} \left(\frac{J}{ed} - \frac{n_{\text{th}}}{\tau_s} \right), \quad (23)$$

$$\phi_s = 0, \quad (24)$$

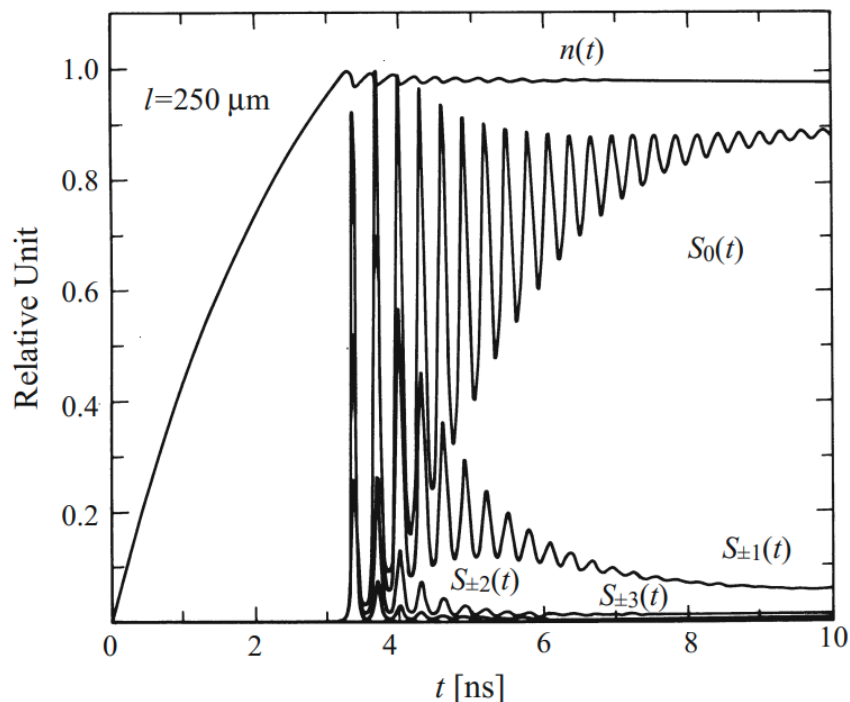
$$n_s = n_{\text{th}}, \quad (25)$$

jossa τ_{ph} on kentän (eli fotonien) elinaika. Lisäksi jälleen voidaan tehdä lineaarinen stabiilisuusanalyysi, eli ratkaistaan differentiaaliyhtälöt pienen perturbaatiotermin lisäyksen jälkeen tasapainopisteessä, jolloin saadaan tasapainotilan stabiilisuus selville. Kun jätetään triviaaliratkaisu huomiotta, saadaan ratkaisun reaaliseksi ja imaginääriseksi osaksi:

$$\Gamma_R = -\frac{1}{2} \left(G_n A_s^2 + \frac{1}{\tau_s} \right), \quad (26)$$

$$\omega_R = \sqrt{\frac{G_n A_s^2}{\tau_{\text{ph}}} - \Gamma_R^2}, \quad (27)$$

haettu ratkaisu γ on siis muodossa $\gamma = \Gamma_R + i\omega_R$. Koska reaaliosan kerroin on negatiivinen, tasapainopiste on stabiili, eli pienen häiriön jälkeen systeemi palautuu takaisin tasapainopisteeseen. Imaginääriosan eli relaksaatio-oskillaatiotaajuuden voidaan ajatella johtuvan siitä, että fotonit katoavat nopeasti kammioista eivätkä kantajat ehdi pysymään niiden muutoksen tahdissa (kuva 10). [14] [17] Systeemillä on siis tietty dynaaminen vaste eikä se asetu suoraan tasapainotilaan. Relaksaatio-oskillaatioiden taajuus on puolijohdelasereissa tyypillisesti 1 – 10 GHz luokkaa. Se myös voidaan määritellä mittana sille, kuinka nopeasti laseria voidaan moduloida virrantiheyden muutoksen avulla. Jos virrantiheyden muutosnopeus ylittää laserin relaksaatio-oskillaatiotaajuuden, sen kenttä ei enää ehdi vastaamaan nopeisiin kantajatiheyden muutoksiin ja modulointi vaikeutuu. Relaksaatio-oskillaatiot laserdiodeissa mahdollistavat kompleksisen dynamiikan, jos virrantiheyttä tai kenttää moduloidaan jatkuvasti. Esimerkiksi ohjaamalla sopiva osa ulostulevasta kentästä ulkoisen peilin avulla takaisin laseriodiin (kuva 11a) relaksaatio-oskillaatiot



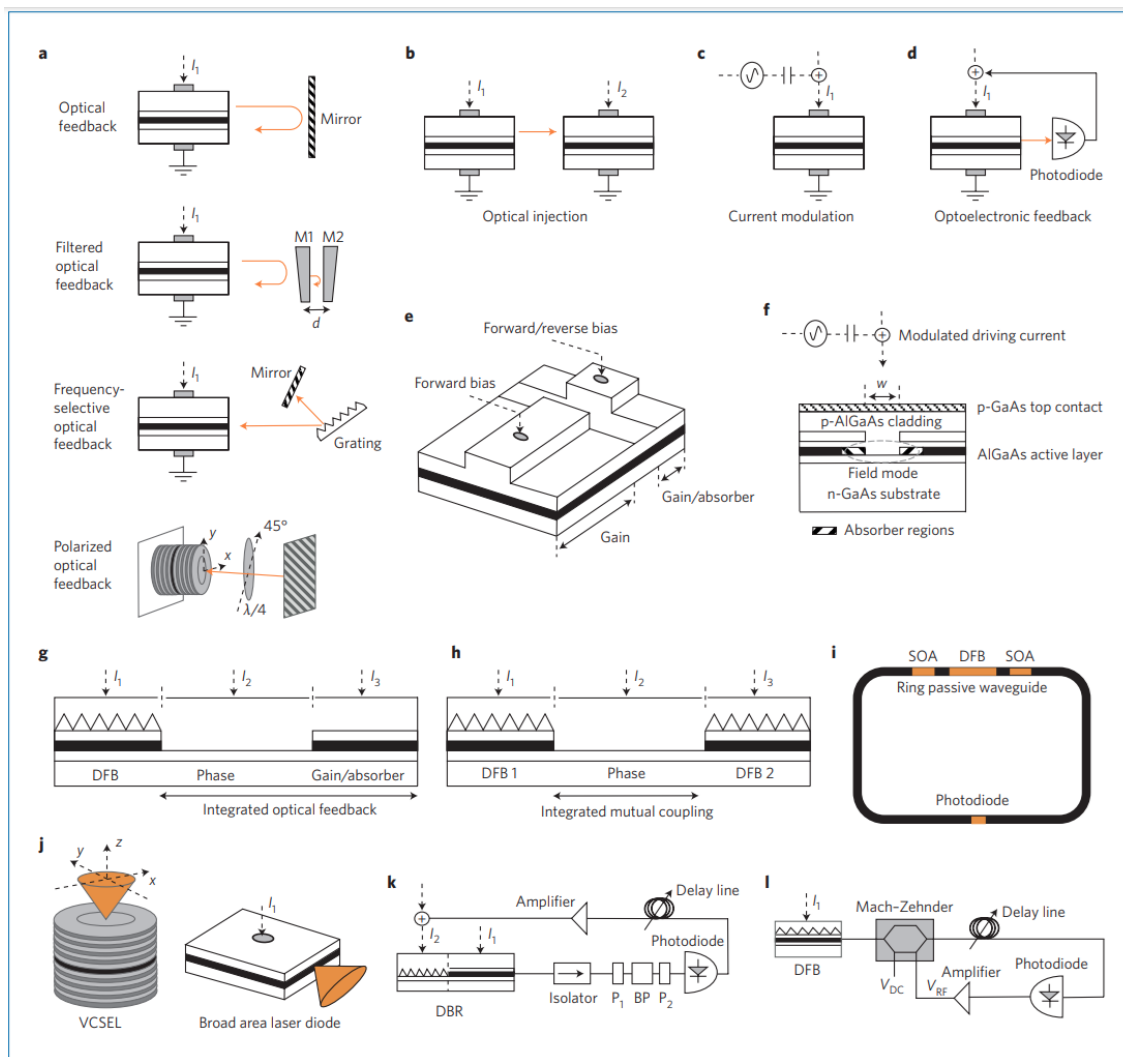
Kuva 10. Varauksenkuljettajien tiheyden ja fotonipopulaation aikaevoluutio relaksaatio-oskillaatioissa multimoodilaserissa. [14]

eivät vaimene, jolloin laserissa voi tapahtua jopa kaoottista oskillointia. Toisaalta systeemin spontaanin emission määrä, jota ei tässä huomioitu, vaikuttaa suoraan relaksaatio-oskillointiin. Voidaan osoittaa, että spontaanin emission kasvu voi vaimentaa relaksaatio-oskillaatioita täysin. [14] [17] [19]

4 Kaaoksen syntyminen laserdiodeissa

4.1 Kaaoksen syntymekanismit

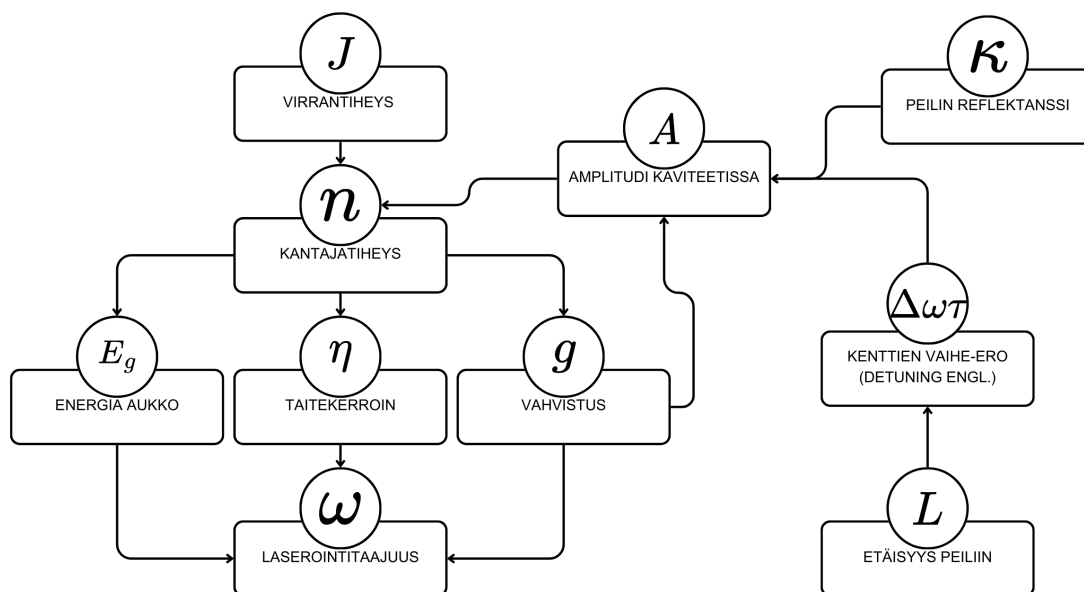
Laserin saattaminen kaoottiseen tilaan, jossa ulostulevan valon intensiteetti tai taajuus vaihtelee kaoottisesti, voidaan toteuttaa monella tavalla. Yleisiä käytettyjä tekniikoita ovat optinen takaisinkytkentä, virran modulointi, optinen injektio ja optoelektronien takaisinkytkentä. [2] Käsitellään tässä kappaleessa edellä mainituista kahta ensimmäistä.



Kuva 11. Konfiguraatioita kaaoksen synnyttämiseksi laseriodissa. [2]

4.2 Optinen takaisinkytkentä

Optisesti takaisinkytketty laseriodi (kuva 11a) on yksi mahdollinen konfiguraatio lasersysteemin vapausasteiden lisäämiseksi. Siinä osa laserin ulostulevasta kentästä heijastetaan takaisin resonanssikammioon, jolloin systeemin nopeusyhtälöt muuttuvat ja sitä on kuvattava epälineaarisilla viive-differentiaaliyhtälöillä. Viiveellä viitataan siihen, että systeemin tila jollain ajanhetkellä t on riippuva systeemin tilasta menneinä ajanhetkinä välillä $t - \tau$, jossa τ on optisen takaisinkytkennän tapauksessa aika, joka valolta kuluu edestakaiseen matkaan laserkaviteetista ulkoiselle peilille ja takaisin. [14] Kentän tilan kehitys voidaan mieltää riippuvaksi jokaisesta ajanhet-



Kuva 12. Takaisinkytketyn diodilaserin parametrien riippuvuuksien hahmotelma kaaviokuvana.

kestä välillä $(t - \tau)$, jolloin systeemillä on ääretön määrä vapausasteita ja on siten kandidaatti kaaottiselle dynamiikalle [20].

Diodilaserin toiminnan keskiössä on kantajatiheys n (kuva 12), jota voidaan muuttaa virrantiheydellä J . Kantajatiheys on keskeinen suure, sillä se kytkeytyy kolmeen tärkeään suureeseen: taitekertoimeen η , vahvistukseen g ja energia-aukkoon valenssi - ja johtavuusvyön välillä E_g (energy gap engl.). Nämä kolme suuretta edelleen vaikuttavat siihen, millainen laserointitaajuus on mahdollinen ts. millainen kenttä voi laseroida laserdiodissa. Vahvistus vaikuttaa myös siihen, kuinka suuri amplitudi kaviteetissa on (kaava 19), joka vastaavasti vaikuttaa kantajatiheyteen. Kuten aiemmin todettiin, tämä johtaa relaksaatiooskillointiin, kun laser kytketään päälle. Amplitudi, vahvistus ja kantajatiheys kuitenkin saturoituvat nopeasti, jolloin systeemi menee tasapainoon. [14]

Kun osa valosta ohjataan etäisyydellä L olevan ulkoisen peilin kautta takaisin kaviteettiin, heijastuneella kentällä voi olla vaihe-eroa kaviteetin sisällä laseroivan luontaisen kentän kanssa. Heijastunut kenttä siis interferoi luontaisen kentän kanssa,

jolloin kaviteetin kentän amplitudi voi muuttua. Tämän seurauksena kantajatiheys muuttuu, jolloin myös laserointitaajuus muuttuu.

Riippuen takaisinkytkennän voimakkuudesta eli peilin reflektanssista voidaan takaisinkytketyn puolijohdelasereiden toiminnan epävakaus (instabilities engl.) luokitella viiteen eri luokkaan (I-V), joista kaoottista käyttäytymistä voidaan havaita luokassa IV. Luokassa IV takaisinkytkennän amplitudi on noin prosentin luokkaa. [21]

Takaisinkytketyn laseriodin nopeusyhtälöt, jotka tunnetaan myös nimellä Lang-Kobayashi yhtälöt [14] [22], ovat:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2}G_n\{n(t) - n_{th}\}A(t) + \frac{\kappa}{\tau_{in}}A(t - \tau) \cos \theta(t), \quad (28)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{2}\alpha G_n\{n(t) - n_{th}\} - \frac{\kappa}{\tau_{in}} \frac{A(t - \tau)}{A(t)} \sin \theta(t), \quad (29)$$

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{J}{ed} - \frac{n(t)}{\tau_s} - G_n\{n(t) - n_0\}A^2(t), \quad (30)$$

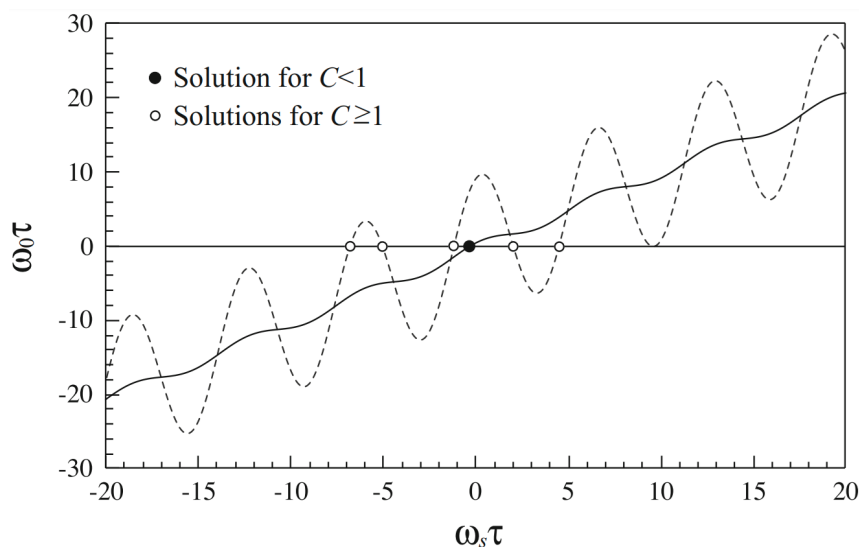
$$\theta(t) = \omega_0\tau + \phi(t) - \phi(t - \tau). \quad (31)$$

Yhtälöissä esiintyvä κ on ulkoisen peilin reflektanssi. Yhtälöt muistuttavat aiemmin esiteltyjä puolijohdelaserin yhtälöitä (19)-(21), mutta nyt niihin on lisätty takaisinkytkennästä riippuva termi, joka on riippuvainen ulos -ja sisääntulevan kentän välisestä vaihe-erosta $\theta(t)$ (kaava (31)). $\theta(t)$ määritellään alkuperäisen kentän vaiheen $\phi(t)$ avulla, eli nyt kolme yhtälöä ovat kytkettyjä toisiinsa. Kun ratkaistaan systeemin tasapainotila, saadaan yhteys laseroivan kentän ja ulkoisen peilin reflektanssin κ välillä

$$\omega_{th}\tau = \omega_s\tau + C \sin(\omega_s\tau + \tan^{-1} \alpha), \quad (32)$$

jossa ω_{th} on kynnystaajuus ja ω_s on kentän taajuus takaisinkytketyssä systeemissä. $\omega\tau$ on tällöin kentän vaiheen kehitys yhdellä edestakaisella matkalla kaviteetin ja peilin välillä. Kerroin C määritellään

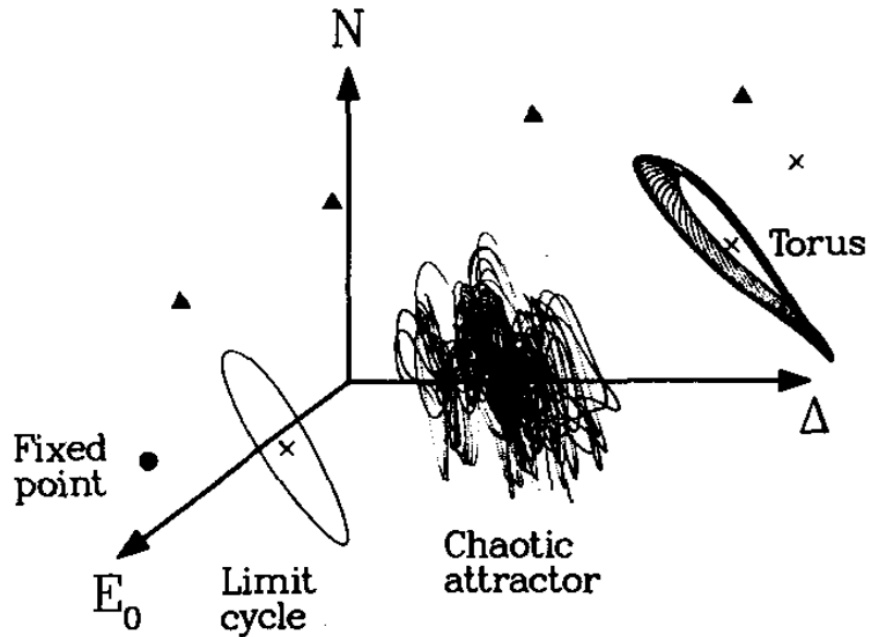
$$C = \frac{\kappa\tau}{\tau_{in}} \sqrt{1 + \alpha^2} \quad (33)$$



Kuva 13. Tasapainotilaratkaisujen riippuvuus C -parametrasta. Musta piste kuvaa yksittäistä ratkaisua, kun $C < 1$ ja katkoviiva kuvaa tilanne kun $C > 1$, jolloin yhtälöllä on valkoisilla pisteillä kuvattuna useita ratkaisuja.[14]

– eli se on suoraan verrannollinen reflektanssiin κ . Yhtälöstä (32) huomataan, että ilman ulkoista takaisinkytkentää ($\kappa = 0$) kaviteetin kynnyslaserointitaajuus on sama kuin laseroiva taajuus. Eli tasapainotilassa laser toimii oletetusti kynnystaajuudellaan. Toisaalta, jos parametria C kasvatetaan, eli ulkoisen reflektanssin voimakkuutta tai peilin ja kaviteetin välistä etäisyyttä (eli τ_{in}) muutetaan, voi kynnystaajuus saada uusia ratkaisuja. Tämä tarkoittaa, että kun muutetaan vaihe-ero sisään- ja ulostulevan kentän välillä tai kasvatetaan sisäänmenevän kentän amplitudia, kenttien interferenssi muuttaa kantajatiheyttä, jolloin laserointitaajuus muuttuu.

Tasapainotilan määräämä ehto voi nyt toteutua samanaikaisesti eri laserointitaajuuksilla ω_s . Toisin sanoen, reflektanssia muuttamalla voidaan systeemissä aiheuttaa bifurkaatio. Ratkaisut yhtälöön (32) voidaan kuvata kuvan (13) esittämällä tavalla. Kuvasta huomataan, että sama tasapainoehdon vaihe-ero voidaan saavuttaa kasvavalla määrällä eri ω_s arvoja, eli kun parametri C kasvaa, niin kuvassa näkyvän sini-käyrän amplitudi kasvaa, jolloin se leikkaa tiettyä taajuutta vastaavan suoran useassa pisteessä. Tasapainoratkaisujen määrä kasvaa, mutta se on aina pariton luku. Myös vaihe-erolla (detuning engl.), joka on riippuvainen ulkoisen peilin etäisyydestä



Kuva 14. Kaaviokuva attraktoreista E_0 , Δ , N -avaruudessa takaisinkytkentätasolle alueella IV. Kolmiot kuvaavat antimoodeja ja rastit kuvaavat kiinteitä pisteitä, jotka ovat muuttuneet epävakaiksi Hopf-bifurkaatioiden kautta. [23]

τ_{in} , voidaan vaikuttaa tasapainotilojen määrään. [23]

Tasapainotilojen stabiilisuutta voidaan tarkastella stabiilisuusanalyysin avulla. Tilat voivat olla stabiileja moodeja tai antimoodeja, jotka voidaan ajatella vastaavan epästabiilia tilaa. Nämä tilat voivat olla yhtälöiden (28)-(30) tilamuuttujien (kentän amplitudi, kentän vaihe ja kantajatiheys) faasiavaruudessa (kuva 14) yksittäisiä stabiileja pisteitä, epästabiileja pisteitä, ympyrä ratoja, toruksia tai kaottisia attraktoreita. Lisäämällä nopeusyhtälöihin Langevin häiriö (Langevin noise engl.) -termit, ratkaisu voi muuttua eri attraktorialueiden välillä, joka vastaa moodi-hyppäys (mode hopping engl.) ilmiötä. [23]

4.3 Sähköinen modulaatio

Laserin virrantiheyttä moduloimalla (kuva 11c) voidaan laserin ulostulotehoa säätää tarkasti. Virran modulointi tuo myös uuden vapausasteen systeemiin, jolloin luokan

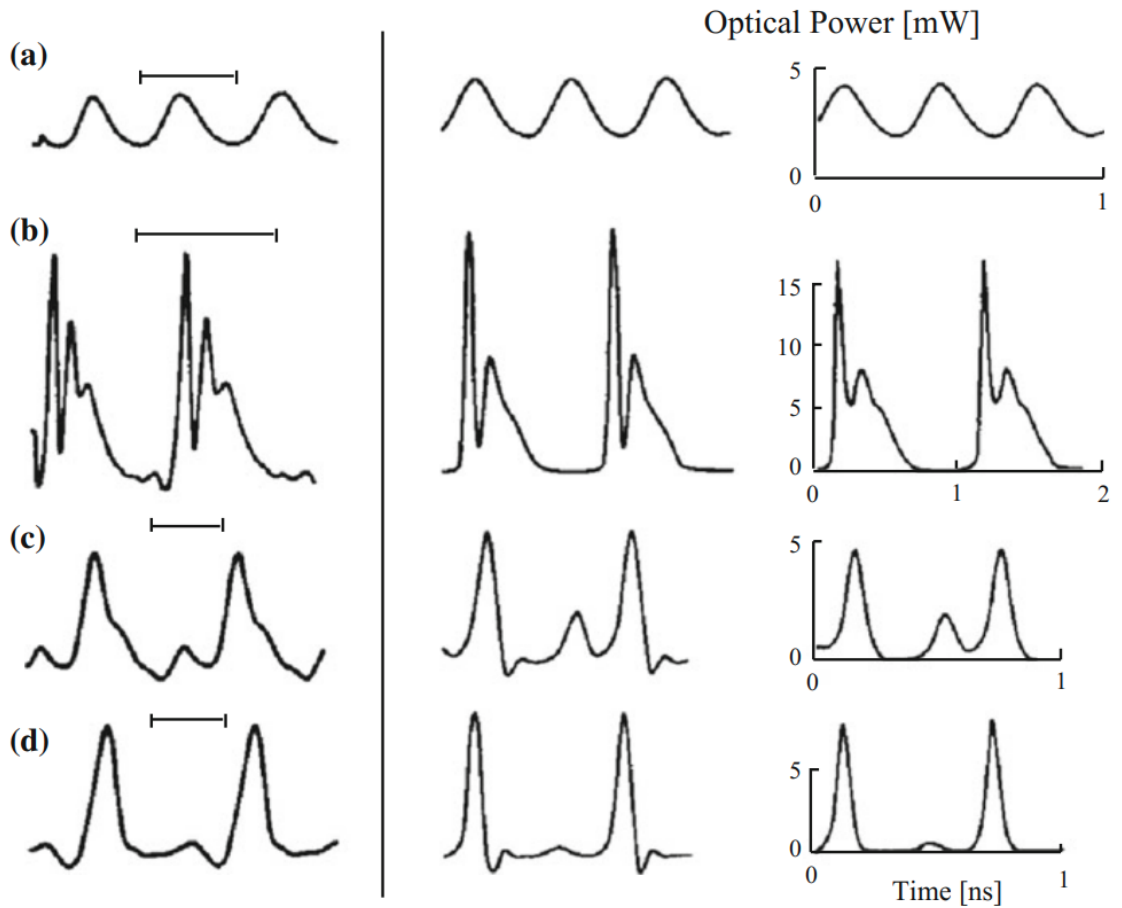
B laseriodi voi täyttää ehdot kaaoksen esiintymiselle. [24] Laserin kentän voimakkuuden herkkää reagoimista virrantiheyteen voidaan käyttää hyväksi mm. optisessa tiedonsiirrossa [19], ja monissa sovelluksissa voidaan myös hyödyntää virtamodulointia laseriodia pikosekunti-pulssien generointiin. [14]

Laserin ulostulon intensiteetti siis seuraa virrantiheyden muutoksia lähes lineaarisesti, kun virrantiheyden modulointinopeus on pieni, reilusti alle relaksaatio-oskillaatiotaajuuden. Jos modulointinopeus on suuri, laserin ulostulotehon luonne voi muuttua epälineaariseksi ja siinä voidaan havaita esimerkiksi pulsointia, joka on eri taaajudella kuin modulointi sekä bistabiilisuutta eli teho vaihtelee kahden arvon välillä ja periodin kahdentumista, joka voi johtaa kaaokseen. Kun virran modulointitaajuus f_m lähestyy relaksaatio-oskillaatiotaajuutta f_r , ulostulon intensiteetin vaihtelut voimistuvat ja ovat suurimmillaan, kun $f_m = f_r$. [14]

Virran sinimuotoinen modulointitaajuus voidaan esittää muodossa $J(t) = J_b + J_m \sin(\omega_m t)$, jossa J_b on bias-virta ja J_m on modulaation amplitudi. Tästä voimme määrittellä modulaatioindeksin $m = J_m / (J_b - J_{th})$, joka kuvaa modulaation voimakkuutta. Kuten aiemmin todettiin, kenttä kuluttaa nopeasti kantajat loppuun, jolloin kantajien määrä putoaa nopeasti. Jos tarkastellaan numeerisen simulaation tuloksia (kuva 15) [25], jossa laserin relaksaatio-oskillaatiotaajuus on lähellä modulointitaajuutta ($2 \text{ GHz} < f_r < 3 \text{ GHz}$), voidaan huomata, että jos modulaatioindeksi ei ole suuri (a), niin laserin ulostuloteho seuraa vielä suhteellisen hyvin virran sinimuotoista modulaatiota (vaakapalkki kuvaa modulointisyklin pituutta). Tämä on haluttu toiminto optisissa kommunikaatiosysteemeissä.

Kun virran modulointitaajuus on reilusti alle relaksaatio-oskillaatiotaajuuden, tulee kentän voimakkuuteen piikkejä relaksaatio-oskillaatiosta johtuen (b). Tällöin kantajat ehtivät palautumaan useammin kuin kerran kentän eksponentiaalisen kasvun pienentäessä kantajien määrää yhden syklin aikana.

Jos virran modulointitaajuus on suurempi kuin relaksaatio-oskillaatiotaajuus ja



Kuva 15. Laserin ulostulotehot vahvalla injektiovirran modulaatiolla. Kokeelliset tulokset (vasemmalla) ja teoreettiset (oikealla). Keskimmäiset käyrät ottavat huomioon kokeessa käytetyn fotodetektorin vasteen. Modulaatio-olosuhteet ovat: (a) $f_m = 3.00$ GHz, $m = 0.21$, $J = 2.14J_{th}$, (b) $f_m = 1.00$ GHz, $m = 1.40$, $J = 2.14J_{th}$, (c) $f_m = 3.4$ GHz, $m = 2.30$, $J = 1.40J_{th}$, (d) $f_m = 3.33$ GHz, $m = 3.60$, $J = 1.40J_{th}$. Vaakasuora palkki osoittaa virran modulaation jakson kokeellisissa tuloksissa. [25]

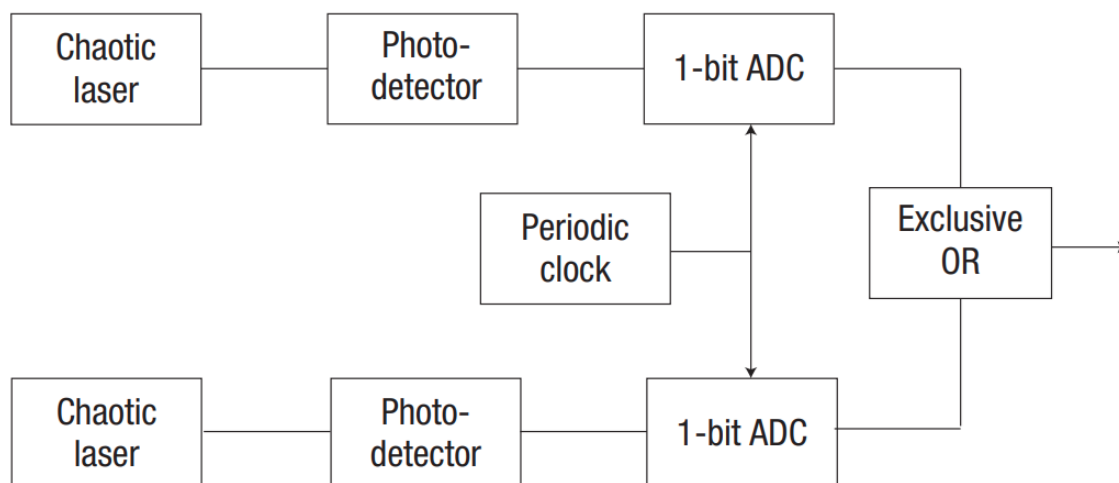
modulaatioindeksi on suuri, kantajat eivät ehdi palautumaan yhden syklin eli pulssin aikana (kuva 15 (c) ja (d)). Tällöin voi tapahtua periodin kahdentuminen, eli kentän oskillaatioperiodi kasvaa kaksinkertaiseksi, jolloin ulostulosta voidaan havaita suuri piikki kahden modulointisyklin välein. [25] Tämä on virran modulaatiolla periodin kahdentumisen kautta kulkeva reitti kaookseen. [26]

Periodin kahdentuminen virran modulaatiolla ei kuitenkaan tapahdu kaikissa laserdiodisysteemeissä. Se on vahvasti kytkeytynyt relaksaatio-oskillaatioihin ja jos relaksaatio-oskillaatiot ovat tarpeeksi vaimennettuja, ulostulevien suuren intensiteetin valopulssien taajuutta ei voida puolittaa kasvattamalla modulaation voimakkuutta. Tällöin systeemiä ei siis saa ajettua voimakkaalla virran moduloinnilla kaoottiseksi. Tämä voidaan johtaa analyttisesti tarkastelemalla virtamoduloidun laserin nopeusyhtälöitä ja ottamalla huomioon epälineaarinen vahvistuksen pienentyminen kentän voimakkuuden kasvaessa. Systemin epälineaarisen vahvistuksen saturoituminen voi siis stabiloida laserin virran sinimuotoisen moduloinnin suhteen, vaikka modulointikerroin kasvaisi. [24]

5 Sovelluskohteet

5.1 Satunnaislukugeneraattori

Digitalisoituneen yhteiskunnan tuottavuus ja luotettavuus perustuu kykyyn tuottaa suuria määriä satunaisuutta, ja ultranopeat fysikaaliset satunnaislukugeneraattorit ovat avainasemassa turvallisemman viestinnän ja laskennan kehityksessä [27][28]. Pseudo-satunaisuutta (PRNG, pseudo-random number generator engl.) voidaan tuottaa algoritmisesti suurilla bittinopeuksilla, mutta ne ovat täysin deterministisiä ja sama bittijono voidaan toistaa, jos tunnetaan lähtöarvo (seed engl.). Satunaisuuden tuottamiseksi voidaan fysikaalista satunaisuutta tuottavaa systeemiä (esim. lämpökohina tai sähköinen kohina) käyttää PRNG alkuarvon määrittämisessä. Tä-

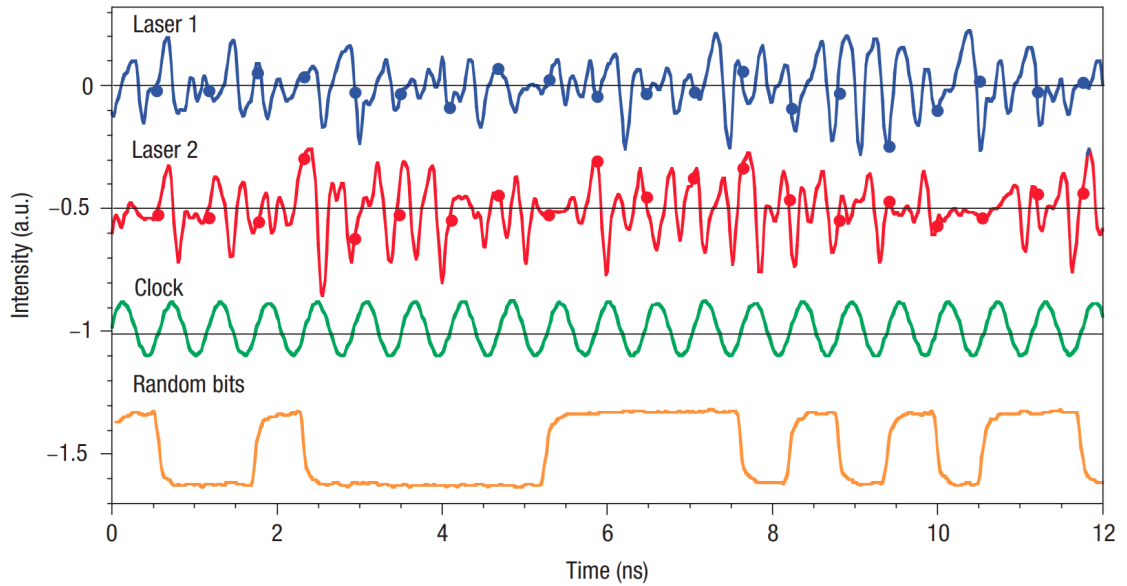


Kuva 16. Kaaviokuva kahden kaoottisen laserin avulla satunnaisbittejä generoivan järjestelmän rakenteesta. ADC: 1-bittinen analogia-digitalimuunnin. [27]

tä hyödynnetään esimerkiksi RDRAND -komennossa, jota voidaan käyttää useissa Intelin ja AMD:n prosessoreissa. [29]

Kuvassa (16) on yksi ensimmäisiä kaoottisten laserdiodien avulla toteutettuja satunnaislukuja tuottavan järjestelmän rakenne. [27] Systemissä on kaksi optisesti takaisinkytkettyä DFB-laseria (Distributed Feedback Laser engl.). DFB-laserissa on erityinen kaviteetti, joka mahdollistaa yhden moodin tarkan vahvistamisen. Kun DFB-laser on takaisinkytketty, sen intensiteetti voi vaihdella kaoottisesti. Nämä toisistaan erillään olevat laserit säädetään toimimaan kaoottisesti muuttamalla takaisinkytkennän amplitudia tai/ja ulkoisen kaviteetin pituutta, jonka jälkeen niiden ulostulon intensiteetti muutetaan sähköiseksi signaaliksi valodetektorilla. Kahden kaoottisen laserin sähköisten signaalien arvot kuvataan määrättyllä kellotaajudella binääriluvuksi (0 tai 1), jotka syötetään XOR-porttiin, josta saadaan lopullinen satunnainen binääriluku (kuva 17). [27]

Edellämainitulla järjestelyllä on mahdollista tuottaa satunnaisia bittejä nopeusluokassa GBit/s [30] [27], joka on merkittävä tulos, sillä aiemmat fyysikaalisiin satunnaisbittien tuottamiseen käytetyt laitteet, jotka ovat perustuneet stokastisiin prosesseihin, ovat yltäneet 100 MBit/s nopeuksiin [31]. Kirjoitushetkellä viimei-



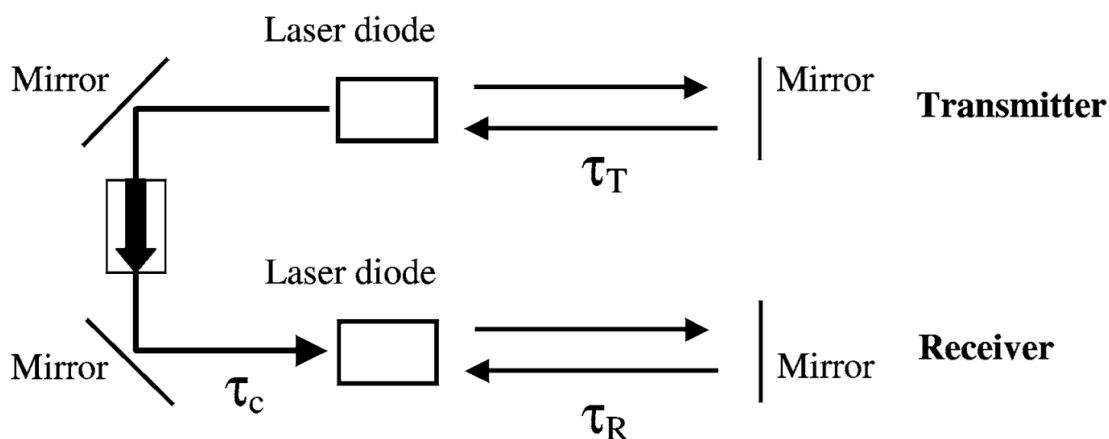
Kuva 17. Tyypilliset ulostulosignaalit kokeellisesta järjestelmästä. a) Laserin ulostulosignaalien ajalliset aaltomuodot, ulkoinen kello-signaali ja vastaava satunnaisbitijono. AD-muuntimien (ADC) kynnyksarvot on esitetty yhtenäisinä viivoina. Pisteet osoittavat näytteistetyt kohdat kello-signaalin nousevalla reunalla. [27]

simmällä tekniikalla on päästy jopa 250 TBit/s nopeuksiin käyttämällä erityistä siru-kokoluokan laserdiodia, jossa laserkaviteetissa voi laseroida kaoottisesti satoja rinnakkaisia moodeja samanaikaisesti [28].

5.2 Kaaos-kommunikaatio

Kaaos-kommunikaatio perustuu dynaamisten systeemien synkronointiin. Kaoottisten systeemien synkronoinnilla tarkoitetaan prosessia, missä kahden tai useamman kaoottisen systeemin jokin parametri alkaa käyttäytyä samalla tavalla johtuen systeemien välisestä kytkennästä [32]. Kytkentä voi tarkoittaa kahden kytketyn laserdiodin tapauksessa sitä, että ohjaavan laserin (ML; master laser engl.) kenttä vaikuttaa ohjattavan laserin (SL; slave laser engl.) dynamiikkaan [33].

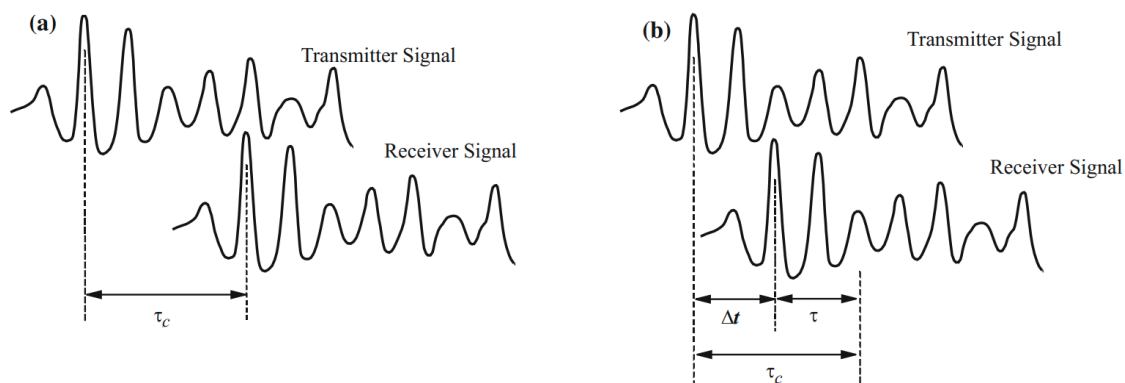
Kaksi kaoottisesti toimivaa laserdiodia on siis mahdollista saattaa toimimaan synkronoidusti, eli molemmat laserit voivat tuottaa samanlaisen kaoottisen signaalin, jos ne ovat oikealla tavalla kytkettyjä toisiinsa [34]. Tätä ilmiötä voidaan käyt-



Kuva 18. Kaaviokuva kaaoksen synkronointiin käytettävästä järjestelystä kahden laserdiodin optisesti takaisinkytketyn laserdiodin välillä. Ylhäällä on ML, eli lähetin (transmitter engl.) ja alhaalla SL, eli vastaanotin (receiver engl.). [15]

tää hyödyksi viestin salaamisessa. Tarkastellaan järjestelmää, jossa kaksi optisesti takaisinkytkettyä kaottista laserdiodia ovat kytkettyjä toisiinsa yksisuuntaisesti siten, että kytkentään käytetään ML:n kompleksista kenttää (kuva 18). Tätä systeemiä voidaan kuvata Lang-Kobayashi yhtälöillä (29-31), jossa SL nopeusyhtälöihin lisätään kentän kytkennän voimakkuudesta riippuvat termit [33]. Dynaamisten systeemien kytkeminen voidaan toteuttaa eri tavoilla ja systeemit voivat esimerkiksi olla täysin synkronoituja (complete synchronization engl.) tai yleisesti synkronoituja (generalized synchronization engl.) [15]. Näitä kahta erottaa mm. se, että yleisesti synkronoidussa tilanteessa lasereiden samojen tilojen viive-ero on sama kuin aika, joka kuluu signaalin siirtymiseen. Täydellisesti synkronoitujen lasereiden tapauksessa, SL ikään kuin ennakoii tilamuuttujien ratoja, ja saavuttaa saman tilan kuin ML lyhyemmässä ajassa, kuin mitä signaalilta kuluu siirtymiseen SL:ään (kuva 19) [35].

Täydellisessä synkronissa lasereita voidaan kuvata identtisillä nopeusyhtälöillä, jolloin niiden kaottinen attraktori on myös identtinen. Tämä ei kuitenkaan pidä paikkaansa yleisesti synkronoiduille lasereille, koska yleisesti synkronoitu SL tuottaa vahvistetun version ML signaalista. Tällöin myös sen rata faasiavaruudessa on hieman erilainen attraktorin ympärillä. Täydellisen kaaoksen synkronisaation saa-

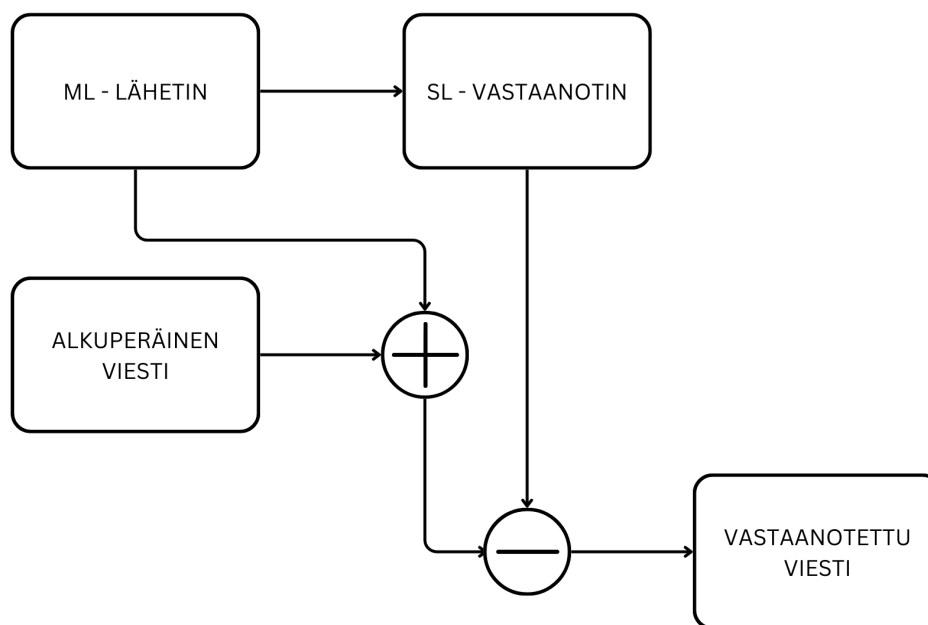


Kuva 19. Aikaero lähettimen ja vastaanottimen aaltomuotojen välillä kaottisessa synkronoinnissa. Aikaerot: a) yleisessä kaottisessa synkronoinnissa b) täydellisessä kaottisessa synkronoinnissa. τ_c on signaalin siirtoaika lähettimestä vastaanottimeen ja τ on optisen takaisinkytkennän viive lähettimen ja vastaanottimen välillä. [14]

vuttamiseksi tarvitaankin pienempi ohjaussignaali verrattuna yleiseen synkronointiin, jolloin SL signaalin amplitudi on oletetusti samaa voimakkuutta ML:n kanssa. [14]

Synkronoitujen lasereiden avulla tapahtuva salatun viestin lähettäminen voidaan esittää yksinkertaistettuna kuvan (20) esittämällä tavalla: piilotettava viesti koodataan ML:n tuottamaan kaottiseen signaaliin, ja vastaanottimen tuottaman lähes identtisen kaottisen signaalin avulla viesti voidaan purkaa poistamalla viestin sisältämästä kaottisesta signaalista alkuperäinen viestin kantaja pois. Tämä on yksi konfiguraatio salatun viestin lähettämiseksi ja purkamiseksi. Synkronoinnin saavuttamiseksi tarvitsee lasereiden parametrien olla lähes samanlaiset. Tällöin vastaanotettu viesti on mahdollista purkaa vain oikealla laserilla. Viestin amplitudi on myös oltava riittävän pieni, jotta se ei erotu kaottisesta kantajasta. [33]

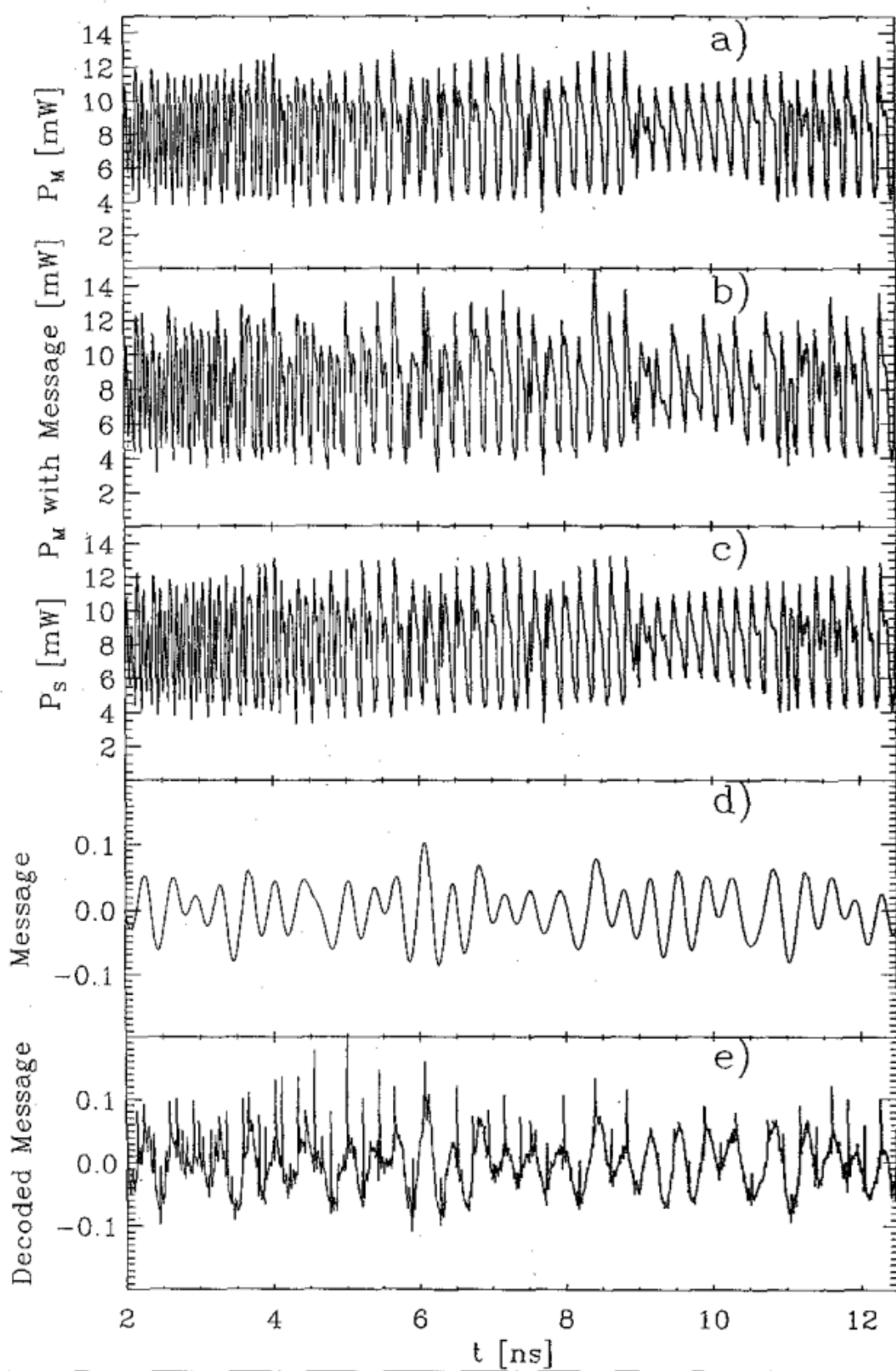
Kuvassa (21) on numeerisesti laskettu edellä mainitulle optisesti takaisinkytkettyjen lasereiden kytketylle järjestelmälle viestin siirto 50 km pitkää valokuitua pitkin kaottista kantajaa käyttäen. Teoreettisen mallin avulla voitiin osoittaa, että kaottisen signaalin käyttäminen viestin kantajana voisi tarjota keinon kaottisten lasereiden hyödyntämiseen salatussa viestinnässä. [33] [36] Konseptin toiminta todistettiin mm. 2005 tehdyssä tutkimuksessa Ateenan kaupunkiympäristössä käyttäen olemas-



Kuva 20. Kaaviokuva kahden synkronoidun laserin välillä tapahtuvasta viestin koodaamisesta, siirrosta ja purkamisesta.

sa olevia valokuitukaapeleita pitkin. Tässä kokeellisessa tutkimuksessa saavutettiin Gbit/s tiedonsiirtonopeus 120 km olemassa olevia valokuitukaapeleita käyttäen bit-tivirheiden (bit-error rates engl.) ollessa luokkaa 10^{-7} . [37] Lasereiden synkronointiin voidaan käyttää myös konfiguraatiota, jossa kaksi laseria (response laser engl.) jakavat yhteisen kaoottisen ohjaussignaalin (CSI, common signal induced engl.) joka tulee kolmannelta laserista. Tällöin viestin lähettävän ML:n signaalin kaistaleveys voi olla suurempi tarjoten vakaamman tiedonsiirron. Tällä järjestelyllä voidaan saavuttaa pienempi korrelaatio ohjauslaserin signaalin ja viestiä välittävien lasereiden signaalien välillä, joka parantaa viestin turvallisuutta. [38]

Viimeisimmällä tekniikalla on onnistuttu kokeellisesti synkronoimaan laserit käyttäen satunnaista digitaalista ohjaussignaalia, jota voidaan käyttää kaaoksen indusoi-miseen ja joka on vähemmän altis häiriöille verrattuna analogiseen ohjaussignaaliin. Työssä osoitettiin, että lasereiden synkronointi voidaan toteuttaa jopa 16 000 km etäisyydellä, joka tarjoaa uusia mahdollisuuksia salattuun viestiintään ja avainten jakamiseen (key distribution engl.). [39]



Kuva 21. (a) Tyypillinen laserlähteen ulostuloteho (b) Lähettimen lähtö koodauksen jälkeen ilman vaimennusta. (c) Vastaanottimen lähtö. (d) Koodattu viesti $m(t)$. (e) Dekoodattu, eli purettu viesti $m'(t)$. [33]

6 Loppupäätelmät

Lasereilla, erityisesti laserdiodeilla, on rikas dynamiikka. Tätä voidaan edelleen manipuloida käyttäen erilaisia resonanssikammioita, aktiivisten alueiden konfiguraatioita ja muita diodin fyysisiä parametreja muuttamalla. Rikkaan dynamiikan ansiosta niissä voidaan havaita monia epälineaarisia ilmiöitä, joita voidaan tutkia johdettujen matemaattisten mallien avulla. Malleihin voidaan tarkastellusta ilmiöstä riippuen lisätä korjaustermejä, jotka ottavat huomioon esimerkiksi ulkoisen kaviteetin takaisinkytkennässä, optisen injektio- ja kaviteetin tai/ja kentän siirtokanavan aiheuttaman häiriön.

Mallien avulla voidaan tutkia kokeellisesti havaittavia lasereissa esiintyviä kaot-tisia ilmiöitä. Laseriodi on mahdollista saattaa käyttäytymään kaot-tisesti monella eri tavalla, ja toisaalta kaaosta on myös mahdollista kontrolloida. Laserin tilan herkkä riippuvuus alkutilasta ja muutoksista mahdollistaa laserin vakauttamisen tietyissä olosuhteissa. Puolijohdelasereiden kantajatiheyden lähes lineaarinen riippuvuus injektiovirrasta tarjoaa helpon tavan moduloida ulostulevaa kenttää, ja laseriodit ovatkin olleet osana tietoliikennettä jo vuosikymmeniä niiden mahdollistaessa nopean datansiirron.

Laseriodien kaot-tisuutta voidaan käyttää hyödyksi monilla eri aloilla, erityisesti sovelluksissa, jossa tarvitaan suuria määriä satunnaisuutta. Tekoälyn oppimisprosessit ovat yksi sovelluskohde, jossa pseudosatunnaisuus ei ole välttämättä riittävän satunnaista ja jossa puolijohdelaserit voivat tulla olemaan isossa roolissa satunnais-tien bittien generaattoreina. Satunnaisuutta voidaan hyödyntää myös datansiirrossa, jossa joissain tapauksissa alkulukuihin perustuva kryptografia voitaisiin osin korvata siirtämällä viesti kaot-tisen kantajan sisällä.

Viitteet

- [1] H. Haken, *Physics Letters A* **53**, 77 (1975).
- [2] M. Sciamanna ja K. A. Shore, *Nature Photonics* **9**, 151 (2015).
- [3] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 3 ed. (Chapman and Hall/CRC, 2021).
- [4] E. N. Lorenz, *Journal of the Atmospheric Sciences* **20**, 130 (1963).
- [5] P. G. Baines, *Progress in Physical Geography: Earth and Environment* **32**, 475 (2008).
- [6] B. Sundén, *Hydrogen, Batteries and Fuel Cells* (Elsevier, 2019), pp. 15–36.
- [7] C. Sparrow, kirjassa *Chaos*, toimittanut A. V. Holden (Princeton University Press, 1986), pp. 111–134.
- [8] Weisstein, Eric W., Attractor, Wolfram MathWorld, a Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/Attractor.html>.
- [9] G. Thomas ja R. Isaacs, *Anaesthesia & Intensive Care Medicine* **12**, 574 (2011).
- [10] A. K. aka Aka, Lasercons.svg, Wikimedia Commons, 2005, accessed: 2025-01-13.
- [11] I. R. Kenyon, *The Light Fantastic: A Modern Introduction to Classical and Quantum Optics* (Oxford University Press, 2008).
- [12] D. Marcuse, *IEEE Journal of Quantum Electronics* **19**, 1228 (1983).
- [13] H. Haken, *Light* (North-Holland, 1985).
- [14] J. Ohtsubo, *Semiconductor Lasers: Stability, Instability and Chaos*, Vol. 111 of *Springer Series in Optical Sciences* (Springer International Publishing, 2017).
- [15] A. Uchida, F. Rogister, J. García-Ojalvo ja R. Roy, *Progress in Optics* (Elsevier, 2005), Vol. 48, pp. 203–341.
- [16] F. Arecchi, G. Lippi, G. Puccioni ja J. Tredicce, *Optics Communications* **51**, 308 (1984).
- [17] S. Wieczorek, B. Krauskopf, T. Simpson ja D. Lenstra, *Physics Reports* **416**, 1 (2005).
- [18] G. P. Agrawal ja N. K. Dutta, *Semiconductor Lasers* (Springer US, 1993).
- [19] K. Y. Lau ja A. Yariv, *Semiconductors and Semimetals* (Elsevier, 1985), Vol. 22, pp. 69–152.
- [20] T. A. Kuusela, *Eur. J. Phys.* **38**, 055303 (2017).

- [21] R. Tkach ja A. Chraplyvy, *Journal of Lightwave Technology* **4**, 1655 (1986).
- [22] R. Lang ja K. Kobayashi, *IEEE Journal of Quantum Electronics* **16**, 347 (1980).
- [23] J. Mork, B. Tromborg ja J. Mark, *IEEE Journal of Quantum Electronics* **28**, 93 (1992).
- [24] G. P. Agrawal, *Applied Physics Letters* **49**, 1013 (1986).
- [25] E. Hemery, L. Chusseau ja J.-M. Lourtioz, *IEEE Journal of Quantum Electronics* **26**, 633 (1990).
- [26] C.-H. Lee, T.-H. Yoon ja S.-Y. Shin, *Applied Physics Letters* **46**, 95 (1985).
- [27] A. Uchida, K. Amano, M. Inoue, K. Hirano, S. Naito, H. Someya, I. Oowada, T. Kurashige, M. Shiki, S. Yoshimori, K. Yoshimura ja P. Davis, *Nature Photonics* **2**, 728 (2008).
- [28] K. Kim, S. Bittner, Y. Zeng, S. Guazzotti, O. Hess, Q. J. Wang ja H. Cao, *Science* **371**, 948 (2021).
- [29] J. D. Hart, Y. Terashima, A. Uchida, G. B. Baumgartner, T. E. Murphy ja R. Roy, *APL Photonics* **2**, 090901 (2017).
- [30] T. Harayama, S. Sunada, K. Yoshimura, P. Davis, K. Tsuzuki ja A. Uchida, *Physical Review A* **83**, 031803 (2011).
- [31] C.-G. Ma, J.-L. Xiao, Z.-X. Xiao, Y.-D. Yang ja Y.-Z. Huang, *Light: Science & Applications* **11**, 187 (2022).
- [32] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. Valladares ja C. Zhou, *Physics Reports* **366**, 1 (2002).
- [33] C. Mirasso, P. Colet ja P. Garcia-Fernandez, *IEEE Photonics Technology Letters* **8**, 299 (1996).
- [34] J. Liu, H. Chen ja S. Tang, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* **48**, 1475 (2001).
- [35] C. Masoller, *Physical Review Letters* **86**, 2782 (2001).
- [36] P. Colet ja R. Roy, *Optics Letters* **19**, 2056 (1994).
- [37] A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. García-Ojalvo, C. R. Mirasso, L. Pesquera ja K. A. Shore, *Nature* **438**, 343 (2005).
- [38] T. Yamamoto, I. Oowada, H. Yip, A. Uchida, S. Yoshimori, K. Yoshimura, J. Muramatsu, S.-i. Goto ja P. Davis, *Optics Express* **15**, 3974 (2007).
- [39] A. Wang, J. Wang, L. Jiang, L. Wang, Y. Wang, L. Yan ja Y. Qin, *Light: Science & Applications* **14**, 1 (2025).