



**TURUN
YLIOPISTO**

TODENNÄKÖISYYSLASKENNAN EPÄYHTÄLÖT

Eliza Pllana

LuK-tutkielma
Huhtikuu 2025

Ohjaaja:
FT S.Emet

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

ELIZA PLLANA: Todennäköisyyslaskennan epäyhtälöt
LuK-tutkielma, 20 s.
Sovellettu Matematiikka
Huhtikuu 2025

Tässä tutkielmassa käsitellään todennäköisyyslaskennan epäyhtälöitä. Tutkielman alkuun määritellään satunnaismuuttuja ja siihen liittyvät käsitteet. Tämän jälkeen todistetaan Markovin, Tšebyševin, Paley-Zygmundin ja Jensenin epäyhtälöt. Jokaiseen epäyhtälöön liittyy esimerkkejä, jotka auttavat ymmärtämään epäyhtälöitä. Todennäköisyyden epäyhtälöiden avulla voidaan todistaa muita todennäköisyyslaskentaan liittyviä todistuksia. Näitä ovat esimerkiksi suurten lukujen laki ja keskeinen raja-arvolause.

Asiasanat: satunnaismuuttuja, Markovin epäyhtälö, Tšebyševin epäyhtälö, Paley-Zygmundin epäyhtälö, Jensenin epäyhtälö, suurten lukujen laki, keskeinen raja-arvolause

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Satunnaismuuttuja	2
3	Markovin epäyhtälö	3
4	Tšebyševin epäyhtälö	5
5	Muita todennäköisyyslaskennan epäyhtälöitä	7
5.1	Paley-Zygmundin epäyhtälö	7
5.2	Jensenin epäyhtälö	9
6	Raja-arvolauseita	11
6.1	Suurten lukujen laki	11
6.2	Keskeinen raja-arvolause	11
7	Yhteenveto	13

1 Johdanto

Todennäköisyyslaskennan epäyhtälöt ovat matemaattisia todennäköisyystuloksia, jotka laskevat ylärajoja satunnaismuuttujien todennäköisyyksille.

Tutkielmassa käsitellään Markovin, Tšebyševin, Paley-Zygmundin ja Jensenin epäyhtälöitä. Markovin epäyhtälön tavoitteena on antaa suuri ja optimaalinen arvio satunnaismuuttujan jakauman hännän käyttäytymisestä. Tšebyševin epäyhtälön tavoitteena on laskea, kuinka usein satunnaismuuttujan arvot poikkeavat odotusarvosta. Markovin epäyhtälöä voidaan soveltaa satunnaismuuttujille, joiden odotusarvo on tiedossa. Tšebyševin epäyhtälöt voidaan soveltaa satunnaismuuttujille, joiden odotusarvon lisäksi tunnetaan varianssi. Paley-Zygmundin epäyhtälö antaa arvion, kuinka todennäköistä on, että positiivinen satunnaismuuttuja saa pienen arvon. Tämä arvio perustuu muuttujan ensimmäiseen ja toiseen momenttiin.[3] Jensenin epäyhtälö käsittelee satunnaismuuttujan konveksien ja konkaavien muunnosten odotusarvoa.

Tutkielman tavoitteena on ymmärtää epäyhtälöiden antamia arvioita eri satunnaismuuttujien tapauksissa. Epäyhtälöiden arviot ovat usein epätarkkoja, mutta merkittäviä, koska niiden avulla voidaan laskea satunnaismuuttujien arvojen todennäköisyyksille rajoja, vaikka satunnaismuuttujan jakaumaa ei tunneta. Todennäköisyyslaskennan epäyhtälöitä tarvitaan todennäköisyyslaskennan todistuksissa, kuten suurten lukujen laissa ja keskeisessä raja-arvolauseessa.

Luvussa 2 käsitellään satunnaismuuttujia ja muita käsitteitä, jotka liittyvät todennäköisyyslaskennan epäyhtälöihin. Diskreetin satunnaismuuttujan todennäköisyysfunktio on pistetodennäköisyysfunktio, ja jatkuvan satunnaismuuttujan todennäköisyysfunktio on tiheysfunktio. Luvussa 3 käsitellään Markovin epäyhtälöä. Epäyhtälö todistetaan diskreetin satunnaismuuttujan sekä jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa. Luvussa tutkitaan epäyhtälöä esimerkkien avulla. Luvussa 4 käsitellään Tšebyševin epäyhtälöä. Se todistetaan Markovin epäyhtälön nojalla. Luvussa käsitellään Tšebyševia esimerkillä, jossa verrataan epäyhtälön antamaa arviota tarkkaan arvoon. Luvussa 5 käsitellään muita todennäköisyyslaskennan epäyhtälöitä, jotka ovat Jensenin ja Paley-Zygmundin epäyhtälö. Luvussa 6 todistetaan todennäköisyyslaskennan raja-arvoauseita. Suurten lukujen laki voidaan todistaa Tšebyševin epäyhtälön nojalla.

2 Satunnaismuuttuja

Satunnaismuuttuja X eli stokastinen muuttuja on todennäköisyyslaskennan peruskäsite. Satunnaismuuttujaa käytetään todennäköisyyslaskennassa kuvaamaan arvoa, joka voi saada erilaisia tuloksia satunnaisesti. Esimerkiksi nopanheitossa satunnaismuuttuja voi olla nopan silmäluku välillä 1–6.

Satunnaismuuttujat voivat olla diskreettejä tai jatkuvia. Diskreetin satunnaismuuttujan todennäköisyysfunktioita kutsutaan pistetodennäköisyysfunktioiksi. Diskreetissä tapauksessa satunnaismuuttujan arvojoukko on äärellinen tai numeroitava. Esimerkki diskreetistä satunnaismuuttujasta on nopan silmäluku. Jatkuvan satunnaismuuttujan todennäköisyysfunktioita kutsutaan tiheysfunktioiksi. Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa arvojoukko voi olla reaalijoukon väli. Esimerkki jatkuvasta satunnaismuuttujasta on sademäärä, joka voidaan mitata tarkasti.

Määritelmä 1. Pistetodennäköisyysfunktio on diskreetin satunnaismuuttujan todennäköisyysfunktio. Funktio saa nollassa eroavan arvon yksittäiselle perusjoukon Ω satunnaismuuttujan arvolle.

$$p(x_i) = P(X = x_i),$$

missä $x_i \in \Omega$. Funktio saa todennäköisyysarvoja kaikille perusjoukon arvoille, mutta muissa tapauksissa se saa arvon nolla. Pistetodennäköisyysfunktio on diskreetti kuvaus

$$p : \Omega \rightarrow [0, 1].$$

[2]

Määritelmä 2. Satunnaismuuttuja X on jatkuva, jos on olemassa funktio $f(x) \geq 0$, jonka reaaliakselin väleillä $[a, b]$ pätee

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Tämä funktio $f(x)$ on tiheysfunktio. Satunnaismuuttujan jatkuvuuden edellytys on, että kaikki todennäköisyydet on mahdollista laskea tiheysfunktion määrättyjen integraalien avulla yksikäsitteisellä tavalla. [2]

3 Markovin epäyhtälö

Markovin epäyhtälö on todennäköisyystulos, joka kertoo todennäköisyysjakaumasta. Sen tavoitteena on antaa paras mahdollinen arvio satunnaismuuttujan jakautuman suurempien kuin annetun t :n arvojen käyttäytymisestä. Epäyhtälön mukaan ei-negatiiviselle satunnaismuuttujalle X ja kaikille positiivisille reaaliuuvuille t todennäköisyys, että X on suurempi tai yhtä suuri kuin t , on pienempi tai yhtä suuri kuin X :n odotusarvo jaettuna t :lla. Epäyhtälö voidaan laskea satunnaismuuttujille, joiden odotusarvo on tunnettu.

Lause 1. Jos X on ei-negatiivinen satunnaismuuttuja, jolla

$$\mu = E(X) < \infty,$$

niin on voimassa Markovin epäyhtälö:

$$P(X \geq t) \leq \frac{\mu}{t}, t > 0.$$

Todistus. Jos X on jatkuva satunnaismuuttuja, niin

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x) dx \geq \int_t^{\infty} xf(x) dx \geq \int_t^{\infty} tf(x) dx = tP(X \geq t).$$

[1]

Jos X on diskreetti satunnaismuuttuja, niin

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x xP(X = x) = \sum_{x:0 \leq x < t} xP(X = x) + \sum_{x:x \geq t} xP(X = x) \\ &\geq \sum_{x:x \geq t} xP(X = x) \\ &\geq \sum_{x:x \geq t} tP(X = x) \\ &= tP(X \geq t) \end{aligned}$$

[7]

□

Esimerkki 1. Satunnaismuuttujan X odotusarvo on 4, tarkastellaan todennäköisyydet eri t :n arvoilla.

Markovin epäyhtälöllä saadaan

$$P(X \geq 10) \leq \frac{4}{10},$$

kun $t = 10$. Todennäköisyys, että X on suurempi kuin 10 on $\frac{4}{10}$.

$$P(X \geq 40) \leq \frac{4}{40},$$

kun $t = 40$. Todennäköisyys, että X on suurempi kuin 40 on $\frac{1}{10}$.

Markovin epäyhtälö antaa parhaan mahdollisen arvion, koska satunnaismuuttujasta tiedetään pelkästään odotusarvo, jolloin parempaa arviota ei voida tehdä.

Esimerkki 2. Oletetaan, että satunnaismuuttujat $X_i \sim Po(2), i = 1, 2, \dots, 10$, ovat riippumattomat. Lasketaan todennäköisyyden

$$P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 15\right)$$

tarkka arvo, Markovin epäyhtälön antama arvo ja keskeisen raja-arvolauseen antama arvo. Vertaillaan niitä keskenään. Tällöin

$$\sum_{i=1}^{10} X_i \sim Po(10 \cdot 2) = Po(20).$$

Tämän jälkeen saadaan tarkka todennäköisyys:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 15\right) &= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 14\right) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{14} P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i = k\right) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{14} e^{-20} \cdot \frac{(20)^k}{k!} \\ &= 1 - 0,10486 = 0,8951. \end{aligned}$$

Markovin epäyhtälöllä saadaan:

$$P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 15\right) \leq \frac{E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right)}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} = 1,33\dots$$

Keskeisellä raja-arvolauseella saadaan:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10} X_i &\approx N(10 \cdot 2, 10 \cdot 2) = N(20, 20) \\ P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 15\right) &= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 14\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{14 + \frac{1}{2} - 20}{\sqrt{20}}\right) = 1 - \Phi(-1, 23) \\ &= \Phi(1, 23) = 0,8907. \end{aligned}$$

Tarkka arvo ja keskeisen raja-arvolauseen antamat arvot ovat melko samat. Markovin epäyhtälön antama arvo on suuri verrattuna tarkkaan ja keskeisen raja-arvolauseen antamiin arvoihin. Markovin antama arvio ei voida käyttää, koska se on yli 1.

4 Tšebyševin epäyhtälö

Tšebyševin epäyhtälö mittaa, kuinka usein satunnaismuuttujan arvot poikkeavat odotusarvoista. Tšebyševin epäyhtälö antaa tietyn satunnaismuuttujaan X liittyvän tapahtuman todennäköisyydelle ylärajan, kun satunnaismuuttujan X odotusarvo ja varianssi ovat tiedossa. Varianssi ja keskihajonta mittaavat, kuinka todennäköisyys keskittyy odotusarvon ympärille.

Lause 2. Jos $\mu = E(X)$ ja $\sigma^2 = \text{Var}(X) < \infty$, niin on voimassa Tšebyševin epäyhtälö:

$$P(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}, \quad t > 0.$$

Todistus. Koska $(X - \mu)^2$ on ei-negatiivinen satunnaismuuttuja, niin Markovin epäyhtälön mukaan

$$P(|X - \mu| \geq t) = P[(X - \mu)^2 \geq t^2] \leq \frac{E[((X - \mu)^2)]}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}, \quad t > 0.$$

[1] □

Esimerkki 3. Olkoon $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Lasketaan Tšebyševin epäyhtälön avulla yläraja todennäköisyydelle

$$P(|X - E[X]| \geq b),$$

missä $b > 0$. Tiedetään, että

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

ja

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Käyttämällä Tšebyševin epäyhtälöä saadaan

$$\begin{aligned} P(|X - E[X]| \geq b) &\leq \frac{\text{Var}(X)}{b^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2 b^2}. \end{aligned}$$

[?]

Esimerkki 4. Lasketaan Tšebyševin epäyhtälön

$$P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

antama arvio ja vertaillaan tarkkaan arvoon tapauksissa $k = \frac{1}{10}$ ja $\frac{1}{4}$, kun X on tasaisesti jakautunut välillä $(0, 1)$. Oletetaan, että $X \sim \text{Unif}(0, 1)$, $\mu = E(X) = \frac{1}{2}$, $\sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{1}{12}$. Lasketaan ensin tarkka todennäköisyys, kun $k = \frac{1}{10}$:

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| \geq k) &= 1 - P(|X - \mu| < k) \\ &= 1 - P(\mu - k < X < \mu + k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - (F_X(\mu + k) - F_X(\mu - k)) \\
&= 1 - (F_X(\frac{1}{2} + k) - F_X(\frac{1}{2} - k)) \\
&= 1 - (0.6 - 0.4) = 0.8.
\end{aligned}$$

Seuraavaksi lasketaan tarkka todennäköisyys, kun $k = \frac{1}{4}$

$$P(|X - \mu| \geq k) = 1 - (0.75 - 0.25) = 0.5.$$

Tšebyševin arvio:

$$P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

kun $k = \frac{1}{10}$,

$$= \frac{1}{12 \cdot (\frac{1}{10})^2} = \frac{1}{\frac{12}{100}} = 8.333,$$

kun $k = \frac{1}{4}$,

$$= \frac{1}{12 \cdot (\frac{1}{4})^2} = \frac{1}{\frac{12}{16}} = 1.333.$$

Tšebyševin epäyhtälö antaa suuremman arvion kuin tarkka arvo. Tarkat todennäköisyydet antavat hyödyllisemmän ratkaisun, koska ne arvot ovat alle 1. Kun k arvo pienenee, Tšebyševin arvo kasvaa. Molemmilla k :n arvoilla epäyhtälön antamat arvot ovat yli 1. Tämän takia epäyhtälö ei anna hyödyllistä arviota.

5 Muita todennäköisyyslaskennan epäyhtälöitä

5.1 Paley-Zygmundin epäyhtälö

Paley-Zygmundin epäyhtälö on todennäköisyyden epäyhtälö, joka asettaa ylärajan todennäköisyydelle, jonka positiivinen satunnaismuuttuja on pieni oman kahden ensimmäisen momentin suhteen.

Lause 3. *Olkoon X ei-negatiivinen satunnaismuuttuja. Oletetaan, että*

$$0 < E[X^2] < \infty.$$

Tällöin jokaisella pätee $\theta \in [0, 1]$,

$$P[X > \theta E[X]] \geq (1 - \theta)^2 \frac{E[X]^2}{E[X^2]}.$$

Todistus. Ensin saadaan $X = X\mathbf{1}_{X \leq \theta E[X]} + X\mathbf{1}_{X > \theta E[X]}$. Otetaan odotusarvot molemmilta puolilta

$$E[X] = E[X\mathbf{1}_{X \leq \theta E[X]}] + E[X\mathbf{1}_{X > \theta E[X]}].$$

Rajoitetaan epäyhtälön molemmat puolet. Jos $\mathbf{1}_{X \leq \theta E[X]}$ ei ole nolla, niin $X \leq \theta E[X]$ sekä $X\mathbf{1}_{X \leq \theta E[X]} \leq \theta E[X]$. Tästä seuraa, että

$$E[X\mathbf{1}_{X \leq \theta E[X]}] \leq \theta E[X].$$

Toinen termi ratkaistaan Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla, jolloin saadaan

$$E[X\mathbf{1}_{X > \theta E[X]}] \leq (E[X^2]E[\mathbf{1}_{X > \theta E[X]}^2])^{1/2}.$$

Lopputulokseksi saadaan

$$E[X] \leq \theta E[X] + (E[X^2]P[X > \theta E[X]])^{1/2}.$$

Muutetaan lopputulos Paley-Zygmundin epäyhtälöksi

$$(1 - \theta)^2 \frac{E[X]^2}{E[X^2]} \leq P[X > \theta E[X]].$$

[3]

□

Esimerkki 5. Tarkastellaan graafia, jossa on n kärkeä. Jokaiselle järjestämättömälle erilliselle kärkiparille (v_1, v_2) on olemassa reuna v_1 ja v_2 todennäköisyydellä p , riippumatta muista kärkipareista.

Graafia merkitään:

$$G(n, p).$$

Tavoitteena on tutkia, sisältääkö $G(n, p)$ kärkiä, joihin ei yhdisty reuna, kun $n \rightarrow \infty$.

Olkoon E_i tapaus, jossa kärki i on eristynyt, ja

$$Y_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{E_i}$$

kuvaa eristyneiden kärkien lukumäärää. Jokaisen kärjen eristyneisyyden todennäköisyys on

$$P[E_i] = (1 - p)^{n-1},$$

jolloin eristyneiden kärkien oletettu lukumäärä on

$$E[Y_n] = \sum_{i=1}^n P[E_i] = n(1 - p)^{n-1}.$$

Kaksi erillistä kärkeä, joille pätee $i \neq j$ kuuluu $2n - 3$ reunaan. Tällöin

$$P[E_i \cap E_j] = (1 - p)^{2n-3}.$$

Lasketaan toinen momentti:

$$\begin{aligned} E[Y_n^2] &= \sum_{i,j=1}^n P[E_i \cap E_j] \\ &= \sum_{i=1}^n P[E_i] + \sum_{i,j=1}^n P[E_i \cap E_j] \\ &= n(1 - p)^{n-1} + n(n - 1)(1 - p)^{2n-3} \end{aligned}$$

Koska Y saa kokonaislukuarvoja, niin sille pätee

$$P[Y > 0] = P[Y \geq 1].$$

Paley-Zygmundin epäyhtälöllä lasketaan:

$$\begin{aligned} P[Y \geq 1] &\geq \frac{n^2(1 - p)^{2n-2}}{n(1 - p)^{n-1} + n(n - 1)(1 - p)^{2n-3}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{n}(1 - p)^{-n-3} + \frac{n-1}{n}(1 - p)^{-1}}. \end{aligned}$$

Sallitaan, että P on riippuvainen n :stä, mistä seuraa, jos

$$\frac{1}{n(1 - p)^n} \rightarrow 0$$

tai vastaavasti

$$n(1 - p)^n \rightarrow \infty,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Tällöin pätee

$$P[Y \geq 1] \rightarrow 1,$$

kun $n \rightarrow \infty$.

Jos tämä ehto täyttyy, niin n :n ollessa suuri on erittäin todennäköistä, että $G(n, p)$ sisältää ainakin yhden eristyneen kärjen. [3]

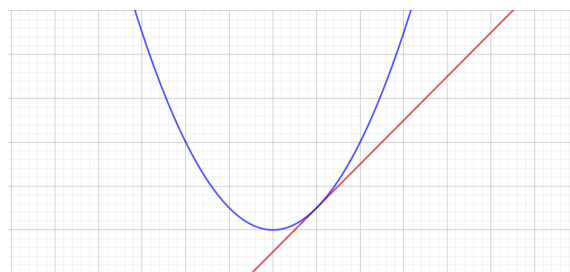
5.2 Jensenin epäyhtälö

Jensenin epäyhtälö on todennäköisyyden epäyhtälö, joka käsittelee satunnaismuuttujan konveksien ja konkaavien muunnosten odotusarvoa.

Jensenin epäyhtälö pätee konveksille ja konkaaville funktiolle.



Kuva 1: Konkaavi funktion tangentti sijaitsee kokonaan paraabeli yläpuolella.



Kuva 2: Konvekksi funktion tangentti sijaitsee paraabelin alapuolella

Derivoituva funktio on aidosti konvekksi, jos sen toinen derivaatta on aidosti positiivinen. Toisin derivoituva funktio aidosti konkaavi, jos sen aidosti negatiivinen.

Lause 4. *Olkoon X integroitava satunnaismuuttuja. Olkoon $g: R \rightarrow R$ konvekksi funktio siten, että myös*

$$Y = g(X)$$

on integroitava. Tällöin pätee Jensenin epäyhtälö:

$$E[g(X)] \geq g(E[X])$$

Todistus. Funktio g on konvekksi, jos mille tahansa pisteelle x_0 funktion g kuvaaja sijaitsee kokonaan sen tangentin yläpuolella pisteessä x_0 :

$$g(x) \geq g(x_0) + b(x - x_0), \forall x$$

missä b on tangentin kulmakerroin. Asettamalla $x = X$ ja $x_0 = E[X]$, epäyhtälö muuttuu muotoon

$$g(X) \geq g(E[X]) + b(X - E[X]).$$

Otetaan epäyhtälön molemmilta puolilta odotuarvot

$$E[g(X)] \geq E[g(E[X]) + b(X - E[X])]$$

Seuraavaksi

$$\begin{aligned} E[g(X)] &\geq g(E[X]) + b(E[X] - E[X]) \\ &= g(E[X]) \end{aligned}$$

eli

$$E[g(X)] \geq g(E[X])$$

Jos funktio $g(x)$ on konkaavi, niin $-g(x)$ on konvekksi, jolloin saadaan epäyhtälö

$$E[-g(x)] \geq -g(E[X])$$

Jaetaan molemmat puolet (-1):llä:

$$E[g(X)] \leq g(E[X])$$

[5]

□

Esimerkki 6. Jokaisen satunnaismuuttujan X varianssi on positiivinen arvo.

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \geq 0.$$

Tällöin

$$E(X^2) \geq E(X)^2.$$

Määritellään, että

$$h(x) = x^2.$$

epäyhtälö saadaan muotoon:

$$E[h(X)] \geq h(E[X]).$$

Funktio $h(x) = x^2$ on esimerkki konveksista funktiosta. Jensenin epäyhtälön nojalla mille tahansa konveksille funktiolle h pätee

$$E(X^2) \geq E(X)^2.$$

[6]

Esimerkki 7. Jos $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ on konvekksi ja ei vähenevä, ja $g: R \rightarrow R$, niin $h(g(x))$ on konvekksi.

Koska g on konvekksi, niin

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y)$$

kaikille $\alpha \in [0, 1]$ Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} h(g(\alpha x + (1 - \alpha)y)) &\leq h(\alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y)) \\ &\leq \alpha h(g(x)) + (1 - \alpha)h(g(y)), \end{aligned}$$

missä h on ei-vähenevä ja konvekksi. [?]

6 Raja-arvolauseita

6.1 Suurten lukujen laki

Lause 5. *Olkoon (X_n) jono riippumattomia satunnaismuuttujia, joille $E[X_i] = \mu$ ja $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$. Tällöin kaikilla $\epsilon > 0$*

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| > \epsilon\right) \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Saadaan

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu.$$

Todistus. Osoitetaan, että

$$E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

ja

$$\text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

jolloin Tšebyševin epäyhtälön nojalla saadaan

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. □

Suurten lukujen lain mukaan, kun ilmiöiden $X_i, i = 1, \dots, n$, määrä n kasvaa rajatta, niiden keskiarvo lähestyy hyvin lähelle odotusarvoa. [2]

6.2 Keskeinen raja-arvolause

Keskeisen raja-arvolauseen mukaan keskiarvon jakauma suppenee kohti normaalijakaumaa.

Lause 6. *Olkoon (X_n) jono riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joille pätee $E[X_i] = \mu$ ja $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$. Saadaan*

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$

Tällöin

$$F_{S_n^*}(x) \rightarrow \Phi(x)$$

kaikilla x , kun $n \rightarrow \infty$, jossa $\Phi(x)$ on standardinormaalijakauman kertymäfunktio.

[2]

Esimerkki 8. Tavoitteena on laskea summan

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

jakauma, jossa n on suuri. Keskeisen raja-arvolauseen nojalla saadaan

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) &= P(S_n \leq x) \\ &= P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{x - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\ &= P\left(S_n^* \leq \frac{x - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\ &= F_{S_n^*}\left(\frac{x - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right). \end{aligned}$$

Kyseessä on normaalijakauman jakaumafunktio, jossa odotusarvo on $n\mu$ ja varianssi $n\sigma^2$.

[2]

7 Yhteenveto

Tässä työssä käsiteltiin todennäköisyyslaskennan epäyhtälöitä. Markovin ja Tšebyševin epäyhtälöt antavat karkean arvion satunnaismuuttujien todennäköisyysjakauksesta verrattuna tarkkaan tai keskeisen raja-arvolauseen arvoihin. Näitä epäyhtälöitä voidaan käyttää hyödyksi muissa todennäköisyyslaskennan todistuksissa. Epäyhtälöt antavat parhaan mahdollisen arvion, koska tiedossa on vain odotusarvo tai odotusarvon lisäksi myös varianssi.

Paley-Zygmundin ja Jensenin epäyhtälöt ovat monimutkaisempia todennäköisyyden epäyhtälöitä. Jensenin epäyhtälö tutkii satunnaismuuttujia konveksien ja konkaavien funktioiden eri tapauksissa. Muita merkittäviä raja-arvolauseita ovat suurten lukujen laki ja keskeinen raja-arvolause. Suurten lukujen laki todistettiin Tšebyševin epäyhtälön nojalla.

Viitteet

- [1] Heikki Ruskeepää: Todennäköisyyslaskenta II Opettajan moniste, 2012. Delta, Turun yliopisto.
- [2] Jukka Lempa, Harto Saarinen: SMAT5306- Todennäköisyyslaskennan jatkokurssi. Delta, Turun yliopisto.
- [3] Nic Freeman: Probability with Measure, 6.2 The Paley-Zygmund inequality. 9.5.2024:
<https://nicfreeman1209.github.io/Website/MASx50/html/The-Paley-Zygmund-inequality.html#autosec-236> Luettu 6.4.2025
- [4] Hossein Pishro-Nik: Introduction To Probability, Statistics and Random Processes: 6.2.6 Solved Problems (Problem 4 and 8).
https://www.Probabilitycourse.com/chapter6/6_2_6_solved6_2.php.
Luettu 6.4.2025.
- [5] Math Monks, Jensen's Inequality.
<https://mathmonks.com/inequalities/jensens-inequality>. Luettu 6.4.2025
- [6] Hossein Pishro-Nik: Introduction To Probability, Statistics and Random Processes: 6.2.5 Jensen's Inequality.
https://www.probabilitycourse.com/chapter6/6_2_5_jensen's_inequality.php.
Luettu 6.4.2025
- [7] Math Monks, Markov's Inequality.
<https://mathmonks.com/inequalities/markov-and-chebyshevs-inequality>.
Luettu 11.4.2025