



**TURUN
YLIOPISTO**

KAUPPAMATKUSTAJAONGELMAN MUUNNOKSIA

Kira Järvinen

LuK-tutkielma
Huhtikuu 2025

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

KIRA JÄRVINEN: Kauppamatkustajaongelman muunnoksia
LuK-tutkielma, 24 s.
Sovellettu matematiikka
Huhtikuu 2025

Tämä tutkielma on kirjallisuuskatsaus, jossa esitellään kauppamatkustajaongelman erilaisia muunnoksia. Kaikille tarkastelluille ongelmille esitellään tarkka määrittelmä ja mallinnus joko lineaarisena binäärioptimointitehtävänä tai lineaarisena sekalukuoptimointitehtävänä. Aluksi esitellään klassinen kauppamatkustajaongelma ja määritellään Hamiltonin sykli. Tämän jälkeen käydään läpi hyvin yksinkertaisia muunnoksia klassisen kauppamatkustajaongelman epäsymmetriselle versiolle. Seuraavaksi tarkastellaan kahta kauppamatkustajaongelmaa, joissa läpikäytävät kaupungit on jaettu ryhmiin. Kahdessa viimeisessä muunnoksessa on sen sijaan useampi kuin yksi kauppamatkustaja. Lopuksi esitellään lyhyesti joitakin ratkaisumenetelmiä esitellyille kauppamatkustajaongelmille.

Asiasanat: kauppamatkustajaongelma, Hamiltonin sykli, lineaarinen binäärinen optimointi, lineaarinen sekalukuoptimointi.

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Klassinen kauppamatkustajaongelma	2
3	Yksinkertaisia muunnoksia	4
3.1	Maksimikauppamatkustajaongelma	5
3.2	Pullonkaulakauppamatkustajaongelma	6
3.3	Maksimihajontakauppamatkustajaongelma	7
4	Kauppamatkustajaongelmia kaupunkiryhmille	9
4.1	Yleistetty kauppamatkustajaongelma	9
4.2	Klusterikauppamatkustajaongelma	11
5	Kauppamatkustajaongelmia useammalle kauppamatkustajalle	13
5.1	Usean kauppamatkustajan ongelma	13
5.2	Värillinen kauppamatkustajaongelma	14
6	Ratkaisumenetelmiä	17
6.1	Tarkat ratkaisumenetelmät	17
6.1.1	Täydellinen luettelointi	17
6.1.2	Branch and Bound -menetelmä	18
6.2	Heuristiset ratkaisumenetelmät	18
6.2.1	Lähimmän naapurin menetelmä	19
6.2.2	2- ja 3-optimaalinen haku	19
6.2.3	Geneettiset algoritmit	20
6.2.4	Simuloitu jäähdytys	20
7	Yhteenveto	21

1 Johdanto

Matemaattisella optimoinnilla tarkoitetaan parhaan eli optimaalisen ratkaisun etsimistä tarkasteltavalle ongelmalle kaikkien sen mahdollisten ratkaisujen joukosta. Optimoitavat ongelmat pystytään yleensä esittämään kohdefunktion ja erilaisten rajoitusten avulla. Tehtävän rajoitukset määräävät ongelmassa tuntemattomien päätösmuuttujien sallitut arvot. Kohdefunktio puolestaan mittaa päätösmuuttujien hyvyttä ja sitä pyritään joko minimoimaan tai maksimoimaan. Matemaattinen optimointi voidaan jakaa useaan eri osa-alueeseen riippuen optimoitavan tehtävän kohdefunktion ja rajoitusten ominaisuuksista. Kaksi isoa matemaattisen optimoinnin osa-aluetta ovat lineaarinen ja epälineaarinen optimointi. Lineaarissa optimoinnissa ratkaistavien tehtävien kohdefunktio ja rajoitukset ovat lineaarisia ja kaikki päätösmuuttujat jatkuvia. Epälineaarissa optimoinnissa puolestaan vähintään yhden rajoituksen tai kohdefunktion on oltava epälineaarinen ja kaikkien päätösmuuttujien jatkuvia.

Kombinatorisilla optimointitehtävillä tarkoitetaan sellaisia ongelmia, joiden kaikki päätösmuuttujat ovat diskreettejä ja sallittujen pisteiden joukko on äärellinen. Tällaisissa ongelmissa ratkaisujen määrä kasvaa kuitenkin nopeasti ongelman koon kasvaessa. Jotkut kombinatoriset optimointiongelmat voidaan esittää lineaarisina binäärioptimointitehtävinä, joissa kohdefunktio ja rajoitukset ovat lineaarisia ja päätösmuuttujat ovat binäärisiä (eli saavat vain arvon nolla tai yksi). [12] Yksi kaikkein tunnetuimmista kombinatorisista optimointiongelmistä on nimeltään kauppamatkustajaongelma. Sitä ovat tutkineet hyvin laajasti monet eri matemaatikot jo 1800-luvulta alkaen [18, 30]. Lähteen [30] mukaan vaikuttaa siltä, että Karl Menger kirjoitti kauppamatkustajaongelmasta ensimmäisenä vuonna 1930. Ensimmäisten joukossa ongelmalle esitteli matemaattisen mallin Merrill Flood vuonna 1956 lähteessä [9].

Kauppamatkustajaongelmassa yritetään nimensä mukaisesti etsiä lyhin reitti kiertelevälle kauppamatkustajalle. Reitin on alettava aloituskaupungista ja kierrettävä kaikkien ennalta määrättyjen kaupunkien kautta palaten takaisin lähtökaupunkiin. Jokaisessa kaupungissa aloituskaupunkia lukuun ottamatta on käytävä tasan kerran. Kuljetun reitin pituuteen vaikuttaa kaupunkien kiertojärjestys ja kaupungeja yhdistävien teiden pituudet. Tarkoituksena on löytää kaupungeille kaikkein optimaalisin järjestys, joka kuvaa lyhintä mahdollista reittiä. Vaikka ongelma kuulostaa yksinkertaiselta, on varsinkin suurikokoisten kauppamatkustajaongelmien ratkaiseminen tarkasti hyvin vaikeaa. Kauppamatkustajaongelma on luokiteltu NP-vaikeaksi optimointiongelmaksi. Sen ratkaisemiseksi ei siis ole vielä löydetty sellaista algoritmia, jolla ongelma voitaisiin ratkaista aina optimaalisesti polynomiaalisessa ajassa. Ongelmalle on olemassa joitakin tarkkoja eli eksakteja ratkaisualgoritmeja, mutta kaupunkien määrän lisääntyessä optimaalisen ratkaisun löytämiseen tarvittava aika kasvaa nopeasti liian suureksi. [18]

Kauppamatkustajaongelmalla on monia erilaisia tosielämän sovelluskohteita. Tällaisia ovat esimerkiksi erilaiset kuljetus- ja reititysongelmat, sekä noutojen ja toimitusten aikataulutus [6]. Kauppamatkustajaongelmasta on kehitetty myös useita erilaisia muunnoksia, jotka toimivat klassista ongelmaa paremmin tietynlaisten tosielämän ongelmien mallintamisessa. Esimerkiksi pullonkaulakauppamatkustajaon-

gelmalla voidaan ratkaista reititysongelmia siten, että kahden pysähdyksen välinen matka on mahdollisimman lyhyt. Toinen esimerkki on useamman kauppamatkustajan ongelma, jota voidaan soveltaa klassista ongelmaa paremmin usean ajoneuvon reittien suunnittelussa.

Tässä tutkielmassa keskitytään erityisesti klassisen kauppamatkustajaongelman erilaisiin muunnoksiin ja niiden mallintamiseen lineaarisina binääri- tai sekalukuoptimointitehtävinä. Aluksi luvussa 2 käydään läpi klassisen kauppamatkustajaongelman tarkempi määritelmä ja matemaattinen mallinnus sekä määritellään, mitä tarkoitetaan Hamiltonin syklillä. Lisäksi tarkastellaan miten symmetrinen ja epäsymmetrinen kauppamatkustajaongelma eroavat toisistaan. Klassisen kauppamatkustajaongelman jälkeen luvussa 3 tarkastellaan kolmea sen erittäin yksinkertaista muunnosta. Tämän jälkeen luvussa 4 keskitytään sellaisiin muunnoksiin, joissa kierrettävät kaupungit on jaettu ryhmiin. Luvussa 5 käydään läpi kaksi sellaista muunnosta, joissa kauppamatkustajia on yhden sijasta useampi. Eri muunnoksia tarkasteltaessa keskitytään erityisesti siihen, miten ne eroavat klassisesta kauppamatkustajaongelmasta tavoitteiltaan ja mallinukseltaan. Tämän jälkeen luvussa 6 esitellään vielä lyhyesti joitakin klassiselle kauppamatkustajaongelmalle ja käsitellyille muunnoksille soveltuvia ratkaisumenetelmiä. Lopuksi luvussa 7 tehdään lyhyt yhteenveto työssä käsitellyistä asioista.

2 Klassinen kauppamatkustajaongelma

Kauppamatkustajaongelma (engl. *Traveling Salesman Problem*) on yksi kaikkein tunnetuimmista kombinatorisista optimointiongelmistä. Siinä kauppamatkustajalle on annettu lista kaupungeista, joissa hänen on vierailtava. Kauppamatkustajan on löydettävä lyhin mahdollinen reitti, joka kulkee kaikkien annettujen kaupunkien läpi tasan kerran ja palaa takaisin aloituskaupunkiin (engl. *Depot*).

Kauppamatkustajaongelmaa voidaan mallintaa graafilla, jossa jokainen solmu vastaa yhtä vierailtavaa kaupunkia ja solmuja yhdistävät kaaret tai nuolet kuvaavat kaupungeja yhdistäviä teitä. Graafin kaariin ja nuoliin voidaan lisäksi liittää kustannukset, jotka kuvaavat kaupunkien välisiä etäisyyksiä. Tavoite on löytää tarkasteltavan graafin lyhin mahdollinen Hamiltonin sykli ja seuraavaksi määritellään kyseinen käsite.

Määritelmä 1. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $G = (V, E)$ täydellinen, painotettu, suuntaamaton tai suunnattu graafi, jossa $V = \{1, \dots, n\}$ on graafin solmujen joukko ja E on solmuja yhdistävien kaarten tai nuolten joukko. *Hamiltonin sykli* on sellainen graafin G yhtenäinen polku, joka kulkee jokaisen solmun läpi tasan kerran ja palaa takaisin aloitussolmuun.

Kuvassa 1 on oranssilla merkitty kuuden solmun graafissa yksi mahdollinen Hamiltonin sykli. Lyhimmässä mahdollisessa Hamiltonin syklissä mukana olevien kaarten tai nuolten yhteenlaskettu kustannus eli kokonaispituus on pienin mahdollinen.

Seuraavaksi käydään läpi kauppamatkustajaongelman tarkempi matemaattinen mallinnus. Määritellään ongelma kuitenkin ensin tarkemmin.

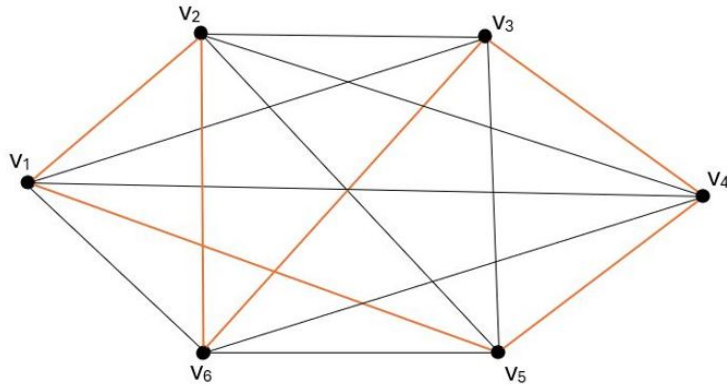
Määritelmä 2. [27] Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $G = (V, E)$ täydellinen, painotettu, suunnattu tai suuntaamaton graafi, jossa $V = \{1, \dots, n\}$ on solmujen eli

kaupunkien joukko ja $E = \{e_{ij} \mid i, j \in V, i \neq j\}$ kaupunkeja yhdistävien kaarten tai nuolten joukko. Näin ollen yhteys kaupungista i kaupunkiin j esitetään alkiolla e_{ij} . Jokaisella kaarella tai nuolella e_{ij} on kustannus d_{ij} , joka kuvaa etäisyyttä kaupungista i kaupunkiin j kaarta tai nuolta e_{ij} pitkin. Kaikki mahdolliset kustannukset voidaan esittää *kustannusmatriisilla*

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \cdots & d_{2n} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \cdots & d_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Erityisesti $d_{ij} = \infty$, kun $i = j$. Oletetaan, että \mathcal{F} koostuu kaikista graafin G Hamiltonin sykleistä. *Kauppamatkustajaongelman* tavoite on löytää sellainen $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$, johon kuuluvien kaarten tai nuolten yhteenlaskettu pituus on mahdollisimman pieni.

Kauppamatkustajaongelma voidaan luokitella matriisin D ominaisuuksien perusteella. Jos kustannusmatriisi D on symmetrinen eli $d_{ij} = d_{ji}$, on kyseessä *symmetrinen kauppamatkustajaongelma*. Tällöin graafi G on suuntaamaton eli sen yhteydet e_{ij} ovat kaaria ja niitä pitkin voidaan kulkea kumpaan suuntaan tahansa ja kustannus suunnasta riippumatta on aina sama. Kun matriisi D on epäsymmetrinen, kutsutaan ongelmaa *epäsymmetriseksi kauppamatkustajaongelmaksi*. Tällöin graafi G on suunnattu ja yhteydet $e_{ij} \in E$ ovat nuolia kaupungista i kaupunkiin j . Kaupungista toiseen voidaan siis kulkea vain nuolen osoittamaan suuntaan ja pituudet d_{ij} ja d_{ji} eivät välttämättä ole yhtäsuuria.



Kuva 1: yksi mahdollinen Hamiltonin sykli verkossa, jossa on kuusi solmua ja pelkkiä kaaria.

Tässä työssä tarkastellaan muunnoksia kauppamatkustajaongelman epäsymmetriselle versiolle. Tästä syystä käydään ensin läpi epäsymmetrisen kauppamatkustajaongelman mallinnus lineaarisena binäärioptimointitehtävänä. Esitetty malli perustuu lähteeseen [27]. Aloitetaan määrittelemällä päätösmuuttujat

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun nuoli } e_{ij} \text{ kuuluu ratkaisuna saatuun Hamiltonin sykliin} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Kun yritetään minimoida kuljettujen nuolten yhteenlaskettua pituutta, saadaan ongelma kirjoitettua optimointitehtävänä

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i \in V, i \neq j} x_{ij} = 1, \quad \text{kaikille } j = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} = 1, \quad \text{kaikille } i = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in V \setminus S} x_{ij} \geq 1, \quad \text{kaikille } S \subset V, 2 \leq |S| \leq n - 2 \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \text{kaikille } i, j = 1, \dots, n, i \neq j. \quad (5)$$

Rajoituksilla (2) ja (3) varmistetaan, että jokaisesta kaupungista lähdetään ja sinne tullaan vain kerran. Luonnolliset rajoitukset (5) seuraavat päätösmuuttujien x_{ij} määrittelystä. Rajoitukset (4) ovat alisykliä eliminointirajoituksia. Niillä varmistetaan, että ratkaisuna saadaan yksi yhtenäinen sykli, joka käy läpi kaikki graafin kaupungit. Nämä alisykliä eliminointirajoitukset voidaan lähteen [27] mukaan kirjoittaa myös muodossa

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \text{kaikille } S \subseteq V \setminus \{1\}, S \neq \emptyset.$$

Tämän muodon esittelivät Dantzig, Fulkerson ja Johnson artikkelissa [7]. Miller, Tucker ja Zemhn osoittivat, että alisyklejä voidaan eliminoida myös toisenlaisilla rajoituksilla [21]. Tätä varten täytyy ensin määritellä jokaiselle $i \in V \setminus \{1\}$ uusi muuttuja $u_i \geq 0$, joka kuvaa kaupungin i vierailemisjärjestystä kauppatmatkustajan reitillä. Kyseiset alisykliä eliminointirajoitukset voidaan esittää muodossa

$$u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq (n - 2), \quad \text{kaikille } i, j = 2, 3, \dots, n, i \neq j. \quad (6)$$

On tärkeää huomata, että jos rajoitus (4) korvataan rajoituksella (6), optimointitehtävä ei enää ole binäärinen, vaan sekalukuoptimointitehtävä, koska muuttujat u_i ovat jatkuvia.

3 Yksinkertaisia muunnoksia

Tässä luvussa tarkastellaan kauppatmatkustajaongelman yksinkertaisia muunnoksia, jotka ovat klassisen ongelman tavoin NP-vaikeita [2, 16]. Luvussa esitellään ensin maksimikauppatmatkustajaongelma, joka on muuten vastaava kuin klassinen kauppatmatkustajaongelma, mutta tavoitteena on löytää pisin Hamiltonin sykli lyhimmän sijasta. Seuraavaksi tarkastellaan pullonkaulakauppatmatkustajaongelmaa, jossa tavoitteena on minimoida pisintä kahden kaupungin välistä etäisyyttä. Lopuksi esitellään vielä maksimihajontakauppatmatkustajaongelma, jossa puolestaan pyritään maksimoimaan lyhintä kahden kaupungin välistä etäisyyttä.

3.1 Maksimikauppamatkustajaongelma

Maksimikauppamatkustajaongelma (engl. *Maximum Traveling Salesman Problem*) on hyvin samankaltainen kuin klassinen kauppamatkustajaongelma. Sen ja klassisen ongelman ero on, että maksimikauppamatkustajaongelmassa pyritään maksimoimaan kuljetun Hamiltonin syklin pituutta. Toisin sanoen maksimoidaan kuljettujen nuolten pituuksien summaa. Maksimikauppamatkustajaongelmaa voidaan hyödyntää esimerkiksi ratkaistaessa lyhimmän supermerkkijonon ongelmaa (engl. *Shortest Superstring Problem*). Tällä ongelmalla on puolestaan sovelluskohteita DNA-sekvensoinnissa ja tiedonpakkaamisessa. Tässä alaluvussa on pääosin käytetty lähteenä kirjaa [2].

Esitellään seuraavaksi maksimikauppamatkustajaongelman tarkempi määritelmä.

Määritelmä 3. [16] Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $G = (V, E)$ täydellinen, painotettu ja suunnattu graafi, jossa $V = \{1, \dots, n\}$ on kaupunkien joukko ja $E = \{e_{ij} \mid i, j \in V, i \neq j\}$ puolestaan on kaupunkeja yhdistävien nuolten joukko. Nuolten e_{ij} pituuksia merkitään arvoilla d_{ij} ja kaikki nämä arvot voidaan koota kustannusmatriisiksi $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Lisäksi $d_{ij} = \infty$, kun $i = j$. Oletetaan, että \mathcal{F} koostuu kaikista graafin G Hamiltonin sykleistä. *Maksimikauppamatkustajaongelman* tavoitteena on löytää sellainen $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$, jonka nuolten yhteenlaskettu pituus on mahdollisimman suuri.

Seuraavaksi tarkastellaan maksimikauppamatkustajaongelman matemaattista mallinnusta lineaarisena binäärioptimointitehtävänä. Kuten kauppamatkustajaongelmas-
sa käytetään muuttujia

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun nuoli } e_{ij} \text{ kuuluu ratkaisuna saatuun Hamiltonin sykliin} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Koska tällä kertaa pyritään maksimoimaan kuljettujen nuolten yhteenlaskettua pituutta, saadaan seuraava kohdefunktio ja rajoitukset

$$\max \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} d_{ij} x_{ij} \quad (7)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i \in V, i \neq j} x_{ij} = 1, \quad \text{kaikille } j = 1, \dots, n \quad (8)$$

$$\sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} = 1, \quad \text{kaikille } i = 1, \dots, n \quad (9)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in V \setminus S} x_{ij} \geq 1, \quad \text{kaikille } S \subset V, 2 \leq |S| \leq n - 2 \quad (10)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \text{kaikille } i, j = 1, \dots, n, i \neq j. \quad (11)$$

Nähdään, että saatu optimointitehtävä on samanlainen kuin klassisessa kauppamatkustajaongelmassa, mutta kohdefunktiota maksimoidaan minimoinnin sijasta. Tehtävän rajoitukset (8)-(11) ovat samoja, kuin aiemmat rajoitukset (2)-(5). Näin ollen

rajoituksilla (8) ja (9) varmistetaan, että kauppamatkustaja käy jokaisessa kaupungissa vain kerran. Toisin sanoen graafin jokaiseen kaupunkiin tullaan ja sieltä lähdetään vain kerran. Rajoituksilla (10) eliminoidaan mahdolliset alisyklit, eli pidetään huolta siitä, että ratkaisuna saadaan yksi yhtenäinen reitti, johon kuuluu n kaupunkia.

Maksimikauppamatkustajaongelma siis muistuttaa hyvin paljon klassista kauppamatkustajaongelmaa. Kuljetun reitin pituuden minimoinnin sijasta pyritään kuitenkin maksimoimaan sitä. Koska maksimikauppamatkustajaongelma on niin samankaltainen, se voidaankin itse asiassa ratkaista klassisena kauppamatkustajaongelmana. Toisin sanoen maksimikauppamatkustajaongelman ratkaisu kustannusmatriisilla D on sama kuin klassisen kauppamatkustajaongelman ratkaisu kustannusmatriisilla $C = -D$.

3.2 Pullonkaulakauppamatkustajaongelma

Seuraavaksi tarkastellaan pullonkaulakauppamatkustajaongelmaa (engl. *Bottleneck Traveling Salesman Problem*), jonka esittelivät ensimmäisen kerran Gilmore ja Gomory artikkelissaan [13] vuonna 1964. Se on toinen hyvin yksinkertainen kauppamatkustajaongelman muunnos, jonka malli eroaa edellä käsitellyistä vain kohdefunktion osalta. Tässä alaluvussa on käytetty lähteenä kirjaa [16].

Pullonkaulakauppamatkustajaongelmassa tarkoituksena on etsiä kauppamatkustajalle sellainen reitti, jossa jokainen kahta kaupunkia yhdistävä nuoli on mahdollisimman lyhyt. Tähän pyritään ongelmassa minimoimalla ratkaisuna saadun reitin pisimmän nuolen pituutta. Pullonkaulakauppamatkustajaongelman sovelluskohteita ovat muun muassa reititysongelmat, joissa kahden peräkkäisen pysähdyksen välisen matkan olisi hyvä olla mahdollisimman lyhyt. Tällainen tilanne tulee vastaan esimerkiksi helposti pilaantuvien elintarvikkeiden kuljetuksessa.

Seuraavaksi käydään läpi pullonkaulakauppamatkustajaongelman tarkempi määritelmä.

Määritelmä 4. [16] Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $G = (V, E)$ täydellinen, painotettu ja suunnattu graafi, jossa $V = \{1, \dots, n\}$ on kaupunkien joukko ja $E = \{e_{ij} \mid i, j \in V, i \neq j\}$ puolestaan on kaupunkia yhdistävien nuolten joukko. Nuolten e_{ij} pituuksia merkitään arvoilla d_{ij} ja kaikki nämä arvot voidaan koota kustannusmatriisiksi $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Lisäksi $d_{ij} = \infty$, kun $i = j$. Oletetaan, että \mathcal{F} koostuu kaikista graafin G Hamiltonin sykleistä. Olkoon $d_{max}(\mathcal{H})$ Hamiltonin syklin $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$ pisimmän nuolen pituus. Näin ollen $d_{max}(\mathcal{H}) = \max\{d_{ij} \mid e_{ij} \in \mathcal{H}\}$. *Pullonkaulakauppamatkustajaongelmassa* tavoite on löytää sellainen Hamiltonin sykli $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$, että pituus $d_{max}(\mathcal{H})$ on mahdollisimman lyhyt.

Pullonkaulakauppamatkustajaongelma voidaan kirjoittaa epälineaarisen binäärioptimointitehtävänä. Tätä varten otetaan jälleen käyttöön päätösmuuttujat

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun nuoli } e_{ij} \text{ kuuluu ratkaisuna saatuun Hamiltonin sykliin} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Nyt Hamiltonin syklissä kuljetuista nuolista pisin on pituudeltaan

$$\max \{d_{ij}x_{ij} \mid i, j \in V, i \neq j\}.$$

Tämä on tehtävän kohdefunktio. Koska tavoite on minimoida pisimmän kuljetun nuolen pituutta, kohdefunktiota minimoidaan. Yhdessä luvussa 2 esitetyjen kauppatkustajaongelman rajoitusten kanssa saadaan optimointitehtävä

$$\min \max \{d_{ij}x_{ij} \mid i, j \in V, i \neq j\} \quad (12)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i \in V, i \neq j} x_{ij} = 1, \quad \text{kaikille } j = 1, \dots, n \quad (13)$$

$$\sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} = 1, \quad \text{kaikille } i = 1, \dots, n \quad (14)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in V \setminus S} x_{ij} \geq 1, \quad \text{kaikille } S \subset V, 2 \leq |S| \leq n - 2 \quad (15)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \text{kaikille } i, j = 1, \dots, n, i \neq j. \quad (16)$$

Jälleen rajoituksilla (13) ja (14) varmistetaan, että jokaisessa graafin solmussa viereilläään vain kerran ja rajoituksilla (15) eliminoidaan alisykliä muodostumista.

On hyvä huomata, ettei edellä esitetty malli ole lineaarinen, sillä sen kohdefunktio on epälineaarinen. Tehtävä voidaan kuitenkin muuttaa lineaariseksi ottamalla käyttöön uusi jatkuva päätösmuuttuja $f \in \mathbb{R}$, jolloin saadaan seuraava lineaarinen sekalukuoptimointitehtävä [22]

$$\begin{aligned} \min \quad & f \\ \text{s. t.} \quad & f \geq d_{ij}x_{ij}, \quad \text{kaikille } i, j = 1, \dots, n, i \neq j \\ & \sum_{i \in V, i \neq j} x_{ij} = 1, \quad \text{kaikille } j = 1, \dots, n \\ & \sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} = 1, \quad \text{kaikille } i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i \in S} \sum_{j \in V \setminus S} x_{ij} \geq 1, \quad \text{kaikille } S \subset V, 2 \leq |S| \leq n - 2 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \text{kaikille } i, j = 1, \dots, n, i \neq j \\ & f \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kun halutaan löytää sellainen Hamiltonin sykli, jossa lyhin nuoli on pisin mahdollinen, on kyseessä maksimihajontakauppatkustajaongelma. Seuraavassa alaluvussa tarkastellaan tätä muunnosta tarkemmin.

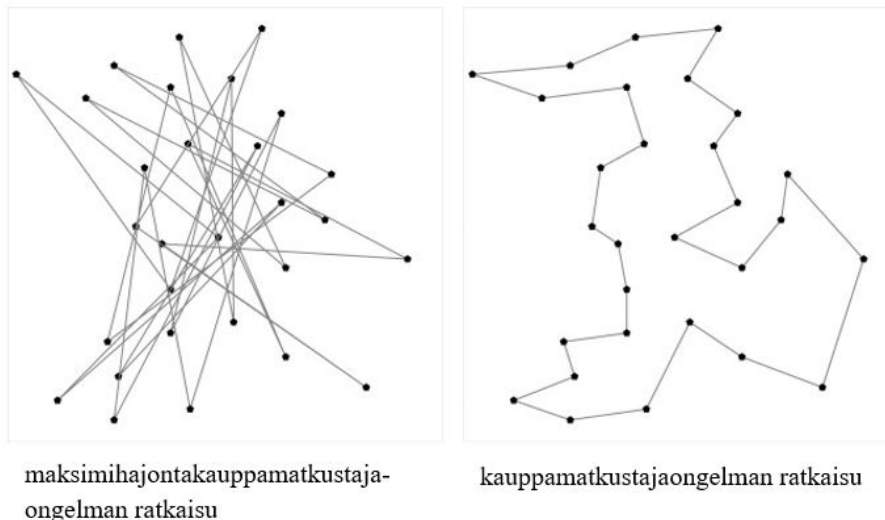
3.3 Maksimihajontakauppatkustajaongelma

Maksimihajontakauppatkustajaongelma (engl. *Maximum Scatter Traveling Salesman Problem*) muistuttaa hyvin paljon edellisessä alaluvussa tarkasteltua kauppatkustajaongelman muunnosta ja se esiteltiin vuonna 1999 artikkelissa [1]. Kuten edellä mainittiin, siinä pyritään maksimoimaan lyhintä kahden peräkkäisen solmun välistä etäisyyttä Hamiltonin syklissä. Tilanne on näin ollen päinvastainen kuin pulonkaulakauppatkustajaongelmassa. Kuvassa 2 on havainnollistettu, kuinka maksimihajontakauppatkustajaongelman ratkaisu eroaa klassisen kauppatkustajaongelman ratkaisusta ja siitä nähdään, että maksimihajontakauppatkustajaongelmassa peräkkäiset solmut yritetään sijoittaa mahdollisimman hajautetusti. Tässä

alaluvussa on käytetty lähteenä lähde [16].

Maksimihajontakauppamatkustajaongelmaa voidaan soveltaa teollisen tuotannon prosesseihin, joissa kahden peräkkäisen toiminnon on sijaittava mahdollisimman kaukana toisistaan. Esimerkiksi kahden metallipalan niittauksessa yhteen on peräkkäisten niittauskohtien oltava hyvin hajautetut, jotta edellinen kohta ja sen ympäristö saa kuumennuksen jälkeen tarpeeksi aikaa jäähtyä. Toinen mahdollinen sovelluskohde on lääketieteellinen kuvantaminen. [35]

Ensin esitellään maksimihajontakauppamatkustajaongelman tarkka määritelmä.



Kuva 2: Maksimihajontakauppamatkustajaongelman ratkaisu verrattuna klassisen kauppamatkustajaongelman ratkaisuun. Kuva on lähteestä [31].

Määritelmä 5. [16] Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $G = (V, E)$ täydellinen, painotettu ja suunnattu graafi, jossa $V = \{1, \dots, n\}$ on kaupunkien joukko ja $E = \{e_{ij} \mid i, j \in V, i \neq j\}$ puolestaan on kaupunkeja yhdistävien nuolten joukko. Nuolten e_{ij} pituuksia merkitään arvoilla d_{ij} ja kaikki nämä arvot voidaan koota kustannusmatriisiksi $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Lisäksi $d_{ij} = \infty$, kun $i = j$. Oletetaan, että \mathcal{F} koostuu kaikista graafin G Hamiltonin sykleistä. Olkoon $d_{\min}(\mathcal{H})$ Hamiltonin syklin $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$ lyhimmän nuolen pituus, eli $d_{\min}(\mathcal{H}) = \min\{d_{ij} \mid e_{ij} \in \mathcal{H}\}$. *Maksimihajontakauppamatkustajaongelmassa* tavoite on etsiä sellainen Hamiltonin sykli $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$, jossa pituus $d_{\min}(\mathcal{H})$ on mahdollisimman suuri.

Seuraavaksi ongelma kirjoitetaan optimointitehtävänä. Jälleen otetaan käyttöön muuttujat

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun nuoli } e_{ij} \text{ kuuluu ratkaisuna saatuun Hamiltonin sykliin} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Hamiltonin syklissä lyhimmän nuolen pituus ja samalla tehtävän kohdefunktio on

$$\min \{d_{ij}x_{ij} \mid i, j \in V, i \neq j\}.$$

Koska tällä kertaa yritetään maksimoida reitin lyhimmän nuolen pituutta, kohdefunktiota maksimoidaan. Tehtävässä voidaan jälleen käyttää samoja rajoituksia, kuin luvun 2 mallissa. Tästä seuraa epälineaarinen binäärioptimointitehtävä

$$\max \quad \min \{d_{ij}x_{ij} \mid i, j \in V, i \neq j\} \quad (17)$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{i \in V, i \neq j} x_{ij} = 1, \quad \text{kaikille } j = 1, \dots, n \quad (18)$$

$$\sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} = 1, \quad \text{kaikille } i = 1, \dots, n \quad (19)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in V \setminus S} x_{ij} \geq 1, \quad \text{kaikille } S \subset V, 2 \leq |S| \leq n - 2 \quad (20)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \text{kaikille } i, j = 1, \dots, n, i \neq j. \quad (21)$$

Tehtävän rajoitukset (18)–(21) ovat jälleen samat, kuin luvun 2 rajoitukset (2)–(5). Kuten pullonkaulakauppamatkustajaongelman mallissa alaluvussa 3.2, tässäkin mallissa kohdefunktio on epälineaarinen. Tehtävä voidaan kuitenkin muuttaa lineaariseksi sekalukuoptimointitehtäväksi vastaavasti kuin alaluvussa 3.2 [22]. Tämän seurauksena maksimoidaan jatkuvaa lisämuuttujaa $f \in \mathbb{R}$ ja lisätään tehtävään rajoitteet

$$f \leq d_{ij}x_{ij} \quad \text{kaikille } i, j = 1, \dots, n, i \neq j.$$

Maksimihajontakauppamatkustajaongelman ja pullonkaulakauppamatkustajaongelman välinen suhde on samanlainen kuin maksimikauppamatkustajaongelmalla ja klassisella kauppamatkustajaongelmalla. Alaluvussa 3.1 nähtiin, että maksimikauppamatkustajaongelma pystytään ratkaisemaan klassisena kauppamatkustajaongelmana, kun kustannusmatriisi kerrotaan miinuksella. Sama toimii myös nyt. Olkoon maksimihajontakauppamatkustajaongelman kustannusmatriisi D . Tällöin ongelma voidaan ratkaista pullonkaulakauppamatkustajaongelmana kustannusmatriisilla $C = -D$.

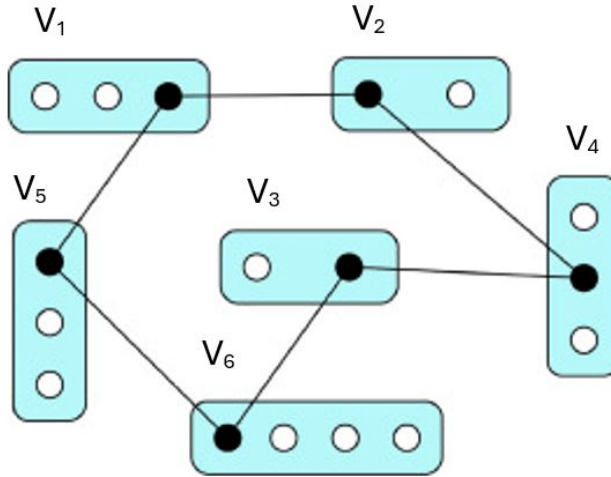
4 Kauppamatkustajaongelmia kaupunkiryhmille

Edellisessä luvussa esiteltiin joitakin klassisen kauppamatkustajaongelman yksinkertaisimpia muunnoksia. Ongelmasta saadaan hieman monimutkaisempi, jos kaupunkien joukko jaetaan ryhmiin. Tässä luvussa tarkastellaankin sellaisia kauppamatkustajaongelman muunnoksia, joissa kaupungit on ryhmitelty erillisiin kaupunkiryhmiin eli klustereihin.

4.1 Yleistetty kauppamatkustajaongelma

Yleistetty kauppamatkustajaongelma (engl. *Generalized Traveling Salesman Problem*) on kauppamatkustajaongelman muunnos, joka esiteltiin artikkelin [24] mukaan ensimmäisen kerran toisistaan riippumattomasti lähteissä [14] ja [34] vuonna 1969. Tässä muunnoksessa kaupunkien joukko V on jaettu ryhmiin eli klustereihin ja tavoitteena on löytää kauppamatkustajalle lyhin mahdollinen reitti, joka kulkee läpi

jokaisen kaupunkiklusterin käyden vain yhdessä jokaisen klusterin kaupungissa. Reitin on jälleen lähdettävä aloituskaupungista ja loputtava siihen. Kuvassa 3 on ongelman yksi mahdollinen ratkaisu tilanteessa, jossa ryhmät V_1, \dots, V_6 muodostavat ongelman kuusi kaupunkiklusteria. Tässä alaluvussa tarkastellaan yleistettyä kauppamatkustajaongelmaa käyttäen lähteenä pääosin artikkelia [24].



Kuva 3: Yksi mahdollinen ratkaisu yleistetylle kauppamatkustajaongelmalle tilanteessa, jossa V_1, \dots, V_6 ovat kaupunkiklusterit. Kuva on lähteestä [24].

Jos yleistetyssä kauppamatkustajaongelmassa jokaisessa klusterissa olisi vain yksi kaupunki, olisi ongelma täsmälleen sama kuin klassinen kauppamatkustajaongelma. Näin ollen klassinen ongelma on yksi yleistetyn kauppamatkustajaongelman erikoistapaus. Koska kauppamatkustajaongelma on NP-vaikea optimointitehtävä, yleistetty kauppamatkustajaongelma on myös NP-vaikea.

Ennen ongelman tarkempaa esittelyä on määriteltävä yleistetty Hamiltonin sykli.

Määritelmä 6. Olkoot n ja k positiivisia kokonaislukuja ja $G = (V, E)$ täydellinen, painotettu, suuntaamaton tai suunnattu graafi, jossa $V = \{1, \dots, n\}$ on graafin solmujen joukko ja E on solmuja yhdistävien kaarten tai nuolten joukko. Olkoon kaupunkien joukko V jaettu sellaisiin k klusteriin V_1, \dots, V_k , että $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = V$ ja $V_l \cap V_p = \emptyset$ kaikille $l, p \in \{1, \dots, k\}$, $l \neq p$. *Yleistetty Hamiltonin sykli* on sellainen graafin G yhtenäinen polku, joka käy vain yhdessä jokaisen klusterin kaupungissa tasan kerran ja palaa takaisin aloitussolmuun.

Seuraavaksi voidaan määritellä yleistetty kauppamatkustajaongelma.

Määritelmä 7. [24] Olkoot n ja k positiivisia kokonaislukuja sekä $G = (V, E)$ täydellinen, painotettu ja suunnattu graafi, jossa $V = \{1, \dots, n\}$ on graafin solmujen joukko ja $E = \{e_{ij} \mid i, j \in V, i \neq j\}$ puolestaan on solmuja yhdistävien nuolten joukko. Nuolten e_{ij} pituuksia merkitään arvoilla d_{ij} , jotka voidaan koota kustannusmatriisiksi $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Lisäksi $d_{ij} = \infty$, kun $i = j$. Olkoon kaupunkien joukko V

jaettu sellaisiin k klusteriin V_1, \dots, V_k , että $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = V$ ja $V_l \cap V_p = \emptyset$ kaikille $l, p \in \{1, \dots, k\}$, $l \neq p$. Oletetaan, että $\hat{\mathcal{F}}$ koostuu kaikista graafin G yleistetyistä Hamiltonin sykleistä. *Yleistetyn kauppamatkustajaongelman* tavoitteena on löytää sellainen $\hat{\mathcal{H}} \in \hat{\mathcal{F}}$, jonka nuolten yhteenlaskettu pituus on mahdollisimman pieni.

Yleistetty kauppamatkustajaongelma voidaan esittää lineaarisena binäärioptimointitehtävänä seuraavasti. Otetaan käyttöön päätösmuuttujat

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun nuoli } e_{ij} \text{ kuuluu ratkaisuna saatuun yleistettyyn Hamiltonin sykliin} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{jos ratkaisussa vierailaan kaupungissa } i \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tarkoituksena on minimoida kuljetun reitin pituutta, joten optimointitehtävä voidaan esittää muodossa [23, 24]

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} d_{ij} x_{ij} \quad (22)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i \in V_p} y_i = 1, \quad \text{kaikille } p = 1, \dots, k \quad (23)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{v\}} x_{vj} = y_v, \quad \text{kaikille } v = 1, \dots, n \quad (24)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{v\}} x_{iv} = y_v, \quad \text{kaikille } v = 1, \dots, n \quad (25)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} x_{ij} \leq \sum_{v \in S \setminus \{l\}} y_v, \quad \text{kaikille } S \subset V, 2 \leq |S| \leq n-2 \text{ ja } l \in S \quad (26)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \text{kaikille } i, j = 1, \dots, n, i \neq j \quad (27)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad \text{kaikille } i = 1, \dots, n. \quad (28)$$

Rajoituksilla (23) pidetään huoli siitä, että jokaisesta klusterista valitaan vain yksi vierailtava kaupunki. Rajoituksilla (24) ja (25) puolestaan varmistetaan, että jokaiseen ratkaisuun valittuun kaupunkiin tullaan ja sieltä lähdetään vain kerran ja rajoituksilla (26) eliminoidaan alisyklit.

4.2 Klusterikauppamatkustajaongelma

Klusterikauppamatkustajaongelma (engl. *Clustered Traveling Salesman Problem*) on kauppamatkustajaongelman muunnos, jonka esitteli James Chisman vuonna 1975 artikkelissa [6]. Kuten yleistetyssä kauppamatkustajaongelmassa kaupungit on jaettu erillisiin klustereihin. Kauppamatkustajan on kuitenkin jälleen vierailtava kaikissa kaupungeissa tasan kerran ja jokainen yksittäisen klusterin kaupunki on käytävä läpi ennen kuin kauppamatkustaja voi siirtyä seuraavaan klusteriin. Tavoitteena on

löytää lyhin sallittu reitti läpi kaikkien kaupunkiklustereiden. Tässä alaluvussa on käytetty päalahteenä artikkelia [20].

Klassinen kauppamatkustajaongelma on myös klusterikauppamatkustajaongelman erikoistapaus. Jos ongelmassa on vain yksi kaupunkiklusteri tai jokaisessa erillisessä klusterissa on vain yksi kaupunki, on se täsmälleen sama kuin klassinen kauppamatkustajaongelma. Näin ollen myös klusterikauppamatkustajaongelma on NP-vaikea optimointiongelma.

Seuraavaksi esitellään tarkempi määritelmä klusterikauppamatkustajaongelmalle.

Määritelmä 8. [20] Olkoot n ja k positiivisia kokonaislukuja sekä $G = (V, E)$ täydellinen, painotettu ja suunnattu graafi, jossa $V = \{1, \dots, n\}$ on graafin solmujen joukko ja $E = \{e_{ij} \mid i, j \in V, i \neq j\}$ puolestaan on solmuja yhdistävien nuolten joukko. Nuolten e_{ij} pituuksia merkitään arvoilla d_{ij} , jotka voidaan koota kustannusmatriisiksi $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Lisäksi $d_{ij} = \infty$, kun $i = j$. Olkoon kaupunkien joukko V jaettu sellaisiin k klusteriin V_1, \dots, V_k , että $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = V$ ja $V_l \cap V_p = \emptyset$ kaikille $l, p \in \{1, \dots, k\}$, $l \neq p$. Oletetaan, että \mathcal{F} koostuu kaikista graafin G Hamiltonin sykleistä. *Klusterikauppamatkustajaongelmassa* tavoite on löytää mahdollisimman lyhyt $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$, jossa jokainen klusteri käydään läpi kokonaisuudessaan ennen seuraavaan siirtymistä.

Yllä kuvattu ongelma voidaan kirjoittaa lineaarisena binäärioptimointitehtävänä. Kuten aiemmissakin ongelmissa, otetaan käyttöön muuttujat

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun nuoli } e_{ij} \text{ kuuluu ratkaisuna saatuun Hamiltonin sykliin} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Kuljetun reitin pituutta pyritään minimoimaan. Tällöin voidaan kirjoittaa tehtävän kohdefunktio ja rajoitukset muodossa

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} d_{ij} x_{ij} \quad (29)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i \in V, i \neq j} x_{ij} = 1, \quad \text{kaikille } j = 1, \dots, n \quad (30)$$

$$\sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} = 1, \quad \text{kaikille } i = 1, \dots, n \quad (31)$$

$$\sum_{i \in V_p} \sum_{j \in V_p, j \neq i} x_{ij} = |V_p| - 1, \quad \text{kaikille } p = 1, \dots, k \quad (32)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in V \setminus S} x_{ij} \geq 1, \quad \text{kaikille } S \subset V, 2 \leq |S| \leq n - 2 \quad (33)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \text{kaikille } i, j = 1, \dots, n, i \neq j. \quad (34)$$

Rajoituksilla (30) varmistetaan, että jokaiseen kaupunkiin tullaan vain kerran. Rajoituksilla (31) puolestaan varmistetaan, että jokaisesta kaupungista myös lähdetään vain kerran. Rajoitukset (32) takaavat, että jokaisen klusterin V_p sisällä on kuljettuja nuolia yksi vähemmän kuin klusterissa on kaupunkia. Tästä seuraa, että kaikki klusterin kaupungit käydään perätysten läpi ennen kuin siirrytään uuteen klusteriin. Rajoitukset (33) ovat alisykliä eliminointirajoituksia.

5 Kauppataskustajaongelmia useammalle kauppataskustajalle

Tässä luvussa käydään läpi sellaisia klassisen kauppataskustajaongelman muunnoksia, joissa on useampi kuin yksi kauppataskustaja. Eriteltyt muunnokset ovat nimeltään usean kauppataskustajan ongelma ja värillinen kauppataskustajaongelma.

5.1 Usean kauppataskustajan ongelma

Tässä alaluvussa tarkastellaan usean kauppataskustajan ongelmaa (engl. *Multiple Traveling Salesman Problem*), jossa on sen nimen mukaisesti käytössä useampi kuin yksi kauppataskustaja. Ongelman tavoite on etsiä sellaiset lyhimmat mahdolliset reitit kaikille kauppataskustajille, että jokaisessa kaupungissa vierailaan tasan kerran. Ongelmassa käytettyjen kauppataskustajien määrän on oltava aidosti suurempi kuin yksi, tai ongelma on täsmälleen sama kuin klassinen kauppataskustajaongelma. Usean kauppataskustajan ongelma on näin ollen myös NP-vaikea, koska klassinen ongelma on sen erikoistapaus. [5]

Usean kauppataskustajan ongelma on klassista kauppataskustajaongelmaa sopivampi kuvaamaan sellaisia tosielämän ongelmia, joissa käytetään esimerkiksi useampaa ajoneuvoa, konetta tai työntekijää. Kyseistä ongelmaa voidaan soveltaa moniin eri aikataulutus- ja reititysongelmiin. Tällaisia ovat esimerkiksi koulubussien reittien suunnittelu, muut useamman ajoneuvon reititysongelmat sekä itsenäisesti liikkuvien robottien tehtävien suunnittelu. [3, 5]

Usean kauppataskustajan ongelmasta on olemassa monia erilaisia versioita riippuen esimerkiksi siitä aloittavatko kaikki kauppataskustajat samasta lähtökaupungista ja kuinka montaa kauppataskustajaa ratkaisussa käytetään [3, 5]. Jatkossa keskitytään kuitenkin vain sellaiseen versioon, jossa tavoitteena on määrätä lyhimmat reitit ennalta määrätyle määrälle kauppataskustajia. Kaikilla kauppataskustajilla on yhteinen aloituskaupunki, kaikissa kierrettävissä kaupungeissa käydään tarkalleen kerran ja jokainen kauppataskustaja palaa kierroksensa lopuksi aloituskaupunkiin. Tarkoitus on minimoida kaikkien kauppataskustajien reittien yhteenlaskettua pituutta. [3]

Seuraavaksi määritellään ongelma tarkemmin ja käydään läpi sen mallinnus lineaarisena binäärioptimointitehtävänä. Eritelty malli perustuu lähteeseen [3].

Määritelmä 9. Olkoot n ja m positiivisia kokonaislukuja, $m < n$ ja $G = (V, E)$ täydellinen, painotettu ja suunnattu graafi, jossa $V = \{1, \dots, n\}$ on graafin solmun joukko ja $E = \{e_{ij} \mid i, j \in V, i \neq j\}$ puolestaan on solmuja yhdistävien nuolten joukko. Nuolten e_{ij} pituuksia merkitään arvoilla d_{ij} , jotka voidaan koota kustannusmatriisiksi $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Lisäksi $d_{ij} = \infty$, kun $i = j$. Nyt m on tehtävässä käytettyjen kauppataskustajien määrä. Olkoon solmu 1 kaikkien kauppataskustajien yhteinen aloituskaupunki. *Usean kauppataskustajan ongelmassa* yritetään löytää kaikille kauppataskustajille reitit, joiden yhteenlaskettu pituus on mahdollisimman lyhyt. Lisäksi jokaisessa kaupungissa aloituskaupunkia lukuun ottamatta vierailaan tasan kerran ja kaikkien reittien pitää alkaa aloituskaupungista 1.

Edellä kuvattu ongelma voidaan kirjoittaa lineaarisena binäärioptimointitehtävänä. Otetaan taas käyttöön muuttujat

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos ratkaisussa kuljetaan nuolta } e_{ij} \text{ pitkin} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Ongelma saadaan muotoiltua tehtäväksi

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} d_{ij} x_{ij} \quad (35)$$

$$\text{s. t. } \sum_{j \in V \setminus \{1\}} x_{1j} = m \quad (36)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{1\}} x_{i1} = m \quad (37)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \quad \text{kaikille } j = 2, \dots, n \quad (38)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \quad \text{kaikille } i = 2, \dots, n \quad (39)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in V \setminus S} x_{ij} \geq 1, \quad \text{kaikille } S \subseteq V \setminus \{1\}, S \neq \emptyset \quad (40)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \text{kaikille } i, j = 1, \dots, n, i \neq j. \quad (41)$$

Rajoituksilla (36) ja (37) varmistetaan, että tarkalleen m kauppamatkustajaa aloittaa kierroksensa aloituskaupungista ja palaa siihen. Rajoitukset (38) ja (39) varmistavat, että jokaisessa kaupungissa aloituskaupunkia lukuun ottamatta käydään vain kerran. Rajoituksella (40) pidetään huoli, ettei ratkaisussa ole erillisiä alisyklejä.

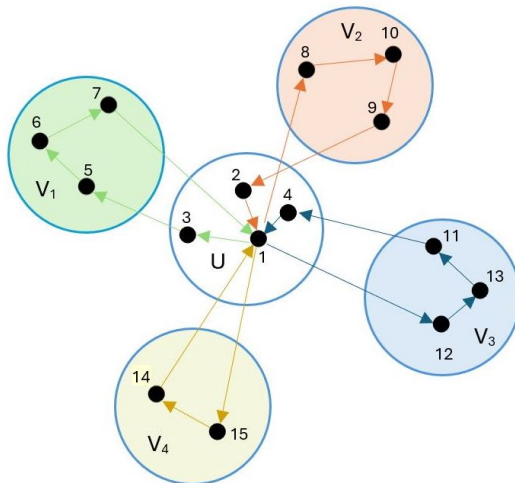
Jos ongelmassa kaikilla m kappaleella kauppamatkustajia ei ole pääsyä kaikkiin kaupunkiin, tavallinen useamman kauppamatkustajan ongelma ei enää sellaisenaan riitä tilanteen mallintamiseen. Myöskään luvussa 4 esitellyt mallit eivät käy, sillä niitä ei ole tarkoitettu useammalle kauppamatkustajalle. Seuraavassa alaluvussa esitellään eräs kauppamatkustajaongelman muunnos, jolla pystytään mallintamaan tällaisia tilanteita.

5.2 Värillinen kauppamatkustajaongelma

Värillinen kauppamatkustajaongelma (engl. *Colored Traveling Salesman Problem*) on kauppamatkustajaongelman muunnos, jossa on useampi kauppamatkustaja ja kaupunkien joukko on jaettu klustereihin. Kyseinen muunnos on esitelty artikkelissa [17] ja sen tavoite on minimoida usean kauppamatkustajan reittien yhteenlaskettua pituutta graafissa, jonka kaikki solmut eivät ole sallittuja kaikille kauppamatkustajille. Tässä alaluvussa on käytetty suuriltaosin lähteenä artikkelia [17].

Värillistä kauppamatkustajaongelmaa voidaan hyödyntää erilaisten monikonejärjestelmien (engl. *Multimachine Engineering System*) mallintamisessa. Jatkossa tarkastellaan muunnoksen sellaista versiota, jossa kaikilla kauppamatkustajilla on

omat yksityiset kaupunkiklusterinsa sekä yksi yhteinen kaupunkiklusteri. Tämä yhteinen klusteri sisältää kaikille kauppatkustajille yhteisen aloituskaupungin. Kuvas-
 ssa 4 on havainnollistettu yksi mahdollinen ratkaisu tilanteessa, jossa on neljä
 kauppatkustajaa, yksityiset kaupunkiklusterit V_1, \dots, V_4 sekä yhteinen klusteri U .



Kuva 4: Värillinen kauppatkustajaongelma, jossa on neljä kauppatkustajaa, V_1, \dots, V_4 ovat kauppatkustajien yksityiset kaupunkiklusterit ja U on kaikille yhteinen kaupunkiklusteri, joka sisältää yhteisen aloituskaupungin 1.

Seuraavaksi käydään läpi ongelman tarkempi määritelmä.

Määritelmä 10. [17, 19] Oletetaan, että ongelmassa on $n \in \mathbb{N}$ kaupunkia ja $m \in \mathbb{N}$ kauppatkustajaa, joille toteutuu $m < n$. Olkoon $G = (V, E)$ täydellinen, painotettu ja suunnattu graafi, jossa $V = \{1, \dots, n\}$ on graafin solmujen joukko ja $E = \{e_{ij} \mid i, j \in V, i \neq j\}$ puolestaan on solmuja yhdistävien nuolten joukko. Nuolten e_{ij} pituuksia merkitään arvoilla d_{ij} , jotka voidaan koota kustannusmatriisiksi $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Lisäksi $d_{ij} = \infty$, kun $i = j$. Olkoon nyt $Z_m = \{1, \dots, m\}$ kauppatkustajien joukko ja kauppatkustajan k väri c_k . Kaupunkien joukko V on jaettu $m + 1$ erilliseen ja epätyhjään klusteriin, joita ovat yhteinen klusteri U sekä jokaisen kauppatkustajan k oma yksityinen kaupunkiklusteri V_k . Olkoon solmu $1 \in U$ kaikkien kauppatkustajien yhteinen aloituskaupunki. Kaupunkien värimatriisissa

$$A = [a_{ik}]_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

alkion $a_{ik} \in \{0, 1\}$ arvo kuvaa sitä, onko kaupungin i väri sallittu kauppatkustajalle k ja sallittujen värien joukko kaupungissa i on $c(i) = \{c_k \mid a_{ik} = 1, k \in Z_m\}$. Jos väri $c_k \in c(i)$, kauppatkustaja k saa vieraila kaupungissa i . Jos kaupunki $i \in V_k$, niin kaupungin i ainoa sallittu väri on c_k . Tällöin vain kauppatkustaja k saa vieraila kaupungissa i .

Värillisessä kauppamatkustajaongelmassa tavoitteena on ratkaista m kappaleelle kauppamatkustajia sellaiset reitit (eli syklit) graafissa G , että reittien yhteenlaskettu pituus on mahdollisimman pieni. Jokaisessa kaupungissa aloituskaupunkia lukuun ottamatta käy tarkalleen kerran vain yksi kauppamatkustaja, minkä lisäksi kauppamatkustaja saa vierailta vain itselleen sallituissa kaupungeissa.

Seuraavaksi esitellään värillinen kauppamatkustajaongelma lineaarisena sekaluoptimoititehtävänä [17]. Olkoon kaupunki $1 \in U$ kaikkien kauppamatkustajien aloituskaupunki. Lisäksi kaikille kaupungeille $i \in U$ sallittujen värien joukko on $c(i) = \{c_k \mid k \in Z_m\}$, eli kaikki joukon U kaupungit ovat kaikille kauppamatkustajille k yhteisiä. Lisäksi tarvitaan muuttujat

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{jos kauppamatkustaja } k \text{ kulkee pitkin nuolta } e_{ij} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja

$$u_{ik} = \text{kaupungin } i \text{ vierailujärjestys kauppamatkustajan } k \text{ reitillä.}$$

Lopputuloksena saadaan optimointitehtävä

$$\min \sum_{k \in Z_m} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} d_{ij} x_{ijk} \quad (42)$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=2}^n x_{1jk} = 1, \quad \text{kaikille } k = 1, \dots, m \quad (43)$$

$$\sum_{i=2}^n x_{i1k} = 1, \quad \text{kaikille } k = 1, \dots, m \quad (44)$$

$$\sum_{i \in V_k} \sum_{j \in V} x_{ijl} = 0, \quad \text{kaikille } k, l = 1, \dots, m, k \neq l \quad (45)$$

$$\sum_{i \in V_k} \sum_{j \in V} x_{jil} = 0, \quad \text{kaikille } k, l = 1, \dots, m, k \neq l \quad (46)$$

$$\sum_{i \in V_k} \sum_{j \in V \setminus (U \cup V_k)} x_{ijk} = 0, \quad \text{kaikille } k = 1, \dots, m \quad (47)$$

$$\sum_{i \in V_k} \sum_{j \in V \setminus (U \cup V_k)} x_{jik} = 0, \quad \text{kaikille } k = 1, \dots, m \quad (48)$$

$$\sum_{j \in V, j \neq i} \sum_{k \in Z_m} x_{ijk} = 1, \quad \text{kaikille } i = 2, \dots, n \quad (49)$$

$$\sum_{j \in V, j \neq i} \sum_{k \in Z_m} x_{jik} = 1, \quad \text{kaikille } i = 2, \dots, n \quad (50)$$

$$\sum_{l \in V_k \cup U} x_{jlk} = \sum_{i \in V_k \cup U} x_{ijk}, \quad \text{kaikille } k = 1, \dots, m \text{ ja } j \in U \quad (51)$$

$$u_{ik} - u_{jk} + n x_{ijk} \leq n - 1, \quad \text{kaikille } i, j = 2, \dots, n, i \neq j \text{ ja } k = 1, \dots, m \quad (52)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \text{kaikille } i, j = 1, \dots, n, i \neq j \quad (53)$$

$$u_{ik} \geq 0, \quad \text{kaikille } i = 2, \dots, n \text{ ja } k = 1, \dots, m. \quad (54)$$

Rajoitukset (43) ja (44) pitävät huolen siitä, että jokainen kauppamatkustaja k lähtee aloituskaupungista ja palaa siihen. Rajoituksilla (45) ja (46) puolestaan katsotaan, ettei toinen kauppamatkustaja l vieraile kauppamatkustajan k yksityisessä kaupunkiklusterissa. Rajoituksilla (47) ja (48) taas varmistetaan, ettei kauppamatkustaja k vieraile muiden kauppamatkustajien yksityisissä kaupunkiklustereissa. Rajoitusten (49) ja (50) mukaan jokaisessa kaupungissa lukuun ottamatta aloituskaupunkia käydään vain kerran. Rajoituksilla (51) pidetään huoli, että kaikkiin yhteisiin kaupunkeihin tullaan yhtä monta kertaa kuin niistä lähdetään ja rajoitukset (52) eliminoivat alisykkit.

Värillinen kauppamatkustajaongelma sisältää erikoistapauksinaan klassisen kauppamatkustajaongelman ja alaluvussa 5.1 esitellyn usean kauppamatkustajan ongelman. Oletetaan, että kaikissa klustereissa V_k olisi kussakin vain yksi kaupunki, ja jaettu klusteri U puolestaan ei sisältäisi aloituskaupunkia. Tällainen ongelma olisi sama kuin usean kauppamatkustajan ongelma, jossa jokaisella kauppamatkustajalla on oma yksityinen aloituskaupunki. Jos taas klusteri U sisältäisi vain kaikkien kauppamatkustajien yhteisen aloituskaupungin, voitaisiin ongelmaa mallintaa useammalla yksittäisellä kauppamatkustajaongelmalla. Tällöin yhden yksityisen klusterin kaupungit olisivat yhden kauppamatkustajaongelman kaupungit ja aloituskaupunki klusterissa U olisi kaikkien yksittäisten ongelmien aloituskaupunki. Koska kauppamatkustajaongelma ja usean kauppamatkustajan ongelma ovat NP-vaikeita, myös värillinen kauppamatkustajaongelma on NP-vaikea. [17]

6 Ratkaisumenetelmiä

Kauppamatkustajaongelma ja sen edellä esitellyt muunnokset ovat kaikki NP-vaikeita kombinatorisia optimointiongelmiä. Tällaisille ongelmille ei ole olemassa sellaista ratkaisualgoritmia, joka pystyisi aina ratkaisemaan ne optimaalisesti polynomiaalisessa ajassa. Varsinkin suurikokoisten kauppamatkustajaongelmien ratkaiseminen optimaalisesti on vaikeaa ellei jopa mahdotonta. Tässä luvussa käydään läpi joitakin kauppamatkustajaongelmalle ja sen muunnoksille sopivia ratkaisumenetelmiä. Käsiteltävät ratkaisumenetelmät voidaan jakaa tarkkoihin ja heuristisiin menetelmiin.

6.1 Tarkat ratkaisumenetelmät

Tarkoilla eli eksakteilla ratkaisumenetelmillä voidaan löytää ratkaistavan ongelman paras ratkaisu eli globaali optimi. Kauppamatkustajaongelmassa globaali optimi vastaa yleensä lyhintä mahdollista Hamiltonin sykliä ja ongelmalle mahdollisia tarkkoja ratkaisumenetelmiä ovat esimerkiksi täydellinen luettelointi sekä Branch and Bound-menetelmä.

6.1.1 Täydellinen luettelointi

Täydellinen luettelointi (engl. *Complete Enumeration*) on ratkaisujen listaamiseen perustuva ratkaisumenetelmä. Kun kyseisellä menetelmällä ratkaistaan yksinkertaisia kauppamatkustajaongelmia, listataan kaikki mahdolliset tarkasteltavan graafin Hamiltonin sykkit ja lasketaan niistä jokaisessa nuolten yhteenlasketut kustannukset

eli syklin kokonaispituus. Kaikkien mahdollisten Hamiltonin syklien joukosta valitaan optimiratkaisuksi se, joka on pituudeltaan kaikkein lyhin. Kaupunkien määrän kasvaessa menetelmään tarvittava aika kasvaa kuitenkin nopeasti liian suureksi. [29]

6.1.2 Branch and Bound -menetelmä

Branch and Bound -menetelmä (engl. *Branch and Bound*) on toinen kauppamatkustajaongelman ratkaisemisessa yleisesti käytetty tarkka ratkaisutapa. Sekin perustuu ratkaisuvaihtoehtojen listaamiseen. Branch and Bound -menetelmät ovat kuitenkin yleensä täydellistä luettelointia tehokkaampia ratkaisumenetelmiä, mutta nekin voivat vaatia paljon aikaa parhaan ratkaisun löytämiseksi. Branch and Bound -menetelmässä ideana on laskea minimointiongelman kohdefunktion optimiarvolle yläraja käyttäen tähän mennessä parasta tunnettua ratkaisua ja alaraja relaxoimalla alkuperäisen ongelman rajoitteita. Tämän jälkeen muodostetaan puu, jossa jokainen haarautuminen jakaa ongelmaa pienempiin osaongelmiin. Osaongelmia käydään läpi yksi kerrallaan ja osaongelman ratkaisun perusteella ala- ja ylärajaa kohdefunktion arvolle päivitetään sekä tarvittaessa haarautetaan ongelmaa uusiksi osaongelmiksi. Osaongelma eliminoidaan, jos siitä saatava alaraja on suurempi kuin nykyisen parhaan ratkaisun antama yläraja, osaongelmalla ei ole yhtään ratkaisua tai osaongelman ratkaisu toteuttaa kaikki alkuperäisen tehtävän rajoitteet. [26] Tämä nopeuttaa ratkaisun etsimistä. Branch and Bound -menetelmien tehokkuus riippuu siitä kuinka hyvät ala- ja ylärajat kohdefunktion optimiarvolle saadaan laskettua sekä valitusta haarautumisstrategiasta eli siitä missä järjestyksessä hakupuun osaongelmat käydään läpi. [16]

Monia erilaisia Branch and Bound -periaatteeseen pohjautuvia algoritmeja on ehdotettu kauppamatkustajaongelman ja sen eri muunnosten ratkaisemiseksi. Esimerkiksi Ali ja Kennington esittelivät artikkelissa [15] vuonna 1986 eräänlaisen Branch and Bound -menetelmän epäsymmetriselle usean kauppamatkustajan ongelmalle ja testasivat sitä korkeintaan 100 kaupungin ongelmissa. Lähteissä [4, 10], on esitelty erilaisia erityisesti pullonkaulakauppamatkustajaongelmalle kehitettyjä Branch and Bound -menetelmiä.

6.2 Heuristiset ratkaisumenetelmät

Koska tarkat menetelmät ovat lähes aina liian työläitä ja aikaa vieviä suurempien kauppamatkustajaongelmien ratkaisemiseen, niiden sijasta on järkevämpää käyttää erilaisia heuristiikkoja. Heuristiikat ovat likimääräisiä ratkaisumenetelmiä, jotka pystyvät löytämään usein hyviä ratkaisuja lyhyessä ajassa. Ne eivät kuitenkaan takaa optimiratkaisua tarkasteltavalle ongelmalle. [18, 24] Kauppamatkustajaongelman ratkaisemiseksi on esitetty monia erilaisia heuristisia menetelmiä. Seuraavaksi esitellään joitakin niistä. Ensimmäiset kaksi esitetyistä menetelmistä ovat heuristiikkoja, kun taas kolmas ja neljäs kuuluvat metaheuristiikkoihin.

Metaheuristiikat ovat korkeamman tason heuristisia ratkaisumenetelmiä, jotka pystyvät ratkaisemaan suurikokoisia ja monimutkaisiakin ongelmia lähes optimaalisesti lyhyessä ajassa [8]. Metaheuristiikat ovatkin yksi kaikkein käytännöllisimmistä tavoista ratkaista monimutkaisia kombinatorisia optimointiongelmiä [38]. Usein metaheuristiikkojen toiminta perustuu johonkin luonnossa esiintyvään ilmiöön. Tässä

työssä tarkastellaan kahta tällaista metaheuristiikkaa, joita ovat geneettiset algoritmit [33] ja simuloitu jäähdytys [28].

6.2.1 Lähimmän naapurin menetelmä

Lähimmän naapurin menetelmä (engl. *Nearest Neighbour*) on yksi hyvin yksinkertainen konstruktiiivinen heuristiikka, joka rakentaa ratkaisua pala kerrallaan ja lopettaa, kun tarkasteltavalle ongelmalle on löytynyt yksi mahdollinen ratkaisu. Huomion arvoista on, että menetelmä ei pyri parantelemaan löydettyä ratkaisua. Kauppamatkustajaongelmaa ratkaistaessa lähimmän naapurin menetelmällä valitaan reittiin aina nykyistä kaupunkia seuraava kaupunki sen mukaan, mihin reitistä puuttuvista kaupungeista on lyhin matka. Toisin sanoen reitti aloitetaan jostain kaupungista ja kyseisestä kaupungista lähtevistä nuolista kuljetaan lyhintä pitkin vielä reitistä puuttuvaan kaupunkiin. Näin jatketaan, kunnes kaikki graafin kaupungit on saatu mukaan ja lopuksi palataan takaisin lähtökaupunkiin. Lopputuloksena on saatu muodostettua yksi mahdollinen ratkaisu eli Hamiltonin sykli. Koska lähimmän naapurin menetelmä on heuristiikka, se ei kuitenkaan välttämättä löydä kaikkein lyhintä Hamiltonin sykliä. [18, 29]

Maksimikauppamatkustajaongelmalle voidaan käyttää samankaltaista heuristiikkaa, jota kutsutaan kauimmaisen naapurin (engl. *Farthest Neighbour*) menetelmäksi. Menetelmässä valitaan nimensä mukaisesti reittiin aina nykyistä kaupunkia kauimmaisena oleva kaupunki, jossa ei vielä ole vierailtu. Näin saadaan muodostettua yksi mahdollinen, muttei välttämättä optimaalinen Hamiltonin sykli. [2] Myös pullonkalkauppamatkustajaongelmalle ja maksimihajontakauppamatkustajaongelmalle voidaan soveltaa lähimmän naapurin menetelmää yksinkertaisilla muokkauksilla [16].

6.2.2 2- ja 3-optimaalinen haku

Konstruktiiivisilla heuristiikoilla saatuja ratkaisuja voidaan parannella erilaisilla parantavilla hakuheuristiikoilla. Esimerkkejä tällaisesta heuristiikasta ovat erilaiset paikallishakuun (engl. *Local Search*) perustuvat menetelmät, jotka muokkaavat nykyistä ratkaisua ja pyrkivät etsimään sen naapurustosta, eli lähimpien ratkaisujen joukosta, paremman ratkaisun. Tällaisia menetelmiä ovat esimerkiksi 2- ja 3-optimaalinen haku. [18]

2-optimaalisessa haussa nykyisestä ratkaisusta poistetaan kaksi nuolta ja ne korvataan uusilla siten, että kaksi muodostunutta polkua yhdistyvät eri reitiksi kuin aiemmassa ratkaisussa. Näin saatu uusi reitti korvaa vanhan kuitenkin vain, jos uusi Hamiltonin sykli on lyhyempi kuin aikaisempi. 3-optimaalinen haku toimii muuten samoin kuin 2-optimaalinen haku, mutta siinä poistetaan ja korvataan nykyisestä ratkaisusta kolme nuolta. Paikallishaun ongelma on, että se saattaa jäädä jumiin lokaaliin optimiin, eikä siksi välttämättä löydä globaalia optimia. [18]

Artikkelissa [35] on esitelty maksimihajontakauppamatkustajaongelmalle eräs ratkaisualgoritmi, jossa hyödynnetään 2-optimaalista hakua. Myös artikkelissa [19] on käytetty 2-optimaalista hakua osana erityisesti värilliselle kauppamatkustajaongelmalle kehitettyä ratkaisualgoritmia.

6.2.3 Geneettiset algoritmit

Geneettiset algoritmit (engl. *Genetic Algorithms*) jäljittelevät luonnossa tapahtuvaa evoluutiota. Niiden toiminta perustuu kolmeen vaiheeseen: luonnonvalintaan, risteytykseen ja mutaatioon. Geneettiset algoritmit ovat iteratiivisia hakumenetelmiä eli ne parantelevat saatuja ratkaisuja jokaisella iteraatiokierroksella. Geneettisiä algoritmeja on kehitetty useita erilaisia riippuen siitä, kuinka niiden kolme edellä mainittua vaihetta on toteutettu. Perustoimintaperiaate on kuitenkin kaikilla samanlainen. [33]

Menetelmässä alustetaan ensin aloituspopulaatio eli luodaan satunnaisesti joukko ratkaisuja tarkasteltavalle ongelmalle. Kun ratkaistaan kauppamatkustajaongelmia geneettisillä algoritmeilla, nämä ratkaisut esitetään usein jonoina, joissa kaupungit ovat vierailujärjestyksessä. Jokaiselle aloituspopulaation ratkaisulle lasketaan arvo, jolla mitataan ratkaisun hyvyttä. Yleensä tämä on kohdefunktion arvo. Kauppamatkustajaongelman tapauksessa siis ratkaisua vastaavan Hamiltonin syklin pituus. Koska aloituspopulaation ratkaisut on luotu satunnaisesti, ne eivät välttämättä ole lähellä optimaalista ratkaisua. Luonnonvalinnassa tästä alkuperäisestä populaatiosta valitaan ratkaisuja, joista muodostetaan uusi ratkaisupopulaatio. Parhaat ratkaisut siirretään uuteen populaatioon muokkaamatta niitä ja lisäksi valitaan pareja, joita risteyttämällä muodostetaan uusia ratkaisuja. Mitä parempi ratkaisu on sitä todennäköisemmin se valitaan tuottamaan jälkeläisiä. Risteytyksessä muodostettuihin ratkaisuihin tehdään mutaatiovaiheessa pieniä muutoksia valitulla todennäköisyydellä. Tämän takia menetelmä ei jää niin helposti jumiin lokaaleihin optimeihin. [33]

Iterointia jatketaan algoritmissa, kunnes nykyisestä populaatiosta löydetään tarpeeksi hyvä ratkaisu ongelmalle. Geneettiset algoritmit ovat yksi suosituimmista menetelmistä kauppamatkustajaongelman ja sen muunnosten ratkaisemiseksi. Esimerkiksi yleistetylle kauppamatkustajaongelmalle geneettiset algoritmit ovat yksi yleisimmin käytetty metaheuristiikka [24]. Artikkelissa [25] on esitelty eräänlainen klusterikauppamatkustajaongelmalle kehitetty geneettinen algoritmi. Lähteessä [17] puolestaan on kuvailtu useaa erilaista geneettistä algoritmia värilliselle kauppamatkustajaongelmalle. Lisäksi usean kauppamatkustajan ongelman ratkaisemiseen on ehdotettu geneettistä algoritmia esimerkiksi lähteessä [37].

6.2.4 Simuloitu jäädytys

Simuloitu jäädytys (engl. *Simulated Annealing*) on toinen tunnettu kombinatoristen optimointiongelmiin ratkaisemiseen kehitetty metaheuristiikka, joka perustuu kiinteiden aineiden jäädytysprosessin jäljittelemiseen. Simuloidusta jäädytyksestäkin on erilaisia versioita, riippuen esimerkiksi siitä, millaista jäädytysasteikkoa käytetään. [28]

Aluksi menetelmässä määritetään aloituslämpötila, jota pienennetään valitun asteikon mukaan jokaisella iteraatiokierroksella. Menetelmän perusidea on verrata keskenään satunnaisesti luotujen ratkaisujen hyvyttä kohdefunktion arvojen perusteella. Parempi ratkaisu valitaan yleensä seuraavalle iteraatiokierrokselle, jossa sitä verrataan uuteen ratkaisuun. On myös mahdollista, että vertailussa huonompi ratkaisu valitaan uudelle kierrokselle. Huonomman ratkaisun valitsemisen toden-

näköisyys on suurempi alussa lämpötilan ollessa suurempi. Jokaisella kierroksella lämpötilaa kuitenkin lasketaan, mikä vähentää huonompien ratkaisujen valitsemisen todennäköisyyttä. Menetelmän loppua kohden jatkoon valitaan vain nykyisen ratkaisun kanssa yhtähyviä tai sitä parempia ratkaisuja. Huonompien ratkaisujen hyväksymisestä menetelmän alussa on kuitenkin hyötyä, sillä se vähentää todennäköisyyttä jäädä jumiin lokaaliin optimiin. [28]

Kauppamatkustajaongelman ratkaisemiseen on kehitetty monia erilaisia simuloitua jäähtytystä hyödyntäviä algoritmeja, kuten lähteissä [11] ja [36] esiteltyt algoritmit. Lähteessä [32] on esitelty eräänlainen simuloitu jäähtytys -algoritmi usean kauppamatkustajan ongelman ratkaisemiseen. Artikkelissa [17] puolestaan on käytetty simuloitua jäähtytystä osana yhtä värillisen kauppamatkustajaongelman ratkaisemiseen esitettyä geneettistä algoritmia.

7 Yhteenveto

Työssä on käsitelty kauppamatkustajaongelmaa, joka on hyvin tunnettu kombinatorinen optimointiongelma. Aluksi on määritelty Hamiltonin sykli sekä tarkasteltu klassisen kauppamatkustajaongelman määritelmää ja mallinnusta optimointitehtävänä. Erityisesti on nähty, että kauppamatkustajaongelma voidaan kirjoittaa lineaarisena binääri- tai sekalukuoptimointitehtävänä.

Työssä on pääasiassa tarkasteltu klassisen kauppamatkustajaongelman erilaisia muunnoksia. Näiden muunnosten määritelmät on käyty läpi yksityiskohtaisesti, mikä lisäksi jokainen muunnos on esitetty optimointitehtävänä. Tarkastelu on aloitettu yksinkertaisista muunnoksista, joista jokainen erosi klassisesta kauppamatkustajaongelmasta määritelmältään ja mallinnukseltaan vain vähän. Tämän jälkeen on siirrytty sellaisiin muunnoksiin, joissa kaupunkien joukko on jaettu pienempiin osajoukkoihin. Lopuksi esiteltiin kaksi muunnosta, joissa kauppamatkustajia on yhden sijasta useita. Erityisesti nämä monimutkaisemmat muunnokset eroavat enemmän klassisesta kauppamatkustajaongelmasta määritelmältään ja mallinnukseltaan.

Muunnosten tarkastelun yhteydessä on mainittu myös joitakin niiden tosielämän sovelluskohteita ja nähty, että kaikki läpikäytyt muunnokset ovat klassisen kauppamatkustajaongelman tavoin NP-vaikeita optimointitehtäviä. Lopuksi on listattu joitakin erilaisia ratkaisumenetelmiä kauppamatkustajaongelmalle. Tarkastelussa on huomioitu myös työssä esiteltyt klassisen ongelman muunnokset.

Viitteet

- [1] E. M. Arkin, Y.-J. Chiang, J. S. B. Mitchell, S. S. Skiena, ja T.-C. Yang. On the maximum scatter traveling salesperson problem. *SIAM Journal on Computing*, 29(2):515–544, 1999.
- [2] A. Barvinok, E. K. Gimadi, ja A. I. Serdyukov. The maximum TSP. Teoksessa G. Gutin ja A. P. Punnen (toim.), *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*, sivut 585–607, Boston, MA, 2007. Springer.
- [3] T. Bektas. The multiple traveling salesman problem: An overview of formulations and solution procedures. *Omega*, 34(3):209–219, 2006.
- [4] G. Carpaneto, S. Martello, ja P. Toth. An algorithm for the bottleneck traveling salesman problem. *Operations Research*, 32(2):380–389, 1984.
- [5] O. Cheikhrouhou ja I. Khoufi. A comprehensive survey on the multiple traveling salesman problem: Applications, approaches and taxonomy. *Computer Science Review*, 40:100369, 2021.
- [6] J. A. Chisman. The clustered traveling salesman problem. *Computers & Operations Research*, 2(2):115–119, 1975.
- [7] G. Dantzig, R. Fulkerson, ja S. Johnson. Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Journal of the operations research society of America*, 2(4):393–410, 1954.
- [8] T. Dokeroglu, E. Sevinc, T. Kucukyilmaz, ja A. Cosar. A survey on new generation metaheuristic algorithms. *Computers Industrial Engineering*, 137:106040, 2019.
- [9] M. M. Flood. The traveling-salesman problem. *Operations research*, 4(1):61–75, 1956.
- [10] R. S. Garfinkel ja K. C. Gilbert. The bottleneck traveling salesman problem: Algorithms and probabilistic analysis. *Journal of the ACM*, 25(3):435–448, 1978.
- [11] X. Geng, Z. Chen, W. Yang, D. Shi, ja K. Zhao. Solving the traveling salesman problem based on an adaptive simulated annealing algorithm with greedy search. *Applied Soft Computing*, 11(4):3680–3689, 2011.
- [12] K. Genova ja V. Guliashki. Linear integer programming methods and approaches—A survey. *Journal of Cybernetics and Information Technologies*, 11(1):3–25, 2011.
- [13] P. Gilmore ja R. Gomory. A solvable case of the traveling salesman problem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 51(2):178–181, 1964.
- [14] A. Henry-Labordere. The record balancing problem: A dynamic programming solution of a generalized traveling salesman problem. *RAIRO*, B2:43–49, 1969.

- [15] A. Iqbal Ali ja J. L. Kennington. The asymmetric M -travelling salesmen problem: A duality based branch-and-bound algorithm. *Discrete Applied Mathematics*, 13(2):259–276, 1986.
- [16] S. N. Kabadi ja A. P. Punnen. The bottleneck TSP. Teoksessa G. Gutin ja A. P. Punnen (toim.), *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*, sivut 697–735, Boston, MA, 2007. Springer.
- [17] J. Li, M. Zhou, Q. Sun, X. Dai, ja X. Yu. Colored traveling salesman problem. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 45(11):2390–2401, 2015.
- [18] R. Matai. Traveling Salesman Problem: An Overview of Applications, Formulations, and Solution Approaches. Teoksessa D. Davendra (toim.), *Traveling Salesman Problem, Theory and Applications*, sivut 1–24, Rijeka, 2010. IntechOpen.
- [19] X. Meng, J. Li, X. Dai, ja J. Dou. Variable neighborhood search for a colored traveling salesman problem. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 19(4):1018–1026, 2018.
- [20] M. Mestria. New hybrid heuristic algorithm for the clustered traveling salesman problem. *Computers & Industrial Engineering*, 116:1–12, 2018.
- [21] C. E. Miller, A. W. Tucker, ja R. A. Zemlin. Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Journal of the ACM*, 7(4):326–329, 1960.
- [22] M. M. Mäkelä. *Matemaattinen optimointi I*. Luentomoniste, Turun yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2020.
- [23] C. E. Noon. *The Generalized Traveling Salesman Problem*. Julkaisematon väitöskirja, University of Michigan, USA, 1988.
- [24] P. C. Pop, O. Cosma, C. Sabo, ja C. P. Sitar. A comprehensive survey on the generalized traveling salesman problem. *European Journal of Operational Research*, 314(3):819–835, 2024.
- [25] J.-Y. Potvin ja F. Guertin. The clustered traveling salesman problem: A genetic approach. Teoksessa I. H. Osman ja J. P. Kelly (toim.), *Meta-Heuristics: Theory and Applications*, sivut 619–631, Boston, MA, 1996. Springer.
- [26] A. Przybylski ja X. Gandibleux. Multi-objective branch and bound. *European Journal of Operational Research*, 260(3):856–872, 2017.
- [27] A. P. Punnen. The traveling salesman problem: Applications, formulations and variations. Teoksessa G. Gutin ja A. P. Punnen (toim.), *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*, sivut 1–28, Boston, MA, 2007. Springer.
- [28] R. Rutenbar. Simulated annealing algorithms: An overview. *IEEE Circuits and Devices Magazine*, 5(1):19–26, 1989.

- [29] A. Sahalot ja S. Shrimali. A comparative study of brute force method, nearest neighbour and greedy algorithms to solve the traveling salesman problem. *International Journal of Research in Engineering & Technology*, 2(6):59–72, 2014.
- [30] A. Schrijver. On the history of combinatorial optimization (till 1960). Teoksessa K. Aardal, G. Nemhauser, ja R. Weismantel (toim.), *Discrete Optimization*, volume 12 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, sivut 1–68, Amsterdam, 2005. Elsevier.
- [31] A. Singh ja S. Majumder. Solution of maximum scatter traveling salesman problem through evolutionary approaches. *Applied Soft Computing*, 163:111858, 2024.
- [32] C.-H. Song, K. Lee, ja W. D. Lee. Extended simulated annealing for augmented TSP and multi-salesmen TSP. *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, 3:2340–2343, 2003.
- [33] M. Srinivas ja L. Patnaik. Genetic algorithms: A survey. *Computer*, 27(6):17–26, 1994.
- [34] S. Srivastava, S. Kumar, R. Garg, ja P. Sen. Generalized traveling salesman problem through n sets of nodes. *CORS journal*, 7(2):97, 1969.
- [35] P. Venkatesh, A. Singh, ja R. Mallipeddi. A multi-start iterated local search algorithm for the maximum scatter traveling salesman problem. Teoksessa *Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, sivut 1390–1397, 2019. IEEE.
- [36] S.-H. Zhan, J. Lin, Z.-J. Zhang, ja Y.-W. Zhong. List-based simulated annealing algorithm for traveling salesman problem. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2016(1):1712630, 2016.
- [37] T. Zhang, W. Gruver, ja M. Smith. Team scheduling by genetic search. Teoksessa *Proceedings of the Second International Conference on Intelligent Processing and Manufacturing of Materials*, volume 2, sivut 839–844, 1999. IEEE.
- [38] S. Ólafsson. Chapter 21 metaheuristics. Teoksessa S. G. Henderson ja B. L. Nelson (toim.), *Simulation*, volume 13 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, sivut 633–654, 2006. Elsevier.