TURUN YLIOPISTO

Yahtzeen optimaalinen pelaaminen

Emmi Uotila

LuK-tutkielma
Huhtikuu 2025

Ohjaaja:
Doc. Yury Nikulin

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

EMMI UOTILA: Yahtzeen optimaalinen pelaaminen
LuK-tutkielma, 22 s.
Matematiikka
Huhtikuu 2025

Tutkielmassa perehdytään Yahtzeen optimaaliseen pelaamiseen. Tarkastelu perustuu tietokoneen simuloimiin tuloksiin ja niiden analysointiin käyttäen apuna todennäköisyyslaskentaa.

Aluksi tutkielmassa käydään läpi todennäköisyyslaskennan käsitteitä ja perusperiaatteita, joiden pohjalta pystytään analysoimaan Yahtzeen erilaisia lukuyhdistelmiä. Seuraavaksi käsitellään tietokoneen simulaatioiden tuloksista muodostettujen taulukoiden avulla optimaalisia valintoja, joiden avulla saavutettaisiin mahdollisimman suuret pisteet pelin lopuksi. Lopuksi esitellään esimerkkitapaus, missä pelaaja valitsee vaihtoehdoista sen, joka antaa todennäköisimmin parhaimman lopputuloksen.

Tutkielma osoittaa, että vaikka Yahtzeeta pidetään tuuripelinä, niin oikeilla valinnoilla on ratkaiseva merkitys lopulliseen tulokseen.

Sisällys

1 Johdanto **1**

2 Säännöt ja pisteytys **1**

3 Todennäköisyyslaskenta **3**

3.1 Klassinen todennäköisyys 3
3.2 Kombinatoriikka 4
3.3 Odotusarvo 5

4 Optimaalinen pelitapa **6**

4.1 Tietokonesimulaatio 6
4.2 Markovin ketju 9
4.3 Esimerkkipeli 11

5 Yhteenveto **21**

Kirjallisuutta **22**

1 Johdanto

Yahtzee on noppapeli, jota pelataan viidellä kuusisivuisella nopalla. Pelin tarkkaa alkuperää ei tunneta, mutta tarinan mukaan vuonna 1954 varakas kanadalainen pariskunta kehitti sen viettäessään aikaa jahdillaan. He nimesivät pelin "Yacht Gameksi". Tarinan mukaan pelistä tuli suosittu heidän ystäväpiirinsä keskuudessa, ja pariskunta halusi valmistaa siitä lahjakopioita. Pariskunta näki myös pelissään kaupallisen mahdollisuuden, ja he lähestyivät pelivalmistajaa Edwin S. Lowea. Lowe tarjoutui ostamaan pelin oikeudet ja muutti pelin nykyiseen nimeensä Yahtzeehen. Peli saavutti valtavan suosion, ja Lowe myi sitä noin 40 miljoonaa kappaletta vuosina 1956–1973. Myöhemmin Milton Bradley, nykyisin Hasbro, inc, tytäryhtiö, otti pelin tuotantoon. Peli on tähän päivään asti säilyttänyt suosionsa, ja sitä myydäänkin vuosittain noin 50 miljoonaa kappaletta. Pelistä on myös kehitty samankaltaisia pelejä, kuten Yatzy, Yatzee, Yaht ja Kniffer.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan Yahtzeen mahdollisimman optimaalista pelaamista. Tutkielmassa hyödynnetään todennäköisyyslaskentaa, kombinatoriikkaa ja tietokonesimulaatiota. Tavoitteena on löytää mahdollisimman optimaalinen pelitapa, jolla maksimoidaan pelaajan keräämä pistemäärä pelin päätyttyä.

Tutkielman alussa esitetään pelin kulku: säännöt ja pisteytys. Tämän jälkeen tarkastellaan pelitilanteiden ja erilaisten Yahtzee-yhdistelmien todennäköisyyksiä ja niistä tehtyjä päätelmiä. Lopuksi perehdytään Yahtzeen optimaaliseen pelaamiseen ja erilaisiin pelitapoihin, jolla mahdollisesti saavuttaa optimaalinen tilanne. Tutkielmassa pitää ottaa huomioon, että Yahtzeessa sattumalla on merkittävä osuus, joten optimaalista pelitapaa ei pysty suoraviivaisesti tulkitsemaan. Tutkielma perustuu kirjoihin [1], [2], luentomonisteeseen [3], tutkielmaan [4] ja monisteeseen [5].

2 Säännöt ja pisteytys

Tämä luku perustuu lähteeseen [1]. Vuorollaan pelaaja heittää viittä kuusisivuista noppaa vähintään kerran tai enintään kolme kertaa. Ensimmäisen heiton jälkeen pelaaja päättää, haluaako hän säilyttää osan nopista vai heittääkö kaikki viisi noppaa uudelleen. Säilyttämättömät nopat heitetään uudelleen toisella kierroksella. Toisella kierroksella pelaaja valitsee uudelleen, mitkä nopat hän pitää ja mitkä hän heittää vielä kerran kolmannella kierroksella uudelleen. Kolmannella kierroksella on mahdollisuus heittää myös ensimmäisellä ja toisella kierroksella syrjään jääneitä noppia. Kolmannen heittokierroksen jälkeen pelaajan tulee kirjata saatu pistemäärä pöytäkirjaan. Jos heitetyt nopat eivät muodosta mitään pelaamatonta lukuyhdistelmää johonkin sarakkeeseen merkitään nolla. Jos pelaaja saa haluamansa lukuyhdistelmän ensimmäisen tai toisen heiton jälkeen, hän voi kirjata sen suoraan pöytäkirjaan, mutta kolmas nopanheitto on viimeinen. Jokaiselle pöytäkirjan riville voi merkitä pisteen vain kerran.

Taulukossa 1 on esitetty Yahtzeen pöytäkirjan eri lukuyhdistelmät ja pelin pisteytys. Jos pelaaja heittää uudelleen Yahtzee-yhdistelmän pelin aikana eikä Yahtzee-yhdistelmän sarakkeessa ole nollaa, hän saa 100 lisäpistettä. Nämä lisäpisteet pelaaja voi sijoittaa mihin tahansa 13 tyhjästä sarakkeesta.

Yksittäisten numeroiden yhdistelmät:	Pisteytys:
1	Silmälukujen 1 yhteenlaskettu summa
2	Silmälukujen 2 yhteenlaskettu summa
3	Silmälukujen 3 yhteenlaskettu summa
4	Silmälukujen 4 yhteenlaskettu summa
5	Silmälukujen 5 yhteenlaskettu summa
6	Silmälukujen 6 yhteenlaskettu summa
Yksittäisten numeroiden lisäpisteet	35 pistettä, jos kaikkien yksittäisten numeroiden yhteenlaskettu summa on 63 tai enemmän.
Erikoisyhdistelmät:	
3 samaa	Kaikkien noppien yhteispistemäärä, joka sisältää vähintään 3 samaa silmälukua
4 samaa	Kaikkien noppien yhteispistemäärä, joka sisältää vähintään neljä samaa silmälukua
Täyskäsi kolme samaa silmälukua ja kaksi samaa toista silmälukua	25 pistettä
Pieni suora neljän numeron sarja (1-2-3-4, 2-3-4-5, 3-4-5-6)	30 pistettä
Iso suora viiden numeron sarja (1-2-3-4-5, 2-3-4-5-6)	40 pistettä
Yahtzee viisi samaa silmälukua	50 pistettä
Sattuma	Kaikkien noppien yhteenlaskettu summa millä tahansa silmäluvuilla

Taulukko 1: Yahtzeen pöytäkirjan eri lukuyhdistelmät ja niiden pisteytys.

3 Todennäköisyyslaskenta

Jotta Yahtzeeta voi pelata tavoitteellisesti, pelaajan on tunnettava perusnopan todennäköisyydet. Tässä luvussa käsitellään todennäköisyyden määritelmiä ja keskeisiä peruskäsitteitä, jotka ovat olennaisia Yahtzeen optimaalisen pelaamisen kannalta.

3.1 Klassinen todennäköisyys

Klassisen todennäköisyysteorian mukaan todennäköisyys määritellään suotuisten alkeistapausten lukumäärän suhteena kaikkien mahdollisten alkeistapausten lukumäärään.

Määritelmä 1. Todennäköisyyslaskennan aksioomat ovat [2]

$$P(A) \geq 0 \tag{1}$$

$$P(\Omega) = 1 \tag{2}$$

$$\text{ja } P\left(\cup A_j\right) = \Sigma P\left(A_j\right), \tag{3}$$

missä $A_j = A_1, A_2, ...$ ja ne ovat toisistaan riippumattomia tapauksia.

Alkeistapahtumien avaruuden Ω kaikki alkiot A toteuttavat määritelmän 1 ehdot. Määritelmän ehdon (1) mukaan alijoukon A tapahtuman todennäköisyys on positiivinen luku. Ehdon (2) mukaan kaikkien alkeistapahtumien, eli avaruuden Ω alkioiden, yhteenlaskettu todennäköisyys on yksi. Lisäksi ehto (3) sanoo, että jos tapahtumat ovat riippumattomia, tämän joukon tapahtumien todennäköisyys on näiden tapahtumien summa. Tämä määritelmä on sidoksissa tässä kappaleessa esitettyihin asioihin.[2]

Lause 1. *Oletetaan, että alkeistapahtumia on äärellinen määrä ja kaikki alkeistapahtumat $x_1, x_2, ..., x_n$ ovat yhtä todennäköisiä. Tällöin jokaisen alkeistapahtuman todennäköisyys on [3]*

$$P(x_i) = \frac{1}{n}, \textit{missä } i = 1, ..., n.$$

Esimerkki 1. Kuusisivuisen nopan heitossa alkeistapaukset ovat $x_1, x_2, ..., x_6$, missä x_i edustaa silmälukua i.

Määritelmä 2. Olkoon A tapahtuma, joka toteutuu jonkin alkeistapahtumista $x_1, x_2, ..., x_k$ esiintyessä. Otosavaruus Ω sisältää kaikki mahdolliset alkeistapaukset

$x_1, x_2, ..., x_n$. Tällöin klassisen todennäköisyyden mukaan tapahtuman A todennäköisyys on [3]

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n},$$

missä $|A|$ tarkoittaa tapahtumalle A suotuisten alkeistapahtumien lukumäärää ja $|\Omega|$ kaikkien alkeistapahtumien lukumäärää.

Esimerkki 2. Kuusisivuisen nopan heitossa alkeistapaukset ovat $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Tällöin yksittäisen silmäluvun saamisen todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

On tärkeää huomata, että klassisessa todennäköisyydessä edellytetään, että kaikki mahdolliset tapaukset ovat yhtä todennäköisiä.

3.2 Kombinatoriikka

Kombinatoriikan avulla voidaan tutkia, monellako eri tavalla joukko alkioita voidaan järjestää eri ryhmiin. Lisäksi voidaan selvittää, minkälainen otanta alkeistapahtumien joukosta valitaan. Kombinatoriikan tuloksia voidaan hyödyntää tapahtumien lukumäärien laskemisessa, kun alkeistapauksia on äärellinen määrä. Käytettäessä kombinatoriikkaa Yahtzeen tutkimisessa otanta tapahtuu yleisesti palauttaen ja järjestäen.

Määritelmä 3 (Tulosääntö). Olkoon otoksia k kappaletta ja kussakin i. vaiheessa on n_i vaihtoehtoa. Erilaisten koetuloksien lukumäärä saadaan kertomalla kunkin vaiheen vaihtoehdot keskenään seuraavasti [3]

$$n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k.$$

Esimerkki 3. Heitetään viittä kuusisivuista noppaa, jolloin kaikkien mahdollisten yhdistelmien lukumäärä on

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776,$$

koska heittoja on 5 ja jokaisella heitolla on 6 vaihtoehtoa.

Lause 2 (Binomikerroin). *Olkoon joukossa Ω erilaisia alkiota n kappaletta, joista voidaan valita k:n kokoinen järjestämätön otos ilman palautusta. Tämä otos voidaan valita [3]*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ tavalla, missä } k \in N, k \leq n.$$

Esimerkki 4. Heitetään viittä kuusisivuista noppaa. Kuinka monella tavalla voidaan saada kolme samaa silmälukua.

Aluksi on kuusi vaihtoehtoa siihen, mikä silmäluku toistuu kolme kertaa. Binomikerrointa käyttäen voidaan laskea, kuinka monella eri tavalla voidaan valita kolme samaa noppaa viidestä $\binom{5}{3} = 10$. Laskussa pitää vielä ottaa huomioon, että jäljelle jääneiden kahden nopan silmälukujen pitää olla eri suuret. Ensimmäisellä jäljelle jääneellä nopalla on viisi vaihtoehtoa ja toisella nopalla neljä vaihtoehtoa. Kolme samaa silmälukua voidaan siis valita

$$6 \cdot \binom{5}{3} \cdot 5 \cdot 4 = 1200 \text{ erilaisella tavalla.}$$

Taulukossa 2 esitetään, millä todennäköisyydellä saavutetaan ensimmäisellä heitolla eri Yahtzee-yhdistelmiä [4]. Taulukon 2 yhdistelmät ovat laskettu Esimerkin 4 mukaisesti.

Yhdistelmä	Toteutuvien yhdistelmien määrä	Todennäköisyys
Yahtzee	6	$\frac{6}{7776}$
4 samaa	150	$\frac{150}{7776}$
Täyskäsi	300	$\frac{300}{7776}$
3 samaa	1200	$\frac{1200}{7776}$
Pari	5400	$\frac{5400}{7776}$
Viisi eri	720	$\frac{720}{7776}$

Taulukko 2: Todennäköisyys heittää ensimmäisellä heitolla eri lukuyhdistelmät.

Taulukko 2 havainnollistaa eri yhdistelmien todennäköisyyksiä. Näiden tiedostaminen voi olla hyödyllistä optimaalisen pelin suunnittelussa, kun mietitään uudelleen heittojen mahdollisuuksia. Taulukosta ilmenee, että parin todennäköisyys on $\frac{5400}{7776} \approx 69$ %. Tämä on huomattavasti todennäköisempi heittää ensimmäisellä heitolla kuin viisi eri lukua, minkä todennäköisyys on $\frac{720}{7776} \approx 9$ %.

3.3 Odotusarvo

Odotusarvo on todennäköisyyslaskennan keskeinen käsite. Odotusarvo kuvaa satunnaismuuttujan kaikkien todennäköisyyksien painotettua keskiarvoa.

Määritelmä 4 (Diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvo). Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka otosavaruus on Ω_X. Satunnaismuuttujan odotusarvo voidaan määritellä seuraavasti [3]:

$$E(X) = \sum_{x \in \Omega_X} x p_X(x).$$

Lauseen 2 nojalla jokainen silmäluku esiintyy yhtä suurella todennäköisyydellä $P = \frac{1}{6}$, jolloin nopan heiton keskiarvo voidaan laskea määritelmän 3 nojalla seuraavasti:

$$E(x) = \frac{\text{silmälukujen summa}}{\text{nopan sivujen määrä}} = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5.$$

Tämä tarkoittaa, että yksittäisen nopanheiton odotusarvo on 3.5.

Maksimoidakseen pisteensä pelaajan tulisi siis pyrkiä heittämään keskiarvoa suurempia silmälukuja $\{4,5,6\}$. Tämä pitää erityisesti paikkansa, jos oletetaan pelaajalla olevan jo Yahtzee-yhdistelmä heitettynä ja tavoitteena on pisteiden kerryttäminen.[1]

Tapauksessa, jossa heitetään viittä noppaa yhteissumman odotusarvoksi saadaan

$$E(\text{summa}) = 5 \cdot E(x) = 5 \cdot 3.5 = 17.5,$$

mikä tarkoittaa, että yksittäisen heiton keskiarvo on 17.5.

Pelaajan tulisi tavoitella siis sellaisia lukuyhdistelmiä, joiden saavuttaminen tuottaisi keskiarvoa suurempia tuloksia. Seuraavassa luvussa tarkaatellaan, mitkä lukuyhdistelmät tuottavat todennäköisimmin parhaan mahdollisen tuloksen.[1]

4 Optimaalinen pelitapa

Tavoitteena Yahtzeen optimaalisessa pelaamisessa on saavuttaa mahdollisimman suuri pistemäärä. Sen saavuttamiseksi pelaajan tulee tehdä valintoja yhdistelmien tavoittelussa. Tässä luvussa käydään tietokonesimulaation tuottamilla tuloksilla läpi erilaisia valintoja, Markovin ketju ja esitetään optimaalinen esimerkkipeli.

4.1 Tietokonesimulaatio

Tässä luvussa esitellään kirjan [1] esittämää Yahtzee-pelin tietokonesimulaatiota. Tarkastellaan tietokoneen simuloimia tuloksia, jossa tietokone laitettiin pelaamaan 100 000 Yahtzee-peliä optimaalisesti. Simulaatio sai pelin keskimääräiseksi kokonaispistemääräksi 254.6 pistettä, jota pidetään siis pelin optimaalisena tuloksena. Korkein mahdollinen pelin pistemäärä saavutettaisiin, kun pelaaja saisi kolmetoista Yahtzee-yhdistelmää, joista jokainen voitaisiin pisteyttää optimaalisesti. Tämä olisi teoriassa 1 575 pistettä, ja todennäköisyys tälle tapahtumalle on 1/283 kvartiilia.

Edellisen luvun 3 perusteella tiedetään, että tavoitteena on saada heittokierroksella mahdollisimman suuria silmälukuja ja siten saada vuorolla sellaisia lukuyhdistelmiä, jotka tuottavat mahdollisimman suuria tuloksia. Tarkastellaan seuraavaksi simulaation antamia tuloksia ja verrataan niitä ideaalisiin tuloksiin. Nämä tulokset ovat esitetty taulukossa 3.

Yhdistelmä	Tietokoneen simuloima keskiarvo	Ideaaliset pisteet	Tietokoneen ja ideaalisten pisteiden vertailu
1	1.88	3	$\frac{1.88}{3} = 0.63$
2	5.28	6	$\frac{5.28}{6} = 0.88$
3	8.57	9	$\frac{8.57}{9} = 0.95$
4	12.16	12	$\frac{12.16}{12} = 1.01$
5	15.69	15	$\frac{15.69}{15} = 1.05$
6	19.19	18	$\frac{19.19}{18} = 1.07$
Lisäpisteet	23.84	35	$\frac{23.84}{35} = 0.68$
3 samaa	21.66	22	$\frac{21.66}{22} = 0.98$
4 samaa	13.10	22	$\frac{13.10}{22} = 0.6$
Täyskäsi	22.59	25	$\frac{22.59}{25} = 0.9$
Pieni suora	29.46	30	$\frac{29.46}{30} = 0.98$
Iso suora	32.71	40	$\frac{32.71}{40} = 0.82$
Yahtzee	16.87	50	$\frac{16.87}{50} = 0.34$
Sattuma	22.01	22	$\frac{22.01}{22} = 1$
Yahtzeen lisäpisteet	9.58	100	$\frac{9.58}{100} = 0.0958$

Taulukko 3: Ideaalisen ja tietokoneen simuloivien pisteiden vertailu.

Taulukon 3 sarakkeessa neljä on esitetty simuloitujen pisteiden suhde ideaalisiin pisteisiin. Mitä lähempänä saatu tulos on ykköstä, sitä suurempi mahdollisuus kyseisessä yhdistelmässä on saavuttaa ideaalinen pistemäärä. Kun tarkastellaan yksittäisten numeroiden yhdistelmiä, huomataan, että luvuille yksi, kaksi ja kolme simuloidut keskiarvot ovat pienempiä, kuin ideaaliset pisteet. Kun puolestaan luvuille neljä, viisi ja kuusi simuloidut keskiarvot ovat suurempia, kuin ideaaliset pisteet. Tämä viittaa siihen, että optimaalisessa pelissä tavoitellaan keskiarvoa suurempia lukuja. Lisäksi huomataan, että simuloitujen keskiarvojen suhde ideaalisiin pisteisiin kasvaa tasaisesti luvusta yksi lukuun kuusi. Tämä viittaa puolestaan siihen, että mitä suurempi silmäluku on, sitä todennäköisemmin se säilytetään.

Tiedetään myös, että tavoitteena on saada kaikki yhdistelmät täytettyä, mutta kaikkien lukuyhdistelmien täyttäminen on todella epätodennäköistä saavuttaa. Tarvitsemme siis tiedon myös siitä mitkä lukuyhdistelmät kannattaa mahdollisesti merkitä nollaksi, jos sopivaa lukuyhdistelmää ei saavuteta. Taulukossa 4 on esitetty todennäköisyydet eri erikoisyhdistelmille, mihin merkittiin tietokoneen simuloivassa pelissä nolla.

Yhdistelmä	Todennäköisyys, että nolla	Arvioitu pistemäärä ensimmäisellä heittokierroksella	Arvioitu pistemäärä viimeisellä eli 13. heittokierroksella
Yahtzee	66%	27	2.5
4 samaa	36%	13	6
Iso suora	18%	33	10
Täyskäsi	9.5%	21.5	9.5
3 samaa	3%	29	19
Pieni suora	2%	29	19
Sattuma	0%	22	22.5

Taulukko 4: Todennäköisyys, että nolla ja arvioidut pistemäärät heittokierroksilla 1. ja 13.

Taulukon 4 mukaan pelin epätodennäköisin yhdistelmä on Yahtzee-yhdistelmä. Pelin aikana pelaaja heittää keskimäärän 0.6 Yahtzee-yhdistelmää. Sen heittämisen todennäköisyys on noin $\frac{1}{22}$ kierroksesta. Tästä syystä Yahtzee-yhdistelmä on todennäköisin yhdistelmä, johon pelaaja kirjaa nollan. Tietokoneen simuloivassa pelissä Yahtzee-yhdistelmään kirjattiin 66 % todennäköisyydellä nolla.

Toiseksi yleisin yhdistelmä, johon pelaaja joutuu kirjaamaan nolla, on neljä samaa -yhdistelmä. Simulaatio antaa todennäköisyydeksi 36 %, että pelaaja kirjaa neljä samaa- yhdistelmään nolla. Tähän valintaan vaikuttaa, ettei yleisesti neljä samaa- yhdistelmä tuota pelaajalle riittävän suurta tulosta, koska pelaaja heittää keskimäärin 13.10 pistettä kyseiseen yhdistelmään (Taulukko 3), mikä on alhaisempi kuin yksittäisen heiton odotusarvo.

Kolmanneksi todennäköisin yhdistelmä, johon pelaaja kirjoittaa nollan 18 % todennäköisyydellä, on iso suora (1-2-3-4-5 tai 2-3-4-5-6). Yhdistelmän saavutettavuus on hankalaa, koska se vaatii viisi peräkkäistä silmälukua. Tämän tavoittelu optimaaliselle pelaajalle ei ole kannattavaa, koska sitä ei pysty yhdistämään usean muun yhdistelmän tavoittelun kanssa. Ison suoran tavoittelu on kannattavaa tilanteessa, jossa silmälukujen yhdistelmä on pieni suora ja heittoja on vielä jäljellä, ja pientä suoraa tai sattuma ei ole vielä täytetty.

Täyskäsi on yleisesti numeroyhdistelmä, jota on vaikea tavoitella muiden lukuyhdistelmien nojalla, koska se koostuu kolmesta samasta luvusta ja parista. Paras tapa tavoitella täyskättä on heittää ensimmäisellä heitolla kaksi tai kolme samaa ja luottaa onneen. Tämä tilanne on vielä helppo yhdistää muihin lukuyhdistelmiin, kuten kolmeen samaan, neljään samaan, Yahtzeen tai yksittäisen numeron yhditelmään. Pelaaja varmasti nopeasti ajattelee, jos hän heittää kaksi paria, että se olisi hyvä mahdollisuus tavoitella täyskättä. Se onkin tilanteessa, jossa sattumaa ei ole vielä täytetty, koska kahta paria ei pysty sijoittamaan muualle, jos täyskättä ei saavuteta. Tavoitellessa täyskättä, kun sattuma on käytetty ja pelaaja heittää kaksi paria, paremmat mahdollisuudet pelaaja antaa itselleen, kun hän säilyttää vain pareista silmäluvultaan suuremman.

Pelaajalla on mahdollisuus saada yksittäisten numeroiden yhdistelmistä lisäpisteitä, kun yhdistelmien yhteenlaskettu summa on vähintään 63. Huomataan, että optimaalisessa pelissä pelaaja täyttää suurempien silmälukujen yhdistelmiin ideaalisia pisteitä suurempia arvoja. Pelaajan on siis mahdollisuus saada lisäpisteet, vaikka joutuisi merkitsemään silmäluvun 1 pisteiksi nollan. Pelaajan ei kuitenkaan optimaalisen pelaamisen tavoittelussa kannata merkitä yksittäisten numeroiden yhdistelmiin pienempiä arvoja kuin ideaalisissa pisteissä ennen kuin hän on saavuttanut johonkin nämä ylimääräiset pisteet, koska se hankaloittaa lisäpisteiden saamista. Pelaajan kannattaa tavoitella yksittäisten numeroiden yhdistelmien täytössä 35 lisäpisteen lunastamista.

4.2 Markovin ketju

Markovin ketju on matemaattinen menetelmä, joka määrittää sarjan satunnaisia tapahtumia, missä toiseen tilaan siirtyminen riippuu vain nykyisestä tilasta. Ketju on siis riippumaton menneistä tiloista. [4]

Määritelmä 5. Olkoon $K = K_0, K_1...$ satunnaismuuttujien sarja, joka saa arvoja tilajoukossa S. Sarja on Markovin ketju, jos se täyttää seuraavan ehdon [4]

$$P(K_{n+1} = i_{n+1} | K_n = i_n, K_{n-1} = i_{n-1}, ..., K_0 = i_0) = P(K_{n+1} = i_{n+1} | K_n = i_n),$$

missä $n \geq 0$ ja $i_0, i_1, ..., i_{n+1} \in S$.

Tätä Markovin ominaisuutta kutsutaan nimellä muistittomuus. Tämä viittaa siihen, että menneillä ja tulevilla tapahtumilla ei ole vaikutusta nykytilaan.

Markovin ketjun siirtymätodennäköisyyttä tilasta toiseen edustaa siirtymämatriisi, jota tässä tutkielmassa merkitään T. Kelvollisen siirtymämatriisin rivien pitäisi summautua ykköseksi, sillä kaikkien tilojen siirtymien todennäköisyyksien summan pitää olla yksi. Kun tarkastellaan tila-avaruutta, missä $S = \{1, 2, ..., n\}$ siirtymämatriisi ilmaistaan seuraavasti [4]

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Tätä kyseistä menetelmää voidaan käyttää myös Yahtzeen tulkitsemiseen, koska muistittomuus tekee siitä erittäin hyödyllisen yathzee-pelin analysointiin.Tarkastellaan seuraavaksi Markovin ketjua Yahtzee yhdistelmien todennäkösyyksien laskemisessa ja perehdytään lähteen [5] esittämään tapauskeen. Valitaan 5 yhdistelmää seuraavalla tavalla:
Tila 1: kaikki viisi arpakuutiot eriarvoisia

Tila 2: ainakin paria
Tila 3: Kolme samaa
Tila 4: neljä samaa
Tila 5: viisi samaa

Tavoitteena on löytää siirtymämatriisi T siten, että $Tx = b$, missä x=tämän hetkinen tila ja b=uusi tila. Seuraava siirtymämatriisi esittää tarkastellussa olevat tilat:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{120}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{900}{1296} & \frac{120}{216} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{250}{1296} & \frac{80}{216} & \frac{25}{36} & 0 & 0 \\ \frac{25}{1296} & \frac{15}{216} & \frac{10}{36} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{1296} & \frac{1}{216} & \frac{1}{36} & \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

Tarkastellaan tarkemmin tapausta, jossa olemme tilassa 2 ja pelaajalla on vielä kaksi heittoa jäljellä ja nähdään, miten Markovin ketju toimii. Alkutilannevektori on muotoa:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tx kertoo todennäköisyyden, että pelaaja on jossain muussa tilassa heitettyä kolme noppaa uudelleen, kun hän säilyttää parin

$$Tx = \begin{bmatrix} \frac{120}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{900}{1296} & \frac{120}{216} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{250}{1296} & \frac{80}{216} & \frac{25}{36} & 0 & 0 \\ \frac{25}{1296} & \frac{15}{216} & \frac{10}{36} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{1296} & \frac{1}{216} & \frac{1}{36} & \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.55555... \\ 0.37037... \\ 0.06944... \\ 0.00427... \end{bmatrix}$$

Tx kertoo nyt todennäköisyyden muille tiloille, kun tilassa kaksi on heitetty kerran.

Haluamme kuitenkin tietää todennäköisyydet muiden tilojen välillä kaikkien kolmen heiton jälkeen. Voidaan soveltaa kaavaa niin, että saadaan todennäköisyydet muihin tiloihin siirtymisestä kahden heiton jälkeen tilassa 2., kun pelaaja säilyttää jokaisella heittokierroksellaan parin

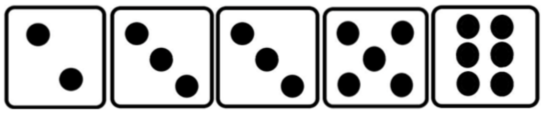
$$T^2x = T(Tx) = T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0.55555... \\ 0.37037... \\ 0.06944... \\ 0.00427... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.30864... \\ 0.46296... \\ 0.19933... \\ 0.02906... \end{bmatrix}$$

Tämä vektori kertoo todennäköisyydet millä pelaaja heittää kyseiset tilat, jos hän on tilassa 2, ja hänellä on kaksi heittoa jäljellä. Todennäköisyys, että pysyy tilassa 2 on 30.6 %, siirtyy tilaan 3 on 46.3 %, tilaan 4 on 19.9 % ja tilaan 5 on 2.9 %.

Tämän tyylisellä Markovin ketjulla pystyy siis laskemaan monimutkaisempiakin Yahtzee yhdistelmien todennäköisyyksiä paitsi pientä ja isoa suoraa, koska niiden ratkaisemiseen tarvitaan lisää siirtymämatriiseja.

4.3 Esimerkkipeli

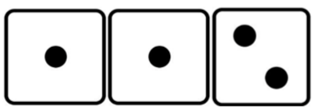
Tässä luvussa käydään läpi kirjan [1] esittämiä hypoteettisia vuoroja, joita optimaalinen pelaaja suorittaa yhden pelin aikana. Tutkitaan tarkemmin pelaajan ensimmäistä heittovuoroa. Pelaaja heittää ensimmäisellä heitollaan seuraavat silmäluvut:



Kuva 1: vuoro 1, heitto 1

Yleisintä on säilyttää ensimmäisellä heitolla saavutettu pari, joka antaa tässä tapauksessa hyvän mahdollisuuden heittää yksittäisten numereroiden yhditelmiin kolmoset tai erikoisyhdistelmiin 3 samaa, 4 samaa tai Yahtzeen. Pelaajalla on myös mahdollisuus yrittää isoa suoraa, yrittämällä seuraavilla heittokierroksilla heittää nelosta. Tämä ei tuota kuitenkaan pelaajalle tilastollisesti suurempia pisteitä kuin parin säilyttäminen. Pelaaja päättää säilyttää kolmoset.

Toisella kierroksella pelaaja heittää kolmella nopalla seuraavat silmäluvut:



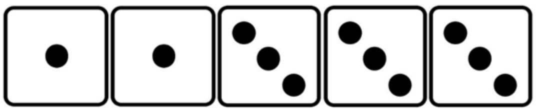
Kuva 2: vuoro 1, heitto 2

Pelaajalla on nyt mahdollisuus säilyttää ykköset ja edellisellä kierroksella heitetyt kolmoset tavoitellen täyskäden heittoa. Pelaaja voi myös säilyttää vain toisen pareistaan, mieluusti aina suurempi silmälukuiset eli tässä tapauksessa kolmoset ja tavoitella kolmosia, 3 samaa, 4 samaa ja Yahtzeeta. Kuitenkin pisteet jäävät kolmosilla suhteellisen pieniksi eikä se ole kannattavaa. Olisi eri asia, jos kyseisessä tapauksessa toinen pareista olisi heitetty suuremmilla silmäluvuilla kuten kuutosilla. Pelaajalla on myös mahdollisuus merkitä kolmosiin kuusi, jos kolmosia ei tule lisää. Pelin alkuvaiheella, kun yksittäisten numeroiden yhdistelmiin ei ole kertynyt vielä hyvityspisteitä kannattaa olla varuillaan, ettei lisäpisteet kuitenkaan jäisi saamatta. Pelaaja päättää säilyttää ykköset sekä edellisen kierroksen kolmoset tavoitteena täyskäsi.

Pelaaja heittää kolmannella eli vuoronsa viimeisellä heitollaan yhtä noppaa ja heittää seuraavan silmäluvun:

Kuva 3: vuoro 1, heitto 3

Pelaajalla kävi nyt hyvä onni ja hän on kerännyt vuoronsa päätteeksi seuraavat silmäluvut:



Kuva 4: vuoron 1 lopputulos

Pelaajalla on kaksi vaihtoehtoa, mihin yhdistelmään hän voisi sijoittaa heittämänsä silmäluvut. Hän voisi sijoittaa kolmosiin yhdeksän, mikä olisi pelin kannalta erittäin hyödyllinen valinta, mutta optimaalisesti hyödyllisempää on täyttää heti pelin alkupuolella täyskäsi. Sillä täyskäsi on suhteellisen harvinainen eikä pelin loppuvaiheella sen tavoittelu yleensä tuota haluttua tulosta. Täyskäden tavoittelu pelin loppupuolella kahdella parilla on jopa hyödytöntä, koska se todennäköisesti johtaa täyskäden epäonnistumiseen, eikä sitä pystytä sijoittamaan enää optimaalisesti muuhun lukuyhdistelmään, koska pöytäkirjasta on yleisesti täytetty jo mahdolliset yhdistelmät. Pelaaja päättää sijoittaa tuloksensa täyskäteen. Koska pelaaja saa heitettyä täyskäden jo peli alkuvaiheessa, se edes auttaa pelaajaa saavuttamaan optimaalisen lopputuloksen.

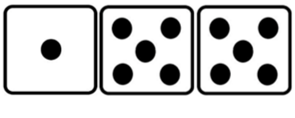
Yhdistelmät:	Pelaajan pisteet:
1	
2	
3	
4	16
5	
6	
Lisäpisteet	
3 samaa	
4 samaa	
Täyskäsi	25
Pieni suora	
Iso suora	
Yahtzee	
Sattuma	
Yheensä	41

Taulukko 5: Pelaajan pöytäkirja vuoron kaksi jälkeen.

Taulukosta 5 nähdään, mitkä yhdistelmät pelaaja on pelannut vuorojensa 1 ja 2 aikana. Seuraavaksi käydään tarkemmin läpi pelaajan kolmas heittovuoro. Pelaaja heittää ensimmäisellä heitokierroksellaan seuraavat silmäluvut:

Kuva 5: vuoro 3, heitto 1

Heiton jälkeen pelaaja päättää säilyttää kaksi vitosta, koska ne antavat hyvän lähtökohdan vitosten, 3 samaa, 4 samaa tai Yahtzeen tavoitteluun. Pelaaja heittää kierroksen toisella heitolla kolmella nopalla seuraavat silmäluvut:



Kuva 6: vuoro 3, heitto 2

Pelaaja säilyttää tältäkin kierrokselta kaksi vitosta, koska hänellä on vielä kolmannella heitolla mahdollisuus saada Yahtzee. Viimeisellä heitolla pelaaja heittää yhden nopan ja saa siitä seuraavan silmäluvun:

Kuva 7: vuoro 3, heitto 3

Vuoron päätteeksi pelaaja on siis heittänyt itselleen seuraavat silmäluvut:

Kuva 8: kierros 3, heitetyt nopat

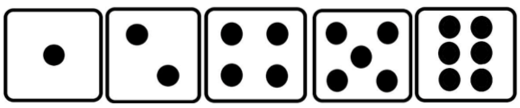
Pelaajalla on pöytäkirjassaan tyhjänä vielä 3 samaa, 4 samaa ja vitoset, joihin heitetyt vitoset olisivat mahdollista sijoittaa. Kuitenkin 4 samaa on optimaalisesti hyödyllisempi täyttää ennen 3 samaa, jos se on vielä käyttämättä. Pelaaja saisi 4 samasta kohtalaisen korkeat 22 pistettä, ja etulyöntiaseman saavuttaa optimaalisen lopputuloksen. Pelaajan pitää kuitenkin ottaa huomioon yksittäisten numeroiden lisäpisteiden tärkeys, koska pelaajalla on pöytäkirjassaan jo nelosten kohdalla 4 hyvityspistettä ideaalisiin pisteisiin verrattuna, niin pelaaja kerryttäisi yhteensä 9 hyvityspistettä sijoittamalla vitosiin 20 pistettä. Tämä toisi samalla pelaajalle joustoa, koska se mahdollistaa ykkösiin ja kakkosiin jopa nollan merkkaamisen ja silti mahdollistaa lisäpisteiden saamisen. Pelaaja päättää sijoittaa tuloksensa vitosiin, koska se lisää pelaajalle turvaa lisäpisteiden saavuttamiseen.

Taulukossa 6 on esitetty pelaajan pöytäkirja neljännen vuoron jälkeen.

Yhdistelmät:	Pelaajan pisteet:
1	
2	
3	
4	16
5	20
6	
Lisäpisteet	
3 samaa	
4 samaa	22
Täyskäsi	25
Pieni suora	
Iso suora	
Yahtzee	
Sattuma	
Yheensä	83

Taulukko 6: Pelaajan pöytäkirja vuoron neljä jälkeen.

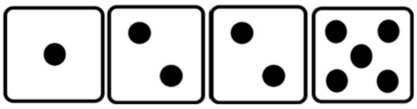
Tarkastellaan pelaajan seuraavaa eli viidettä heittovuoroa tarkemmin. Ensimmäisellä heitolla hän heittää seuraavat silmäluvut:



Kuva 9: vuoro 5, heitto 1

Pelaajalla olisi mahdollisuus yrittää muodostaa suoria, koska niitä ei ole vielä heitetty. Pientä suoraa voisi yrittää säilyttämällä 4, 5, 6 ja yrittää heittää kahdella nopalla kolmonen tai isoa suoraa säilyttämällä 2, 4, 5, 6 ja yrittää saada yhdellä nopalla kolmonen. Suoran yrittäminen olisi myös käytännöllistä, koska pelaajalla on sattuma käyttämättä. Yhden nopan varassa on kuitenkin peini todennäköisyys heittää suora. Pelaajalle paras vaihtoehto kuitenkin on säilyttää silmäluku kuusi, koska pelaajalta puuttuu kuutoset ja se mahdollistaa eri yhdistelmien tavoittelun. Pelaaja voisi tässä tilanteessa heittää myös kaikki nopat uudelleen, mutta silmäluku kuusi tuo kuitenkin suurta arvoa kokonaissummaan vuoron päätteeksi. Pelaaja päättää siis säilyttää ainoastaan kuutosen.

Toisella heitolla pelaaja heittää neljä noppaa ja saa silmäluvut:

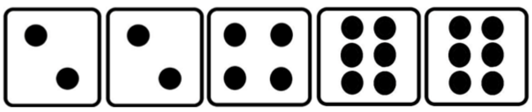


Kuva 10: vuoro 5, heitto 2

Pelaaja heittää kakkosista parin ja päättää jättää heittonsa jälkeen kakkoset ja heittää kolmannella kierroksella jättämänsä kuutosen uudelleen. Tämä tilanne mahdollistaa pelaajalle saada kakkosiin riittävän hyvän tuloksen ja voi saavuttaa 3 samaa. Kolmannella kierroksella pelaaja heittää seuraavat silmäluvut:

Kuva 11: kierros 5, heitto 2

Vuoron päätteeksi pelaaja on heittänyt itselleen seuraavat silmäluvut:



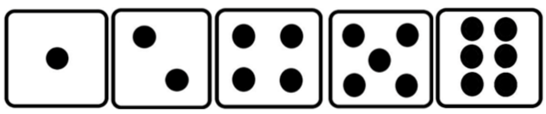
Kuva 12: kierros 5, heitetyt nopat

Pelaaja ei saavuttanut itselleen optimaalista pisteytysvaihtoehtoa. Pelaaja voisi käyttää tyhjänä olevan sattuman tässä vaiheessa, ja kerätä sinne 20 pistettä. Pelaajalla on kuitenkin tällä hetkellä yksittäisten numeroiden yhditelmissä 9 hyvityspistettä, joita voidaan hyvin käyttää tällaisissa tilanteissa. Pelaajalle on kannattavampaa kirjata kakkosiin 4 kuin kuutosiin 12, koska pelaaja menettää näin vähemmän pisteitä. Pelaaja päättää sijoittaa kakkosiin pisteensä, koska sattuma on hyvä jättää vielä avoimeksi siltä varalta, että suorat eivät onnistu.

Yhdistelmät:	Pelaajan pisteet:
1	
2	4
3	
4	16
5	20
6	18
Lisäpisteet	
3 samaa	
4 samaa	22
Täyskäsi	25
Pieni suora	
Iso suora	40
Yahtzee	
Sattuma	
Yheensä	145

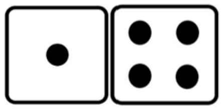
Taulukko 7: Pelaajan pöytäkirja vuoron seitsemän jälkeen.

Talukossa 7 on esitetty pelaajan seitsemännen vuoron jälkeen keräämät pisteet. Seuraavaksi tarkastellaan pelaajan kahdeksatta heittovuoroa. Hän heittää ensimmäisellä heitollaan seuraaavat silmäluvut:



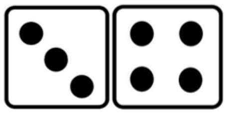
Kuva 13: vuoro 8, heitto 1

Pelaaja ei saa erityisen hyviä silmälukuja ensimmäisellä heitolla. Eikä pelaaja kannata tällaisella heitolla lähteä tavoittelemaan yksittäisten numeroiden yhdistelmiin ykkösiä eikä kolmosia. Pelaaja voisi säilyttää vain kuutoisen ja kasvattaa korkeampaa kokonaispistesummaan vuoronsa loppuun, mutta tämä ei ole erityisen hyödyllistä, jos pelaaja ei saisi vielä kahta kuutoista lisää ja näin saisi täytettyä 3 samaa. Pelaajalta puuttuu vielä pieni suora ja hän pystyisi tavoittelemaan sitä jättämällä 4, 5, 6 säilöön. Tämä on pelaajalla tässä vaiheessa suotuisin vaihtoehto, vaikka mikään vaihtoehto ei ole optimaalisen pelin kannalta hyvä. Pelaaja lähtee siis tavoittelemaan pientä suoraa ja hän heittää toisella kierroksella kahta noppaa, jotka antavat silmäluvut:



Kuva 14: vuoro 8, heitto 2

Pelaaja ei saanut haluamaansa kolmosta, joten pelaaja voisi tässä tapauksessa ottaa toisella heitolla heitetyn nelosenkin talteen,ja tavoittella mahdollisimman suurta sattumaa. Tämä ei kuitenkaan ole kannattavaa, vaikka vaikuttaakin siltä, sillä kahden nopan heittäessä silmälukujen odotettu kokonaissumma on seitsemän. Kannattavampaa olisi heittää molemmat nopat uudelleen, koska todennäköisesti kahden nopan summa olisi suurempi kuin viisi ja hän voisi tavoitella pieneen suoraan tarvittaa kolmosta. Pelaaja päättää heittää molemmat toisella kierroksella heitetyistä nopista uudelleen. Kolmannella heittokierroksella pelaaja heittää seuraavat silmäluvut:



Kuva 15: vuoro 8, heitto 3

Pelaaja on heittänyt kolmannen heittonsa jälkeen seuraavat silmäluvut:

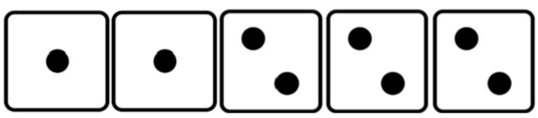
Kuva 16: vuoron 8 heitetyt nopat

Pelaaja sai parhaan mahdollisen lukuyhdistelmän tähän kohtaan, koska pienen suoran heittämistä on vaikea yhdistää muihin jäljellä oleviin lukuyhdistelmiin ja pelaaja pystyy vielä pitää sattumaa avoimena. Pelaaja sijoittaa heittonsa siis pieneen suoraan.

Yhdistelmät:	Pelaajan pisteet:
1	
2	4
3	9
4	16
5	20
6	18
Lisäpisteet	35
3 samaa	
4 samaa	22
Täyskäsi	25
Pieni suora	30
Iso suora	40
Yahtzee	
Sattuma	23
Yheensä	242

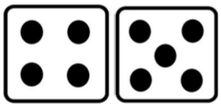
Taulukko 8: Pelaajan pöytäkirja vuoron 10 jälkeen.

Taulukosta 8 huomataan, että pelaajalla on todella hyvä mahdollisuus päästä optimaaliseen tulokseen pelin päätyttyä. Häneltä puuttuu enää ykköset, 3 samaa ja Yahtzee. Ykköset ovat vähä arvoisia, koska ne tuottavat vähän pisteitä ja yksittäisten numeroiden lisäpisteet on jo saavutettu. Tarkastellaan vielä pelaajan yhdestoista vuoro. Pelaaja aloittaa taas heittämällä viittä noppaa, jotka antavat seuraavat silmäluvut:



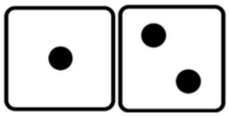
Kuva 17: vuoro 11, heitto 1

On yleensä automaattista, että pelaaja säilyttäisi kolme samaa eli tässä tapauksessa kakkoset. Pelaajan ei kannata myöskään säilyttää ykkösiä, koska niiden kerääminen yksittäisten numeroiden yhdistelmään ei enää ole optimaalisesti tarpeellista. Pelaaja päättää säilyttää kakkoset ja yrittää saavuttaa niillä Yatzeeta, koska kolmeen samaan ne tuottavat pienet pisteet. Pelaaja luottaa onneensa, koska Yahtzeen saavuttamisen todennäköisyys on hyvin pieni näin myöhäisessä vaiheessa peliä. Toisella heitolla hän heittää seuraavat silmäluvut:



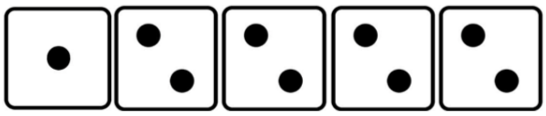
Kuva 18: vuoro 11, heitto 2

Pelaaja tietää, että kolmella kakkosella, nelosella ja vitosella hän saavuttaa 3 samaan liian pienet pisteet tavoitellen optimaalista tulosta, joten hän päättää vielä heittää toisella kierroksella heittämänsä nopat uudelleen tavoitteena Yahtzee. Pelaaja heittää vuoronsa viimeisellä heitollaan seuraavat silmäluvut:



Kuva 19: vuoro 11, heitto 3

Pelaaja on vuoronsa päätteeksi heittänyt siis silmäluvut:



Kuva 20: vuoro 11 heitetyt nopat

Pelaaja ei saavuttanut Yathzeeta ja hän pystyy sijoittamaan joko ykkösiin 1 pisteen tai 3 samaan 9 pistettä. 9 pistettä on 3 samaan heikko tulos, koska keskiarvollisesti siihen sijoitetaan 23 pistettä. Kuitenkaan Yahzeen nollaaminenkaan ei ole optimaalista, koska pelaaja voi tehdä huomattavasti huonommat pisteet ykkösiin, vaikka heittäisi niitä viisi jäljellä olevilla vuorolla. Pelaaja pienentäisi todella paljon pisteiden odotettua kokonaispistemäärää, jos hän ei täyttäisi tämän kierroksen päätteeksi ykkösiin 1. Pelaaja päättää sijoittaa ykkösiin 1 ja jatkaa vielä kahdella viimeisellä vuorollaan suurempien pisteiden tavoittelua 3 samaan.

Pelaaja on heittänyt kaikki vuoronsa ja hänen tuloksensa ovat esitetty seuraavassa taulukossa 9. Pelaaja sai rakennettua itselleen optimaalisen pelin ja saavutti tietokoneen simulaatiota suuremmat yhteispisteet pelin lopuksi.

Yhdistelmät:	Pelaajan pisteet:
1	1
2	4
3	9
4	16
5	20
6	18
Lisäpisteet	35
3 samaa	22
4 samaa	22
Täyskäsi	25
Pieni suora	30
Iso suora	40
Yahtzee	0
Sattuma	23
Yheensä	265

Taulukko 9: Pelaajan pöytäkirja pelin päätyttyä.

Tässä oli hypoteettinen esitys optimaalisesta pelistä, jossa ollaan käytetty edellisten lukujen tuloksia hyödyksi ja analysoitu erillaisia vaihtoehtoja heittovuorojen toteutukseen ja valittu niistä paras. Peli on todella optimaalinen esimerkki, missä pelaajan onni on ollut myös läsnä.

5 Yhteenveto

Tutkielmassa tutkittiin Yahtzeen optimaalista pelitapaa käyttäen apuna todennäköisyyslaskentaa. Luvussa 2 on esitelty pelin säännöt ja pisteytys, jonka jälkeen seuraavissa luvuissa käydään pelin pelaamista lävitse tavoitteena optimaalinen pelaaminen.

Luvussa 3 määriteltiin klassinen todennäköisyys, mihin valinnat pelissä perustuu. Klassinen todennäköisyydessä kaikki mahdolliset tapaukset ovat yhtä todennäköisiä. Luvussa 3 käytiin myös läpi kombinatoriikan peruslaskuja ja mistä pelin odotusarvot tulevat.

Luvussa 4 tarkasteltiin pelin optimaalista pelitapaa tietokonesimulaation tuottamien tuloksien avulla ja näistä tuloksista tehtiin johtopäätelmiä. Luvussa 4 käytiin myös lävitse hypoteettinen peli, jossa pelaaja tavoitteli yhtä hyvää tulosta kuin tietokonesimulaatiolla saatiin tuotettua.

Tutkielmassa pelin optimaaliseksi kokonaispistemääräksi tietokonesimulaation pohjalta saatiin 254.6 pistettä. Yahtzeen pelaaminen ei kuitenkaan ole yksinkertaista, koska siihen vaikuttaa pelaajan taidot sekä hänen onnensa.

Kirjallisuutta

[1] Dr. John S. Mamoun: *Complete Book of Yahtzee & Triple Yahtzee Poker Dice Game Strategy.* Independently published, 2019, ISBN: 9781693873270.

[2] Arak M. Mathai and Hans J. Haubold: *Probability and Statistics*. 2018.

[3] Henri Pesonen: *TILM3553 Todennäköisyyslaskennan peruskurssi*. 2008.

[4] Bilal Bilal: *Markov Chain Monte Carlo*. 2023.

[5] Millie Mince: *Using Markov chains and probabilistic modeling to play Yahtzee*. 2020.