



**TURUN
YLIOPISTO**

NEWTON-COTES-KVADRATUURI SULJETULLA VÄLILLÄ

Viivi Valtakoski

LuK-tutkielma
Huhtikuu 2025

Tarkastajat:
Prof. H. H.
Dos. D.D.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

VIIVI VALTAKOSKI: Newton-Cotes-kvadratuuri suljetulla välillä
LuK-tutkielma, 10 s., 3 liites.
Matematiikka
Huhtikuu 2025

Tässä tutkielmassa perehdytään Newton-Cotes-kvadratuuriin. Työssä käsitellään suljettuja Newton-Cotes-kvadratuurikaavoja. Integroimisvälin päätepisteet sisältyvät integraalin approksimaatioon. Työssä tarkastellaan myös Newton-Cotes-kvadratuurin eksplisiittisiä muotoja tapauksia $n = 1, 2, 3$, joihin tutkielmassa viitataan nimellä Newton-Cotes-säännöt. Tutkielman lopuksi esitetään esimerkkejä.

Asiasanat: Numeerinen integrointi, Newton-Cotes-kvadratuuri, Newton-Cotes-säännöt

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Newton-Cotes-kvadratuuri	1
3	Integrointivirhe	3
4	Newton-Cotes-säännöt	4
4.1	Puolisuunnikassääntö	4
4.2	Simpsonin 1/3-sääntö	5
4.3	Simpsonin 3/8-sääntö	6
5	Yhdistelmäsäännöt ja numeerisia esimerkkejä	8
	Viitteet	10

1 Johdanto

Tutkielmassa perehdytään Newton-Cotes-kvadratuuriin, joka on numeerisen integroinnin menetelmä. Työssä Newton-Cotes-kvadratuurin eksplisiittisistä tuloksista käytetään nimitystä Newton-Cotes-säännöt. Newton-Cotes-säännöt ovat joukko kaavoja, joissa integraalia arvioidaan tasavälisenjaon pisteissä. Ideana on approksimoida tutkittavaa funktiota Lagrangen interpolaatiopolynomien avulla. Tutkielma pohjautuu lähteeseen [1]. Lähde [3] on käytetty yhtenäistämään matemaattista kieltä.

Newton-Cotes-kvadratuuri on nimetty Isaac Newtonin ja Roger Cotesin mukaan. Menetelmä kehittyi 1700-luvulla. Newton-Cotes-sääntöjen kaltainen kaava esiintyy ensimmäistä kertaa Isaac Newtonin *Principia*-teoksen toisessa painoksessa, jonka toimittajana Roger Cotes toimi. Cotesin kuoleman jälkeen hänen serkkunsa julkaisi kasan Cotesin kirjoittamia artikkeleita. Artikkeleiden joukossa oli kaava, joka tuli myöhemmin tunnetuksi nimillä Newton-Cotes-kvadratuuri ja Newton-Cotes-säännöt. [2].

Kaikille integraaleille ei välttämättä voi laskea tarkkaa arvoa. Usein on kuitenkin tarpeellista pystyä selvittämään integraalin likiarvo halutulla tarkkuudella. Newton-Cotes-säännöt mahdollistavat integraalin likiarvon selvittämisen. Kvadratuurikaava voidaan muodostaa mille tahansa $n + 1$ pistettä sisältävälle välille. Integroimisvälin ollessa suuri voidaan käyttää integraalin likiarvon selvittämiseksi Newton-Cotes-yhdistelmäsääntöä. Työssä keskitytään matala-asteisiin Newton-Cotes-sääntöihin.

2 Newton-Cotes-kvadratuuri

Tässä luvussa perehdytään Newton-Cotes-kvadratuuriin. Ensiksi selvennetään, millainen on alkutilanne. Seuraavaksi määritellään Lagrangen interpolaatiopolynomi, jonka jälkeen muodostetaan Newton-Cotes-kvadratuurikaava. Newton-Cotes-kvadratuurin ideana on korvata arvioitava funktio sellaisella polynomilla, jolla jossakin tasavälisenjaon pisteessä on sama arvo kuin tutkittavalla funktiolla.

Arvioidaan reaalfunktion $f(x)$ integraalia tietyllä välillä $[a, b]$. Integraalin approksimoinnissa hyödynnetään integroimisvälin pisteitä ja muodostetaan välille tasavälinenjako. Välillä olkoon $n + 1$ pistettä $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Tasaisesti jakautuneet pisteet muodostavat välille osavälejä. Olkoon jokainen piste muotoa $x_i = x_0 + ih$, jossa $i = 0, 1, \dots, n$ ja $h = \frac{x_n - x_0}{n}$.

Määritelmä 1. Kun on valittu funktio f ja joukko pisteitä x_0, x_1, \dots, x_n , niin polynomia $L(x)$, jonka

- i) aste on enintään n , ja
- ii) jolle $L(x_i) = f(x_i)$ kaikilla indeksin i arvoilla, sanotaan funktion f Lagrangen interpolaatiopolynomiksi.

Jos sekä $L(x)$ että $K(x)$ ovat Lagrangen interpolaatiopolynomeja, niiden erotus $R(x) = L(x) - K(x)$ on myös astetta n oleva. On kuitenkin huomattava, että $R(x_i) = L(x_i) - K(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$ jokaisessa $n + 1$ pisteessä. Ainoa enintään astetta n oleva polynomi, jolla on $n + 1$ nollakohtaa, on vakiopolynomi

nolla. Tällöin $R(x) = 0 \rightarrow L(x) = K(x)$, ja täten $L(x)$ on yksikäsitteinen.

Lagrangen interpolaatiopolynomi muodostuu Lagrangen kantapolynomeista $l_j(x)$. Lagrangen kantapolynomeja ovat

$$l_j(x) = \prod_{i=0, j \neq i}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Lagrangen kantapolynomeille pätee

$$\begin{aligned} l_j(x_i) &= 0, \text{ kun } i \neq j, \text{ ja} \\ l_j(x_j) &= 1. \end{aligned}$$

Lagrangen interpolaatiopolynomi saadaan siten lineaarikombinaationa.

$$L(x) = \sum_k^j f(x)l_j(x),$$

jossa $l_j(x)$ on Lagrangen kantapolynomi.

Newton-Cotes-kaavojen ideana on korvata tutkittava funktio $f(x)$ interpolaatiopolynomilla $L_n(x)$, joka saa samat arvot kuin funktio f välin pisteissä x_0, x_1, \dots, x_n . Toisin sanoen $L_n(x_i) = f(x_i)$ kaikilla indeksin i arvoilla. Interpolaatiopolynomi ei yleensä yhdy funktioon f välin muissa pisteissä. Tätä sanotaan interpolaatiovirheeksi. Interpolaatiovirhettä mittaa funktio $\varepsilon_n(x)$, jolle

$$f(x) = L_n(x) + \varepsilon_n(x)$$

kaikissa välin $[x_0, x_n]$ pisteissä x . Täten integraali on

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} [L_n(x) + \varepsilon_n(x)]dx = \int_{x_0}^{x_n} L_n(x)dx + \int_{x_0}^{x_n} \varepsilon_n(x)dx = I_n + EI_n. \quad (1)$$

Sopivalla interpolaatiopisteiden x_1, x_2, \dots, x_{n-1} valinnalla voidaan laskea päätermi I_n tarkasti ja arvioida interpolaatiovirheestä aiheutuvaa termin EI_n suuruutta.

Muodostetaan ensin integraalin likiarvo I_n . Käytetään Lagrangen interpolaatiopolynomia $L_n(x)$ ja muodostetaan Newton-Cotes-kvadratuurikaava.

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_0}^{x_n} L_n(x)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_n} [f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \cdots + f(x_n)l_n(x)]dx \\ &= \int_{x_0}^{x_n} \left(\sum_i^n f(x_i)l_j(x_i) \right) dx \\ &= \sum_i^n f(x_i) \int_{x_0}^{x_n} l_j(x_i)dx = \sum_i^n f(x_i)\lambda_j, \end{aligned} \quad (2)$$

missä $\lambda_j = \int_{x_0}^{x_n} l_j(x) dx$ on kantapolynomien integraali, kun $j = 0, 1, \dots, n$. Pisteet muodostavat välille tasavälisenjaon $x_i = x_0 + ih$, kun $i = 1, 2, \dots, n$. Olkoon $x = x_0 + sh$. Nyt saadaan kantapolynomille muoto

$$\begin{aligned} l_j(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \\ &= \frac{(s)h(s-1)h \dots (s-i+1)h(s-i-1)h \dots (s-n)h}{(i)h(i-1)h \dots (1)h(-1)h \dots (i-n)h} \\ &= \frac{(s)(s-1) \dots (s-i+1)(s-i-1) \dots (s-n)}{(-1)^{n-i} i! (n-i)!}. \end{aligned}$$

Muodostetaan kantapolynomille integraali $\lambda_j = \int_a^b l_j(x_i) dx$.

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \int_a^b l_j(x_i) dx \\ &= \int_0^n \frac{(s)(s-1) \dots (s-i+1)(s-i-1) \dots (s-n)}{(-1)^{n-i} i! (n-i)!} h ds, \quad \text{kun } i = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Kaava (2) on yleisin mahdollinen Newton-Cotes-kvadratuurikaava. Luvussa 4 lasketaan kaavassa (3) esiintyvät kantapolynomien integraalit tarkasti pienehköillä n :n arvoilla.

3 Integroitivirhe

Luvussa muodostetaan Newton-Cotes-kvadratuurin integroitivirhe. Ensin lauseessa 1 esitetään interpolaativirhe. Lauseen 1 todistus sivuutetaan. Lauseen perusteella muodostetaan Newton-Cotes-kvadratuurin virhetermin yläraja.

Lause 1. *Olkoon $f(x)$ reaalfunktio, joka on määritelty välillä $[a, b]$. Funktio on $n+1$ kertaa derivoituva välillä ja on olemassa enintään n astetta oleva polynomi $P_n(x)$, joka interpoloi funktiota $f(x)$ toisistaan poikkeavissa pisteissä x_0, x_1, \dots, x_n .*

$$\varepsilon_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

missä $x_0 \leq \xi \leq x_n$.

$\varepsilon_n(x)$ kutsutaan interpolaativirheeksi.

Integraali muodostuu kaavan (1) mukaan. $L_n(x)$ on interpoloiva polynomi ja $\varepsilon_n(x)$ on lauseen 1 mukainen interpolaativirhe. Virhetermi EI_n kertoo integroitivirheen ylärajan. Kun funktiota $f(x)$ arvioidaan asteen n polynomilla, funktion integraalin

approksimaatiovirhe on

$$\begin{aligned} EI_n &= \int_{x_0}^{x_n} \varepsilon(x) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_n} \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) dx. \end{aligned}$$

Kummassakin kaavassa muuttuja ξ riippuu x :stä. Virhetermi voidaan kuitenkin arvioida, jos tunnemme koko välillä $[x_0, x_n]$ derivaatan itseisarvolle voimassa olevan ylärajan M . Tällöin $f^{n+1}(\xi)$ on itseisarvoltaan enintään M integroimisvälillä eli $|f^{n+1}(\xi)| < M$. Hyödynnetään tasavälistäjakoja ja otetaan uudeksi muuttujaksi s , joka määräytyy kaavasta $x = x_0 + sh$, jossa h on osavälin pituus $\frac{x_n - x_0}{n}$. Uusi integroimismuuttuja saa arvoja väliltä $[0, n]$. Täten $dx = hds$ ja virhetermi on

$$|EI_n| \leq \frac{M}{n+1!} h^{n+2} \int_0^n s(s-1)\dots(s-n) ds. \quad (4)$$

4 Newton-Cotes-säännöt

Tässä luvussa johdetaan Newton-Cotes-kvadratuurin eksplisiittinen muoto tapauksissa $n = 1, 2, 3$. Näitä kutsutaan Newton-Cotes-säännöiksi. Luvussa muodostetaan tapauksia vastaavat Newton-Cotes-säännöt ja lasketaan virhetermit jokaiselle säännölle.

4.1 Puolisuunnikassääntö

Kun $n = 1$, puhutaan puolisuunnikassäännöstä. Tällöin suljetulta väliltä tunnetaan kaksi pistettä x_0 ja x_1 . Arvioidaan määrätyn integraalin $I_P = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$ arvoa. Puolisuunnikassääntö jakaa käyrän $f(x)$ alaisen alueen puolisuunnikaaksi suoralla, joka kulkee pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_1, f(x_1))$ kautta. Pisteitä yhdistävän suoran alle jäävä pinta-ala on integraalin I_P arvo. Kuvassa 1 on esitetty puolisuunnikassäännön geometrinen tulkinta. Integraalin I_P arvo voidaan laskea yhtälöstä (2). Nyt

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx I_P = \sum_{i=0}^1 f(x_i) \lambda_i = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1).$$

Kaavan (3) avulla muodostetaan interpolaatiopolynomin kantapolynomien integraalit λ_0 ja λ_1 .

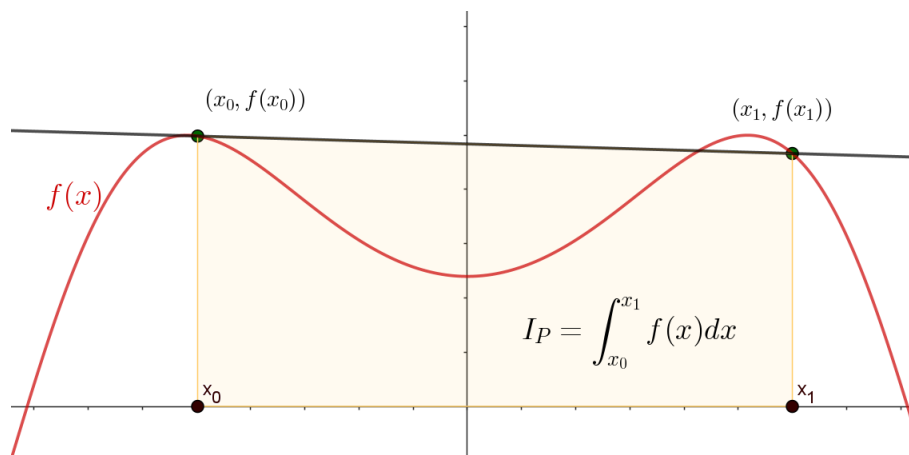
$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \int_0^1 -(s-1)h ds = \frac{1}{2}h \\ \lambda_1 &= \int_0^1 (s)h ds = \frac{1}{2}h \end{aligned}$$

Likimääräisen integraalin I_P arvo on täten

$$I_P = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) = \frac{1}{2}h [f(x_0) + f(x_1)]. \quad (5)$$

Puolisuunnikassäännön virhetermi EI_P saadaan laskettua kaavasta (4). Puolisuunnikassäännön virhetermi on

$$EI_P = \frac{M}{2!} h^3 \int_0^1 s(s-1) ds = -\frac{M}{12} h^3.$$



Kuva 1: Puolisuunnikassäännön geometrinen tulkinta

4.2 Simpsonin 1/3-sääntö

Kun $n = 2$, kyseessä on Simpsonin 1/3-sääntö. Tällöin tunnetaan kolme pistettä väliltä $[x_0, x_n]$. Arvioidaan integraalin $I_{1/3} = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$ arvoa. Funktiota $f(x)$ arvioidaan toisen asteen polynomien eli paraabelien avulla, joka kulkee pisteiden $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ ja $(x_2, f(x_2))$ kautta. Paraabelin ja x-akselin välinen pinta-ala on funktion integraalin likimääräinen arvo. Kuvassa 2 on esitettynä Simpsonin 1/3-säännön geometrinen tulkinta. Muodostetaan Simpsonin 1/3-sääntö yhtälöstä (2). Nyt

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx I_{1/3} = \sum_{i=0}^2 f(x_i) \lambda_i = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

,missä λ_0 , λ_1 ja λ_2 arvot lasketaan kaavasta (3). Saadaan

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \int_0^2 \frac{(s-1)(s-2)}{2} h ds = \frac{1}{3}h \\ \lambda_1 &= \int_0^2 -(s)(s-2) h ds = \frac{4}{3}h \\ \lambda_2 &= \int_0^2 \frac{(s)(s-1)}{2} h ds = \frac{1}{3}h. \end{aligned}$$

Likimääräisen integraalin $I_{1/3}$ arvo on täten

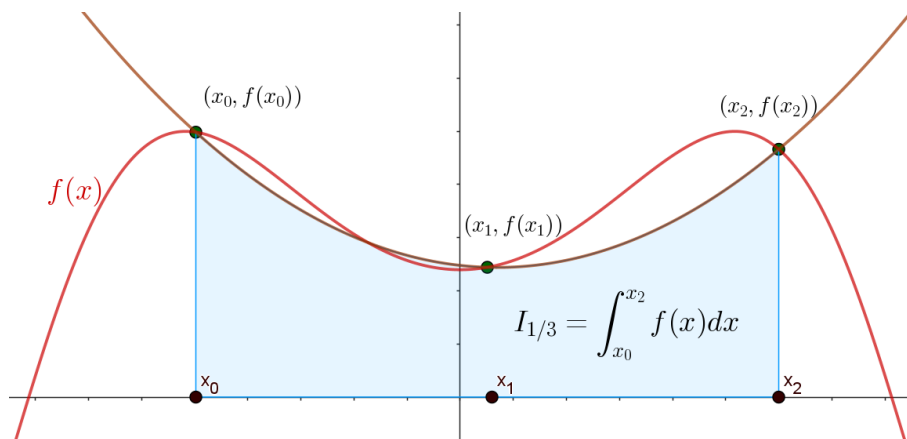
$$I_{1/3} = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = \frac{1}{3}h [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]. \quad (6)$$

Simpsonin 1/3-säännön virhetermi $EI_{1/3}$ saadaan laskettua kaavasta (4). Täten

$$EI_{1/3} \leq \frac{M}{3!}h^4 \int_0^2 s(s-1)(s-2)ds = 0.$$

Tulos viittaa siihen, että Simpsonin 1/3-sääntö ei ole täsmällinen ainoastaan toisen asteen polynomeille vaan myös kolmannen asteen polynomeille. Täten seuraavan asteen polynomi aiheuttaa virhetermin. Virhetermin selvittämiseksi on käytettävä neljää pistettä kolmen pisteen sijaan, koska virhe aiheutuu korkeamman asteen polynomifunktiosta. Valitaan neljä pistettä siten, että virhetermin arvo on näille pisteille nolla. Jotta virhetermi voidaan yleistää, valitaan yksi piste, joka toistuu kahdesti. Yksinkertaisuuden takia valitaan piste x_1 toistumaan. Simpsonin 1/3-säännön virhetermi on

$$\begin{aligned} EI_{1/3} &\leq \frac{M}{4!} \int_0^2 (x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)dx \\ &= \frac{M}{4!}h^5 \int_0^2 (s)(s-1)^2(s-2)ds \\ &= -\frac{M}{90}h^5. \end{aligned}$$



Kuva 2: Simpsonin 1/3-säännön geometrinen tulkinta

4.3 Simpsonin 3/8-sääntö

Kun $n = 3$, kyseessä on Simpsonin 3/8-sääntö. Tällöin tunnetaan neljä pistettä väliltä $[a, b]$. Arvioidaan määrätyn integraalin $I_{3/8} = \int_a^b f(x)dx$ arvoa. Simpsonin 3/8-säännössä funktion $f(x)$ integraalin arvoa arvioidaan kolmannen asteen polynomilla. Sovitetun käyrän ja x-akselin välinen pinta-ala on funktion integraalin arvio. Kolmannen asteen polynomifunktio kulkee tasavälisenjaon pisteiden $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)),$

$(x_2, f(x_2))$ ja $(x_3, f(x_3))$ kautta. Kuvassa 3 on esitetty Simpsonin 3/8-säännön geometrinen tulkinta. Muodostetaan Simpsonin 3/8-sääntö yhtälöstä (1). Nyt

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{3/8} = \sum_{i=0}^3 f(x_i)\lambda_i = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3).$$

Kaavasta (3) saadaan muodostettua $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ja λ_4 .

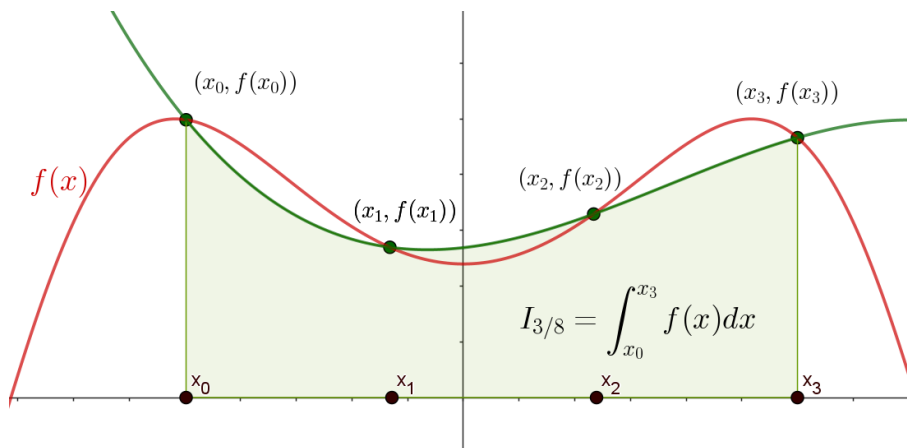
$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \int_0^3 \frac{-(s-1)(s-2)(s-3)}{6} h ds = \frac{3}{8}h \\ \lambda_1 &= \int_0^3 \frac{(s)(s-2)(s-3)}{2} h ds = \frac{9}{8}h \\ \lambda_2 &= \int_0^3 \frac{-(s)(s-1)(s-3)}{2} h ds = \frac{9}{8}h \\ \lambda_3 &= \int_0^3 \frac{(s)(s-1)(s-2)}{6} h ds = \frac{3}{8}h\end{aligned}$$

Integraalin $I_{3/8}$ likimääräinen arvo on täten.

$$\begin{aligned}I_{3/8} &= \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3) \\ &= \frac{3}{8}h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]\end{aligned}\tag{7}$$

Simpsonin 3/8-säännön virhetermi saadaan laskettua kaavasta (4). Virhetermi on

$$\begin{aligned}EI_{3/8} &\leq \frac{M}{4!}h^5 \int_0^3 (s)(s-1)(s-2)(s-3)ds \\ &= -\frac{3M}{80}h^5.\end{aligned}$$



Kuva 3: Simpsonin 3/8-säännön geometrinen tulkinta

5 Yhdistelmäsäännöt ja numeerisia esimerkkejä

Tässä luvussa tutustutaan ensin Newton-Cotes-yhdistelmäsääntöihin. Sen jälkeen esitetään kaksi esimerkkiä.

Kun arvioitavien integraalien integroimisvälit ovat suuria, integraalin approksimointi käy vaikeaksi. Funktion integraalin arvioiminen korkea-asteisella polynomilla voi olla hankalaa ja matalamman asteen polynomeilla arvioidessa virhetermi voi olla suuri. Tällöin on mielekkäämpää jakaa integroimisväli osaväleihin ja arvioida jokaisesta osaväliä yksinkertaisella Newton-Cotes-säännöllä (kuten puolisuunnikassääntö tai Simpsonin 1/3-sääntö). Tätä kutsutaan Newton-Cotes-yhdistelmäsäännöksi.

Funktion integraalin integroimisväli $[a, b]$ jaetaan m yhtä suuriin osaväleihin, joille $a = x_0$ ja $b = x_m$. Pisteiden välinen välimatka on $h = \frac{b-a}{m}$. Osavälien muodostama integraali lasketaan seuraavasti

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)dx.$$

Jokaisen osavälin integraalin laskemiseen voidaan käyttää jotain Newton-Cotes-säännöistä. Huomaa, että Simpsonin 1/3-sääntöä käytettäessä osavälien määrän m täytyy olla parillinen ja Simpsonin 3/8-sääntöä käytettäessä osavälien määrän m tulee olla numeron kolme monikerta. Esimerkissä 1 muodostetaan kymmenen osavälin jako ja lasketaan integraalin arvo käyttämällä puolisuunnikassääntöä. Esimerkissä 2 puolestaan pyritään vertailemaan Newton-Cotes-yhdistelmäsääntöjen täsmällisyyttä.

Esimerkki 1. Laske integraalin $\int_1^2 e^{-x^2} dx$ arvo käyttämällä puolisuunnikassääntöä ja jaa integroimisväli kymmeneen yhtä suureen osaväliin.

Jaetaan väli $[1, 2]$ kymmeneen osaväliin. Osavälin pituus on $h = \frac{2-1}{10} = 0.1$. Selvitetään funktion $f(x) = e^{-x^2}$ arvot pisteissä $x_0 = 1, x_1 = 1.1, \dots, x_{10} = 2$. Taulukossa 1 on listattu funktion likiarvot pisteissä kuuden desimaalin tarkkuudella.

x	$f(x) = e^{-x^2}$
1	0.367879
1.1	0.298197
1.2	0.236928
1.3	0.18452
1.4	0.140858
1.5	0.105399
1.6	0.077305
1.7	0.055576
1.8	0.039164
1.9	0.027052
2.0	0.018316

Taulukko 1: Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ arvot

Nyt

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_m} f(x) dx &\approx I_P = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{m-1}) + f(x_m)] \\ &= \frac{h}{2}\{f(x_0) + f(x_m) + 2[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{m-2}) + f(x_{m-1})]\}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan taulukon 1 arvot. Saadaan

$$\begin{aligned} I_P &= \frac{0.1}{2}[0.367879 + 0.298197] + \frac{0.1}{2}[0.298197 + 0.236928] + \cdots + \frac{0.1}{2}[0.027052 + 0.018316] \\ &= \frac{0.1}{2}\{0.367879 + 0.018316 + 2[0.298197 + 0.236928 + \cdots + 0.027052 + 0.018316]\} \\ &= 0.135810. \end{aligned}$$

Integraalin $\int_1^2 e^{-x^2} dx$ likiarvo on 0.135810.

Esimerkki 2. Arvioi integraalin $\int_1^{2.2} \frac{1}{1+2x+x^2} dx$ arvoa käyttäen puolisuunnikasääntöä ja Simpsonin sääntöjä. Jaa intervalli 12 osaväliin. Pyöristä vastaukset kuuden desimaalin tarkkuudella ja vertaa niitä integraalin tarkkaan arvoon.

Lasketaan osavälin pituus $h = \frac{2.2-1}{12} = 0.1$. Selvitetään funktion $f(x) = \frac{1}{1+2x+x^2}$ arvot pisteissä $x_0 = 1, x_1 = 1.1, x_2 = 1.2, \dots, x_{12} = 2.2$ ja taulukoidaan tulokset.

x	$f(x) = \frac{1}{1+2x+x^2}$
1.0	0.250000
1.1	0.226757
1.2	0.206612
1.3	0.189036
1.4	0.173611
1.5	0.160000
1.6	0.147929
1.7	0.137174
1.8	0.127551
1.9	0.118906
2.0	0.111111
2.1	0.104058
2.2	0.097656

Taulukko 2: Funktion $f(x) = \frac{1}{1+2x+x^2}$ arvot

Nyt lasketaan integraalin arvo Newton-Cotes-säännöillä.

i) Puolisuunnikasääntö

$$\int_{x_0}^{x_{12}} f(x) dx \approx I_P = \frac{h}{2}\{f(x_0) + f(x_{12}) + 2[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{10}) + f(x_{11})]\}$$

Sijoitetaan taulukon 2 arvot.

$$I_P = \frac{0.1}{2} \{0.25 + 0.097656 + 2 [0.226757 + 0.206612 + \cdots + 0.111111 + 0.0104058]\} \\ = 0.187657$$

ii) Simpsonin 1/3-sääntö

$$\int_{x_0}^{x_{12}} f(x)dx = I_{1/3} = \frac{h}{3} \{f(x_0) + f(x_{12}) + 2 [f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{10})] \\ + 4 [f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{11})]\}$$

Sijoitetaan taulukon 2 arvot.

$$I_{1/3} = \frac{0.1}{3} \{0.25 + 0.097656 + 2 [0.206612 + 0.173611 + 0.147929 + 0.127551s + 0.111111] \\ + 4 [0.226757 + 0.189036 + 0.16 + 0.137174 + 0.118906 + 0.104058]\} \\ = 0.187500$$

iii) Simpsonin 3/8-sääntö

$$\int_{x_0}^{x_{12}} f(x)dx = I_{3/8} = \frac{3h}{8} \{f(x_0) + f(x_{12}) + 3 [f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{10}) + f(x_{11})] \\ + 2 [f(x_3) + f(x_6) + f(x_9)]\}$$

Sijoitetaan taulukon 2 arvot.

$$I_{3/8} = \frac{0.3}{8} \{0.25 + 0.097656 + 3 [0.206612 + 0.226757 + 0.173611 + \cdots + 0.111111 + 0.104058] \\ + 2 [0.189036 + 0.147929 + 0.118906]\} \\ = 0.187500$$

Integraalin täsmällinen arvo on $\int_1^{2.2} \frac{1}{1+2x+x^2} dx = \int_1^{2.2} \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_1^{2.2} = \frac{-1}{3.2} + \frac{1}{2} = 0.1875$. Simpsonin säännöllä lasketut integraalin arvot ovat eksakteja. Puolisuunnikassäännön tulos poikkesi noin tuhannesosalla.

Viitteet

- [1] Gupta, R. K. (2019). Numerical Methods: Fundamentals and Applications. Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108685306>
- [2] Hockey, T., Trimble, V., Williams, T. R., Bracher, K., Jarrell, R. A., Ragep, F. J., Palmeri, J., & Bolt, M. (2007). *Biographical encyclopedia of astronomers*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-30400-7>
- [3] Newton–Cotes formulas. (2025, January 9). In Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%E2%80%93Cotes_formulas