Lukion pitkä matematiikka ja wxMaxima

Tuula Ruuskanen

Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2016

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tuula Ruuskanen: Lukion pitkä matematiikka ja wxMaxima
Progradu -tutkielma, 127 s., 110 liites.
Matematiikka
Toukokuu 2016

Tässä tutkielmassa tutkitaan lukion pitkän matematiikan pakollisia kursseja ja on keskitytty juuri sellaisiin matematiikan alueisiin, joita voi ratkaista wxMaximan avulla. Tutkielmassa ei ollenkaan opeteta wxMaximan käyttöä, mutta ohessa on kirjoittajan tekemä kandin työ, wxMaximan pikaopas, jossa neuvotaan wxMaximan käyttöä. Tutkielmasta on kuitenkin jätetty pois geometrian, trigonometrian ja vektorien osuudet, koska kolmioita ja vektoreita on hankala piirtää wxMaximan avulla. Näin ollen myös trigonometriset laskut on jätetty pois raja-arvon, derivaatan ja integraalin yhteydestä. Tutkielmasta on jätetty pois myös lukujonot, lukuteoria ja todistaminen. Sen sijaan tutkielmaan on otettu pitkän matematiikan syventävistä kursseista puolisuunnikassääntö, Newtonin menetelmä ja laajennettu raja-arvon sekä integraalin osa-alueita. Ekstra asiaa kohdissa käsitellään asioita, jotka ovat kokonaan lukion pitkän matematiikan kurssien opetuksen ulkopuolella.

Tutkielman toisessa luvussa kerrotaan, mitä lukion opetussuunnitelman perusteet eli OPSin (2015) kurssien sisältöjä, tutkielman luvat vastaavat. Kurssien OPS (2015) tavoitteissa kerrotaan vain se osuus OPSin kurssien sisällöistä, joita tässä tutkielmassa käsitellään. Mukaan on laadittu myös tuntisuunnitelma, kuinka monta tuntia mihinkin lukuun voisi käyttää aikaa, jos tutkielmaa käytettäisiin pitkän matematiikan kertauskurssina lukiossa.

Tutkielman lopussa on kaikkiin tehtäviin vastaukset. Ensin löytyy pelkät loppuvastaukset ja sitten on täydelliset vastaukset, jotka on tehty wxMaximalla. Varmaan moniin laskuihin löytyisi toinenkin tapa ratkaista ne.

Tällaisen tutkielman tekeminen on ajan kohtainen, sillä vuonna 2019 matematiikan yo-kirjoitukset muuttuvat sähköiseen muotoon. wxMaxima on valittu juuri yhdeksi ohjelmaksi, jota voi käyttää sähköisissä kirjoituksissa.

Avainsanat: Lukion pitkä matematiikka, wxMaxima

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa on keskitytty pitkän matematiikan pakollisiin kursseihin $(1, 2, 4, 6, 7, 8, 9$ ja $10)$ ja syventävien kurssien asioista käsitellään puolisuunnikkassääntöä, Newtonin menetelmää ja laajennetaan raja-arvon ja integraalin osaamista.

Tutkielmaa voi käyttää lukion asioiden kertaamiseen. Tutkielman laskut voi tehdä kahdella eri tavalla. Ensin eri lukujen laskut voi laskea kynän ja funktiolaskimen avulla. Laskujen vastaukset löytyvät sivulta 128 alkaen. Sen jälkeen voi laskea samat laskut wxMaximan avulla. Kirjan sivulta 132 alkaen löytyy kaikkiin laskuihin yksityiskohtaiset ratkaisut, jotka on tehty wxMaximalla. Tässä tutkielmassa ei anneta ohjeita, miten wxMaximaa käytetään. Sen sijaan tutkielman ohessa on wxMaximan pikaopas, jonka tietoja voi käyttää ratkaistessa tehtäviä wxMaximan avulla. wxMaximan pikaoppas on kertauskurssin laatijan kandintyö.

Tutkielman esimerkkilaskut ovat itselaadittuja paitsi tutkielman kaksi esimerkkiä: esimerkki 12 sivulla 46 ja esimerkki 2 sivulla 122. Laskutehtävät ovat itselaadittuja paitsi yksi yo-tehtävä, joka on tehtävien joukossa numerolla 83 sivulla 105. Tutkielman esimerkki- ja tehtävälaskut ovat samantyyppisiä, joita lukion pitkän matematiikan kirjoissa on. Raja-arvo laskuissa on esimerkkitehtävät 3 ja 4 sivulla 63, joiden tyyppisiä laskuja lukion pitkän matematiikan kirjoissa ei lasketa, mutta joita hyvin voitaisiin laskea. Raja-arvo ja jatkuvuus luvun laskutehtävissä on myös syventävien kurssien tehtäviä.

Tutkielman lähdekirjallisuutena on käytetty pääasillisesti lukion pitkän matematiikan Sigma-sarjaa sekä Reijo Lundahlin Pitkän matematiikan kertauskansiota. Ekstra asiaa olevissa kohdissa on käytetty lähdekirjallisuutena yliopistokirjallisuutta. Yliopistokirjallisuus käsittää kirjoja ja luentomonisteita. Paitsi Newtonin menetelmän esimerkki, joka on internetistä olevista luentomuistiinpanoista.

wxMaximan voi ladata ilmaiseksi omalle koneelleen sivustolta, joka löytyy andrejv.githubio/wxmaxima/. wxMaximan voi ladata Windows, Mac OS X ja Source koneille.

Turussa 2016.

2 Tutkielman luvut, OPS(2015) ja tuntisuunnitelma

Tämän tutkielman tarkoituksena on selvittää, mitä pääasiallisesti pitkän matematiikan pakollisissa kursseissa opetetaan ja miten tehtäviä ratkaistaan wxMaximalla. Tutkielmaan valittiin pääasiallisesti lukion pitkän oppimäärän pakollisten kurssien sellaiset aihealueet, joita oli helppo ratkaista wxMaximan avulla. Tutkielmaa tehdessä on ollut vielä voimassa OPS(2003), joten lukion kirjoja, joita on käytetty lähdekirjoina ei ole vielä kirjoitettu OPS(2015) mukaisesti.

Tässä tutkielman luvussa halutaan kertoa tutkielman eri luvuista, mitä ne sisältävät, minkä OPS(2015) kurssin sisältöjä ne ovat, mitä OPS(2015) mukaan eri matematiikan aihealueista pitäisi oppia [30] ja mitä lähdeteoksia eri luvuissa on käytetty.

---

3 luku: Polynomifunktiot

Sisältää asiat: lauseke, polynomi, suoran yhtälö, ensimmäisen, toisen ja korkeamman asteen polynomiyhtälöt, yhtälöpari ja yhtälöryhmä.

2015 OPS: Kurssin 2 sisältöä asiat: toisen asteen ja korkeamman asteen polynomifunktiot sekä polynomiepäyhtälöt. Tavoite on oppia ratkaisemaan toiseen asteen ja korkeamman asteen polynomiyhtälöitä sekä polynomiepäyhtälöitä. Tavoite on oppia käyttämään teknisiä apuvälineitä, kun tutkitaan polynomifunktiota ja kun ratkaistaan polynomiyhtälöitä tai polynomiepäyhtälöiden ongelmia.

Kurssin 5 sisältö asiat: suora, parabeeli, pisteen etäisyys suorasta. Tavoite on oppia suorien ja paraabelin yhtälöt sekä käyttämään teknisiä apuvälineitä ongelmien ratkaisemisessa.

Lähteet: Lukion pitkän matematiikan oppikirjoja [1], [2], [3], [12], [13], lukion pitkän matematiikan kertausmateriaalia [31], maol taulukot [21], yliopistokirjallisuus [16], [23], [29], [39], [42]

---

4 luku: Muita funktioita

Sisältää asiat: itseisarvofunktio, potenssi- ja eksponenttifunktiot, juurifunktio ja logaritmifunktio.

2015 OPS: Kurssi 5 sisältöä asiat: itseisarvokäsite, itseisarvoyhtälöt ja itseisarvoepäyhtälöt. Tavoite on oppia ratkaisemaan itseisarvoyhtälöitä ja itseisarvoepäyhtälöitä käytten hyväksi teknisiä apuvälineitä.

Kurssi 8 sisältöä asiat: potenssilaskut, juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktiot. Tavoite on oppia juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioden ominaisuudet ja oppia ratkaisemaan funktiot käyttäen teknisiä apuvälineitä. Tavoite on oppia mallintamaan erilaisia ilmiötä, joissa tapahtuu vähenemistä ja kasvamista, eksponenttifunktioiden avulla.

Lähteet: Lukion pitkän matematiikan oppikirjoja [1], [3], [6], [11], lukion pitkän matematiikan kertausmateriaalia [31], yliopistokirjallisuus [16], [35]

---

5 luku: Raja-arvo ja jatkuvuus

Sisältää asiat: raja-arvo, raja-arvo äärettömyydessä ja jatkuvuus.

2015 OPS: Kurssi 6 sisältää asiat: funktion raja-arvo ja jatkuvuus. Tavoite on oppia käsitykset raja-arvosta ja jatkuvuudesta ja oppia käyttämään teknisiä apuvälineitä apunaan, kun tutkii raja-arvoa ja jatkuvuutta.

Kurssi 13 sisältää asian: funktioiden raja-arvot äärettömyyksissä. Tavoite on oppia laskemaan fuktioiden raja-arvoja äärettömyydessä sekä käyttämään teknisiä apuvälineitä tällaisia laskuja laskettaessa.

Lähteet: Lukion pitkän matematiikan oppikirjoja ja etälukio netissä [5], [20], [8], lukion pitkän matematiikan kertausmateriaalia [31], yliopistokirjallisuus [40], [39]

---

6 luku: Derivaatta

Sisältää asiat: derivaatta, ääriarvokohdat ja sovellukset.

2015 OPS: Kurssi 6 sisältää asiat: derivaatta, ääriarvojen määrittäminen. Tavoite on oppia derivoimaan, määrittämään ääriarvot ja tulkitsemaan derivaatan avulla polynomifunktion kulkua. Derivaatta laskuissa on hyvä osata käyttää teknisiä apuvälineitä.

2015 OPS: Kurssi 8 sisältää asiat: juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivaatat. Tavoite on oppia tutkimaan derivaatan avulla juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioita. Osata hyödyntää eksponenttifunktioita, kun mallintaa ilmiöitä, joissa on vähenemistä ja kasvamista. Osata käyttää teknisiä apuvälineitä, kun selvittää sovellusongelmia, jotka liittyvät juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivoimiseen.

Lähteet: Lukion pitkän matematiikan oppikirjoja [5], [6], lukion lyhyen matematiikan oppikirja [37], lukion pitkän matematiikan kertausmateriaalia [31], ammattikorkeakoulukirjallisuus [28], yliopistokirjallisuus [24], [26], [41], [33]

---

7 luku: Integraalifunktio

Sisältää asiat: integraali, määrätty integraali ja tilavuus.

2015 OPS: Kurssi 9 sisältää asiat: Integraali. Tavoite on oppia integroimaan erilaisia alkeisfunktioita ja käsittämään integraalin merkitys. Ymmärtää, mitä merkitsee määrätty integraali ja osata laskea määrätyn integraalin avulla pinta-aloja ja tilavuuksia. Osata integraalilaskuja laskiessa käyttää hyväksi teknisiä apuvälineitä. Integraalilaskujen yhteydessä perehdytään sovellutuksiin, joita tehdään integraalin avulla.

Kurssi 13 sisältää asian: Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi. Tavoite on täydentää integraalilasku taitoja.

Lähteet: Lukion pitkän matematiikan oppikirjoja [7], [14], [18], lukion pitkän matematiikan kertausmateriaalia [31], yliopistokirjallisuus [16], [25]

---

8 luku: Tilasto

Sisältää asiat: tunnusluvut ja normaalijakauma.

2015 OPS: Kurssi 10 sisältää asiat: tilastollinen jakauma, joka on diskreetti tai jatkuja. Jakauman tunnusluvut. Normaalijakauma. Tavoite on osata havainnollistaan jakaumia, jotka ovat jatkuvia tai diskreettejä. Osata käyttää teknisiä apuvälineitä tiedon hakemisessa, tiedon käsittelyssä, tulkitsemisessa ja tunnuslukujen määrittämisessä. Ymmärtää jatkuvan todennäköisyys käsitteen ja osaa käyttää normaalijakaumaa. Osata käyttää teknisiä apuvälineitä, kun lasketaan erilaisia todennäköisyysjakaumia parametrien avulla.

Lähteet: Lukion pitkän matematiikan oppikirjoja [4], [17], yliopistokirjallisuus [32]

---

9 luku: Todennäköisyys

Sisältää asiat: klassinen, tilastollinen ja geometrinen todennäköisyys, kombinatoriikka, kompleksisääntö, kerto- ja yhteenlaskusäännöt ja binomitodennäisyys.

2015 OPS: Kurssi 10 sisältää asiat: kombinatoriset menetelmät, todennäkisyyden laskusäännöt. Tavoite on perehtyä todennäköisyyden käsitteeseen, laskusääntöihin, kombinatorisiin menetelmiin sekä oppia käyttämään teknisiä apuvälineitä todennäköisyyksiä laskettaessa.

Lähteet: Lukion pitkän matematiikan oppikirjoja ja etälukio netissä [4], [17], [9] yliopistokirjallisuus [43], [10]

---

10 luku: Matemaattiset menetelmät

Sisältää asiat: puolisuunnikassääntö, Newtonin menetelmä.

2015 OPS: Kurssi 12 sisältää asiat: puolisuunnikassääntö ja Newton-Raphnonin menetelmä. Tavoite on oppia oppia ymmärtämään algoritmeja sekä käyttämään teknisiä apuvälineitä algoritmien laskutoimituksissa.

Lähteet: Lukion pitkän matematiikan oppikirjoja [15], [19], yliopistokirjallisuus [38], [36]

Tuntisuunnitelma

Tuntisuunnitelma	45 min tunti	75 min tunti
1. Polynomifunktiot	3	2
2. Muita funktioita	4	2
3. Raja-arvo ja jatkuvuus	3	2
4. Derivaatta	4	3
5. Integraalifunktio	4	3
6. Tilasto	2	1
7. Todennäköisyys	3	2
8. Matemaattiset menetelmät	2	1
Yhteensä	25	16

Kuva 1: Tuntisuunnitelmat eri pituisille tunneille

3 Polynomifunktiot

3.1 Lauseke

Lauseke muodostuu numeroista ja kirjaimista, joiden avulla voidaan laskea laskutoimitus. Esimerkkejä lausekkeista ovat $(2-x)(4-x)$, $2a^2+bx+c$, 6, $2x-1$.

Lausekkeen arvon laskeminen tarkoittaa sitä, että lausekkeen kirjaimien kohdalle laitetaan numerot. Kun lauseke on $(x-2)(x-4)$ ja $x=1$, niin lausekkeen arvo on $(1-2)(1-4)=3$.

Lausekkeen sieventäminen tarkoittaa, että suoritetaan lauseessa olevat laskutoimitukset. $(x-2)(x-4)=x^2-6x+8$

3.2 Polynomi

Polynomiksi kutsutaan lauseketta $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Kirjaimet $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ ja a_0 ovat vakiota ja niitä sanotaan kertoimiksi. Kertoimet ovat reaalikertoimia eli ne voivat saada reaalilukuarvoja. Kirjain x on muuttuja. Polynomin termejä ovat $a_n x^n$, $a_{n-1}x^{n-1}$,$a_2 x^2$ ja $a_1 x$. Vakiotermi on a_0. Polynomin asteluvun kertoo suurin potenssiluku, jonka kerroin a_n ei ole nolla.

Esim. 1 Polynomi on $3x^2 + 2x$.
Polynomin termejä on kaksi $3x^2$ ja $2x$.
Polynomin kertoimia ovat 3 ja 2.
Muuttujaosia ovat x^2 ja x.
Polynomin asteluku on 2.

Polynomin yhteenlaskussa samaa astetta olevat muuttujatermit ja vakiotermit lasketaan yhteen.

Esim. 2 Laske $(3x^2 + 5x) + (2x^2 - 3x)$.

Ratkaisu :
$(3x^2 + 5x) + (2x^2 - 3x) = 3x^2 + 5x + 2x^2 - 3x = 5x^2 + 2x$

Polynomin vähennyslaskussa samaa astetta olevat muuttujatermit ja vakiotermit vähennetään toisistaan. Miinus sulkeen edessä muuttaa kaikkien sulkeessa olevien termien merkit vastaluvuiksi.

Esim. 3 Laske $(3x^2 + 5x) - (2x^2 - 3x)$.

Ratkaisu :
$(3x^2 + 5x) - (2x^2 - 3x) = 3x^2 + 5x - 2x^2 + 3x = x^2 + 7x$

Polynomin kertolaskussa eriastetta olevia muuttujatermejä ja vakiota kerrotaan keskenään tietyssä järjestyksessä.

Esim. 4 Laske $(3x^2 + 5x)(2x^2 - 3x)$.

Ratkaisu :
$(3x^2 + 5x)(2x^2 - 3x) = 3x^2 \cdot 2x^2 + 3x^2 \cdot (-3x) + 5x \cdot 2x^2 + 5x \cdot (-3x) =$
$6x^4 - 9x^3 + 10x^3 - 15x^2 = 6x^4 + x^3 - 15x^2$

Tärkeät kaavat:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Polynomien jakolasku eli rationaalilauseke on muodoltaan $\frac{P(x)}{Q(x)}$.
Molemmat $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat polynomeja ja $Q(x) \neq 0$.

Tärkeät kaavat:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ nimittäjät samannimisiksi.
$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ nimittäjät samannimisiksi.
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$
$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ jakajasta käänteisluku.

Esim. 5 Laske yhteenlasku $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$.

Ratkaisu :

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{(x+1)(x-1)}$$

Esim. 6 Laske vähennyslasku $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$.

Ratkaisu :

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1)(x+1)-(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}{(x+1)(x-1)} =$$
$$\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{4x}{(x+1)(x-1)} = \frac{4x}{x^2-1}$$

Esim. 7 Laske kertolasku $\frac{x(x^2+2x+1)}{x-1} \cdot \frac{5x(x-1)}{(x+1)x}$.

Ratkaisu :

$$\frac{x(x^2+2x+1)}{x-1} \cdot \frac{5x(x-1)}{(x+1)x} = \frac{x(x+1)^2}{x-1} \cdot \frac{5x(x-1)}{(x+1)x} = (x+1)5x = 5x^2 + 5x$$

Esim. 8 Laske jakolasku $\frac{x}{x^2-1} : \frac{x}{x-1}$.

Ratkaisu :

$$\frac{x}{x^2-1} : \frac{x}{x-1} = \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{1}{x+1}$$

Tehtäviä

1 Laske lausekkeiden arvot a) $(-x-2)(4-x)$ b) $\frac{x^2+2x+1}{x-1}$ c) $\frac{1}{x}+\frac{x}{1-x}$
kun $x=-2$, $x=0$ ja $x=1$.

2 Sievennä a) $(2a+3b)^2-(2a-3b)^2$, b) $2(-4b+3)^2-(-24b+9)2$,
c) $(2+2x)(2-2x)-(2-2x)^2$

3 Sievennä a) $(x+1)^3$, b) $(2x-2)^3$, c) $(2x+1)^2(2x-1)$

4 Laske polynomien $P(x)=x^2-x-2$ ja $R(x)=x^2-3x+1$
a) summa $P(x)+R(x)$, b) erotus $R(x)-P(x)$ c) erotus $P(x)-R(x)$
d) kertolasku $P(x)R(x)$, e) jakolasku $\frac{P(x)}{R(x)}$, kun $R(x)=x^2-3x+2$.

5 Sievennä a) $\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{2x}{x}$. b) $\frac{2(a-b)}{a-1}:\frac{2(b-a)}{1-a}$ c) $\frac{12(a^2+2a+1)}{4(a^2-2a+1)2}\cdot\frac{6(a-1)}{(a+1)3}$

6 Tupu ja Hupu laskevat kotilaskua $\frac{x+1}{x^2-1}:\frac{x+1}{x^2-1}$ Tupu sai vastaukseksi 1 ja Hupu $\frac{1}{(x-1)^2}$. a) Kumpi sai oikean vastauksen? b) Minkä virheen toinen poika teki heti laskunsa alussa?

3.3 Suoran yhtälö

Suoran yhtälö on yleisessä muodossa $ax+by+c=0$, kun x ja $y \in \mathbf{R}$. Suoran yhtälö voidaan kirjoittaa myös ratkaistussa muodossa $y = kx + b$.

Suoran yhtälön $y = kx + b$ muodostaminen ja suorien ominaisuuksia:

- Kun tunnetaan kaksi pistettä (x_1, y_1) ja (x_2, y_2), niin näiden pisteiden kautta kulkevan suoran kulmakerroin lasketaan kaavalla $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Kulmakerroin k kertoo suoran kaltevuuden.
- Suoran yhtälö voidaan laskea, kun tiedetään yksi piste (x_1, y_1) ja kulmakerroin k. Suoran yhtälö on $y - y_1 = k(x - x_1)$.
- Suoran yhtälö on laskeva, kun kulmakerroin k on negatiivinen. $(k < 0)$.
- Suoran yhtälö on nouseva, kun kulmakerroin k on positiivinen. $(k > 0)$.
- Kun kulmakerroin on nolla $(k = 0)$, on suora x-akselin suuntainen ja muotoa $y = b$.
- Kun kulmakerrointa ei ole ollenkaan eli kulmakerrointa ei voi määritellä, on suora y-akselin suuntainen ja muotoa $x = a$.
- Mitä suurempi kulmakertoimen itseisarvo on, sitä jyrkempi on suora.
- Suoran yhtälön $y = kx + b$ vakiotermi b kertoo, missä kohdin suora leikkaa y-akselin.
- Kun kulmakertoimet ovat yhtäsuuret $(k_1 = k_2)$, ovat suorat yhdensuuntaisia ja tätä merkitään lyhyesti $s||t$. Tämän helposti voi selvittää vertailemalla suoran yhtälöitä $y = kx + b$ toisiinsa.
- Jos kulmakertoimet ovat yhtäsuuret $(k_1 = k_2)$ ja vakiotermit ovat yhtäsuuret $(b_1 = b_2)$, on kyseessä sama suora.
- Jos suora on muotoa $y = kx$, suora kulkee origon kautta.
- Jos kahden suoran kulmakertoimien tulo on miinus yksi $(k_1 \cdot k_2 = -1)$ ovat suorat kohtisuorassa toisiinsa nähden ja tätä merkitään lyhyesti $s \perp t$.

- Kahden suoran välinen kulma on $\tan\alpha = |\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}|$.
- Suoran $ax+by+c=0$ etäisyys pisteestä (x_0,y_0) on $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Muita tärkeitä kaavoja :

- Kahden pisteen välinen välinen etäisyys on $|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, kun $A=(x_1,y_1)$ ja $B=(x_2,y_2)$.
- Kun janan päätepisteet ovat $A=(x_1,y_1)$ ja $B=(x_2,y_2)$, on janan keskipiste $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$.

Esim. 1 a) Mikä on kahden pisteen $(1,2)$ ja $(2,3)$ välisen suoran kulmakerroin. b) Muodosta suoran yhtälö. c) Onko suora nouseva vai laskeva? d) Kuinka kaukana piste $(1,2)$ on pisteestä $(2,3)$?

Ratkaisu :

a) $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-3}{1-2} = 1$
b) $y-y_1 = k(x-x_1)$
$y-2 = 1(x-1)$
$y = x-1+2$
$y = x+1$
c) Suora on nouseva, koska kulmakerroin on positiivinen.
d) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Esim. 2 a) Laske kahden suoran $y=2x+3$ ja $y+3x+2=0$ välisen kulman suuruus. b) Mikä on pisteen $(2,3)$ etäisyys suorasta $y=2x+3$?

Ratkaisu :

a) $y+3x+2=0 \iff y=-3x-2$.
Suorien kulmakertoimet ovat $k_1=2$ ja $k_1=-3$
$\tan\alpha = |\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}| = |\frac{2-(-3)}{1+2\cdot(-3)}| = |\frac{5}{-5}| = 1$, $\alpha = 45°$.

b) $y=2x+3 \iff -2x+y-3=0$
$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-2\cdot 2+1\cdot 3+(-3)|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

EXTRA ASIAA

Jos suora on muotoa $y = kx$, suora kulkee origon kautta. Tämä suora kulkee myös pisteen $(1, k)$ kautta. Sen sijaan tätä suoraa kohtisuorassa oleva suora kulkee pisteen $(-k, 1)$ kautta.

Tehtäviä

7 Määritä suoran yhtälö, kun pisteet ovat a) $(1, 2)$ ja $(4, 5)$ b) $(-1, 1)$ ja $(2, -2)$ c) $(2, 0)$ ja $(2, -2)$ d) $(-1, 1)$ ja $(1, 1)$

8 Kolmion kärkipisteet ovat $(-1, 1)$, $(4, 5)$ ja $(6, -3)$. Laske kolmion sivujen kautta kulkevat suorat.

9 Kolmion kärkipisteet ovat $(1, 2)$, $(2, 4)$ ja $(3, 1)$. Laske kolmion ala.

10 Janan päätepisteet ovat $(3, 2)$ ja $(-3, 4)$. a) Määritä janan keskipisteen kautta kulkevan suoran yhtälö, joka kulkee myös pisteen $(1, 1)$ kautta. b) Laske janan ja suoran välisen kulman suuruus yhden desimaalin tarkkuudella.

11 Laske suorien $9x - 3y + 15 = 0$ ja $12x - 4y - 8 = 0$ välinen etäisyys kahden desimaalin tarkkuudella.

12 Tupu, Hupu ja Lupu ovat metsänkorvessa. He ovat todella väsyneitä. Heidän sijaintinsa Ankkalinnan kartalla on $(5, 5)$. a) Laske minne heillä on lyhyin matka Ankka Hotelliin, jonka sijainti on $(2, 2)$, omaan kotiin $(8, 3)$ vai Akun mökille $(6, 9)$. b) Määritä lyhyimmän polun tarkka reitti, eli suoran yhtälö.

3.4 Ensimmäisen asteen polynomifunktio

Funktio on ensimmäisen asteen polynomifunktio, jos funktio on sievennettynä muotoa $ax + b = 0$, missä a ja b ovat vakiota, $x \in \mathbf{R}$ ja $a \neq 0$.

Ensimmäisen asteen polynomifunktion ratkaiseminen:

- Muuttujatermit siirretään yhtälön vasemmalle puolelle ja vakiotermit oikealle puolelle.
- Yhtälön kummallekin puolelle lisätään sama termi tai vakio.
- Yhtälön kummaltakin puolelta vähennetään sama termi tai vakio.
- Yhtälön kummatkin puolet kerrotaan samalla luvulla. Luku ei saa olla nolla.
- Yhtälön kummatkin puolet jaetaan samalla luvulla. Luku ei saa olla nolla.
- Jos polynomifunktio sisältää murtolukulausekkeita, kannattaa nimittäjät ensiksi poistaa. Tämä tapahtuu kertomalla polynomin kummatkin puolet samalla luvulla.
- Jos vastaukseksi saadaan $0 = 0$, polynomin vastauksia ovat kaikki reaaliluvut.
- Jos vastaukseksi saadaan $n = 0$, $n \in \mathbf{R}$, polynomilla ei ole ratkaisua.

Esim. 1 Ratkaise $3(2x+1) = 2(2x+\frac{9}{2})$.

Ratkaisu :

$3(2x+1) = 2(2x+\frac{9}{2})$
$6x+3 = 4x+9 \mid -4x$
$6x-4x+3 = 4x-4x+9$
$2x+3 = 9 \mid -3$
$2x+3-3 = 9-3$
$2x = 6 \mid :2$
$x = 3$

Esim. 2 Ratkaise $2x - \frac{6x+6}{6} = \frac{x}{2}$.

Ratkaisu :

$2x - \frac{6x+6}{6} = \frac{x}{2} \mid \cdot 6$
$6 \cdot 2x - 6 \cdot \frac{6x+6}{6} = 6 \cdot \frac{x}{2}$
$12x - (6x+6) = 3x$
$12x - 6x - 6 = 3x$
$6x - 6 = 3x \mid +6$
$6x - 6 + 6 = 3x + 6$
$6x = 3x + 6 \mid -3x$
$6x - 3x = 3x - 3x + 6$
$3x = 6 \mid : 3$
$x = 2$

EXTRA ASIAA

Lauseke voidaan merkitä funktioksi esimerkiksi muodossa $f(x) = 3x+2$. Lauseke on funktio, jos $f : A \to B$ on bijektio. Joukkoa A kutsutaan määrittelyjoukoksi. Ja joukkoa B arvojoukoksi. Funktio on bijektio, jos se on sekä injektio että surjektio. Eli funktio on injektio, jos joukon B alkiota b kohti on olemassa korkeintaan yksi alkio a joukossa A. Funktio on surjektio, jos jokaisella joukon B alkiolla b on olemassa vähintään yksi alkio a joukossa A. Bijektio merkitsee, että jokaista joukon B alkiota kohti löytyy täsmälleen yksi alkio joukosta A. Tätä merkitään lyhyesti $f(a) = b$.

Tehtäviä

13 Ratkaise a) $4(2x+2)3 = 3(4x+4)2$ b) $3(3+5x)6 = 6(3x+2)5$
c) $2(-5x+2)4 = 3(2x-3)4$

14 Ratkaise a) $2(x+3x) - 5(2x+3) = 5$ b) $-5(-2x+7) + 4(3-2x) = 1$
c) $-8(2+x) - 2(y+5)2 = -y + 3(x-y) + x$

15 Ratkaise a) $-3x + x^2 - 30 + 3x^2 = 4x^2 - 8x - 5$
b) $3(x^2+3x+1) - 4(x^2+5x+2) = -x^2 - 13x - 9$

16 Ratkaise fysiikan kaavoja.
a) $A =?$ kun $p = \frac{F}{A}$,
b) $F =?$ kun $p = \frac{F}{A}$,
c) $h =?$ kun $p = h\rho g$,
d) $\rho =?$ kun $p = h\rho g$,
e)$k =?$ kun $E_p = \frac{1}{2}kx^2$.

17 Akun palkkapussista meni viime kuussa 25% veroihin, neljäsosa vuokraan, kuudesosa auton kustannuksiin ja muuhun elämiseen jäi 800 euroa. Kuinka paljon Aku tienasi?

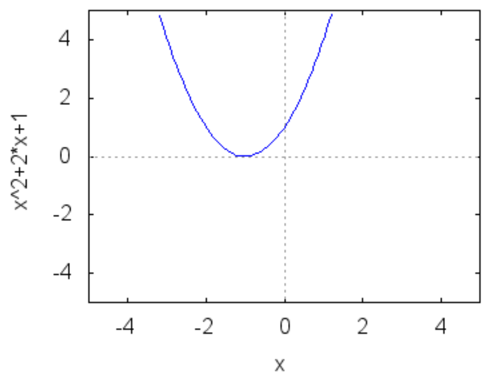
18 Tupu, Hupu ja Lupu olivat hiihtolomalla töissä. He saivat eri suuret palkkapussit. Hupu sai 25 euroa enemmän kuin Tupu. Lupu sai 77 euroa vähemmän kuin Tupu. Yhteensä he saivat 1448 euroa. Laske, kuinka paljon kukin poika sai palkkaa.

3.5 Toisen asteen polynomifunktio

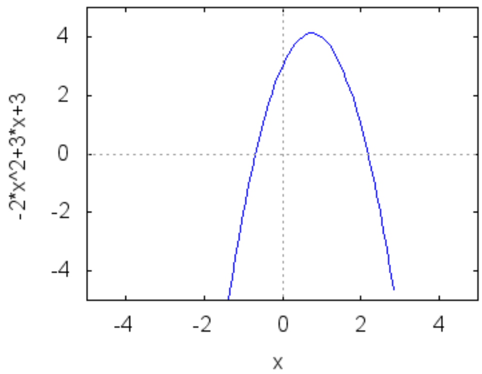
Funktio on toiseen asteen polynomifunktio, jos funktio on sievennettynä muodossa $f(x) = ax^2 + bx + c$, missä b, c ja $x \in \mathbf{R}$ ja $a \neq 0$.

Toisen asteen polynomifunktion ominaisuuksia:

- Kuvaaja on paraabeli.
- On ylöspäin aukeava paraabeli, jos $a > 0$.
- On alaspäin aukeva paraabeli, jos $a < 0$.
- Nollakohdat saadaan laskettua toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla eli $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- Jos $b^2 + 4ac > 0$, on funktiolla kaksi nollakohtaa.
- Jos $b^2 + 4ac = 0$, on funktiolla yksi nollakohta.
- Jos $b^2 + 4ac < 0$, ei funktiolla ole yhtään nollakohtaa.
- Huippu on siellä, missä funktio saa suurimman tai pienimmän arvonsa.
- Huipun x-koordinaatti saadaan laskettua kaavalla $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, missä x_1 ja x_2 ovat funktion nollakohdat.



Kuva 2: Ylöspäin aukeneva paraabeli, jolla yksi nollakohta.



Kuva 3: Alaspäin aukeneva paraabeli, jolla kaksi nollakohtaa.

Toisen asteen funktion tekijöihin jakaminen:

Toisen asteen funktion $f(x) = ax^2+bx+c$ tekijöihin jakaminen onnistuu helposti, kun on ratkaistu funktion nollakohdat.

- Jos funktiolla on kaksi nollakohtaa x_1 ja x_2, on $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Jos funktiolla on yksi nollakohtaa x_1, on $f(x) = a(x - x_1)^2$.
- Jos funktiolla ei ole nollakohtia, ei funktioita voi jakaa tekijöihin.

Vaillinainen toisen asteen funktion ominaisuuksia:

- Jos funktiolta puuttuu c, funktio on muotoa $f(x) = ax^2 + bx$.
  Funktio ratkaistaan laskemalla $x(ax + b) = 0$.
  Funktion ratkaisut ovat $x = 0$ tai $(ax + b) = 0$.
  $x = 0$ tai $x = -\frac{b}{a}$.
- Jos funktiolta puuttuu b, funktio on muotoa $f(x) = ax^2 + c$.
  Funktio ratkaistaan laskemalla $ax^2 = -c$.
  Ratkaisut ovat $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. $\quad (-\frac{c}{a} \geq 0)$
- Jos funktiolta puuttuu b ja c. Funktio on muotoa $ax^2 = 0$.
  Funktion ratkaisu on $x = 0$.

Esim 1 Funktio $f(x) = 3x^2 + 3x - 6$ on toisen asteen polynomifunktio.
a) Onko funktio ylöspäin vain alaspäin aukeneva polynomifunktio?
b) Laske funktion nollakohdat. c) Laske funktion huippu. d) Piirrä funktio $f(x)$.

Ratkaisu :

a) Funktio on ylöspäin aukeneva polynomifunktio, koska a on positiivinen luku.

b) Lasketaan funktion nollakohdat toisen asteen ratkaisukaavalla.

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3}$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{6}$

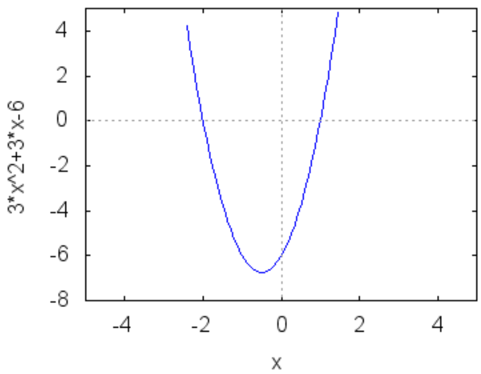
$x = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{6}$

$x = \frac{-3 \pm 9}{6}$

$x = 1$ tai $x = -2$. Funktion nollakohdat ovat $x = 1$ ja $x = -2$

c) Huippu lasketaan äsken saatujen nollakohtien avulla.
$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1+-2}{2}\frac{-1}{2}$.
Siis huipun x-koordinaatti on $\frac{-1}{2}$.
Huipun y-koordinaatti saadaan sijoittamalla $x = \frac{-1}{2}$ polynomifunktion lausekkeeseen.
$y_0 = 3 \cdot (\frac{-1}{2})^2 + 3 \cdot \frac{-1}{2} - 6 = -\frac{27}{4} = -6\frac{3}{4}$. Huippu on $(-\frac{1}{2}, -6\frac{3}{4})$.

d)



Kuva 4: Funktio $f(x) = 3x^2 + 3x - 6$

Esim 2 Jaa edellisen tehtävän funktio $f(x) = 3x^2 + 3x - 6$ tekijöihinsä.

Ratkaisu :

Funktion nollakohdiksi saatiin $x = 1$ ja $x = -2$. Funktion a on 3, joten funktio tekijöihin jaettuna on $3(x-1)(x-(-2)) = 3(x-1)(x+2)$.

Esim 3 a) Ratkaise $x^2 - 121 = 0$ b) $x^2 + 2x = 0$.

Ratkaisu :

a) $x^2 - 121 = 0$
$x^2 = 121$
$x = \pm 11$

b) $x^2 + 2x = 0$
$x(x+2) = 0$
$x = 0$ tai $x = -2$

Tehtäviä

19 Funktio on $f(x) = x^2 + 4x + 4$. a) Laske funktion nollakohdat. b) Laske funktion huippukohta. c) Piirrä funktio xy-koordinaatistoon. d) Jaa funktio tekijöihinsä.

20 Funktio on $g(x) = 2x^2 + x - 3$. a) Laske funktion nollakohdat. b) Laske funktion huippukohta. c) Piirrä funktio xy-koordinaatistoon. d) Jaa funktio tekijöihinsä.

21 Funktio on $l(x) = -2x^2 + 3x - 3$. a) Laske funktion nollakohdat. b) Laske funktion huippukohta. c) Piirrä funktio xy-koordinaatistoon. d) Jaa funktio tekijöihinsä.

22 Ratkaise
a) $2x^2 + 5 + 6x - 20 - 2x + x^2 = 0$
b) $2x + 5 = x^2 - 5x - 6$
c) $2x - 10 = -4x^2 - x$
d) $x^2 + x = -x^2 + 5x - 2$

23 Ratkaise
a) $6x^2 = 4x^2$
b) $4x^2 - x = 3x$
c) $5x^2 - 125 = 0$
d) $3x^2 + 10 = 0$

24 Tupu, Hupu ja Lupu löysivät kadulta karhukoplan aarrekartan. Kartassa luki, ratkaise, missä polynomifunktiot $f(x) = 5x^2 - 4x - 1$ ja $g(x) = 4x^2 - 2x + 2$ leikkaavat toisensa. Leikkauspisteiden koordinaatit löytyvät Ankkalinnan kartalta. Kätkömme ovat leikkauspisteissä.

3.6 Korkeamman asteen polynomifunktio

Korkeamman asteen polynomifunktion on yleisessä muodossa
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, missä a_n,a_{n-1}, $\ldots$, a_1, $a_0 \in \mathbf{R}$, ja $a_n \neq 0$.

Korkeamman asteen polynomifunktion ominaisuuksia:

- Funktion asteluku on korkeampi kuin kaksi.
- Funktio on kaikkialla määritelty.
- Funktio on kaikkialla jatkuva.
- Funktiolla on enintään n kappaletta nollakohtia.
- Funktio on tekijöihin jaettaessa muotoa
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, missä a on korkeimman asteen termin kerroin.
- Jos funktiolla on n-kertainen nollakohta, merkitään sen nollakohdan sulkeet potenssiin n, kun funktio jaetaan tekijöihin.

Korkeamman asteen polynomifunktion ratkaiseminen:

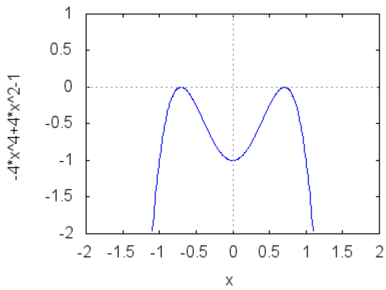
- Yhteisen tekijän ottaminen.
$3x^3 - 4x^2 - 32x = 0$
$x(3x^2 - 4x - 32) = 0$
$x = 0$ tai $x = 4$ tai $x = -\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3}$

- Ryhmitteleminen.
$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
$(x^3 + 2x^2) - (x + 2) = 0$
$x^2(x + 2) - (x + 2) = 0$
$(x + 2)(x^2 - 1) = 0$
$x = -2$ tai $x = -1$ tai $x = 1$

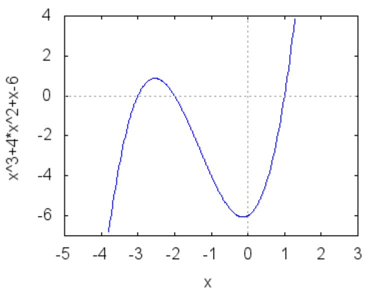
- Neljännen asteen yhtälön muuttaminen toisen asteen yhtälöksi.
$-4x^4 + 4x^2 - 1 = 0$ korvataan $y = x^2$
$-4y^2 + 4y - 1 = 0$
$y = \frac{1}{2}$
Nyt $x^2 = \frac{1}{2}$
$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

- Jos kokonaisluku polynomilla on rationaali juuria, voidaan ne laskea a_0 ja a_n avulla. Jos p on a_0:n jokin tekijä ja q on a_n:n jokin tekijä. Niin polynomin juuri voi olla $\frac{p}{q}$, -$\frac{p}{q}$, 1 tai -1.
  $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$.
  Mahdollisia nollakohtia ovat $x = \pm 6$, $x = \pm 3$ $x = \pm 2$ ja $x = \pm 1$.
  Kokeilemalla huomataan, että $x = 1$ toteuttaa yhtälön.
  $1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 = 0$.
  Yhtälö on jaollinen $(x - 1)$.
  $(x^3 + 4x^2 + x - 6)/(x - 1) = x^2 + 5x + 6$.
  $(x - 1)(x^2 + 5x + 6) = 0$
  $x = 1$ tai $x = -2$ tai $x = -3$

Korkeamman asteen polynomifunktion kuvaajia:



Kuva 5: Kaksi nollakohtaa.



Kuva 6: Kolme nollakohtaa.

Tehtäviä

25 Ratkaise.

a) $-3x^3 + 4x^2 + 4x = 0$
b) $4x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0$
c) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0$
d) $4 - x^4 + 4x^2 - 4 = 0$

26 Ratkaise.

a) $2x^3 - 2x^2 = -x^3 - x^2 + 2x$
b) $70x^3 - 8x^2 + 1 = -5x^3 + 17x^2 + 3x$
c) $12 - x^2 = 12x^2 - 24 - x^4$

27 Muodosta polynomin yleinen muoto,

a) kun korkeimman asteen termin kerroin on 2 ja polynomin kaikki yksinkertaiset nollakohdat ovat $1, -2$ ja 3.
b) kun korkeimman asteen kerroin on -3 ja kaksinkertaiset nollakohdat ovat -1 ja yksinkertainen nollakohta on 1.
c) kun korkeimman asteen termin kerroin on 4 ja polynomilla on kolminkertainen nollakohta 2.

28 a) Funktiolla $f(x)$ on kolme yksinkertaista nollakohtaa $x = -1$, $x = 1$ ja $x = 2$. Funktio on $f(3) = 16$. Määritä $f(x)$.
b) Funktiolla $g(x)$ on yksinkertaisia nollakohtia $x = -1$ ja $x = 3$ ja kaksinkertainen nollakohta $x = -2$. Funktio $g(2) = 144$. Määritä $g(x)$.

29 Laske, koska funktiot $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ ja $g(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ leikkaa x-akselin.

30 Tupu, Hupu ja Lupu kulkevat Ankkalinnassa mutkittelevaa polkua pitkin, jota kuvaa funktio $f(x) = x^4 - 4x^2$. Aku kulkee Ankkalinnassa mutkittelevaa polkua $g(x) = 2x^3 - 8x$. Missä kartan koordinaateissa Tupu, Hupu ja Lupu voivat törmätä Akuun eli polut leikkaavat aivan toisensa.

3.7 Yhtälöpari ja yhtälöryhmä

3.7.1 Yhtälöpari

Yhtälöpari muodostuu kahdesta lineaarisesta yhtälöstä eli kahdesta ensimmäisen asteen yhtälöstä. Näissä yhtälöissä x ja y ovat tuntemattomia. Ensimmäisen yhtälön muuttujien kertoimista A_1 ja B_1 vain toinen voi olla nolla. Samoin toisen yhtälön muuttujien kertoimista A_2 ja B_2 vain toinen voi olla nolla.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisujen lukumäärä:

- Ratkaisuja on yksi, jos kaksi suoraa leikkaa toisensa.
- Ratkaisuja ei ole, jos suorat ovat yhdensuuntaiset ja suorien vakiotermit ovat eri. (Eli suorat ovat $s \parallel t$, kulmakertoimet ovat $a_1 = a_2$ ja vakiotermit ovat $b_1 \neq b_2$. Suorien kulmakertoimet ja vakiotermit nähdään yhtälön muodosta $y = ax + b$.)
- Ratkaisuja on ääretön määrä, jos suorat ovat yhdensuuntaiset ja suorien vakiotermit ovat samat. Toisin sanoen yhtälöt kuvaavat samaa suoraa. (Eli suorat ovat $s \parallel t$, kulmakertoimet ovat $a_1 = a_2$ ja vakiotermit ovat $b_1 = b_2$.)

Yhteenlaskumenetelmä ensimmäisen asteen yhtälöparin ratkaisemisessa:

- Kerro toinen tai molemmat yhtälöt. Tavoitteena on saada toisen muuttujan kertoimet toistensa vastaluvuiksi.
- Laske yhteen yhtälöt tai vähennä yhtälöt toisistaan. Tavoite on, että toinen muuttuja häviää pois.
- Ratkaise saatu ensimmäisen asteen yhtälö.
- Sijoita saatu muuttujan arvo toiseen yhtälöön. Ratkaise toisen muuttujan arvo.

Esim 1 a) Ratkaise.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -4x + y = -2 \end{cases}$$

Ratkaisu :

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -4x + y = -2 \,|\cdot -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ \underline{8x - 2y = 4} \end{cases}$$

$$10x = 10 \quad |:10$$

$$x = 1$$

Sijoitetaan saatu $x = 1$ toiseen yhtälöön.

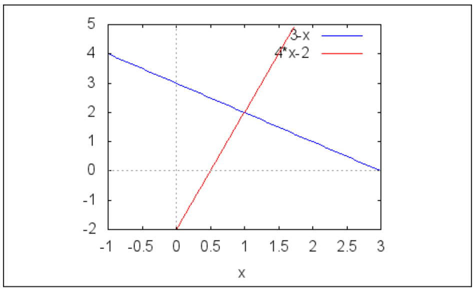
$$-4x + y = -2 \quad |\, x = 1$$

$$-4 \cdot 1 + y = -2$$

$$-4 + y = -2$$

$$y = 2$$

Suorat leikkaavat toisensa pisteessä $(1, 2)$.



Kuva 7: Suorat $2x + 2y = 6$ ja $-4x + y = -2$. Suorat toisessa muodossa kirjoitettuna $y = 3 - x$ ja $y = 4x - 2$.

Sijoitusmenetelmä yhtälöparin ratkaisemisessa:

- Ratkaise toinen yhtälö toisen muuttujan suhteen.
- Sijoita saatu lauseke toiseen yhtälöön.
- Ratkaise saatu ensimmäisen asteen yhtälö.
- Sijoita saatu muuttujan arvo toiseen yhtälöön. Ratkaise toisen muuttujan arvo.
- Jos yhtälöparista toinen ei ole lineaarinen eli ei ole ensimmäisen asteen yhtälö, yhtälöparin ratkaisu onnistuu usein sijoitusmenetelmällä. Tällöin yhtäläparia ratkaistessa voidaan tarvita toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

Esim 2. a) Ratkaise.

$$\begin{cases} x^2+2x-y=-1 \\ 2x-y=-2 \end{cases}$$

Ratkaisu :

$$\begin{cases} x^2+2x-y=-1 \\ y=2x+2 \end{cases}$$

$$\begin{gathered} x^2+2x-(2x+2)=-1 \\ x^2+2x-2x-2+1=0 \\ x^2-1=0 \\ x^2=1 \\ x=1 \text{ tai } x=-1 \end{gathered}$$

Sijoitetaan saatu arvo $x=1$ jälkimmäiseen yhtälöön.

$$2x-y=-2 \quad | \; x=1$$

$$2\cdot 1-y=-2$$

$$2-y=-2$$

$$y=4$$

Sijoitetaan saatu arvo $x=-1$ jälkimmäiseen yhtälöön.

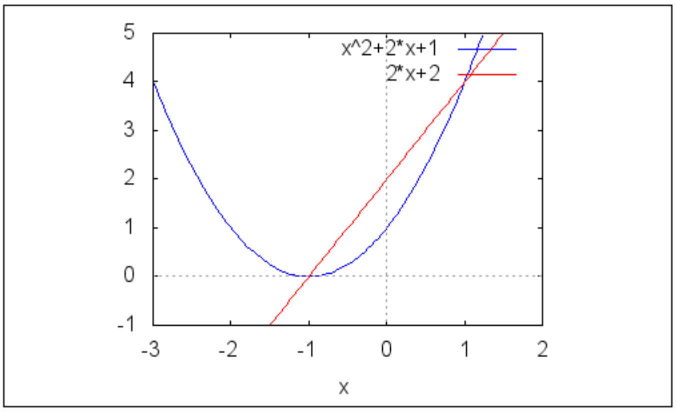
$$2x-y=-2 \quad | \; x=-1$$

$$2\cdot -1-y=-2$$

$$-2-y=-2$$

$$y=0$$

Suora ja paraabeli leikkaavat toisensa pisteissä $(1,4)$ ja $(-1,0)$.



Kuva 8: Paraabeli $x^2 + 2x - y = -1$ ja suora $2x - y = -2$. Yhtälöt toisessa muodossa kirjoitettuna $y = x^2 + 2x + 1$ ja $y = 2x + 2$.

3.7.2 Yhtälöryhmä

Yhtälöryhmän ratkaiseminen:

- Muodosta yhtälöistä kaksi yhtälöparia.
- Eliminoi yhtälöpareista sama muuttuja. Voit käyttää yhteenlasku- tai sijoitusmenetelmää.
- Muodosta saaduista yhtälöistä yhtälöpari.
- Ratkaise yhtälöparin muuttujat.
- Ratkaise kolmas muuttuja jonkun alkuperäisen yhtälön avulla.
- Yhtälöryhmällä on ratkaisu, jos kaikki yhtälöt leikkaavat toisensa samassa pisteessä.
- Tarkasta saatu vastaus, sijoittamalla saadut muuttujan arvot kaikkiin yhtälöihin.

Esim 3. a) Ratkaise.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -3x - y + 2z = 8 \\ x - 2y - 2z = -9 \end{cases}$$

Ratkaisu :
Ensimmäinen yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -3x - y + 2z = 8 | \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ \underline{-9x - 3y + 6z = 24} \\ -7x + 7z = 28 \end{cases}$$

Toinen yhtälöpari

$$\begin{cases} -3x - y + 2z = 8 \mid \cdot -2 \\ x - 2y - 2z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -16 \\ \underline{x - 2y - 2z = -9} \\ 7x - 6z = -25 \end{cases}$$

Uusi muodostettu yhtälöpari

$$\begin{cases} -7x + 7z = 28 \\ \underline{7x - 6z = -25} \\ z = 3 \end{cases}$$

Lasketaan muuttujan x arvo sijoittamalla $z = 3$ toiseen yhtälöön

$$7x - 6z = -25\ .$$

$$7x - 6z = -25 \quad \mid z = 3$$

$$7x - 6 \cdot 3 = -25$$

$$7x - 18 = -25$$

$$7x = -7$$
$$x = -1$$

Lasketaan muuttujan y arvo, sijoittamalla $x = -1$ ja $z = 3$ alkuperäiseen toiseen yhtälöön $-3x - y + 2z = 8$.

$$-3x - y + 2z = 8 \quad \mid x = -1 \text{ ja } z = 3$$

$$-3 \cdot -1 - y + 2 \cdot 3 = 8$$

$$3 - y + 6 = 8$$

$$y = 1$$

Yhtälöt leikkaavat toisensa pisteessa $(-1, 1, 3)$.

EXTRA ASIAA

Yhtälöparin ratkaiseminen:

- Yhtälöpari voidaan ratkaista matriisien avulla. Yhtälöparin kertoimista a, b, c ja d tehdään kerroinmatriisi. Kerroinmatriisista tehdään käänteismatriisi, joka kerrotaan yhtälöparin oikealla olevista luvuista tehdyllä pystyvektorilla.

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

- Kerroinmatriisi on muotoa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Pystyvektori on muotoa

$$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

- Käänteismatriisi muodostetaan.

$$A^1 = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Ratkaisu lasketaan.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^1 \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Esim 4. Ratkaise yhtälöpari matriisin avulla

$$\begin{cases} 7x + 5y = 17 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$$

Ratkaisu :
Kerroinmatriisi on muotoa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Pystyvektori on muotoa

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Käänteismatriisi lasketaan.

$$A^1 = \frac{1}{7 \cdot 3 - 5 \cdot 4} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Yhtälön ratkaisu on $x = 1$ ja $y = 2$.

Yhtälöryhmän ratkaiseminen:

- Yhtälöryhmä voidaan laskea myös matriisien avulla. Yhtälöryhmän voi ratkaista matriisien avulla monella tavalla. Yksi tapa on laskea alkeismuunnosten avulla. Silloin kerroinmatriisista tehdään laajennettu kerroinmatriisi, johon otetaan vasemmaksi pystyriviksi yhtälöryhmän yhtälöiden oikean puolen luvut. Tarkoituksena on tehdä laajennetusta kerroinmatriisista porrasmatriisi, jolloin matriisiin tulee nollia vasempaan alanurkkaan. Porrasmatriisi saadaan aikaiseksi kertomalla, jakamalla, lisäämällä tai vähentämällä matriisin rivejä keskenään. Porrasmatriisista saadaan helposti laskettua yhtälöryhmän ratkaisu, ratkaisemalla yksinkertaisempia yhtälöitä, joita muodostuu kerroinmatriisiin.

Esim 5. Ratkaise yhtälöryhmä matriisin avulla

$$\begin{cases} x + 3y + z = 10 \\ 2x + 2y - 3z = -3 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

Kerroinmatriisi on muotoa

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

Matriisin rivin loppuun on laitettu luku, millä koko rivi kerrotaan.
Rivin lopussa oleva $*-$merkki merkitsee, että kerrottu rivi lisätään tähän riviin yhteenlaskulla.

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot -3 \\ \\ * \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -8 & -1 & -19 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot -2 \\ * \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -4 & -5 & -23 \\ 0 & -8 & -1 & -19 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot -2 \\ * \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -4 & -5 & -23 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}\right)$$

Matriisin alimmalta riviltä saadaan yhtälö $9z = 27$. Tämä ratkaisemalla saadaan, että $z = 3$.
Matriisin keskimäiseltä riviltä saadaan yhtälö $-4y - 5z = -23$. Tähän yhtälöön sijoitetaan äsken ratkaistu $z = 3$. Ratkaisemalla yhtälö saadaan, että $y = 2$.
Matriisin ylimmältä riviltä saadaan yhtälö $x + 3y + z = 10$. Tähän yhtälöön sijoitetaan $z = 3$ ja $y = 2$. Ratkaisuksi saadaa, että $x = 1$.
Yhtälöryhmän ratkaisu on $x = 1$, $y = 2$ ja $z = 3$.

Tehtäviä

31 Ratkaise

a) $\begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 1 - 2x = y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2 = 2y \\ 2 + 3y = 4x \end{cases}$

32 Suora s kulkee pisteiden $(-1, 1)$ ja $(1, 2,)$ kautta. Suora l kulkee pisteiden $(2, 4)$ ja $(4, 2)$ kautta. Missä pisteessä suorat s ja l leikkaavat toisensa.

33 Funktio on $f(x) = 4x^3 - ax^2 - 24x - b$. Funktion tekijöitä ovat $(x - 5)$ ja $(x + 1)$.
a) Ratkaise a ja b.
b) Määritä $f(x)$.
c) Ilmoita $f(x)$ tekijöihin jaetussa muodossa.

34 Ratkaise

a) $\begin{cases} -2x + 3y + 4z = 3 \\ -2y + 2z + 3x = 9 \\ -4z + 5x - y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3 + 3x + 2y = -3z \\ 10z + 3 + 2x = 3y \\ y + 2z - 3 = -x \end{cases}$

35 Funktio on muotoa $f(x) = ax^3 + bx^2 - cx$. Funktio saa seuraavat arvot $f(1) = 6$, $f(-1) = 6$ ja $f(2) = 42$.
a) Ratkaise a, b ja c. Määritä $f(x)$.
b) Jaa funktio $f(x)$ tekijöihin.
c) Mitkä ovat funktion nollakohdat.

36 Akun perhe on lähdössä viikon vaellusretkelle luontoon. Ennen retkeä käydään kaupassa ostamassa vähän herkkuja patikoinnille. Tupu osti 3 suklaalevyä, 2 purkkapussia ja 3 salmiakkiaskia. Tupun ostokset maksoivat yhteensä 19,90 dollaria. Hupu osti 2 suklaalevyä, 3 purkkapussia ja 4 salmiakkiaskia. Hupun ostokset maksoivat yhteensä 23,30 dollaria. Lupu osti 5 suklaalevyä, 2 purkkapussia ja 2 salmiakkiaskia. Lupun ostokset maksoivat yhteensä 22,20 dollaria. Miten paljon Akun ostokset maksoivat, kun hän osti 4 suklaalevyä, 1 purkkapussin ja 2 salmiakkiaskia.

4 Muita funktioita

4.1 Itseisarvofunktio

4.1.1 Itseisarvo

Itseisarvo :

- Lukusuoralla itseisarvo kertoo, kuinka kaukana luku on nollasta. Senpä takia luvun itseisarvo on aina positiivinen luku. $|a| \geq 0$
- $|a| = a$, kun $a \geq 0$
- $|a| = -a$, kun $a < 0$
- Luku ja sen vastaluku $|a| = |-a|$.
- Luvun itseisarvon neliö $|a|^2 = a^2$.
- Tulon itseisarvo $|ab| = |a||b|$.
- Osamäärän itseisarvo $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.
- Lukujen a ja b etäisyys toisistaan on $|a - b|$.
- Itseisarvolauseke ilman itseisarvomerkkejä.

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & \text{,kun } f(x) < 0 \\ f(x) & \text{,kun } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Esim. 1 Laske $2|2 + (-5) \cdot 2| : -4 - 2| - 2|^2$.

Ratkaisu :
$2|2 + (-5) \cdot 2| : -4 - 2| - 2|^2 =$
$2|2 - 10| : -4 - 2 \cdot 2^2 =$
$2| - 8| : -4 - 2 \cdot 4 =$
$2 \cdot 8 : -4 - 8 =$
$16 : -4 - 8 =$
$-4 - 8 = -12$

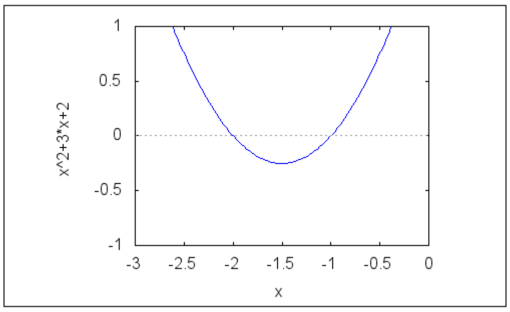
Esim. 2 Laske, kuinka kaukana luvut -87 ja -15 ovat toisistaan.

Ratkaisu :
$| - 87 - (-15)| =$
$| - 87 + 15| =$
$| - 72| = 72$

Esim. 3 Poista itseisarvomerkit $|\mathrm{x}^2 + 3x + 2|$.

Ratkaisu :
Olkoon $f(x) = x^2 + 3x + 2$
Laske yhtälön nollakohdat.
$x^2 + 3x + 2 = 0$
$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$
$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$
$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$
$x = \frac{-3 \pm 1}{2}$
$x = -1$ tai $x = -2$.

Piirrä funktion kulku.



Kuva 9: Paraabelin $x^2 + 3x + 2$ arvot ovat negatiivisia välillä $-2 < x < -1$ ja positiivisia väleillä $x \leq -2$ ja $x \geq -1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{kun } x \leq -2 \text{ ja } x \geq -1 \\ -x^2 - 3x - 2 & \text{kun } -2 < x < -1 \end{cases}$$

4.1.2 Itseisarvoyhtälö

Itseisarvoyhtälö :

- Kun itseisarvoyhtälö on muotoa $|f(x)| = a$ ja $a \geq 0$, niin itseisarvoyhtälön ratkaisut ovat $f(x) = a$ tai $f(x) = -a$. Eli $|f(x)| = a \iff f(x) = a$ tai $f(x) = -a$.
- Kun itseisarvoyhtälö on muotoa $|f(x)| = a$ ja $a \leq 0$, ei itseisarvoyhtälöllä ole ratkaisua.

- Kun itseisarvoyhtälö on muotoa $|f(x)| = |g(x)|$, niin ratkaisut ovat $f(x) = g(x)$ tai $f(x) = -g(x)$.
Eli $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x)$ tai $f(x) = -g(x)$.

Esim. 4 Ratkaise $2|-2x^2+3|-2=0$.

Ratkaisu :
$2|-2x^2+3|-2=0 \quad |+2$
$2|-2x^2+3|=2 \quad |:2$
$|-2x^2+3|=1$

$-2x^2+3=1 \quad \mid -3$	$-2x^2+3=-1 \quad \mid -3$
$-2x^2=-2 \quad \mid : -2$	$-2x^2=-4 \quad \mid : -2$
$x^2=1 \quad \mid\sqrt{}$	$x^2=2 \quad \mid\sqrt{}$
$x=1$ tai $x=-1$	$x=\sqrt{-2}$ tai $x=\sqrt{2}$

Itseisarvoyhtälön ratkaisut ovat $x=\sqrt{-2}$ tai $x=-1$ tai $x=1$ tai $x=\sqrt{2}$.

Esim. 5 Ratkaise $|3x+5|-|4x+8|=0$.

Ratkaisu :
$|3x+5|-|4x+8|=0$
$|3x+5|=|4x+8|$

Muodostetaan kaksi yhtälöä.

$3x+5=4x+8$	$3x+5=-(4x+8)$
$3x-4x=8-5$	$3x+5=-4x-8$
$-x=3$	$3x+4x=-5-8$
$x=-3$	$7x=-13 \mid :7$
	$x=\frac{-13}{7}$

Itseisarvoyhtälön ratkaisut ovat $x=-3$ tai $x=-\frac{13}{7}=-1\frac{6}{7}$

4.1.3 Itseisarvoepäyhtälö

Itseisarvoepäyhtälö :

- Kun itseisarvoepäyhtälö on muotoa $|f(x)| < a$ ja $a > 0$, niin epäyhtälön ratkaisut ovat $-a < f(x) < a$.
- Kun itseisarvoepäyhtälö on muotoa $|f(x)| < a$ ja $a \leq 0$, ei epäyhtälöllä ole ratkaisua.

- Kun itseisarvoepäyhtälö on muotoa $|f(x)| > a$ ja $a \geq 0$, niin epäyhtälön ratkaisut ovat $f(x) < -a$ tai $f(x) > a$.
- Kun itseisarvoepäyhtälö on muotoa $|f(x)| > a$ ja $a < 0$, niin epäyhtälö toteutuu kaikilla funktion $f(x)$ määrittelyalueen luvuilla.
- Kun itseisarvoepäyhtälö on muotoa $|f(x)| < |g(x)|$, niin ratkaisut ovat muotoa $(f(x))^2 < (g(x))^2$.

Esim. 6 Ratkaise $|-2x+6| < 2$.

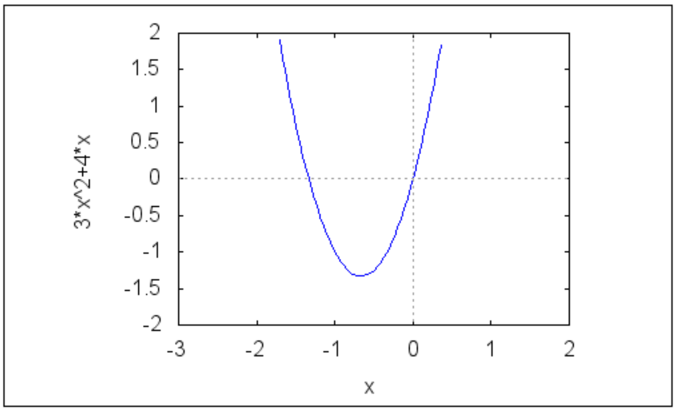
Ratkaisu :
$|-2x+6| < 2$
$-2 < -2x+6 < 2 \quad |-6$
$-2-6 < -2x+6-6 < 2-6$
$-8 < -2x < -4 \quad |:-2$
$4 > x > 2$
Itseisarvoepäyhtälön ratkaisu on $2 < x < 4$.
(Laskussa jaettiin negatiivisella luvulla, niin silloin epäyhtälömerkin suunta vaihtuu.)

Esim. 7 Ratkaise $|3x^2+4x+1| > 1$.

Ratkaisu :
$|3x^2+4x+1| > 1$
Muodostetaan kaksi epäyhtälöä. Epäyhtälöt muutetaan yhtälöiksi ja lasketaan yhtälöiden nollakohdat.

$3x^2+4x+1 > 1$
$3x^2+4x+1-1 > 0$
$3x^2+4x = 0$
$x(3x+4) = 0$
$x = 0$ tai $x = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$

$3x^2+4x+1 < -1$
$3x^2+4x+1 = -1$
$3x^2+4x+2 = 0$
$x = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}$
$x = \frac{-4\pm\sqrt{16-24}}{6}$
$x = \frac{-4\pm\sqrt{-8}}{6}$
ei nollakohtia.



Kuva 10: Funktion $f(x) = 3x^2 + 4x$ kuvaaja.

Itseisarvoepäyhtälön ratkaisu on $x > 0$ tai $x < -1\frac{1}{3}$.

EXTRA ASIAA

Kolmioepäyhtälöt $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ ja
$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| - |y|$ ovat voimassa kaikilla x ja y. $x \in \mathbf{R}$ ja $y \in \mathbf{R}$

Esim. 8 Ajatellaan, että $|x - 6| < 5^{-44}$ ja $|y - 8| < 5^{-22}$.
Onko $|x + y - 12| < 5^{-21}$?

Ratkaisu :
Kolmioepäyhtälöstä saamme
$|x + y - 12| = |x - 6 + y - 8| \leq |x - 6| + |y - 8|$.
Käytetään hyväksi saatuja alkuoletuksia. Arvioidaan sen jälkeen ylöspäin.
$|x - 6| + |y - 8| < 5^{-44} + 5^{-22} < 5^{-22} + 5^{-22} = 2 \cdot 5^{-22} < 5 \cdot 5^{-22} = 5^{-21}$.

Tehtäviä

37 Laske.
a) $16 : |(-2)\cdot 1|^3 \cdot 2 - |2\cdot(-2)|$
b) $3|-2+|-2|2| : 2 - |-3+2|$

38 Poista itseisarvomerkit.
a) $|2x-5|$
b) $|x^2-2x-3|$
c) $|x^3-3x+2|$

39 Ratkaise.
a) $3|x^2-5|-3=0$
b) $|5x-2| : 2-3=1$
c) $3 : |x^2-4|2=2$

40 Ratkaise.
a) $|3x+2| = |-4x-4|$
b) $|2x+4|-|6x-4|=0$
c) $|5x+5| : |-4x-2|=1$

41 Ratkaisu.
a) $|-3x-2|<1$
b) $|3x^2-10x+5|<2$
c) $|4x-3|>9$
d) $|5x^2-4x+2|>3$
e) $|3x|>|2x+4|$

42 Tupu, Hupu ja Lupu kävelevät polkua $f(x)=3x$ pitkin. Aku kävelee toista polkua $g(x)=2x-4$ pitkin. Laske, missä kartan pisteissä polkujen etäisyys on toisistaan tasan 5 karttayksikköä. Siis pojilla ja Akulla on sama x-koordinaatti. (Pojat ovat (a,b) ja Aku on (a,c)). Piirrä tilanteesta kuvaaja.

4.2 Potenssi- ja eksponenttifunktiot

4.2.1 Potenssi

Potenssilasku on yksinkertaisimmillaan $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$. Lukua, joka on kirjaimen a paikalla sanotaan kantaluvuksi ja lukua joka on kirjaimen n paikalla sanotaan eksponentiksi. $n \in \mathbf{N}$. $a \in \mathbf{R}$.

Potenssisäännöt : (a ja $b \in \mathbf{R}$ sekä $m, n \in \mathbf{N}$)

- Samankantaisten potenssien tulo $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- Eksponentti on nolla $a^0 = 1$, $a \neq 0$
- Tulon potenssi $(ab)^n = a^n b^n$
- Potenssin potenssi $(a^m)^n = a^{mn}$
- Samankantaisten potenssien osamäärä $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$
- Osamäärän potenssi $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$
- Negatiivinen potenssi $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0$
- Negatiivinen potenssi $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n, \quad a \neq 0$ ja $b \neq 0$
- Sulut tulevat, kun kantaluku on negatiivinen tai murtoluku.
- Sulut tulevat, kun lauseke korotetaan potenssiin.

Esim. 1 Laske $(-2)^0 - 2^{-2} + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{2})^{-2} - (2^2)^2 + \frac{2^2}{2^3}$.

Ratkaisu :
$(-2)^0 - 2^{-2} + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{2})^{-2} - (2^2)^2 + \frac{2^2}{2^3} =$
$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} + (\frac{2}{1})^2 - 2^{2\cdot 2} + 2^{2-3} =$
$1 - \frac{1}{4} + \frac{4}{9} + 2^2 - 2^4 + \frac{1}{2} =$
$1 - \frac{1}{4} + \frac{4}{9} + 4 - 16 + \frac{1}{2} = -10\frac{11}{36}$

Esim. 2 Sievennä $\frac{6x^3a^2x}{3x^2a^4x} + (\frac{a}{x^2})^{-2}$.

Ratkaisu :
$\frac{6x^3a^2x}{3x^2a^4x} + (\frac{a}{x^2})^{-2} = \frac{6x^{3+1}a^2}{3x^{2+1}a^4} + (\frac{x^2}{a})^2 = \frac{6x^4a^2}{3x^3a^4} + \frac{x^4}{a^2} = 2x^{4-3}a^{2-4} + \frac{x^4}{a^2} = 2xa^{-2} + \frac{x^4}{a^2} =$
$\frac{2x}{a^2} + \frac{x^4}{a^2} = \frac{x^4+2x}{a^2}$

4.2.2 Potenssiyhtälö

Potenssiyhtälö :

- Potenssiyhtälö on muotoa $x^n = a$.
- Parillisessa potenssiyhtälössä n on parillinen.
- Parillisella potenssiyhtälöllä on ratkaisuja kaksi $x = \sqrt[n]{a}$ ja $x = -\sqrt[n]{a}$, kun $a \geq 0$.
- Parillisella potenssiyhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua, kun $a < 0$.
- Parittomassa potenssiyhtälössä n on pariton.
- Parittomalla potenssiyhtälössä on aina yksi ratkaisu. Se on $x = \sqrt[n]{a}$.

Esim. 3 Ratkaise $3x^4 = 768$.

Ratkaisu :
$3x^4 = 768 \quad |:3$
$x^4 = 256$
$x = \sqrt[4]{256}$
$x = \pm 4$

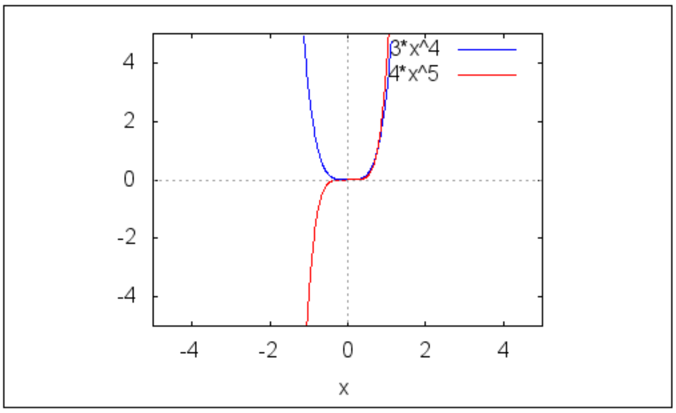
Esim. 4 Ratkaise $4x^5 = 128$.

Ratkaisu :
$4x^5 = 128 \quad |:4$
$x^5 = 32$
$x = \sqrt[5]{32}$
$x = 2$

Esim. 5 Ratkaise $5x^6 + 3645 = 0$.

Ratkaisu :
$5x^6 + 3645 = 0 \quad | - 3645$
$5x^6 = -3645$ |:5
$x^6 = -729$
$x = \sqrt[6]{-729}$
Ei ole ratkaisua parillisella potenssiyhtälöllä, kun a on negatiivinen luku.

Esim. 6 Piirrä potenssifunktiot $f(x) = 3x^4$ ja $g(x) = 4x^5$.



Kuva 11: Parilliset potenssifunktiot muistuttavat aina muodoltaan potenssifunktioita $f(x) = 3x^4$ ja parittomat potenssifunktiot muistuttavat aina muodoltaan potenssifunktiota $g(x) = 4x^5$.

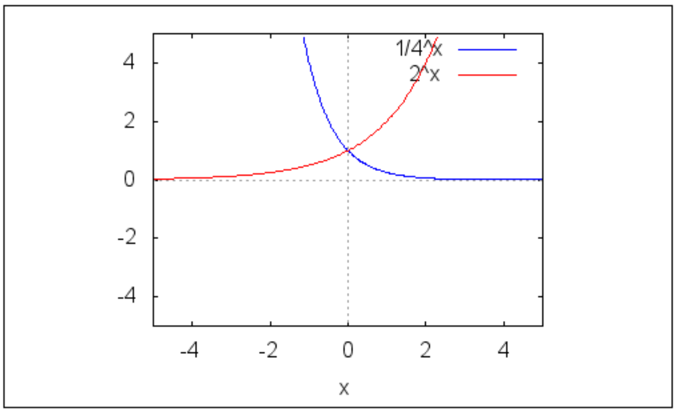
4.2.3 Eksponenttiyhtälö

Eksponenttifunktio :

- Eksponenttifunktio on muodoltaan $f(x) = a^x$. $\quad a > 0$, $a \neq 1$.
- Eksponenttifunktion määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$ ja arvojoukko on $\mathbf{R}_+$.
- Eksponenttifunktio on monotoninen, eli se saa kaikki arvonsa vain yhden kerran.
- Eksponenttifunktio on aidosti kasvava, nouseva, kun $a > 1$.
- Eksponenttifunktio on aidosti vähenevä, laskeva, kun $0 < x < 1$.
- Kun $a = 1$ kyseessä ei ole eksponenttifunktio, vaan suora $y = 1$.
- Kaikki eksponenttifunktiot kulkevat pisteen $(0, 1)$ kautta.

Eksponenttiyhtälö ratkaiseminen :

- Pyri kirjoittamaan eksponenttiyhtälön molemmat puolet samankantaisiin potensseihin. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Ratkaise sen jälkeen $f(x) = g(x)$.
- Toisinaan. Kirjoita eksponenttiyhtälö toiseen asteen yhtälöksi, tekemällä sijoitus $a^x = t$. Ratkaise toisen asteen yhtälö ja lopuksi ratkaise x arvo, kun tiedetään t arvo.
- Jos et pysty kirjoittamaan eksponenttiyhtälön molempia puolia samankantaisiin potensseihin, niin ota yhtälön molemmilta puolilta logaritmi lg.



Kuva 12: $f(x) = (\frac{1}{4})^x$ on vähenevä eksponenttifunktio ja $g(x) = 2^x$ on kasvava eksponenttifunktio.

Esim. 7 Ratkaise yhtälö $3^{3x+3} \cdot 9^{3x} = 27^{2x+5}$.

Ratkaisu :
$3^{3x+3} \cdot 9^{3x} = 27^{2x+5}$
$3^{3x+3} \cdot (3^2)^{3x} = (3^3)^{2x+5}$
$3^{3x+3+6x} = 3^{6x+15}$
$3^{9x+3} = 3^{6x+15}$ samat kantaluvut, siksi voidaan kirjoittaa
$9x + 3 = 6x + 15$
$3x = 12 \quad |:3$
$x = 4$

Esim. 8 Ratkaise yhtälö $4 \cdot 5^x + 25^x = 725$.

Ratkaisu :
$4 \cdot 5^x + 25^x = 725$
$4 \cdot 5^x + (5^2)^x - 725 = 0$
$4 \cdot 5^x + (5^x)^2 - 725 = 0$
$(5^x)^2 + 4 \cdot 5^x - 725 = 0$
Tehdään sijoitus $t = 5^x$
$t^2 + 4t - 725 = 0$
Ratkaistaan toisen asteen yhtälö.
$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-725)}}{2 \cdot 1}$
$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+2900}}{2}$
$x = \frac{-4 \pm \sqrt{2916}}{2}$
$x = \frac{-4 \pm 54}{2}$
$x = 25$ tai $x = -29$.
Tehdään takaisin sijoitus.
$5^x = 25 \Longleftrightarrow x = 2$
$5^x = -29$ ei ratkaisua.
Eksponenttiyhtälön ratkaisu on $x = 2$.

Esim. 9 Ratkaise yhtälö $5^{x+1} = 625$.
Käytetään hyväksi tietoa $log_a x^r = r log_a x$.

Ratkaisu :
$5^{x+1} = 625$
lg 5^{x+1} =lg 625
$(x+1) \cdot$ lg5 =lg 625 $\quad | : lg5$
$x + 1 = \frac{lg625}{lg5}$
$x + 1 = 4$
$x = 3$

4.2.4 Eksponenttiepäyhtälö

Eksponenttiepäyhtälön ratkaiseminen :

- Kun eksponenttiepäyhtälö on muotoa $a^u > a^v$ ja $a > 1$, ratkaise epäyhtälö $u > v$. Tämä siksi, siksi että käyrä $y = a^x$ on aidosti kasvava.
- Kun eksponenttiepäyhtälö on muotoa $a^u > a^v$ ja $0 < a < 1$, ratkaise epäyhtälö $u < v$. Tämä siksi, siksi että käyrä $y = a^x$ on aidosti vähenevä.

Esim. 10 Ratkaise epäyhtälö $4^{2x} > 64$.

Ratkaisu :
$4^{2x} > 64$
$4^{2x} > 4^3$
Funktio 4^x on aidosti kasvava. Kantaluvut voidaan jättää pois ja epäyhtälömerkki säilyttää suuntansa.
$2x > 3$
$x > \frac{3}{2}$
$x > 1\frac{1}{2}$

Esim. 11 Ratkaise epäyhtälö $(\frac{1}{4})^{2x} > \frac{1}{16}$.

Ratkaisu :
$(\frac{1}{4})^{2x} > \frac{1}{16}$
$(\frac{1}{4})^{2x} > (\frac{1}{4})^2$
Funktio $(\frac{1}{4})^x$ on aidosti laskeva. Kantaluvut voidaan jättää pois ja epäyhtälömerkin suunta vaihdetaan.
$2x < 2 \quad | : 2$
$x < 1$

EXTRA ASIAA

Laskutoimitus 0^0 ei ole määritelty.

Esim. 12 Jos 0^0 määriteltäisiin niin, että $0^0 = 1$, voitaisiin päätyä vastaukseen $\frac{0}{0}$, joka ei ole määritelty, sillä nimittäjä ei saa koskaan olla nolla.
$1 = 0^0 = 0^{1-1} = 0^1 0^{-1} = \frac{0}{0}$ [16].

Eksponenttia ei saa supistaa.

Esim. 13 Eksponenttifunktio on muodoltaan $f(x) = a^x$, $a > 0$. Miksi kantaluku ei voi olla $a < 0$?

Ratkaisu :
Lasketaan lasku $(-27)^{\frac{1}{3}}$ kahdella tavalla .
$(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$
$(-27)^{\frac{1}{3}} = (-27)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{729} = 3$
Saadaan kaksi erilaista vastausta, siksi kantaluvun pitää olla aina $a > 0$.

Tehtäviä

43 Laske.
a) $-3^2 + 3^2 \cdot 3^2 - 3^0 - 3^{-1} - (\frac{3}{2})^{-3} - \frac{3^4}{3^6} - (3 \cdot 2)^2$
b) $\frac{3x^3 2b^2 2x}{x^4 6b^4} + (\frac{4b^3 2}{8b^2})^{-2}$

44 Ratkaise.
a) $6x^4 = 486$
b) $3x^5 + 3072 = 0$
c) $4x^8 + 1024 = 0$

45 Ratkaise.
a) $4^{2x} = 256$
b) $3^{3x-2} \cdot 9^{-x-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
c) $\frac{1}{5^{2x}} \cdot 125^{x-2} = 625$

46 Ratkaise.
a) $4^x + 16^x - 4160 = 0$
b) $3 \cdot 2^x + 4^x = 1120$
c) $207 - 5 \cdot 3^x - 2 \cdot 9^x = 0$

47 Ratkaise.
a) $6^x = 46656$
b) $4 \cdot 5^x - 500 = 0$
c) $6 \cdot 3^{2x-2} - 4374 = 0$
d) $3 \cdot 2^{2x} > 48$
e) $4 \cdot (\frac{1}{2})^{4x} < 2$

48 Roope ankan kilpailijalla Pennosella oli vuoden 2001 alussa 900 kanaa. Hänen kanojensa määrä tilalla lisääntyi vuosittain 1,5 %.
a) Muodosta funktio, jonka avulla voit laskea, kuinka monta kanaa Pennosella on jonkun tietyn vuoden lopussa.
b) Kuinka paljon kanoja Pennosella on vuoden 2015 lopussa?
c) Koska Pennosella oli kanoja 1044 kappaletta?
d) Koska Pennosella tulee olemaan kanoja yli 1300 kappaletta?

4.3 Juurifunktio

4.3.1 Neliöjuuri

Neliöjuuri :

- Neliöjuuren määritelmä on $\sqrt{a} = b$, kun $a \geq 0$, $b \geq 0$ ja $b^2 = a$.
  Lukua a, joka on juuren alla, sanotaan juurrettavaksi ja lukua b sanotaan neliöjuureksi.
- Neliöjuuren neliö $(\sqrt{a})^2 = a$, kun $a \geq 0$.
- Neliön neliöjuuri $\sqrt{a^2} = |a|$, kun $a \in \mathbf{R}$.
- Tulon neliöjuuri $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, kun $a \geq 0$ ja $b \geq 0$.
- Osamäärän neliöjuuri $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, kun $a \geq 0$ ja $b > 0$.
- Potenssin neliöjuuri $\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(a^n)^2} = |a^n| = |a|^n$, kun $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.
- Tekijän siirtäminen $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$, kun $a \in \mathbf{R}$ ja $b \geq 0$.
- Juurrettava eikä juuren arvo eivät voi olla negatiivisia lukuja.

Esim. 1 Laske $(\sqrt{3})^2 - \sqrt{2^2} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} - \sqrt{75} + \sqrt{3^{2 \cdot 3}}$.

Ratkaisu :
$(\sqrt{3})^2 - \sqrt{2^2} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} - \sqrt{75} + \sqrt{3^{2 \cdot 3}} =$
$3 - 2 + \sqrt{5 \cdot 5} - \sqrt{\frac{98}{2}} - \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 3} + \sqrt{(3^3)^2} =$
$3 - 2 + \sqrt{25} - \sqrt{49} - \sqrt{5^2 \cdot 3} + 3^3 =$
$3 - 2 + 5 - 7 - 5\sqrt{3} + 27 =$
$26 - 5\sqrt{3}$

Esim. 2 Laske $(\sqrt{4}x - \sqrt{12})\sqrt{3} = 4$.

Ratkaisu :
$(\sqrt{4}x - \sqrt{12})\sqrt{3} = 4$
$\sqrt{4}x\sqrt{3} - \sqrt{12}\sqrt{3} = 4$
$\sqrt{4 \cdot 3}x - \sqrt{12 \cdot 3} = 4$
$2\sqrt{3}x - \sqrt{36} = 4$
$2\sqrt{3}x - 6 = 4$
$2\sqrt{3}x = 10 \quad |: 2\sqrt{3}$
$x = \frac{10}{2\sqrt{3}}$
$x = \frac{5}{\sqrt{3}} \quad |\text{lavennetaan } \sqrt{3}$
$x = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$
$x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

4.3.2 Muut juuret

Kuutiojuuri :

- Kuutiojuuren määritelmä on $\sqrt[3]{a} = b$ eli $b^3 = a$.
- Lukua a kutsutaan kantaluvuksi.
- Lukua b kutsutaan luvun a kuutiojuureksi.
- Jos kantaluku a on negatiivinen, on kuutiojuuri negatiivinen.
- Jos kantaluku a on positiivinen, on kuutiojuuri positiivinen.
- $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$
- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, b$\neq 0$
- $\sqrt[3]{a^3} = a$

Esim. 3 Laske $\sqrt[3]{128} \cdot \sqrt[3]{4} + \frac{\sqrt[3]{1458}}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{8}$.

Ratkaisu :
$\sqrt[3]{128} \cdot \sqrt[3]{4} + \frac{\sqrt[3]{1458}}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{8} =$
$\sqrt[3]{128 \cdot 4} + \sqrt[3]{\frac{1458}{2}} + \sqrt[3]{-4^3} - \sqrt[3]{2^3} =$
$\sqrt[3]{512} + \sqrt[3]{729} - 4 - 2 =$
$\sqrt[3]{8^3} + \sqrt[3]{9^3} - 6 =$
$8 + 9 - 6 = 11$

n:s juuret :

- Pariton juuri on muotoa $\sqrt[n]{a} = b$ eli $b^n = a$, missä n on pariton luonnollinen luku. Jos kantaluku a on positiivinen luku, on juuren arvo b positiivinen. Jos kantaluku a on negatiivinen, on juuren arvo b negativinen.
- Parillinen juuri on muotoa $\sqrt[n]{a} = b$ eli $b^n = a$, missä n on parillinen luonnollinen luku. On sovittu, että $a \geq 0$ ja $b \geq 0$.
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, b$\neq 0$
- $\sqrt[n]{a^n} = a$, kun n on pariton luonnollinen luku.
- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, kun n on parillinen luonnollinen luku.

Esim. 4 Laske $\sqrt[4]{6561}+\sqrt[5]{(-3)^5}+\sqrt[6]{(-5)^6}-\frac{\sqrt[5]{3072}}{\sqrt[5]{-3}}$.

Ratkaisu :
$\sqrt[4]{6561}+\sqrt[5]{(-3)^5}+\sqrt[6]{(-5)^6}-\frac{\sqrt[5]{3072}}{\sqrt[5]{-3}}=$
$\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{81}-3+|-5|-\sqrt[5]{-1024}=$
$\sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{3^4}-3+|-5|-\sqrt[5]{-1024}=$
$3\cdot 3-3+5-\sqrt[5]{(-4)^5}=$
$9-3+5-(-4)=15$

Murtopotenssi:
Murtopotenssit ovat muotoa $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. Kantaluku a on aina positiivinen. Osoittajana oleva m on aina kokonaisluku ja nimittäjänä oleva n on aina positiivinen kokonaisluku.

Vinkkejä murtopotenssin sieventämiseen :

- Kirjoita kantaluku potenssimuodossa, jos se on mahdollista.
- Jos potenssi on suurempi kuin yksi, kirjoita potenssi sekalukuna.
- Ilmoita vastaus juurimuodossa.

Esim. 5 Laske $2187^{1/5}$.

Ratkaisu :
$2187^{\frac{1}{5}}=(3^7)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{7}{5}}=3^{1\frac{2}{5}}=3^{1+\frac{2}{5}}=3^1\cdot 3^{\frac{2}{5}}=3\sqrt[5]{3^2}=3\sqrt[5]{9}$

4.3.3 Juuriyhtälö

Juuriyhtälö :

- Juuriyhtälö on muotoa $\sqrt[n]{x}=a$. Tuntematon esiintyy ainakin juurrettavana.
- Parillinen juuriyhtälö on muotoa $\sqrt[n]{x}=a$, missä n on parillinen positiivinen kokonaisluku ja $a\geq 0$. Esimerkki parillisesta juuriyhtälöstä on $\sqrt{5x+5}=5x+5$.
- Pariton juuriyhtälö on muotoa on $\sqrt[n]{x}=a$, missä n on pariton positiinen kokonaisluku. Esimerkki parittomasta juuriyhtälöstä on $\sqrt[3]{x}=\frac{x}{9}$.
- Määrittelyehdolla tarkoitetaan, että lasketaan, koska neliöjuuren alla oleva lauseke on ei-negatiivinen. Jos yhtälössä on monta juurilauseketta, pitää kaikille lausekkeille laskea oma määrittelyehto. Lopuksi katsotaan, mikä on juuriyhtälön yhteinen määrittelyehto.

- Neliöönkorotusehtolla tarkoitetaan, että neliöjuuriyhtälön $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ oikeapuoli $Q(x) \geq 0$, koska vasenpuoli $\sqrt{P(x)} \geq 0$.
- Juuriyhtälön vastauksen tulee kuulua yhteiseen määrittelyehtoon ja mahdolliseen neliöönkorotusehtoon.

Parillisen juuriyhtälön ratkaiseminen :

- Jätä juurilauseke yksistään yhtälön toiselle puolelle.
- Laske määrittelyehto ja neliöönkorotusehto.
- Korota yhtälön molemmat puolet potenssiin n. Näin saadaan $\sqrt[n]{x} = a \iff x = a^n$.
- Tarkasta, että ratkaisuehdokkaat kuuluvat määrittelyehtoon ja neliöönkorotusehtoon.
- Tarkasta vielä, että ratkaisuehdokkaat toteuttavat alkuperäisen yhtälön.

Parittoman juuriyhtälön ratkaiseminen :

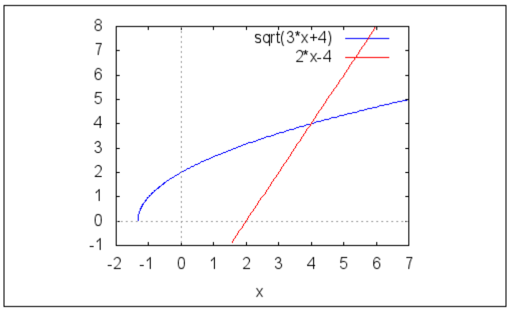
- Jätä neliöjuurilauseke yksistään yhtälön toiselle puolelle.
- Korota yhtälön molemmat puolet potenssiin n. Näin saadaan $\sqrt[n]{x} = a \iff x = a^n$.
- Tarkasta vielä, että ratkaisuehdokkaat toteuttavat alkuperäisen yhtälön.

Esim. 6 Neliöjuuriyhtälö on $\sqrt{3x+4} = 2x - 4$.
a) Määritä määrittelyehto.
b) Määritä neliöönkorotusehto.
c) Ratkaise yhtälö.
d) Piirrä kuvaaja.

Ratkaisu :
a) Määritetään määrittelyehto.
$3x + 4 \geq 0 \quad | - 4$
$3x \geq -4 \quad | : 3$
$x \geq -\frac{4}{3}$
$x \geq -1\frac{1}{3}$
b) Määritetään neliöönkorotusehto.
$2x - 4 \geq 0 \quad | + 4$
$2x \geq 4 \quad | : 2$
$x \geq 2$

c) Ratkaistaan yhtälö.
$\sqrt{3x+4} = 2x - 4 \quad |()^2$
$3x + 4 = (2x-4)^2$
$3x + 4 = 4x^2 - 16x + 16$
$-4x^2 + 19x - 12 = 0$
$x = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-4)}$
$x = \frac{-19 \pm \sqrt{361 - 192}}{-8}$
$x = \frac{-19 \pm \sqrt{169}}{-8}$
$x = \frac{-19 \pm 13}{-8}$
$x = \frac{3}{4}$ tai $x = 4$.

Neliöjuuriyhtälön ratkaisu on $x = 4$, koska tämä ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon, neliöönkorotusehdon ja alkuperäisen yhtälön. Ratkaisuehdokas $x = \frac{3}{4}$ ei toteuta neliöönkorotusehtoa.
d) Piirretään kuvaaja.



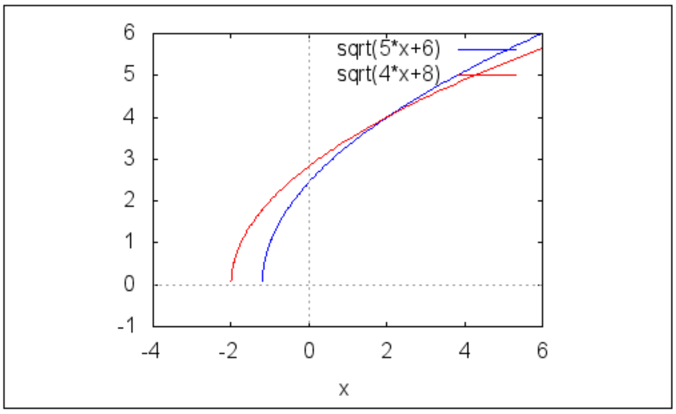
Kuva 13: Funktioiden $\sqrt{3x+4}$ ja $2x - 4$ kuvaajat.

Esim. 7 Ratkaise $\sqrt[3]{-2x^2 + x + 2} = x$.

Ratkaisu :
$\sqrt[3]{-2x^2 + x + 2} = x \quad |()^3$
$-2x^2 + x + 2 = x^3$
$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
Huomataan, että $x = 1$ on yhtälön yksi ratkaisu.
$(x-1)(x^2 + 3x + 2) = 0$
$(x-1)(x+2)(x+1) = 0$
Ratkaisuehdokkaat ovat $x = -2$, $x = -1$ ja $x = 1$.
Tarkistetaan vastaukset, sijoittamalla saadut arvot alkuperäiseen yhtälöön.
Kaikki saadut ratkaisuehdokkaat ovat myös ratkaisuja.

Esim. 8 Ratkaise $\sqrt{5x+6} = \sqrt{4x+8}$ ja piirrä kuva.

Ratkaisu :
Määritetään määrittelyehdot.
Määritetään $5x + 6$ määrittelyehto.
$5x + 6 \geq 0$
$5x \geq -6 \quad | : 5$
$x \geq -\frac{6}{5}$
Määritetään $4x + 8$ määrittelyehto.
$4x + 8 \geq 0$
$4x \geq -8 \quad | : 4$
$x \geq \frac{-8}{4}$
$x \geq -2$
Ratkaistaan yhtälö.
$\sqrt{5x+6} = \sqrt{4x+8} \quad |()^2$
$5x + 6 = 4x + 8$
$5x - 4x = -6 + 8$
$x = 2$
Ratkaisu on $x = 2$, koska $x = 2$ kuuluu kumpaankin määrittelyehtoon ja toteuttaa alkuperäisen yhtälön.



Kuva 14: Funktioiden $\sqrt{5x+6}$ ja $\sqrt{4x+8}$ kuvaajat.

Tehtäviä

49 Laske.
a) $\sqrt{4^{2\cdot 2}} + \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} - \sqrt{27} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + (\sqrt{4})^2$
b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{16} + \sqrt{625} + \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} + (\sqrt{5})^2 - \sqrt{7^2} - \sqrt{40}$
c) $(\sqrt[3]{8})^3 + \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} - \frac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{-27}$
d) $\sqrt[3]{27} - \frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{-3} + \sqrt[3]{108}$

50 Laske.
a) $\sqrt[5]{(-3)^5} + \frac{\sqrt[4]{18^2}}{\sqrt[4]{4}} + \sqrt[6]{((-2)\cdot 2)^6} + \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{125}$
b) $\sqrt[7]{(-8)^7} - \sqrt[6]{(-8)^6} + \frac{\sqrt[7]{(384}}{\sqrt[7]{3}} + \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{32}$
c) $81^{\frac{2}{5}}$
d) $1024^{\frac{3}{7}}$

51 Ratkaise.
a) $(\sqrt{9}x - \sqrt{25})\sqrt{4} = 8$
b) $\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{5}x) = 5$

52 a) Juuriyhtälö on $\sqrt{3x+1} = 2x - 6$. Määritä määrittelyehto, neliöönkorotusehto ja ratkaise yhtälö.
b) Juuriyhtälö on $\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 3x + 5 = 0$. Määritä määrittelyehto, neliöönkorotusehto ja ratkaise yhtälö.

53 Ratkaise.
a) $\sqrt[3]{3x^2 - 2x} = x$
b) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{4x-2}$

54 Tupu, Hupu ja Lupu saivat syntymäpäivälahjaksi kukin kaksi kultakolikkoa Roope-sedältä. Pojat päättivät piilottaa rahansa Mummo-ankan maatilalle luontoon hyvässä arkussa. a) Arkun avaimen karttakoordinaatit saat ratkaisemalla funktioiden $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x}$ ja $g(x) = \sqrt{-x+4}$ leikkauspisteen. b) Arkun karttakoordinaatit saat ratkaisemalla funktioiden
$h(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 4}$ ja $m(x) = x + 1$ leikkauspisteen.

4.4 Logaritmifunktio

4.4.1 Logaritmi

Logaritmin määritelmä on $log_a b = x$ eli $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$ ja $b > 0$. Lukua a kutsutaan kantaluvuksi. Lukua b kutsutaan numerukseksi tai logaritmoitavaksi. Logaritmi tarkoittaa sitä, että luku a on korotettava potenssiin x, jotta saadaan vastaukseksi luku b. Puhutaan "positiivisen luvun b a-kantainen logaritmi $log_a b$"[31, s. 21].

Esim. 1 Laske $log_2 8$.

Ratkaisu :
$log_2 8 = 3$, sillä $2^3 = 8$.
Luvun kahdeksan 2-kantainen logaritmi on kolme.

Laskusäännöt logaritmeille, kun $a > 0, a \neq 1, b > 0, x \in R_+$ ja $y \in R_+$.

- $log_a a = 1$
- $log_a 1 = 0$
- $log_a \frac{1}{a} = -1$
- $a^{log_a x} = x$
- $log_a a^x = x,\ x \in R$
- Tulon logaritmi: $log_a x + log_a y = log_a xy$
- Osamäärän logaritmi: $log_a x - log_a y = log_a \frac{x}{y}$
- Potenssin logaritmi: $log_a x^r = r \cdot log_a x$
- Kantaluvun vaihto: $log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$, lisäksi $b \neq 1$
- $log_a b = \frac{1}{log_b a}$, lisäksi $b \neq 1$
- $log_a b \cdot log_b a = 1$, lisäksi $b \neq 1$
- $lgx = log_{10} x$. Briggsin logaritmi. Kantaluku on 10.
- $lnx = log_e x$. Luonnollinen logaritmi. Kantaluku on e eli Neperin luku. $e \approx 2,718281828\ldots$

Esim. 2 Laske. a) $7^{log_7 15}$ b) $(log_8 8)^{100}$ c) $log_3 \frac{1}{27}$ d) $log_4 \sqrt[7]{16}$ e) $log_{(-5)} 25$ f) $log_2(-8)$ g) $lg1000$ h) lne^3

Ratkaisu :
a) $7^{log_7 15} = 15$
b) $(log_8 8)^{100} = 1^{100} = 1$
c) $log_3 \frac{1}{27} = log_3 3^{-3} = -3$
d) $log_4 \sqrt[7]{16} = log_4 \sqrt[7]{4^2} = log_4 4^{\frac{2}{7}} = \frac{2}{7}$
e) $log_{(-5)} 25$. Ei määritelty, koska kantaluku on negatiivinen luku.
f) $log_2(-8)$. Ei määritelty, koska numerus on negatiivinen luku.
g) $lg1000 = 3$, sillä $10^3 = 1000$. Briggsin logaritmi.
h) $lne^3 = 3$, sillä $e^3 = e^3$. Luonnollinen logaritmi.

Esim. 3 Laske. a) $log_3 27 + log_3 3$ b) $2 \cdot log_5 25 - log_5 25$ c) $log_4 1 + log_2 \frac{1}{8}$ d) $log_2 9 - log_8 9$ e) $log_{\frac{1}{9}} 81$ f) $log_2 5 \cdot log_5 2$

Ratkaisu :
a) $log_3 27 + log_3 3 = log_3(27 \cdot 3) = log_3 81 = log_3 3^4 = 4$
b) $2 \cdot log_5 25 - log_5 25 = log_5 25^2 - log_5 25 = log_5 625 - log_5 25 = log_5 \frac{625}{25} = log_5 25 = 2$
c) $log_4 1 + log_2 \frac{1}{8} = 0 + log_2 2^{-3} = -3$
d) $log_2 9 - log_8 9 = log_2 9 - \frac{log_2 9}{log_2 8} = log_2 9 - \frac{log_2 9}{log_2 2^3} = log_2 9 - \frac{log_2 9}{3} = \frac{2}{3} log_2 9$
e) $log_{\frac{1}{9}} 81 = \frac{log_3 3^4}{log_3 \frac{1}{9}} = \frac{log_3 3^4}{log_3 3^{-2}} = \frac{4}{-2} = -2$
f) f) $log_2 5 \cdot log_5 2 = 1$

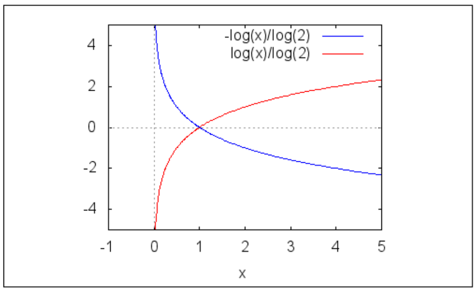
Eksponenttiyhtälön ratkaiseminen logaritmin avulla. (Neuvottu tarkemmin luvussa potenssi- ja eksponenttifunktiot).

Esim. 4 Ratkaise $3 \cdot 10^{2x+2} - 753 = 0$.

Ratkaisu :
$3 \cdot 10^{2x+2} - 753 = 0$
$3 \cdot 10^{2x+2} = 753 \quad | : 3$
$10^{2x+2} = \frac{753}{3}$
$10^{2x+2} = 251 \quad | lg$
$lg10^{2x+2} = lg251$
$(2x+2) \cdot lg10 = lg251 \quad | : lg10$
$2x + 2 = \frac{lg251}{lg10} \quad | - 2$
$2x = \frac{lg251}{lg10} - 2 \quad | : 2$
$x = \frac{= \frac{lg251}{lg10} - 2}{2} \approx 0,1998$

Logaritmifunktio :

- Logaritmifunktio on eksponenttifunktion käänteisfunktio. Logaritmifunktion saa helposti piirrettyä eksponenttifunktiosta peilaamalla suoran $y = x$ suhteen. Logaritmifunktion määrittelyjoukko on positiivinen reaalijoukko. Arvojoukko on koko reaalijoukko.
- Logaritmifunktio on aidosti vähenevä, kun logaritmifunktion kantaluku on $0 < a < 1$.
- Logaritmifunktio on aidosti kasvava, kun logaritmifunktion kantaluku a on $a > 1$.



Kuva 15: Punainen funktio $log_2 x$ on kasvava funktio ja sininen funktio $log_{\frac{1}{2}} x$ on vähenevä funktio.

4.4.2 Logaritmiyhtälö

Logaritmiyhtälö
Funktio on logaritmiyhtälö, jos tuntematon muuttuja x on kantaluvussa tai numeruksessa. Logaritmifunktiota on perusmuodoltaan kahdenlaisia
$log_a x = y$ ja $log_a f(x) = log_a g(x)$.

Logaritmiyhtälön $log_a x = y$ ratkaiseminen :

- Laske, koska logaritmiyhtälö on määritelty. Yhtälö on määritelty, jos $a > 0$, $a \neq 1$ ja $x > 0$.
- Muuta logaritmiyhtälö $log_a x = y$ eksponenttiyhtälöksi $a^y = x$.
- Ratkaise eksponenttiyhtälö $a^y = x$.
- Tarkasta, että saamasi vastaus kuuluu määrittelyjoukkoon.

Logaritmiyhtälön $log_a f(x) = log_a g(x)$ ratkaiseminen :

- Laske, koska logaritmiyhtälö on määritelty. Yhtälö on määritelty, jos $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ ja $g(x) > 0$
- Jos yhtälössä on erikantaiset logaritmit, muuta ne samankantaisiksi.
- Logaritmifunktio on aidosti kasvava tai vähenevä. Sen takia logaritmiyhtälö $log_a f(x) = log_a g(x)$ voidaan ratkaista muodosta $f(x) = g(x)$.
- Ratkaise $f(x) = g(x)$.
- Tarkasta, että saamasi vastaus kuuluu määrittelyjoukkoon.

Esim. 5 Ratkaise. a) $log_x 27 - 3 = 0$ b) $log_5 x - 2 = 2$

Ratkaisu :
a) funktio on määritelty, kun $x > 0$, $(27 > 0)$
$log_x 27 - 3 = 0$
$log_x 27 = 3$
$x^3 = 27$
$x = 3$
b) Funktio on määritelty, kun $x > 0$, $(5 > 0)$
$log_5 x - 2 = 2$
$log_5 x = 4$
$5^4 = x$
$x = 625$

Esim. 6 Ratkaise $2log_3(2x + 2) = log_3(8x + 8)$.

Ratkaisu :
Funktio on määritelty, kun $(2x + 2) > 0 \iff 2x > -2 \iff x > -1$ ja
$(8x + 8) > 0 \iff 8x > -8 \iff x > -1$
$2log_3(2x + 2) = log_3(8x + 8)$
$log_3(2x + 2)^2 = log_3(8x + 8)$
$(2x + 2)^2 = (8x + 8)$
$4x^2 + 8x + 4 = 8x + 8$
$4x^2 - 4 = 0$
$4x^2 = 4 \quad | : 4$
$x^2 = 1$
$x = 1$ tai $x = -1$
Ratkaisu on $x = 1$, koska $x = -1$ ei kuulu määrittelyjoukkoon.

4.4.3 Logaritmiepäyhtälö

Logaritmiepäyhtälö
Logaritmiepäyhtälöt ovat perusmuodoltaan muotoa $log_a f(x) > log_a g(x)$ ja $log_a f(x) < log_a g(x)$.

Logaritmiepäyhtälöiden ratkaiseminen :

- Laske, koska logaritmiepäyhtälö on määritelty. Epäyhtälö on määritelty, jos $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ ja $g(x) > 0$
- Jos epäyhtälössä on erikantaiset logaritmit, muuta ne samankantaisiksi.
- Jos toisella puolella epäyhtälöä on pelkkä luku, muuta se logaritmiluvuksi.
- Kun kantaluku a on $(1, \infty)$, on logaritmifunktio aidosti kasvava. Tällöin epäyhtälömerkki säilyttää suuntansa. Kun lasket epäyhtälöä $log_a f(x) < log_a g(x)$, silloin ratkaise $f(x) < g(x)$.
- Kun kantaluku a on välillä $(0, 1)$, on logaritmifunktio aidosti vähenevä. Tällöin epäyhtälömerkin suunta vaihtuu. Kun lasket epäyhtälöä $log_a f(x) > log_a g(x)$, silloin ratkaise $f(x) < g(x)$.
- Tarkasta, että saamasi vastaus kuuluu määrittelyjoukkoon.

Esim. 7 Ratkaise $log_{\frac{1}{4}}(4x - 3) < 1$.

Ratkaisu :
Lasketaan määrittelyalue
$4x - 3 > 0$
$4x > 3 \quad | : 4$
$x > \frac{3}{4} = 0,75$
Ratkaistaan epäyhtälö.
$log_{\frac{1}{4}}(4x - 3) < 1$
$log_{\frac{1}{4}}(4x - 3) < log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}^1$
$log_{\frac{1}{4}}(4x - 3) < log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$
Logaritmifunktio $log_{\frac{1}{4}}(4x - 3)$ on aidosti vähenevä, siksi epäyhtälömerkin suunta vaihdetaan.
$4x - 3 > \frac{1}{4}$
$4x > \frac{1}{4} + 3$
$4x > \frac{13}{4} \quad | : 4$
$x > \frac{13}{16} = 0,8125$
Ratkaisu on $x > \frac{13}{16}$, koska tämä alue kuuluu kokonaisuudessaan määrittelyalueeseen.

Tehtäviä

55 Laske.
a) $log_5 625$ b) $(log_9 9)^9$ c) $log_4 \frac{1}{64}$ d) $8^{log_8 10}$ e) $log_5 \sqrt[4]{125}$ f)$log_3(-9)$
g) $log_{(-3)} 9$ h) $lg 10000$ i) lne^5

56 Laske.
a) $log_4 64 + log_4 16$ b) $log_3 243 - 2 \cdot log_3 9$ c) $log_3 6 \cdot log_6 3$ d) $log_3 \frac{1}{27} + log_3 1$
e) $log_3 8 + log_9 8$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 32$

57 Ratkaise.
a) $4 \cdot 10^{3x-7} - 400 = 0$
b) $2^{4x+1} = 3$

58 Ratkaise.
a) $log_x 243 - 5 = 0$
b) $2 \cdot log_x 64 = 6$
c) $lnx = 5$
d) $lgx = 10$
e) $2 \cdot lnx = 2$
f) $log_6 x - 2 = 1$
g) $3 \cdot log_3 x - 1 = 5$

59 Ratkaise.
a) $log_3(3x + 2) = log_3(x^2 + 4)$
b) $log_2[3(x + 2)] = log_2 x + log_2 9$
c) $log_4(2x - 1) < log_4 x$
d) $log_{\frac{1}{2}}(4x - 3) - 3 < 0$

60 Roope-ankka antoi aikoinaan Tupulle, Hupulle ja Lupulle yhteiseksi syntymäpäivälahjaksi 3000 dollaria, kun he täyttivät 3 vuotta. Aku-ankka laittoi rahan heti pankkiin kasvamaan korkoa. Raha on kasvanut korkoa vuosittain 2,5 %. Pojat ovat päättäneet lähteä maailmanympärysmatkalle, sitten kun tilillä on yli 6000 dollaria. Laske, kuinka vanhoja pojat tuolloin ovat, kun he lähtevät matkalleen.

5 Raja-arvo ja jatkuvuus

5.1 Raja-arvo

Oikeanpuoleinen raja-arvo :
Kun muuttuja x lähestyy x-akselilla oikealta puolelta lukua a, samalla funktion arvo lähestyy lukua b.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = b$$

Vasemmanpuoleinen raja-arvo :
Kun muuttuja x lähestyy x-akselilla vasemmalta puolelta lukua a, samalla funktion arvo lähestyy lukua b.

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b$$

Raja-arvo :
Oikean puoleinen raja-arvo on sama kuin vasemman puoleinen raja-arvo ja raja-arvot ovat äärelliset.

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b = \lim_{x \to a+} f(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

On hyvä muistaa, että funktiolla voi olla raja-arvo sellaisessa kohdassa, missä funktio ei ole edes määritelty.

Raja-arvon laskeminen suoraan sijoittamalla onnistuu polynomifunktiolla, potenssifunktiolla, eksponenttifunktiolla, juurifunktiolla, logaritmifunktiolla, rationaalifunktiolla ja trigonometrisilla funktiolla silloin, kun funktiot ovat määriteltyjä. Tällaisista funktioista voidaan muodostaa summa, erotus, kertolasku, osamäärä, käänteiskuvaus sekä yhdistetty kuvaus, joille voidaan laskea raja-arvo, kunhan funktiot ovat määritelty.

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$$

Raja-arvon laskusääntöjä :

Funktioilla f ja g on raja-arvo kohdassa a.

- $\lim\limits_{x \to a} k = k, \quad k$ on vakio
- $\lim\limits_{x \to a} x = a$
- $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, kun $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Esim. 1 Laske.

$$\lim_{x \to 3}(x^4 - 2x^3 - 3x - 5)$$

Ratkaisu :

$$\lim_{x \to 3}(x^4 - 2x^3 - 3x - 5) = 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3 - 5 = 13$$

Esim. 2 Laske.

$$\lim_{x \to 2} 4^{\sqrt{3x+3}}$$

Ratkaisu :
Eksponenttifunktio on määritelty, kun $3x+3 > 0 \;\Leftrightarrow\; 3x > -3 \;\Leftrightarrow\; x > -1$.
Joten funktio on määritelty kohdassa $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2} 4^{\sqrt{3 \cdot 2+3}} = 4^{\sqrt{9}} = 4^3 = 64$$

Esim. 3 Laske.

$$\lim_{x \to 3} \sqrt[6]{2x+1}$$

Ratkaisu :
Juurifunktio on määritelty, kun $2x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{1}{2}$.
Joten funktio on määritelty kohdassa $x = 3$.

$$\lim_{x \to 3} \sqrt[6]{2x+1} = \sqrt[6]{2 \cdot 3 + 1} = \sqrt[6]{7}$$

Esim. 4 Laske.

$$\lim_{x \to 3} log_4(4x+4)$$

Ratkaisu :
Logaritmifunktio on määritelty, kun $4x + 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x > -4 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1$.
Joten funktio on määritelty kohdassa $x = 3$.

$$\lim_{x \to 3} log_4(4x+4) = log_4(4 \cdot 3 + 4) = log_4 16 = 2$$

Raja-arvon laskeminen rationaalifunktiolle :

- Jos sijoitettava a ei ole nimittäjän nollakohta, laske raja-arvo suoraan sijoittamalla a rationaalifunktioon.
- Jos sijoitettava a on nimittäjän nollakohta, niin katso, onko a myös osoittajan nollakohta. Jos a on osoittajan nollakohta, supista tekijällä $(x - a)$. Sen jälkeen sijoita a rationaalifunktioon.
- Jos sijoitettava a on vain nimittäjän nollakohta, laske toispuoleiset raja-arvot. Raja-arvo on vain olemassa, jos raja-arvot ovat yhtäsuuret, joko ∞ tai $-\infty$.

Esim. 5 Laske.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$$

Ratkaisu :
Rationaalifunktiossa 3 ei ole nimittäjän nollakohta, joten voidaan tehdä suoraan sijoitus.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = \frac{3^2 + 3 \cdot 3 + 2}{3 + 2} = \frac{20}{5} = 4$$

Esim. 6 Laske.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$$

Ratkaisu :
Rationaalifunktiossa -1 on nimittäjän ja osoittajan nollakohta, tässä voidaan supistaa tekijällä $(x+1)$.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1 = -2$$

Esim. 7 Laske.

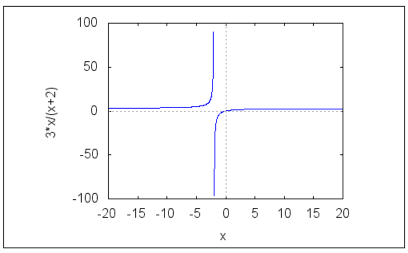
$$\lim_{x\to -2} \frac{3x}{x+2}$$

Ratkaisu :
Rationaalifunktiossa -2 on vain nimittäjän nollakohta. Ei voi voida tehdä supistuksia.

$$\lim_{x\to -2+} \frac{3x}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x}{x+2} = \infty$$

Rationaalifunktiolla ei ole raja-arvoa, koska toispuoleiset raja-arvot ovat eri suuret.



Kuva 16: Rationaalifunktiolla $\frac{3x}{x+2}$ ei raja-arvoa kohdassa $x = -2$.

Raja-arvon laskeminen neliöjuurifunktiolle :

- Tarkasta, että neliöjuurifunktio on määritelty siellä, missä raja-arvo lasketaan.
- Sijoita suoraan, jos ei tule ongelmia.
- Jos funktio on muotoa $\sqrt{x}+b$, lavenna kertojalla $\sqrt{x}-b$. Jos funktio on muotoa $\sqrt{x}-b$, lavenna kertojalla $\sqrt{x}+b$.
- (Kaava $\sqrt{x^2}=|x|$ on tärkeä, kun siirretään termiä nelilöjuuren sisälle. Sama kaava on tärkeä, kun siirretään termiä neliöjuuren sisältä pois.)

Esim. 8 Laske.

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{-x+6}-3}{x+3}$$

Ratkaisu :
Rationaalifunktio on määritelty, kun $-x+6\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x\geq -6 \quad \Leftrightarrow \quad x\leq 6$

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{-x+6}-3}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(\sqrt{-x+6}-3)(\sqrt{-x+6}+3)}{(x+3)(\sqrt{-x+6}+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{-x+6-3^2}{(x+3)(\sqrt{-x+6}+3)}=$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{-x-3}{(x+3)(\sqrt{-x+6}+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{-1}{\sqrt{-x+6}+3}=\frac{-1}{\sqrt{-(-3)+6}+3}=\frac{-1}{\sqrt{3+6}+3}=$$

$\frac{-1}{\sqrt{9}+3}=\frac{-1}{3+3}=-\frac{1}{6}$

Raja-arvo äärettömyydessä
Raja-arvo positiivisessa äärettömyydessä merkitään

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b.$$

Eli kun x-arvot "suurenevat rajatta", funktio arvo lähestyy silloin lukua b.
Raja-arvo negatiivisessa äärettömyydessä merkitään

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=b.$$

Eli kun x-arvot "pienenevät rajatta", funktion arvo lähestyy silloin lukua b.
Raja-arvot äärettömyyksissä voivat lähestyä myös äärettömyyksiä. Eli kun x-arvot suurenevat rajatta tai pienenevät rajatta, funktio arvot kasvavat rajatta tai pienevät rajatta.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\pm\infty$$

Laskusääntöjä :

- $\infty + \infty = \infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $\infty \pm k = \infty$, kun $k \in \mathbf{R}$
- $-\infty \pm k = -\infty$, kun $k \in \mathbf{R}$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
- $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$
- $\infty \cdot k = \infty$, kun $k > 0$
- $\infty \cdot k = -\infty$, kun $k < 0$
- $\frac{k}{\infty} = 0$, kun $k \in \mathbf{R}$
- $\frac{k}{-\infty} = 0$, kun $k \in \mathbf{R}$
- $\frac{\infty}{k} = \infty$, kun $k > 0$
- $\frac{\infty}{k} = -\infty$, kun $k < 0$
- $\infty^r = \infty$, kun $r > 0$
- Rationaalifunktio raja-arvo äärettömyydessä ratkaistaan supistamalla nimittäjän korkeimmalla x^n termillä.
- Neliöjuurifunktiolla käytetään hyväksi aikaisempia raja-arvolaskun ohjeita.

Esim. 9 Laske.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+5}{4x^2-3}$$

Ratkaisu :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+5}{4x^2-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x}+\frac{5}{x^2}}{4-\frac{3}{x^2}} = \frac{0-0}{4-0} = \frac{0}{4} = 0$$

Esim. 10 Laske.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-4x}{x^2+5x+1}$$

Ratkaisu :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-4x}{x^2+5x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{4}{x}}{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{3-0}{1+0+0} = 3$$

Esim. 11 Laske.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^4+1}{4x^2+7}$$

Ratkaisu :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^4+1}{4x^2+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-2x^4}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{7}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{7}{x^2}} = \frac{-2(-\infty)^2+0}{4+0} =$$

$\frac{-2\cdot\infty}{4} = \frac{-\infty}{4} = -\infty$

Esim. 12 Laske.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2+4x} - \sqrt{3}x$$

Ratkaisu :

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2+4x} - \sqrt{3}x = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{3x^2+4x}-\sqrt{3}x)(\sqrt{3x^2+4x}+\sqrt{3}x)}{\sqrt{3x^2+4x}+\sqrt{3}x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x-3x^2}{\sqrt{3x^2+4x}+\sqrt{3}x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{3x^2+4x}+\sqrt{3}x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\frac{\sqrt{3x^2+4x}}{x}+\sqrt{3}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{\frac{3x^2+4x}{x^2}}+\sqrt{3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{3+\frac{4}{x}}+\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3+0}+\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} =$$

$\frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

5.2 Jatkuvuus

Funktio $f(x)$ on jatkuva pisteessä $x = a$, jos funktion toispuoleiset raja-arvot ja funktion arvo on samat. Funktio pitää olla tietysti määritelty tässä pistessä a.

$$\lim_{x\to a-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a+} f(x)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Funktio $f(x)$ on jatkuva välillä $[a, b]$, jos funktio on määritelty välillä (a, b) ja funktiolle voidaan laskea funktion arvo kaikissa välin pisteissä. Tämän lisäksi funktio on jatkuva pisteessä a oikealta puolelta ja jatkuva pisteessä b vasemmalta puolelta. Jatkuvuutta kuvaa hyvin se, että voi piirtää funktion nostamatta yhtään kertaa kynää paperista. Jos funktio ei ole jatkuva

jossain pisteessä, sanotaan silloin, että funktiolla on siinä pisteessä epäjatkuvuuskohta. Piirtäessä funktiota epäjatkuvuus ilmenee silloin, kun kynällä tehdään pienempiä tai suurempia hyppäyksiä.
Jatkuvia funktioita määrittelyjoukoissaan ovat polynomifunktiot, potenssifunktiot, eksponettifunktiot, logaritmifunktiot, trigonometriset funktiot ja rationaalifunktiot. Jos kaksi funktiota ovat jatkuvia, niin myös niiden summa, erotus, tulo ja jakolasku ovat määrittelyjoukoissaan jatkuvia.
Jos funktio on jatkuva välillä $[a, b]$, niin funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa sekä kaikki muut arvot suurimman ja pienimmän arvon väliltä.
Jos funktio on jatkuvat välillä $[a, b]$ ja funktio saa erimerkkiset funktion arvot funktion päätepisteissä, niin silloin voidaan sanoa, että funktiolla on ainakin yksi nollakohta eli funktio leikkaa ainakin kerran x-akselin. **Bolzanon lause**.

Esim. 13 Onko funkio $f(x)$ jatkuva pisteessä $x = 2$?

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{, kun x} > 2 \\ 5 & \text{, kun x} = 2 \\ 3x-1 & \text{, kun x} < 2 \end{cases}$$

Ratkaisu :
Vasemmanpuoleinen raja-arvo

$$\lim_{x \to 2-} 3x - 1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

Oikeanpuoleinen raja-arvo

$$\lim_{x \to 2+} 2x + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

Funktion arvo
$f(2) = 5$
Funktio on jatkuva pisteessä $x = 2$, koska toispuoleiset raja-arvot ja funktion arvo ovat samat.

Esim. 14 Onko funkio $g(x)$ jatkuva pisteessä $x = 0$?

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x} & \text{, kun } 0 \leq \text{x} \\ \sqrt{3x}+3 & \text{, kun x} > 0 \end{cases}$$

Ratkaisu :
Vasemmanpuoleinen raja-arvo

$$\lim_{x \to 0-} \sqrt{-3x} = \sqrt{-3 \cdot 0} = 0$$

Oikeanpuoleinen raja-arvo

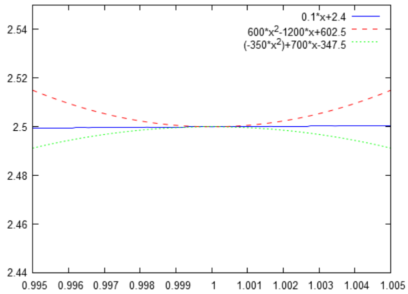
$$\lim_{x \to 0+} \sqrt{3x} + 3 = \sqrt{3 \cdot 0} + 3 = 3$$

Funktion arvo
$f(0) = \sqrt{-3 \cdot 0} = 0$
Funktio on epäjatkuva pisteessä $x = 0$, koska toispuoleiset raja-arvot ovat erisuuret.

EXTRA ASIAA
Kuristuslause eli voileipälause
Otetaan kolme funktiota g, f ja h. Nämä kaikki funktiot on määritelty aluella $]a, c[$. Funktiosta voidaan sanoa vielä, että $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ja $\lim_{x \to b} g(x) = \lim_{x \to b} h(x) = d$. Jos näin on, niin $\lim_{x \to b} f(x) = d$.

Esim. 15 On kolme funktiota $g(x) = -350x^2 + 700x - 347.5$, $f(x) = 0.1x + 2.4$ ja $h = 600x^2 - 1200x + 602.5$ määrittelyalueella $x \in [1]$. Näistä funktiosta voidaan sanoa, että $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Jos otetaan yhtään suurempi määrittelyalue, niin $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ei toteudu. Laske $\lim_{x \to 1} g(x)$ ja $\lim_{x \to 1} h(x)$ ja päättele, mikä on funktion f raja-arvo kohdassa $x = 1$?

Ratkaisu :
$\lim_{x \to 1} g(x) = 2,5$ ja $\lim_{x \to 1} h(x) = 2,5$, koska $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, niin kuristuslauseen mukaan myös $\lim_{x \to 1} f(x) = 2,5$



Kuva 17: Funktiot $g(x) - 350x^2 + 700x - 347.5$, $f(x) = 0.1x + 2.4$ ja $h(x) = 600x^2 - 1200x + 602.5$

Onko funktio f jatkuva kohdassa a? :

- Onko funktio f määritelty kohdassa a?
- Onko $\lim_{x \to a} f(x)$ olemassa?
- Onko $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ totta?
- Funktio f on jatkuva, jos saadaan kolme kyllä vastausta.
- Funkiolla f on epäjatkuvuuskohta kohdassa a, jos kysymyksiin kaksi tai kolme saadaan vastaus ei.

Tehtäviä

61 Laske.

a) $\lim_{x \to -2}(3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 1)$ b) $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} 3^{\sqrt{4x+4}}$ c) $\lim_{x \to 1} \sqrt[4]{3x - 2}$

d) $\lim_{x \to \frac{2}{5}} log_3(5x - 1)$

62 Laske.

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x - 2}$

63 Laske.

a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 3}{2x^2 + 2x}$ b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 1}{6x^2 - 2x - 2}$ c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^6 + 3x^2 + 2}{-4x^4 + 3x^3 + 2}$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{-x + 6} - 2}{x - 2}$ e) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{4x^2 + 6x} - 2x$

64 a) Onko funktio $f(x)$ jatkuva pisteessä $x = 4$?

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{, kun } 4 < \text{x} \leq 10 \\ 10 & \text{, kun x} = 4 \\ 2x + 2 & \text{, kun } -10 \leq \text{x} < 4 \end{cases}$$

b) Todista, että funktiolla $f(x)$ on ainakin yksi nollakohta?

65 Onko funktio $g(x)$ jatkuva pisteessä $x = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-4x^3} & \text{, kun x} \leq 0 \\ \sqrt{4x} + 4 & \text{, kun x} > 0 \end{cases}$$

66 Tupu, Hupu ja Lupu suunnittelivat kiipeävänsä korkealle Mount Ankalle. He olivat saaneet tietää, että vuori muodostui kolmesta eri funktiosta. Alkunousu vuorelle tapahtuu funktion $f(x) = 2x + 75$ mukaisesti, kun $x \in [-37, -5]$. Sen jälkeen vuoren huippu muistuttaa funktiota $r(x) = -x^2 + 2x + 100$, kun $x \in (-5, 5)$. Loppulaskurinnettä kuvaa funktio $t(x) = -2x + 65$, kun $x \in [5, 32]$.

a) Auta poikia selvittämään, onko nousu normaalisti jalkaisin mahdollista vai onko rintessä kohdassa $x = -5$ pystysuoraseinämä, jota ei voi kävellä ylös (siis epäjatkuvuuskohta)?
b) Onko laskurinne käveltävissä helposti alas vai onko kohtisuora pudotus (epäjatkuvuuskohta) kohdassa $x = 5$?

6 Derivaatta

6.1 Derivaatta

Kun käyrän kahden pisteen $(x_0, f(x_0))$ ja $(x, f(x))$ välille piirretään sekantti, saadaan funktion f **erotusosamäärä** välille $[x_0, x]$. Erotusosamäärä on sekantin kulmakerroin, joka kertoo funktion f **keskimääräisen muutosnopeuden**.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x, f(x))$ välillä on etäisyyttä. Kun piste $(x, f(x))$ lähestyy pistettä $(x_0, f(x_0))$, silloin etäisyys muuttuu vähitellen nollaksi ja sekantti muuttuu pisteen $(x_0, f(x_0))$ tangentiksi. Eli kun erotusosamäärästä otetaan raja-arvo kohdassa x_0, saadaan tangentin kulmakerroin, jos se on olemassa.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$$

Jos funktio on derivoituva funktion pisteessä x_0, silloin toispuoleiset raja-arvot ovat yhtäsuuret.

$$\lim_{x \to x_0-} = \lim_{x \to x_0+} = \lim_{x \to x_0}$$

Esim. 1 Onko funkiolla $f(x) = |3x|$ raja-arvoa pisteessä $x = 0$? Onko funktio $f(x)$ derivoituva pistessä $x = 0$?

Ratkaisu :
Aluksi avataan funktion $f(x)$ itseisarvot.

$$f(x) = \begin{cases} -3x & , \text{kun x} \leq 0 \\ 3x & , \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

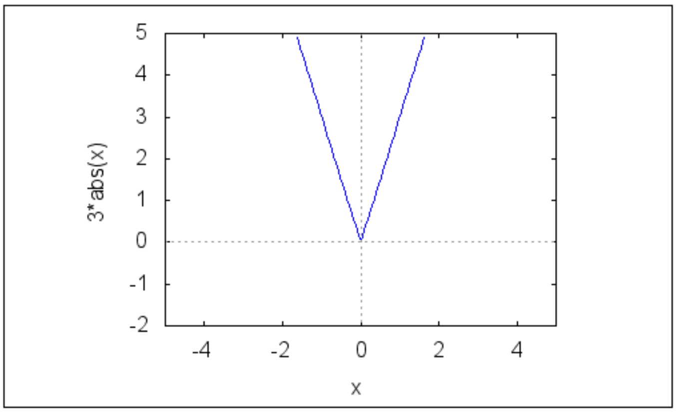
Lasketaan vasemmanpuoleinen raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-3x - 3 \cdot 0}{x - 0} = \frac{-3x}{x} = -3$$

Lasketaan oikeanpuoleinen raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{3x - 3 \cdot 0}{x - 0} = \frac{3x}{x} = 3$$

Funktiolla $f(x)$ ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 0$, koska toispuoleiset raja-arvot eivät ole yhtä suuret. Funktio $f(x)$ ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$.



Kuva 18: Funktiolla $f(x) = |3x|$ ei ole derivaattaa kohdassa $x = 0$, koska tähän kohtaan ei voida piirtää yksikäsitteistä tangettia. Kohdassa on terävä kulma.

Funktiolla ei ole derivaattaa pisteessä x_0, silloin kun funktiolle ei saada piirrettyä yksikäsitteistä tangenttia pisteeseen x_0. Tällaisia tapauksia on, kun toispuoleiset raja-arvot ovat erisuuret (esim. 1), funktio ei ole jatkuva tai yksikäsitteisesti saatu tangentti on pystysuorassa, sillä pystysuorassa olevalla suoralla ei ole kulmakerrointa.
Jos funktion on derivoituva välillä $]a, b[$, niin funktio on derivoituva jokaisessa pisteessä tällä välillä ja funktio on myös jatkuva tällä välillä. Sen sijaan, jos funktio on jatkuva, se ei ole aina derivoituva.
Mikä on derivaatan merkitys? Derivaatan merkitys on kertoa muutosnopeus funktion tietyssä pisteessä x_0. Se siis kertoo, funktion **hetkellisen muutosnopeuden.**

Esim. 2 Määritä funktion $f(x) = 2x^2+3x+2$ muutosnopeus kohdassa $x = 1$ eli $f'(1)$.

Ratkaisu :
Lasketaan funktion erotusosamäärä kohdassa $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2 + 3x + 2 - (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2 + 3x + 2 - 7}{x - 1} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1}$$

Lasketaan derivaata kohdassa $x = 1$. Se on erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x = 1$.

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x+5)}{x-1} = \lim_{x \to 1} 2x + 5 = 7$$

Funktion muutosnopeus on 7 kohdassa $x = 1$.

Derivaatan laskusääntöjä :

- Vakion derivaatta on nolla $D(c) = 0$
- Potenssifunktion derivaatta $D(x^n) = nx^{n-1}, \quad n \in R$
- Summan derivaatta $D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x)$
- Funktio on kerrottu vakiolla $D(kf(x)) = kD(f(x))$
- Tulon derivaatta $D(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Osamäärän derivaatta $D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0$
- Yhdistetyn funktion derivaatta $D(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- Eksponenttifunkion derivaatta $De^x = e^x, \quad De^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x)$
- Yleisen eksponenttifunktion derivaatta $Da^x = a^x lna$, $Da^{f(x)} = a^{f(x)} lna \cdot f'(x)$
- Logaritmifunktion derivaatta $Dlnx = \frac{1}{x}$, $x > 0, \quad Dlnf(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, $f(x) > 0$
  $Dlog_a x = \frac{1}{xlna}, \quad x > 0$

Summan derivaatta

Esim. 3 Derivoi $f(x) = 2x^2 + 2x + 4$.

Ratkaisu :
$f'(x) = D(2x^2 + 2x + 4)$
$= D(2x^2) + D(2x) + D(4)$
$= 2Dx^2 + 2Dx + D4$
$= 2 \cdot 2x^{2-1} + 2 \cdot x^{1-1} + 0$
$= 4x + 2$

Tulon derivaatta

Esim. 4 Derivoi $f(x) = (x^2 + 2)(3x^3 - 5x^2 + 2)$.

Ratkaisu :
Ajatellaan, että $f(x) = h(x) \cdot m(x)$
$h(x) = x^2 + 2, \quad h'(x) = 2x$
$m(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2, \quad m'(x) = 9x^2 - 10x$
$f'(x) = h'(x) \cdot m(x) + h(x) \cdot m'(x)$
$f'(x) = 2x(3x^3 - 5x^2 + 2) + (x^2 + 2)(9x^2 - 10x) =$
$6x^4 - 10x^3 + 4x + 9x^4 - 10x^3 + 18x^2 - 20x = 15x^4 - 20x^3 + 18x^2 - 16x$

Osamäärän derivaatta

Esim. 5 Derivoi $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

Ratkaisu :
Ajatellaan, että $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$
$h(x) = 2x + 1, \quad h'(x) = 2$
$g(x) = x + 1, \quad g'(x) = 1$
$D\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h'(x) \cdot g(x) - h(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+1)1}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

Yhdistetyn funktion derivaatta

Esim. 6 Derivoi $h(x) = (3x + 2)^3$.

Ratkaisu :
$D(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) = g(x)^3, \quad f'(x) = 3 \cdot g(x)^{3-1} = 3 \cdot g(x)^2,$
$g(x) = 3x + 2, \quad g'(x) = 3,$
$h'(x) = 3(3x + 2)^2 \cdot 3 = 9(3x + 2)^2$

Eksponenttifunktion derivaatta

Esim. 7 Derivoi $D(5e^x)$.

Ratkaisu :
$De^x = e^x$
$D(5e^x) = 5De^x = 5e^x$

Esim. 8 Derivoi $D(e^{3x^3+2x})$.

Ratkaisu :
$De^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x)$
$f(x) = 3x^3 + 2x, \quad f'(x) = 9x^2 + 2$
$D(e^{3x^3+2x}) = (9x^2 + 2)e^{3x^3+2x}$

Yleisen eksponenttifunktion derivaatta

Esim. 9 Derivoi $f(x) = 10^x$.

Ratkaisu :
$Da^x = a^x lna$
$f'(x) = 10^x ln10$

Esim. 10 Derivoi $h(x) = 6^{2x+3}$.

Ratkaisu :
$Da^{f(x)} = a^{f(x)} lna \cdot f'(x)$
$f(x) = 2x + 3, \quad f'(x) = 2$
$h'(x) = 6^{2x+3} ln6 \cdot 2 = 2 \cdot 6^{2x+3} ln6$

Logaritmifunktion derivaatta

Esim. 11 Derivoi $Dln(5x^2)$.

Ratkaisu :
$Dlnf(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad f(x) > 0$
$Dln(5x^2) = \frac{D(5x^2)}{5x^2} = \frac{10x}{5x^2} = \frac{2}{x}, \quad x \neq 0$

Esim. 12 Derivoi $D(lnx)^4$.

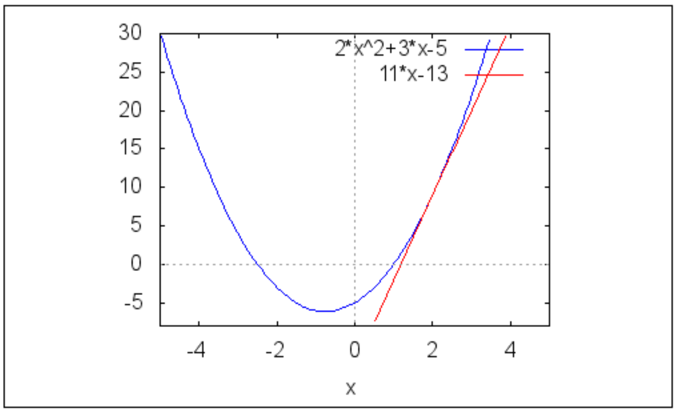
Ratkaisu :
$Dlnx = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$
$D(lnx)^4 = 4(lnx)^3 \cdot Dlnx = 4(lnx)^3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4(lnx)^3}{x}, \quad x \neq 0$

Esim. 13 Derivoi $Dlog_3(x^2 + 1)$.

Ratkaisu :
$Dlog_a x = \frac{1}{xlna}, \quad x > 0$
$Dlog_3(x^2 + 1) = \frac{D(x^2+1)}{(x^2+1)ln3} = \frac{2x}{(x^2+1)ln3}, \quad x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in R$

Esim. 14 Muodosta tangentin yhtälö. Tangentti sivuaa funktiota $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ pisteessä $(2, 9)$.

Ratkaisu :
Lasketaan tangentin kulmakerroin. Se saadaan derivoimalla funktio $f(x)$.
$f'(x) = 4x + 3$.
Tangentin kulmakerroin pisteessä $x = 2$ on $f'(2) = 4 \cdot 2 + 3 = 11$.
Tangentin yhtälö on $y - 9 = 11(x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad y = 11x - 13$.



Kuva 19: Funktio $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ ja tangentti pisteessä $(2, 9)$.

EXTRA ASIAA
Osamäärän derivaatta $D\frac{1}{g(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}, \quad g(x) \neq 0.$

Esim. 15 Derivoi $D(\frac{1}{3x^3+2x+10})$.

Ratkaisu :
$D(3x^3 + 2x + 10) = 9x^2 + 2$
$D(\frac{1}{3x^3+2x+10}) = \frac{-(9x^2+2)}{(3x^3+2x+10)^2} = \frac{-9x^2-2}{(3x^3+2x+10)^2}$

6.2 Ääriarvokohdat

Globaalit ääriarvokohdat ovat niitä kohtia, joissa funktio saa suurimmat ja pienimmät arvonsa. **Paikalliset ääriarvokohdat** ovat niitä kohtia, joissa funktio saa lähiympäristöönsä nähden suurimmat tai pienimmät arvonsa. Ääriarvokohdissa funktion kulku vaihtuu kasvavasta vähenevään tai vähenevästä kasvavaan, jos ääriarvokohta on jatkuva tässä kohdin. Ääriarvokohdat voivat olla funktion päätepisteissä, epäjatkuvuuskohdissa, derivaatan nollakohdissa ja jatkuvissa kohdissa, joissa derivaattaa ei ole. Jos funktio on jatkuva koko määrittelyaluellaan, niin silloin löytyy aina suurin ja pienin arvo. **Derivaattafunktiosta nähdään**, miten funktio käyttäytyy. Jos derivaattafunktion arvot ovat positiivisia, funktio on kasvava. Jos derivaattafunktion arvot ovat negatiivisia, funktio on vähenevä. Derivaattafunktion nollakohdat ilmoittavat, missä ovat funktion ääriarvokohdat tai **terassikohdat**. Terassikohdat ovat niitä kohtia, joissa kasvavalla funktiolla tulee välillä tasanne eli derivaatta on nolla, mutta funktio jatkaa kohta kasvamistaan. Samoin voi olla, että vähenevällä funktiolla tulee välillä tasanne, jossa derivaatta on nolla, mutta funktio jatkaa kohta vähenemistään.

Aidosti vähenevyys/kasvavuus :

- **Aidosti vähenevä funktio** vähenee koko ajan, sillä kun $a < b$, niin $f(a) > f(b)$.
- **Aidosti kasvava funktio** on kasvaa koko ajan, sillä kun $a < b$, niin $f(a) < f(b)$.

Ääriarvokohta, ääriarvo, ääriarvopiste :

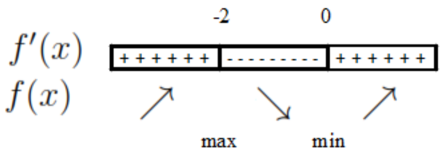
- Mikä on **ääriarvokohta**? Minikohda tai maksimikohta. Silloin ilmoitetaan vain x-arvo. Esim minimikohta $x = 2$.
- Mikä on **ääriarvo**? Miniarvo tai maksimiarvo. Silloin ilmoitetaan vain y-arvo. Esim miniarvo -3.
- Mikä on **ääriarvopiste**? Maksimipiste tai minimipiste. Silloin ilmoitetaan sekä x-arvo että y-arvo eli (x, y). Esim minimipiste $(2, -3)$.

Esim. 16 Funktio on $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.
a) Mitkä ovat funktion $f(x)$ nollakohdat?
b) Koska funktio $f(x)$ on kasvava?
c) Koska funktio $f(x)$ on vähenevä?
d) Mitkä ovat ääriarvokohdat, ääriarvot ja ääripisteet?
e) Määritä derivaatat $f'(-1)$ ja $f'(-2)$, mitä vastaukset kertovat?
f) Piirrä funktio $f(x)$ ja sen derivaattafunktio $f'(x)$.

Ratkaisu :

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
$(x - 1)(x + 2)(x + 2) = 0$
Funktion $f(x)$ nollakohdat $x = -2$ ja $x = 1$

b) Derivoidaan funktio $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.
$f'(x) = 3x^2 + 6x$
Lasketaan derivaatan nollakohdat eli $f'(x) = 0$.
$3x^2 + 6x = 0$
$3x(x + 2) = 0$
$x = 0$ tai $x + 2 = 0 \Leftrightarrow$ x=-2
Tehdään funktion kulkukaavio.

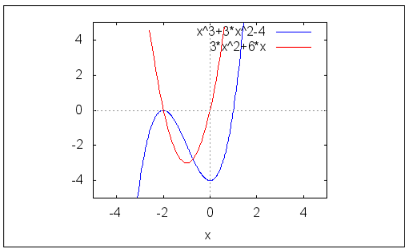


Kulkukaavio on täydennetty tiedoilla $f'(-3) = 9$, $f'(-1) = -3$, $f'(1) = 9$. Kulkukaaviosta nähdään.
Funktio $f(x)$ on kasvava välillä $x < -2$ ja $x > 0$

c) Funktio $f(x)$ on vähenevä välillä $-2 < x < 0$

d) Äärikohdat: minimikohta $x = 0$, maksimikohta $x = -2$
Ääriarvot: $(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4$, minimiarvo -4
$(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 0$, maksimiarvo 0
Ääripisteet: minimipiste $(0, -4)$, maksimipiste $(-2, 0)$

e) $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) = -3$. Funktion $f(x)$ kohdassa $x = -1$, tangentin kulmakerron on -3. Funktion on laskeva kohdassa $x = -1$.
$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 24$. Funktion $f(x)$ kohdassa $x = 2$, tangentin kulmakerron on 24. Funktion on nouseva kohdassa $x = 2$.



Kuva 20: Sininen funktio on $f(x)$ ja punainen funktio on derivaattafunktio $f'(x)$.

Esim. 17 Määritä funktion $f(x) = \frac{2x^2-3x}{2x+1}$ suurin ja pienin arvo välillä $[-10, 10]$.

Ratkaisu :
Funktiolla on epäjatkuvuus kohta $x = -\frac{1}{2}$, koska nimittäjä ei saa tulla nollaksi.
Derivoidaan funktio.
$f'(x) = \frac{(4x-3)(2x+1)-(2x^2-3x)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{8x^2+4x-6x-3-(4x^2-6x)}{(2x+1)^2} = \frac{8x^2+4x-6x-3-4x^2+6x}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2+4x-3}{(2x+1)^2}$

Derivaatan nollakohta lasketaan. Nollakohta lasketaan osoittajasta, koska funktio on rationaalifunktio.
$4x^2 + 4x - 3 = 0$
$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{8} = \frac{-4 \pm 8}{8}$
$x = -\frac{3}{2}$ tai $x = \frac{1}{2}$
Kummatkin derivaatan nollakohdista kuuluvat välille $[-10, 10]$ eivätkä ole funktion epäjatkuvuuskohtia.
Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa.
$f(-10) = \frac{2 \cdot (-10)^2 - 3 \cdot (-10)}{2 \cdot (-10) + 1} = -12\frac{2}{19}$
$f(10) = \frac{2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10}{2 \cdot 10 + 1} = 8\frac{2}{21}$
$f(-\frac{3}{2}) = \frac{2 \cdot (-\frac{3}{2})^2 - 3 \cdot (-\frac{3}{2})}{2 \cdot (-\frac{3}{2}) + 1} = -4\frac{1}{2}$
$f(\frac{1}{2}) = \frac{2 \cdot (\frac{1}{2})^2 - 3 \cdot (\frac{1}{2})}{2 \cdot (\frac{1}{2}) + 1} = -\frac{1}{2}$
Suurin arvo on $8\frac{2}{21}$. Pienin arvo on $-12\frac{2}{19}$.

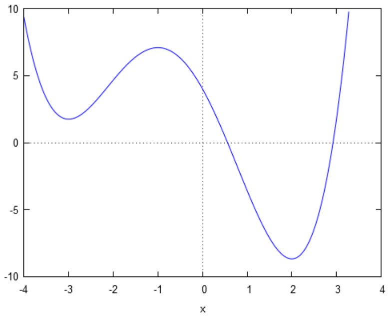
Moninkertaiset derivaatat
Funktiosta voidaan ottaa mahdollisesti **useampiakin derivaattoja**. Jos funktio derivoidaan kahdesti, saada helposti selville, onko ensimmäisellä derivoimisella ja derivaatan nollakohdan laskemisella saatu funktion ääriarvokohta funktion maksimi tai minimi.

- Jos funktio derivoidaan toisen kerran ja toisen kerran derivoituun funktioon sijoitetaan saatu ääriarvokohta ja saadaan positiivinen luku, on ääriarvokohta funktion minimikohta.
  $f''(c) > 0$, niin funktion f minimikohta on c.
- Jos funktio derivoidaan toisen kerran ja toisen kerran derivoituun funktioon sijoitetaan saatu ääriarvokohta ja saadaan negatiivinen luku, on ääriarvokohta funktion maksimikohta.
  $f''(c) < 0$, niin funktion f maksimikohta on c.

Esim. 18 Laske funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x + 4$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

Ratkaisu :
Lasketaan funktion ensimmäinen derivaatta $f'(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.
Lasketaan derivaatan nollakohdat ja saadaan nollakohdiksi $x = -1$, $x = 2$ ja $x = -3$.
Derivoidaan uudestaan funktio $f''(x) = 3x^2 + 4x - 5$.
$f''(-1) = -6 < 0$, maksimikohta on $x = -1$
$f''(2) = 15 > 0$, minimikohta on $x = 2$
$f''(-3) = 10 > 0$, maksimikohta on $x = -3$

Ääriarvo kohdat saadaan sijoittamalla x-arvot alkuperäiseen funktioon.
$f(-1) = 7\frac{1}{12}$
$f(2) = -8\frac{2}{3}$
$f(-3) = 1\frac{3}{4}$



Kuva 21: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x + 4$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

6.3 Sovellukset

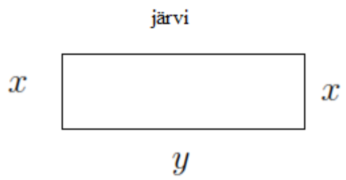
Derivaatan ääriarvolaskujen avulla voidaan laskea monenlaisia probleemia. Esimerkiksi koska pinta-ala on pienin, tilavuus on suurin, myynti kannattavin. Sovellustehtävä kannattaa suunnitella hyvin ja tehdä vaihe vaiheelta.

Ääriarvosovellustehtävän vaiheet :

- Lue tehvävänanto hyvin. Kerää annetut käsitteet.
- Piirrä kuva, jos on mahdollista. Valitse muuttujat.
- Keksi muuttujien väliset yhteydet.
- Selvitä rajoitusehdot. Laske määrittelyalue.
- Muodosta lauseke funktiolle. Lausekkeessa on vain yksi muuttuja.
- Laske derivaatta. Laske derivaatan nollakohdat. Katso, kuuluvatko derivaatan nollakohdat määrittelyalueelle.
- Tarvittaessa selvitä funktion kulku funktion kulkukaaviosta.
- Selvitä suurin tai pienin arvo.
- Kirjoita vastaus kysymykseen.
- Tarkista tai päättele, voiko vastauksesi olla oikea.

Esim. 19 Kalle halusi tehdä hevoselleen mahdollisimman suuren aitauksen järven rannalle. Yhtenä aitauksen sivuna oli järvenranta, johon aitaa ei tarvittu. Kallella oli ollut varaa ostaa aitamateriaalia vain 400 metriä. Kalle halusi rakentaa hevoselleen suorakulmion muotoisen aitauksen. Kuinka pitkä ja leveä aitaus tulisi olemaan? Mikä olisi aitauksen pinta-ala?

Ratkaisu :
Kuva aitauksesta ja järvestä.



Valitaan muuttujat. Aitauksen leveys on x ja pituus y.
Tehdään yhtälö aitauksen sivuista ja aidan määrästä. $2x + y = 400$.
Ratkaistaan yhtälö y suhteen. $2x + y = 400 \quad \Leftrightarrow \quad y = 400 - 2x$.

Rajoitukset: Sivut ovat positiivisia lukuja.
$x > 0$ ja $400 - 2x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x < 400 \quad \Leftrightarrow \quad x < 200$

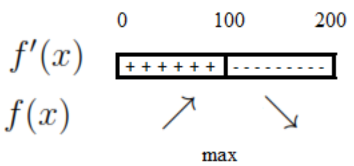
Määrittelyalue $0 < x < 200$

Aitauksen ala lasketaan kaavalla $f(x) = xy$.
Muodostetaan yhtälö, kun pituus on $y = 400 - 2x$.
$f(x) = xy = x(400 - 2x) = 400x - 2x^2$

Derivoidaan yhtälö.
$f'(x) = 400 - 4x$

Lasketaan derivaatan nollakohta. $f'(x) = 0$.
$400 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 400 \quad \Leftrightarrow \quad x = 100$.

Tehdään **funktion kulkukaavio**.



Vastaus: Aitauksen leveys on 100 metriä, pituus on $400 - 2 \cdot 100 = 200$. Aitauksen pinta-ala $100 \cdot 200 = 20000\ m^2$ tai toisella kaavalla $f(100) = 400 \cdot 100 - 2 \cdot (100)^2 = 20000\ m^2$.

Tarkistus: $2 \cdot 100 + 200 = 400$ metriä aitaa.

EXTRA ASIAA
Derivointia käytetään hyväksi laskettaessa **virhearviointeja**. Virhelaskenta laskuissa on usean muuttujan funktio, jossa on erilaisia muuttujia $f(x, y, z, ...)$. Virhelaskennassa lasketaan osittaisderivaattoja. Merkintä $\frac{\partial f}{\partial x}$ tarkoittaa, että funktio f derivoidaan x suhteen ajattelemalla, että muut muuttujat ovat vakiota. $\frac{\partial f}{\partial y}$ tarkoitaa, että funktio f derivoidaan y suhteen ajattelemalla, että muut muuttujat ovat vakiota jne. Osittaisdifferentiaaleiksi sanotaan tuloja $\frac{\partial f}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f}{\partial y}dx$, missä dx ja dy merkitsevät muutosta, joka muuttujissa x ja y on tapahtunut. Näiden osoittaisdifferentiaalien summaa kutsutaan kokonaisdifferentiaaliksi $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + ...$ Tavoite on laskea mahdollisimman suuri yläraja-arvio virheelle. Niinpä jokaista virhearvointia pidetään positiivisena lukuna, jotta eri virheet laskussa eivät kumoaisi toisiaan. Näin ollen virhearvointi lasku on muodossa $\triangle f = |\frac{\partial f}{\partial x}|dx + |\frac{\partial f}{\partial y}|dy + ...$

Esim. 20 Laske funktion $f = bx^3y^2$ virhe $\triangle f$. Muuttujia ovat x ja y. Tarkka-arvo on b.

Ratkaisu :
Lasketaan osittaisderivaatat. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3bx^2y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2bx^3y$
Virhearvio on suurimmillaan $\triangle f \leq |3bx^2y^2|dx + |2bx^3y|dy$

Kokonaisdifferentiaalia voidaan käyttää myös hyväksi, kun arvioidaan, miten paljon funktion arvo muuttuu.

Esim. 21 Laske funktion $f = bx^3y^2$ arvon muutos $\triangle f$. Kun muuttuja x muuttuu $5 \to 5,05$ ja muuttuja y muuttuu $3 \to 2,95$. Tarkka-arvo b on 2.

Ratkaisu :
Lasketaan osittaisderivaatat. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3bx^2y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2bx^3y$
$f_x(5,3) = 1350$, $f_y(5,3) = 1500$, $dx = 0,05$, $dy = -0,05$
Kokonaisdifferentiaalin avulla laskettu $\triangle f = (3bx^2y^2) \cdot dx + (2bx^3y) \cdot dy = 1350 \cdot 0,05 + 1500 \cdot (-0,05) = -7,5$.
Lasketaan tarkat arvot, ja verrataan tarkkojen arvojen erotusta kokonaisdifferentiaalilla saatuun vastaukseen.
$f(5,3) = 2 \cdot 5^3 \cdot 3^2 = 2250$ ja $f(5,05, 2,95) = 2 \cdot 5,05^3 \cdot 2,95^2 = 2241,5$
Erotus on $2241,5 - 2250 = -8,5$. Kokonaisdifferentiaalilla saatu vastaus heitti $11,8$ %.

Tehtäviä

67 Määritä funktion $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x$ muutosnopeus kohdassa $x = 2$.

68 Muodosta tangentin yhtälö. Tangentti sivuaa funktiota $f(x) = x^3+2x+1$ pisteessä $(-1, 2)$.

69 Derivoi.
a) $f(x) = 5x^7 + 6x + 5$
b) $m(x) = (x^2 + 1)(3x^2 + 2x - 2)$
c) $k(x) = (4x - 5)^4$
d) $f(x) = \frac{3x+2}{x-2}$
e) $D(10e^x)$
f) $D(e^{4x^4-2x})$

70 Derivoi.
a) $g(x) = 200^x$
b) $h(x) = 7^{x^2+2x+1}$
c) $Dlog_4(x^3 + 2x)$
d) $Dln(6x^3)$
e) $D(lnx)^5$

71 Funktion on $f(x) = x^3 - x$.
a) Mitkä ovat funktion $f(x)$ nollakohdat?
b) Koska funktio $f(x)$ on kasvava?
c) Koska funktio $f(x)$ on vähenevä?
d) Mitkä ovat ääriarvokohdat, ääriarvot ja ääripisteet?
e) Määritä derivaatat $f'(-2)$ ja $f'(1/2)$, mitä vastaukset kertovat?
f) Piirrä funktio $f(x)$ ja sen derivaatta funktio $f'(x)$.

72 Roope-ankka suunnittelee työhuoneeseensa suorakulmion muotoista muotokuvaa itsestään. Taulun pinta-ala tulee olemaan 4 m^2. Taulun kehykset valmistetaan kullasta. Roope-ankan tavoite on, että kultaa kuluu mahdollisimman vähän kehyksiin. Laske, taulun mitat.

7 Integraalifunktio

7.1 Integraali

Edellisessä luvussa puhuimme derivoimisesta. Jos derivoidaan funktio $f(x)$ saadaan derivointifunktio $f'(x)$. Jos derivointifunktio $f'(x)$ halutaan saada takaisin alkuperäiseksi funktioksi $f(x)$ joudutaan integroimaan. Jos integroidaan derivoitu funktio $f'(x)$ saadaan melkein alkuperäinen funktio $f(x)$ paitsi ei vakiota, jollei laskulla ole jokin alkuehto. Haluttua, etsittyä funktiota kutsutaan integraalifunktioksi $F(x)$. Derivoiminen ja integroiminen ovat käänteislaskutoimitukset, niin kuin kerto- ja jakolasku ovat toistensa käänteislaskutoimituksia. Integroinnin tunnus on $\int$-merkki lausekkeen edessä ja lopussa dx, jos integroidaan lauseke x suhteen.
$\int f(x)dx = F(x) + C$. Kirjainta C sanotaan integraalivakioksi ja $C \in \mathbf{R}$.
Funktion derivoimisen avulla saadaa tietoja funktion muutosnopeuksista. Kun integroidaan muutosnopeuksia ilmaiseva funktio, saadaan tietoja määristä.

Integraalilaskusääntöjä :

- Vakiofunktion integraali $\int kdx = kx + C$
- Potenssifunktion integraali $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$
- Vakion siirtäminen integroinnissa $\int (k \cdot f(x))dx = k \cdot \int f(x)dx$
- Summan integraali $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- Funktion $\frac{1}{x}$ integraali $\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + C, \quad x \neq 0$ kaikilla väleillä
- Yhdistetyn funktion integraali $\int (f(x))^n \cdot f'(x)dx = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + C$
- Yhdistetyn funktion integraali $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)| + C, \quad$ väleillä joilla $f(x) \neq 0$
- Eksponenttifunktion integraali $\int e^x dx = e^x + C, \quad \int f'(x)e^{f'(x)}dx = e^{f(x)} + C$
- Eksponenttifunktion integraali $\int a^x dx = \frac{1}{lna}a^x + C$
- Paloittain määritellyn funktion integraali on aina jatkuva, sillä integraalifunktio on jatkuva, koska derivaattafunktio on jatkuva.
- Osittaisintegrointi $\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x), \quad$ funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ ovat derivoituvia funktioita.
- Rationaalifunktion integraalia laskiessa kokeile myös vaihtoehtoja:

1. Jos nimittäjässä on vain yksi termi, jaa sillä osoittaja termeittäin. Integroi termit.

2. Lisää ja vähennä osoittajaan sama vakio. Jaa osoittaja termeihin. Integroi termit.

3. Kun osoittajan asteluku on suurempi kuin nimittäjän, jaa osoittaja nimittäjällä jakokulmassa.

- Jos jako menee tasan, integroi osamäärä.
- Jos jako ei mene tasan, muodosta osamäärä ja jakojäännös. Integroi osamäärä ja jakojäännös.

4. Jos osoittajan asteluku on pienempi kuin nimittäjän asteluku, tällöin muodostetaan osamurtokehitelmä.
$R(x) = \frac{P(x)}{a(x-x_1)\cdots(x-x_x)} = \frac{a_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{a_n}{x-x_n}$

Summan integraali

Esim. 1 Integroi $\int (x^3+2)dx$.

Ratkaisu :
$\int (x^3+2)dx = \int x^3 dx + \int 2dx = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + 2x + C = \frac{1}{4}x^4 + 2x + C$

Potenssifunktion integraali

Esim. 2 Integroi $\int \frac{1}{x^4}dx$.

Ratkaisu :
$\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + C = \frac{1}{-3}x^{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$

Esim. 3 Integroi $\int \sqrt[5]{x^4}dx$.

Ratkaisu :
$\int \sqrt[5]{x^4}dx = \int x^{\frac{4}{5}}dx = \frac{1}{\frac{4}{5}+1}x^{\frac{4}{5}+1} + C = \frac{1}{\frac{9}{5}}x^{\frac{9}{5}} + C = \frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}} + C = \frac{5}{9}x\sqrt[5]{x^4} + C$

Funktion $\frac{1}{x}$ integraali

Esim. 4 Integroi $\int \frac{6}{x}dx$.

Ratkaisu :
$\int \frac{6}{x}dx = 6\int \frac{1}{x}dx = 6 \cdot ln|x| + C, \quad x \neq 0$

Yhdistetyn funktion integraali

Esim. 5 Integroi $\int x(4x^2+2)^4 dx$.

Ratkaisu :
$\int x(4x^2+2)^4 dx = \int \frac{1}{8} \cdot 8 \cdot x(4x^2+2)^4 dx = \frac{1}{8}\int 8x(4x^2+2)^4 dx =$
$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5}(4x^2+2)^5 + C = \frac{1}{40}(4x^2+2)^5 + C$

Esim. 6 Integroi $\int \frac{2}{4x+5}dx$.

Ratkaisu :
$\int \frac{2}{4x+5}dx = \int \frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{4x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{4}{4x+5}dx = \frac{1}{2}ln|4x+5| + C$

Eksponenttifunktion integraali

Esim. 7 Integroi $\int x^3e^{x^4}dx$.

Ratkaisu :
$\int x^3e^{x^4}dx = \int \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^3e^{x^4}dx = \frac{1}{4}\int 4x^3e^{x^4}dx = \frac{1}{4}e^{x^4} + C$

Esim. 8 Integroi $\int 3^x dx$.

Ratkaisu :
$\int 3^x dx = \frac{1}{ln3} \cdot 3^x + C$

Osittaisintegrointi

Esim. 9 Integroi $\int x^2 lnx dx$.

Ratkaisu :
Muodostetaan kaikki vaihtoehdot $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ ja sijoitetaan nämä sitten osittaisintegrointikaavaan.
$f(x) = lnx$, $g(x) = \frac{1}{3}x^3$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = x^2$
$\int x^2 lnx dx = lnx \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^3 lnx}{3} - \int \frac{1}{3}x^2 = \frac{x^3 lnx}{3} - \frac{1}{9}x^3 + C$

Rationaalifunktion integraali

Esim. 10 Integroi $\int \frac{x^4-x^2}{x^2}dx$.

Ratkaisu :
$\int \frac{x^4-x^2}{x^2}dx = \int (\frac{x^4}{x^2} - \frac{x^2}{x^2})dx = \int (x^2-1)dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C, \quad x \neq 0$

Esim. 11 Integroi $\int \frac{4x}{x+6}dx$.

Ratkaisu :
$\int \frac{4x}{x+6}dx = 4\int \frac{x+6-6}{x+6}dx = 4\int (\frac{x+6}{x+6} + \frac{-6}{x+6})dx = 4\int (\frac{x+6}{x+6} - \frac{6}{x+6})dx =$
$4\int (1 - 6\frac{1}{x+6})dx = 4(x - 6 \cdot ln|x+6|) + C = 4x - 24 \cdot ln|x+6| + C, \quad x \neq -6$

Esim. 12 Integroi $\int \frac{x^3+8x^2+19x+12}{x+1}dx$.

Ratkaisu :
$\int \frac{x^3+8x^2+19x+12}{x+1}dx = \int (x^2+7x+12)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 12x + C, \quad x \neq -1$

Esim. 13 Integroi $\int \frac{x^3+5x+2}{x+2}dx$.

Ratkaisu :
$\int \frac{x^3+5x+2}{x+2}dx = \int (x^2 - 2x + 9 - \frac{16}{x+2})dx =$
$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 9x - 16 \cdot ln|x+2| + C, \quad x \neq -2$

Esim. 14 Integroi $\int \frac{1}{x(x+3)(x-3)}dx$.

Ratkaisu :
Muodostetaan osamurtokehitelmä $\frac{1}{x(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-3}$.
Määrittelyehto $\quad x \neq -3$, $x \neq 0$, $x \neq -3$.
Kerrotaan yhtälö puolittain $x(x+3)(x-3)$.
Saadaan yhtälö $1 = A(x+3)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+3)$.
Lasketaan auki oikea puoli ja järjestellään termit ryhmiin.
$1 = A(x^2-9) + B(x^2-3x) + C(x^2+3x)$
$1 = (A+B+C)x^2 + (-3B+3C)x - 9A$
Muodostetaan yhtälöryhmä, joka ratkaistaan.

$$\begin{cases} \text{A+B+C=0} \\ \text{-3B+3C=0} \\ \text{-9A=1} \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan $A = -\frac{1}{9}$, $B = \frac{1}{18}$ ja $C = \frac{1}{18}$.
Näin ollen saamme $\int \frac{1}{x(x+3)(x-3)}dx = \int -\frac{\frac{1}{9}}{x} + \frac{\frac{1}{18}}{x+3} + \frac{\frac{1}{18}}{x-3} =$
$-\frac{1}{9}lnx + \frac{1}{18}ln|x+3| + \frac{1}{18}ln|x-3| + C$

Integraalifunktion määrittäminen

Esim. 15 Määritä funktion $f(x)$ integraalifunktio $F(x)$, joka kulkee pisteen $(0,2)$ kautta. Tiedetään, että $f(x) = 5x^4 + 4x^3 + 2x - 1$.

Ratkaisu :
Integraalifunktio $F(x) = \int (5x^4 + 4x^3 + 2x - 1)dx = x^5 + x^4 + x^2 - x + C$
$F(0) = 0^5 + 0^4 + 0^2 - 0 + C = 2$ eli $C = 2$.
Integraalifunktion on $F(x) = x^5 + x^4 + x^2 - x + 2$

Integraali paloittain määritellystä funktiosta

Esim. 16 Määritä funktion $f(x)$ integraali.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{, kun x} \leq 3 \\ 2x-4 & \text{, kun x} > 3 \end{cases}$$

Ratkaisu :
Vasemmanpuoleinen raja-arvo

$$\lim_{x \to 3-} 2 = 2$$

Oikeanpuoleinen raja-arvo

$$\lim_{x \to 3+} 2x - 4 = 2 \cdot 3 - 4 = 2$$

Funktion arvo
$f(3) = 2$
Koska funktio on jatkuva pisteessä $x = 3$, niin sillä on integraalifunktio $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 2x + C & \text{, kun x} \leq 3 \\ x^2 - 4x + C_1 & \text{, kun x} > 3 \end{cases}$$

Integraalifunktion $F(x)$ täytyy olla myös jatkuva.
$F(3) = \lim_{x \to 3-} F(x) = \lim_{x \to 3+} F(x)$
$2 \cdot 3 + C = 3^2 - 4 \cdot 3 + C_1$
$6 + C = 9 - 12 + C_1$
$C_1 = C + 9$
Integraalifunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 2x + C & \text{, kun x} \leq 3 \\ x^2 - 4x + C + 9 & \text{, kun x} > 3 \end{cases}$$

7.2 Määrätty integraali, pinta-ala

Kun integraalitunnukseen $\int$ merkitään luvut merkin ylä- ja alapuolelle, puhutaan määrätystä integraalista. esim. $\int_1^2 f(x)dx$. Määrätyn integraalin avulla voidaan laskea pinta-aloja. Luvut integraalimerkin yhteydessä kertovat, mistä pinta-ala lasketaan. Esimerkin tapauksessa puhutaan funktion $f(x)$ määrätystä integraalista 1:stä 2:teen.

Määrätyn integraalin laskusääntöjä :

- Vaihdetaan integroimisrajat $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- Vakion siirtäminen integroinnissa $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$
- Summan integraali $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- Integroimisalueen jakaminen pienimpiin jakoihin $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Esim. 17 Integroi $\int_1^e x^2 lnxdx$ (Sama tehtävä kuin 9, mutta nyt on vain lisätty integroimisrajat.)

Ratkaisu :
Muodostetaan kaikki vaihtoehdot $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ ja sijoitetaan nämä sitten osittaisintegrointikaavaan.
$f(x) = lnx$, $g(x) = \frac{1}{3}x^3$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = x^2$
$\int_1^e x^2 lnxdx = |_1^e lnx \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int_1^e \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^3 lne}{3} - \int_1^e \frac{1}{3}x^2 = \frac{e^3 lne}{3} - |_1^e \frac{1}{9}x^3 = \frac{e^3 lne}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}$

Erilaisten pinta-alojen laskemiskaavoja: :

Funktion ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala :

- Funktio $f(x)$ on jatkuva, integroituva, $f(x) \geq 0$ ja $x \in [a, b]$. Kun halutaan laskea pinta-ala, jota rajoittavat funktio $f(x)$, x-akseli, suorat $x = a$ ja $x = b$, lasketaan pinta-ala kaavalla $A = \int_a^b f(x)dx$.
- Funktio $f(x)$ on jatkuva, integroituva, $f(x) \leq 0$ ja $x \in [a, b]$. Kun halutaan laskea pinta-ala, jota rajoittavat funktio $f(x)$, x-akseli, suorat $x = a$ ja $x = b$, lasketaan pinta-ala kaavalla $A = -\int_a^b f(x)dx$.

Esim. 18 Laske pinta-ala, jota rajaavat suora $y = 3x + 1$, x-akseli ja suorat $x = 1$ ja $x = 4$.

Ratkaisu :
Funktio $f(x) \geq 0$, kun $x \in [1, 4]$.
$A = \int_1^4 (3x+1)dx = |_1^4 (\frac{3}{2}x^2 + x) = (\frac{3}{2} \cdot 4^2 + 4) - (\frac{3}{2} \cdot 1^2 + 1) = (\frac{3}{2} \cdot 16 + 4) - (\frac{3}{2} + 1) = (24 + 4) - (2\frac{1}{2}) = 28 - 2\frac{1}{2} = 25\frac{1}{2}$

Esim. 19 Laske pinta-ala, jota rajaavat suora $y = 2x - 6$ ja x-akseli välillä $[-1, 6]$.

Ratkaisu :
Lasketaan suoran nollakohta $2x-6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$. Pinta-ala jaetaan kahteen alueeseen: x-akselin yläpuolella olevaan alueeseen, kun $x \in [3, 6]$ ja x-akselin alupuoleiseen alueseen, kun $x \in [-1, 3]$.
$A = \int_{-1}^{6}(2x - 6)dx = -\int_{-1}^{3}(2x - 6)dx + \int_{3}^{6}(2x - 6)dx = -|_{-1}^{3}(x^2 - 6x) + |_{3}^{6}(x^2 - 6x) = -[(3^2 - 6 \cdot 3) - ((-1)^2 - 6\dot{(} - 1)] + [(6^2 - 6 \cdot 6) - ((3)^2 - 6 \cdot 3) = -[(9-18)-(1+6)]+[(36-36)-(9-18)] = -(-9-7)+(0+9) = 16+9 = 25$

Funktion ja y-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala :

- Funktio $f(y)$ on jatkuva, integroituva, $f(y) \geq 0$ ja $y \in [a, b]$. Kun halutaan laskea pinta-ala, jota rajoittavat funktio $f(y)$, y-akseli, suorat $y = a$ ja $y = b$, lasketaan pinta-ala kaavalla $A = \int_a^b f(y)dy$.
- Funktio $f(y)$ on jatkuva, integroituva, $f(y) \leq 0$ ja $y \in [a, b]$. Kun halutaan laskea pinta-ala, jota rajoittavat funktio $f(y)$, y-akseli, suorat $y = a$ ja $y = b$, lasketaan pinta-ala kaavalla $A = -\int_a^b f(y)dy$.

Esim. 20 Laske pinta-ala, jota rajaavat käyrä $y = 2x^3 + 2$ ja y-akseli, kun $x \in$[-2,2].

Ratkaisu :
Muodostetaan funktion $f(x) = 2x^3 + 2$ käänteisfunktio.
$y = 2x^3 + 2$
$2x^3 = y - 2 \quad |:2$
$x^3 = \frac{1}{2}y - 1 \quad | \sqrt[3]{}$
$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}y - 1} = f(y)$

Ratkaistaan integroimisväli sijoittamalla alueen päätepisteet funktioon.
$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 2 = -14$
$f(2) = 2 \cdot (2)^3 + 2 = 18$
Lasketaan, koska funktio $f(x)$ leikkaa y-akselin.
$f(0) = 2 \cdot (0)^3 + 2 = 2$

Saadaan kaksi aluetta.

- Funktio $f(y) \geq 0$, kun $y \in$[2,18]
$A_1 = \int_2^{18} \sqrt[3]{\frac{1}{2}y - 1}dy = \int_2^{18}(\frac{1}{2}y - 1)^{\frac{1}{3}}dy = \int_2^{18} 2 \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{2}y - 1)^{\frac{1}{3}}dy = 2\int_2^{18} \frac{1}{2}(\frac{1}{2}y - 1)^{\frac{1}{3}}dy = 2|_2^{18} \frac{1}{\frac{1}{3}+1}(\frac{1}{2}y - 1)^{\frac{1}{3}+1} = 2|_2^{18}\frac{3}{4}(\frac{1}{2}y - 1)^{\frac{4}{3}} = 2|_2^{18}\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\frac{1}{2}y - 1)^4} =$
$2(\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\frac{1}{2} \cdot 18 - 1)^4} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(\frac{1}{2} \cdot 2 - 1)^4}) = 2(\frac{3}{4}\sqrt[3]{(9 - 1)^4} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1 - 1)^4}) =$
$2(\frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4} - 0) = 2(\frac{3}{4}\sqrt[3]{4096}) = 2(\frac{3}{4} \cdot 16) = 2(3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$

- Funktio $f(y) \leq 0$, kun $y \in$[-14,2]
$A_2 = -\int_{-14}^{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}y - 1}dy = \cdots = -2|_{-14}^{2} \frac{3}{4}\sqrt[3]{(\frac{1}{2}y - 1)^4} =$
$-2(\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\frac{1}{2} \cdot 2 - 1)^4} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(\frac{1}{2} \cdot (-14) - 1)^4}) = -2(\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-1)^4} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(-7-1)^4}) =$
$-2(0 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(-8)^4}) = -2(-\frac{3}{4}\sqrt[3]{4096}) = 2(\frac{3}{4} \cdot 16) = 2(3 \cdot 4) = 24$

Koko pinta-ala on $A = A_1 + A_2 = 24 + 24 = 48$

Funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ väliin jäävän alueen pinta-ala :

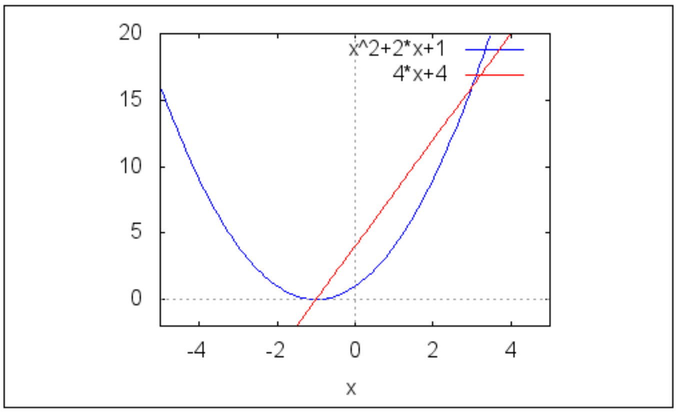
- On kaksi funktiota $f(x)$ ja $g(x)$. Funktioiden suuruusjärjestys on $f(x) \geq g(x) \geq 0$ ja $x \in [a, b]$. Kun halutaan laskea pinta-ala, jota rajoittavat funktiot $f(x)$ ja $g(x)$, suorat $x = a$ ja $x = b$, lasketaan pinta-ala kaavalla $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

Funktioiden $f(y)$ ja $g(y)$ väliin jäävän alueen pinta-ala :

- On kaksi funktiota $f(y)$ ja $g(y)$. Funktioiden suuruusjärjestys on $f(y) \geq g(y) \geq 0$ ja $y \in [a, b]$. Kun halutaan laskea pinta-ala, jota rajoittavat funktiot $f(y)$ ja $g(y)$, suorat $y = a$ ja $y = b$, lasketaan pinta-ala kaavalla $A = \int_a^b (f(y) - g(y))dy$.

Esim. 21 Laske funktioiden $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ja $g(x) = 4x + 4$ väliin jäävän alueen pinta-ala.

Ratkaisu :
Lasketaan funktioden leikkauskohdat.
$f(x) = g(x)$
$x^2 + 2x + 1 = 4x + 4$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$x = -1$ tai $x = 3$
Leikkauskohdat ovat -1 ja 3.
Selvitetään, kumpi funktiosta saa korkeampia arvoja välillä $[-1, 3]$.
$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1$
$g(0) = 4 \cdot 0 + 4 = 4$ eli $g(x) \geq f(x)$.
Lasketaan funktioden väliin jäävä alue, kun $g(x) \geq f(x)$ ja $x \in$[-1,3].
$A = \int_{-1}^{3}(g(x) - f(x))dx = \int_{-1}^{3}[(4x + 4) - (x^2 + 2x + 1)]dx =$
$\int_{-1}^{3}(4x + 4 - x^2 - 2x - 1)dx = \int_{-1}^{3}(-x^2 + 2x + 3)dx = |_{-1}^{3}(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x) =$
$(-\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3^2 + 3 \cdot 3) - (-\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + 3 \cdot (-1)) = (-9 + 9 + 9) - (\frac{1}{3} + 1 - 3) =$
$9 + 1\frac{2}{3} = 10\frac{2}{3}$



Kuva 22: Lasketaan funktioden $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$ ja $g(x) = 4x + 4$ välinen ala.

Esim. 22 Laske suorien $y = -x+6$, $g(y) = -y^2+4y+2$ väliin jäävän alueen pinta-ala.

Ratkaisu :
Funktio $g(y) = -y^2+4y+2$ ilmaistaan muuttujan y avulla. Ilmaistaan suora $y = -x + 6$ myös muuttujan y avulla.
$y = -x + 6 \Leftrightarrow x = 6 - y = f(y)$.
Lasketaan funktioden leikkauskohdat. $g(y) = f(y)$.
$-y^2 + 4y + 2 = 6 - y$
$-y^2 + 5y - 4 = 0$
$y = 1$ tai $y = 4$.
Leikkauskohdat ovat $y = 1$ ja $y = 4$.
Lasketaan, kumpi funktio saa korkeimpia arvoja välillä, kun $y \in [1,4]$.
$g(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 2 = 6$ ja $f(2) = 6 - 2 = 4$. Siis $g(y) \geq f(y)$.
Lasketaan funktioiden väliin jäävän alueen pinta-ala.
$A = \int_1^4 (g(y) - f(y))dy = \int_1^4 [(-y^2 + 4y + 2) - (6 - y)]dy =$
$\int_1^4 (-y^2 + 4y + 2 - 6 + y)dy = \int_1^4 (-y^2 + 5y - 4)dy = |_1^4 (-\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 4y) =$
$-\frac{1}{3} \cdot 4^3 + \frac{5}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 - (-\frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{5}{2} \cdot 1^2 - 4 \cdot 1) = -\frac{64}{3} + 40 - 16 - (-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4) =$
$2\frac{2}{3} + 1\frac{5}{6} = 4\frac{1}{2}$

7.3 Tilavuus

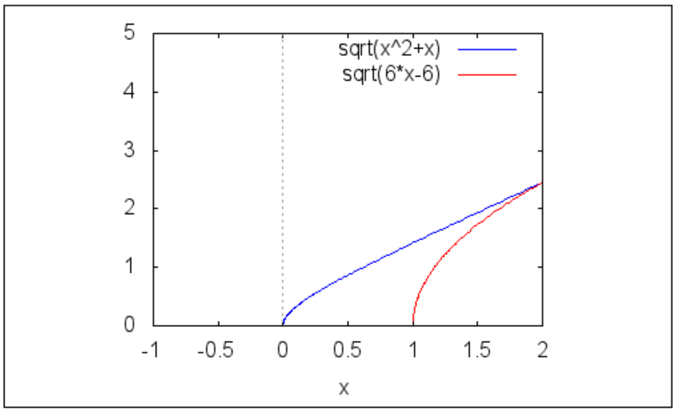
- Funktio $f(x)$ on jatkuva, integroiva, kun $x \in [a, b]$. Kun tämä funktio $f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri, muodostuu kappale. Pyörähdyskappaleen tilavuus voidaan laskea kaavalla $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$. Pyörähdyssäde on $y = f(x)$.

- Funktio $f(x)$ on jatkuva, integroituva, kun $x \in [a,b]$. Kun tämä funktio $f(x)$ pyörähtää ympäri suoran $y = c$, muodostuu kappale. Pyörähdyskappaleen tilavuus lasketaan kaavalla $V = \pi \int_a^b (f(x) - c)^2 dx$.

- Funktio $f(y)$ on jatkuva, integroiva, kun $y \in [a,b]$. Kun tämä funktio $f(y)$ pyörähtää y-akselin ympäri, muodostuu kappale. Pyörähdyskappaleen tilavuus voidaan laskea kaavalla $V = \pi \int_a^b f(y)^2 dy$. Pyörähdyssäde on $x = f(y)$.

Esim. 23 Funktiot $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ ja $g(x) = \sqrt{6x - 6}$ pyörähtävät x-akselin ympäri välillä $[0,2]$. Laske muodostuneen kappaleen tilavuus.

Ratkaisu : Pyörähdyskappaleen ulkopinta leikkaa x-akselin pisteessä $x = 0$.
$(\sqrt{0^2 + 0} = 0)$
Pyörähdyskappaleen ulkopinnan tilavuus on
$V_{ulkopinta} = \pi \int_0^2 (\sqrt{x^2 + x})^2 dx = \pi \int_0^2 (x^2 + x) dx = \pi |_0^2 (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2) =$
$\pi(\frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 - (\frac{1}{3} \cdot 0^3 + \frac{1}{2} \cdot 0^2)) = \pi(\frac{8}{3} + 2 - 0) = 4\frac{2}{3}\pi$.
Pyörähdyskappaleen sisäpinta leikkaa x-akselin pisteessä $x = 1$.
$(\sqrt{6 \cdot 1 - 6} = 0)$
Pyörähdyskappaleen sisäpinnan tilavuus on
$V_{paraboloidi} = \pi \int_1^2 (\sqrt{6x - 6})^2 dx = \pi \int_1^2 (6x - 6) dx = \pi |_1^2 (3x^2 - 6x) =$
$\pi(3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - (3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1)) = \pi(12 - 12 - (3 - 6)) = 3\pi$
Kappaleen tilavuus on
$V = V_{ulkopinta} - V_{paraboloidi} = 4\frac{2}{3}\pi - 3\pi = 1\frac{2}{3}\pi$.



Kuva 23: Funktiot $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ ja $g(x) = \sqrt{6x - 6}$ muodostavat kappaleen pyörähtäessään $x-$akselin ympäri välillä $[0,2]$.

Esim. 24 Funktio $f(x) = 3x + 5$ pyörähtää suoran $y = 1$ ympäri välillä $[-1, 5]$. Laske muodostuneen kappaleen tilavuus.

Ratkaisu :
Kappaleen tilavuus on
$V = \pi \int_{-1}^{5} (3x + 5 - 1)^2 dx = \pi \int_{-1}^{5} (3x + 4) dx = \pi |_{-1}^{5} (\frac{3}{2}x^2 + 4x) =$
$\pi[\frac{3}{2} \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 - (\frac{3}{2} \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1))] = \pi[37\frac{1}{2} + 20 - (\frac{3}{2} - 4)] = \pi(57\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}) = 60\pi$

Esim. 25 Funktio $f(x) = x + 5$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $(-4, 4)$.

Ratkaisu :
Muodostetaan funktiosta $f(x) = x + 5$ käänteisfunktio $f^{-1}(y)$.
$y = x + 5 \Leftrightarrow x = y - 5$
Lasketaan, millä välillä kappale pyörähtää y-akselilla.
$f(-4) = -4 + 5 = 1$ ja $f(4) = 4 + 5 = 9$
Kappaleen tilavuus on
$V = \pi \int_{1}^{9} (y - 5)^2 dy = \pi \int_{1}^{9} (y^2 - 10y + 25) dy = \pi |_{1}^{9} (\frac{1}{3}y^3 - 5y^2 + 25y) =$
$\pi[\frac{1}{3} \cdot 9^3 - 5 \cdot 9^2 + 25 \cdot 9 - (\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 25 \cdot 1)] = \pi[243 - 405 + 225 - (\frac{1}{3} - 5 + 25)] =$
$\pi(63 - 20\frac{1}{3}) = 42\frac{2}{3}\pi$

Tehtäviä

73 Integroi.
a) $\int(x^4+2x+3)dx$
b) $\int \frac{1}{x^7}dx$
c) $\int \sqrt[6]{x^5}dx$
d) $\int \frac{7}{x}dx$
e) $\int x(6x^2+3)^5dx$

74 Integroi.
a) $\int \frac{3}{9x+4}dx$
b) $\int x^3e^{x^4}dx$
c) $\int 5^x dx$
d) $\int \frac{x^6-x^4}{x^3}dx$
e) $\int \frac{3x}{5+x}dx$
f) $\int \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-3}dx$
g) $\int \frac{x^3+3x^2+3x+10}{x+1}dx$

75 Määritä funktion $f(x)=3x^2+6x+1$ integraalifunktio $F(x)$, joka kulkee pisteen $(2,2)$ kautta.

76 Määritä funktion $g(x)$ integraali.

$$g(x)=\begin{cases} 4 & \text{, kun x} \leq 2 \\ 5x-6 & \text{, kun x} > 2 \end{cases}$$

77 Tupu, Hupu ja Lupu ovat saaneet Roope-sedältä kukin oman arvottoman maatilkun Ankkalinnasta. Kuka pojista sai pinta-alaltaan suurimman maatilkun?
a) Tupun maatilkkua rajaavat Lumijoki $f(x)=-2x+30$ ja kartan x-akseli, kun $x \in [10,19]$.
b) Hupun maatilkkua rajaavat Jääjoki $g(x)=x^3-2$ ja kartan y-akseli, kun $y \in [-20,0]$.
c) Lupun maatilkkua rajaavat Kyntövuoristo $h(x)=3x^2+3x+2$ ja Auravuoristo $k(x)=-2x^2+5x+18$.

78 Pelle Peloton on suunnitellut kolme koriste-esinettä. Laske, mihin niistä tarvitaan vähiten valmistusmateriaalia kultaa. Näissä tehtävissä yksi yksikkö koordinaatissa vastaa 1 cm.
a) Maljakko: Sitä rajaavat suorat $x=2$, $x=7$ ja $y=0$. Funktiot $f(x)=\frac{4}{3}x$ ja $g(x)=\sqrt{10x-25}$ pyörähtävät x-akselinsa ympäri.
b) Astia: Sitä rajaavat suorat $x=0$, $x=\frac{18}{5}$ ja $y=2$. Funktiot $h(x)=\frac{4}{3}x+5$ ja $l(x)=3x-1$ pyörähtävät suoran $y=2$ ympäri.

c) Kulho: Sitä rajaavat suorat $y = 0$ ja $y = 2$. Funktiot $h(x) = \frac{1}{2}x - 1$ ja $l(x) = \frac{1}{2}x$ pyörähtävät y-akselin ympäri.
d) Mitä painaa se koriste-esine, jossa on kultaa vähiten. Kullan tiheys on $19,3 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3}$.

8 Tilasto

8.1 Tunnusluvut

Tilastotieteessä kerätään havaintoaineistoa, joka muodostuu havaintoyksiköistä. Havaintoyksiköistä tutkitaan jotakin/joitakin ominaisuuksia eli muuttujia, jotka voivat olla diskreettejä tai jatkuvia. Diskreettimuuttujat ovat kokonaislukuja, kuten, jos tutkitaan perheen lapsimäärää. Sen sijaan jatkuvat muuttujat voivat saada kaikki arvot joltain reaaliluku väliltä, kuten, jos tutkitaan henkilöiden painoja ja pituuksia.
Tutkimusta tehdessä voidaan tutkia kaikkia havaintoyksiköitä eli perusjoukkoa tai vain osaa perusjoukosta eli otosta. Otos on kerätty jollain otantamenetelmällä, siten että havointoyksiköt kuvaavat mahdollisimman hyvin kaikkia mahdollisia havaintoyksiköitä.

Tunnusluvut, luokittelemattomasta aineistosta. Tunnusluvut jaetaan sijaintiluvuiksi ja hajontaluvuiksi. Sijaintilukuja ovat keskiarvo, moodi ja mediaani. Hajontalukuja on keskihajonta. Sijaintilukujen avulla voidaan päätellä arvojen sijainnista, kun taas hajontalukujen avulla voidaan päätellä, miten muuttujat ovat sijoittuneen keskiarvoon nähden.

Moodi (Mo) eli tyyppiarvo, kertoo, mitä muuttujan arvoa on eniten.

Mediaani (Md) kertoo, mikä on havaintoyksiköiden keskimäisin muuttujan arvo. Se saadaan laittamalla muuttujan arvot suuruusjärjestykseen. Muuttujista valitaan keskimmäisin arvo, jos muuttujan arvoja on pariton määrä. Jos muuttujan arvoja on parillinen määrä, lasketaan kahdesta keskimmäisimmästä muuttujan arvosta keskiarvo.

Aritmaattinen keskiarvo ($\overline{x}$) kuvaa "keskimääräistä muuttujan arvoa". Keskiarvo lasketaan kaavalla
$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$
x_i = muuttujan arvo
n = havaintoyksiköiden lukumäärä

Keskihajonta (s) kertoo ovatko muuttujan arvot lähempänä vai kauempana keskiarvosta.
$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}$
$\overline{x}$ =keskiarvo
x_i = muuttujan arvo
n = havaintoyksiköiden lukumäärä

Esim. 1 Ankkalinnan Tipulaakson ala-asteen 1-luokan oppilailla on omia lemmikkejä seuraavasti: $2, 7, 5, 4, 1, 3, 6, 3, 8, 2, 3$ ja 7. Laske oppilaiden lemmikkien määrän a) moodi, b) mediaani, c) keskiarvo ja d) keskihajonta.

Ratkaisu :
Järjestetään luvut suuruusjärjestykseen, niin silloin on helpompi laskea tunnusluvut. $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8$.
a) Moodi on 3.
b) Mediaani on $\frac{3+4}{2} = 3,5$.
c) Keskiarvo on $\frac{1+2\cdot2+3\cdot3+4+5+6+2\cdot7+8}{12} = \frac{51}{12} = 4,25$.
d) Keskihajonta on
$$\sqrt{\frac{(1-4{,}25)^2+2(2-4{,}25)^2+3(3-4{,}25)^2+(4-4{,}25)^2+(5-4{,}25)^2+(6-4{,}25)^2+2(7-4{,}25)^2+(8-4{,}25)^2}{12}} =$$
$$\sqrt{\frac{(-3{,}25)^2+2(-2{,}25)^2+3(-1{,}25)^2+(-0{,}25)^2+(0{,}75)^2+(1{,}75)^2+2(2{,}75)^2+(3{,}75)^2}{12}} =$$
$$\sqrt{\frac{10{,}5625+10{,}125+4{,}6875+0{,}0625+0{,}5625+3{,}0625+15{,}125+14{,}0625}{12}} =$$
$$\sqrt{\frac{58{,}25}{12}} = \sqrt{4,854...} = 2,2032... \approx 2,2.$$

Muuttujan arvon normittaminen. Kun tiedetään havaintoyksiköiden keskiarvo ($\overline{x}$) ja keskihajonta (s), voidaan halutun havaintoyksikön muuttujan arvo normittaa. Kun muuttujan arvo on normitettu, ilmaisee normitettu arvo, miten monta keskihajontaa muuttujan arvo eroaa keskiarvosta. Jos normitettu arvo on negatiivinen, on muuttujan arvo pienempi kuin keskiarvo. Jos normitettu arvo on positiivinen, on muuttujan arvo suurempi kuin keskiarvo.
Normitettu arvo lasketaan kaavalla $z = \frac{x-\overline{x}}{s}$
$z =$normitettu arvo
$x =$muuttujan arvo
$\overline{x} =$keskiarvo
$s =$keskihajonta

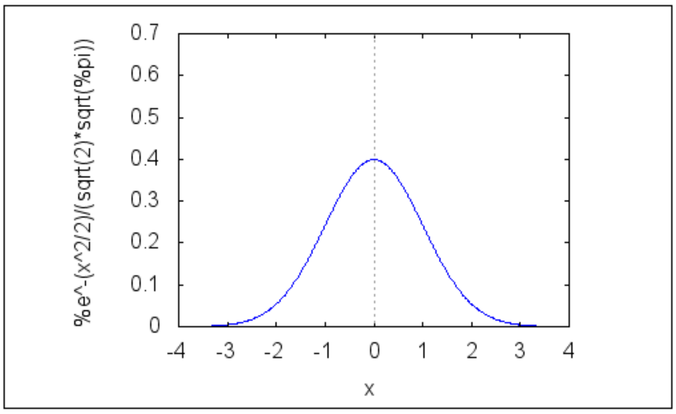
Esim. 2 a) Toisen luokan tyttöjen pituuksien keskiarvo on 135 cm. Keskihajonta on 5 cm. Liisa on pituudeltaan 140 cm. Mikä on hänen normitettu arvonsa? Mitä tämä normitettu arvo kertoo Liisan pituudesta?
b)Toisen luokan poikien pituuksien keskiarvo on 140 cm. Keskihajonta on 8 cm. Kuinka pitkä Pekka olisi, jos hänellä olisi sama normitettu arvo pituudessa kuin Liisalla?

Ratkaisu :
a) Liisan normitettu arvo lasketaan $z = \frac{140-135}{5} = 1$.
Liisa on yhden keskihajonnan verran pitempi kuin hänen luokan tytöt ovat keskimäärin.

b) Pekan pituus lasketaan samalla kaavalla, nyt vain pituuden kohdalle laitetaan x ja keskiarvon ja keskihajonnan arvot vaihdetaan.
$z = \frac{x-140}{8} = 1 \Leftrightarrow x - 140 = 8 \Leftrightarrow x = 148$ cm.

8.2 Normaalijakauma

Normaalijakaumalla on muita nimiä Gaussin jakauma, Gaussin käyrä ja Gaussin kellokäyrä. Normaalijakauma muodostuu satunnaismuuttujista X. Normaalijakauman tiheysfunktio on $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$, missä
e = neperin luku, 2,71828...
μ = odotusarvo vastaa keskiarvoa
σ = keskihajonta



Kuva 24: Normaalijakauman tiheysfunktio.

Normaalijakaumaa merkitään lyhyesti $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Normaalijakauman ominaisuuksia. Normaalijakauma on symmetrinen, jossa käyrän huippukohta on odotusarvo. Normaalijakauman käyrän leveyden määrää keskihajonta. Jos käyrä on kapea, on pieni keskihajonta. Jos käyrä on leveä, on keskihajonta suuri.
Normaalijakauman avulla lasketaan todennäköisyyksiä. Todennäköisyys lasketaan pinta-alan muutoksen avulla. Siis kuinka suuri pinta-ala muodostuu tiheysfunktion, x-akselin ja tietyn arvon välille. Kun odotusarvosta mennään keskihajonnan verran oikealle, tällä alueella on noin 34 % aineiston arvoista. Kun odotusarvosta mennään sekä oikealle että vasemmalle keskihajonnan verran, on tällä alueella aineiston arvoista noin 68 %. Jos odotusarvosta mennään kaksi keskihajonnan verran oikealle sekä vasemmalle, on tällä alueella noin 95 % aineiston arvoista.

Normaalijakauman odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1. Se merkitään lyhyesti $N(0,1)$. Muut normaalijakaumat voidaan normittaa, jotta ne noudattavat normaalijakaumaa $N(0,1)$. Normittaminen lasketaan kaavalla $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$
missä
$z =$ normitettu arvo
$x =$ muuttujan arvo
$\mu =$ odotusarvo vastaa keskiarvoa
$\sigma =$ keskihajonta

Normaalijakauman laskukaavoja :

- Kertymäfunktion avulla $P(X \leq a) = \Phi(a)$
- Kompleksisuus $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \Phi(a)$
- Negatiiviset arvot $P(X \leq -a) = P(X > a) = 1 - \Phi(a)$ tai
  $P(X \geq -a) = P(X \leq a) = \Phi(a)$
- Arvot väliltä $P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- Φ-arvot saa laskimesta tai taulukkokirjasta.

Esim. 3 Laske $P(X \leq 3,3)$.

Ratkaisu :
$P(X \leq 3,3) = \Phi(3,3) = \Phi(3,30) = 0,9995$

Esim. 4 Laske $P(X > 0,34)$.

Ratkaisu :
$P(X > 0,34) = 1 - P(X < 0,34) = 1 - P(X \leq 0,34) = 1 - \Phi(0,34) =$
$1 - 0,6331 = 0,3669$

Esim. 5 Laske $P(X < -1,23)$.

Ratkaisu :
$P(X < -1,23) = P(X \leq -1,23) = \Phi(-1,23) =$
$1 - \Phi(1,23) = 1 - 0,8907 = 0,1093$

Esim. 6 Laske $P(X > -2,99)$.

Ratkaisu :
$P(X > -2,99) = 1 - P(X \leq -2,99) = 1 - \Phi(-2,99) = 1 - (1 - \Phi(2,99)) =$
$1 - 1 + \Phi(2,99) = \Phi(2,99) = 0,9986$

Esim. 7 Laske $P(-0,50 < X \leq 1,50)$.

Ratkaisu :
$P(-0,50 < X \leq 1,50) = P(-0,50 \leq X \leq 1,50) =$
$\Phi(1,50) - \Phi(-0,50) = \Phi(1,50) - (1 - \Phi(0,50)) = 0,9332 - 1 + 0,6915 =$
$0,6247$

Esim. 8 Kaakkois-Suomessa tutkittiin vuosina $2000 - 2004$ kettujen elinpiirejä. Elinpiirien keskiarvo oli 6,6 km^2 ja keskihajonta 3,16 km^2. Kuvitellaan, että elinpiirin suuruudet noudattavat normaalijakaumaa.[22]
a) Laske, millä todennäköisyydellä ketun elinpiiri on vähintään 7 km^2?
b) Laske, millä todennäköisyydellä ketun elinpiiri on $5 - 8$ km^2?
c) Jos kettuja on 300 kappaletta, kuinka monen ketun elinpiiri on alle 9 km^2?

Ratkaisu :
a) $P(X > 7km^2) = P(Z > \frac{7km^2 - 6{,}6km^2}{3{,}16km^2}) = P(Z > 0,1265...) = 1 - P(Z \leq 0,13) =$
$1 - \Phi(0,13) = 1 - 0,5517 = 0,4483 \approx 0,45.$

b)$P(5km^2 \leq X \leq 8km^2) = P(\frac{5km^2 - 6{,}6km^2}{3{,}16km^2} \leq Z \leq \frac{8km^2 - 6{,}6km^2}{3{,}16km^2}) =$
$P(-0,506... \leq Z \leq 0,443...) = \Phi(0,44) - \Phi(-0,51) = \Phi(0,44) - (1 - \Phi(0,51)) = \Phi(0,44) - 1 + \Phi(0,51) = 0,6700 - 1 + 0,6950 = 0,365 \approx 0,37$

c)$P(X < 9km^2) \cdot 300 = P(Z < \frac{9km^2 - 6{,}6km^2}{3{,}16km^2}) \cdot 300 = P(Z \leq 0,759...) \cdot 300 =$
$\Phi(0,76) \cdot 300 = 0,7764 \cdot 300 = 232,92 \approx 233$

EXTRA ASIAA
Normaalijakauma on symmetrinen. Kaikki jakaumat eivät ole kuitenkaan symmetrisiä eivätkä muistuta normaalijakaumaa huippukkuutensa vuoksi. Jakauman vinous ja huipukkuus voidaan laskea.

Vinous :

- Vinous lasketaan kaavalla $c_1 = \frac{m_3}{m_2^{\frac{3}{2}}}$.
- Kaavan m_2 keskusmonentti lasketaan $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.
- Kaavan m_3 keskusmonentti lasketaan $m_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3$.
- Kun vinoudeksi saadaan $c_1 > 0$, on jakauma vino oikealle. Puhutaan myös, että jakauma on positiivisesti vino.

- Kun vinoudeksi saadaan $c_1 = 0$, on jakauma symmetrinen.
- Kun vinoudeksi saadaan $c_1 < 0$, on jakauma vino vasemmalle. Puhutaan myös, että jakauma on negatiivisesti vino.

Huipukkuus, kuinka korkealla on huippu :

- Huippu lasketaan kaavalla $c_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$.
- Kaavan m_2 keskusmonentti lasketaan $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.
- Kaavan m_4 keskusmonentti lasketaan $m_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4$.
- Kun huipukkuudeksi saadaan $c_2 > 0$, on jakauma huipukas. Eli jakauman huippu on korkeammalla kuin normaalijakauman huippu on.
- Kun huipukkuudeksi saadaan $c_2 = 0$, on jakaumalla samanlainen huipukkuus kuin normaalijakaumalla.
- Kun huipukkuudeksi saadaan $c_2 < 0$, on jakauma laakea. Eli jakauman huippu on matalammalla kuin normaalijakauman huippu on.

Esim. 9 Laske aineiston $-6, -3, -2, 0, 1, 8,$ ja 9 vinous ja huipukkuus.

Ratkaisu :
Lasketaan keskiarvo.
$\overline{x} = \frac{(-6)+(-3)+(-2)+0+1+8+9}{7} = 1$
Lasketaan keskusmomentit.
$m_2 = \frac{1}{7} \cdot 188 = 26\frac{6}{7}$.
$m_3 = \frac{1}{7} \cdot 420 = 60$.
$m_4 = \frac{1}{7} \cdot 9236 \approx 1319,43$.
Lasketaan vinous.
Vinous on $c_1 = \frac{m_3}{m_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{60}{(26\frac{6}{7})^{\frac{3}{2}}} \approx 0,43$. Aineisto on oikealle vino.
Lasketaan huipukkuus.
Huipukkuus on $c_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 = \frac{1319,43}{(26\frac{6}{7})^2} - 3 \approx -1,17$. Aineisto on matalampi kuin normaalijakauma.

Tehtäviä

79 Ankkalinnan kaupassa on myytävänä monia 60 grammaisia suklaapatukoita. Hinnaltaan ne ovat 3.5, 4.0, 2.5, 3.5, 4.2, 4.1, 2.5, 5.0, 4.0 ja 3,8.
a) Laske suklaapatukoiden mediaani.
b) Laske suklaaputukoiden keskiarvo.
c) Laske suklaapatukoiden keskihajonta.

80 Kaakkois-Suomessa tutkittiin vuosina $2000-2004$ mäyrien ja supikoirien elinpiirejä. Mäyrien elinpiirin keskiarvo oli 14,7 km^2 ja keskihajonta 8,32 km^2. Supikoirien elinpiirin keskiarvo oli 3,9 km^2 ja keskihajonta 1,42 km^2. [22]
a) Jos yhden mäyrän elinpiiri on 16 km^2, mikä on tämän mäyrän normitettu elinpiirin arvo?
b) Jos tämä mäyrä voisi uudesti syntyä supikoiraksi, kuinka suuri elinpiiri sillä silloin olisi, jos se liikkuisi vastaavalla tavalla kuin oli mäyränä liikkunut muihin mäyriin verrattuna?

81 Laske todennäköisyydet.
a) $P(X \leq 0,82)$
b) $P(X \geq 0,67)$
c) $P(X < -1,53)$
d) $P(X > -0,23)$
e) $P(-0,51 < X \leq 0,62)$

82 Kaakkois-Suomessa tutkittiin vuosina $2000 - 2004$ kissojen elinpiirejä . Kissojen elinpiirin keskiarvo oli 1,5 km^2 ja keskihajonta 1,69 km^2.[22]
a) Laske, millä todennäköisyydellä kissan elinpiiri on vähintään 2 km^2?
b) Laske, millä todennäköisyydellä kissan elinpiiri on $1-3$ km^2?
c) Laske, kuinka monella kissalla 200 on suurempi reviiri kuin 2,5 km^2?

83 Oletetaan, että väestön älykkyysosamäärä noudattaa normaalijakaumaa $N(100,15)$. Määritä odotusarvon 100 ympäriltä symmetrinen väli, johon kuuluu täsmälleen puolet väestöstä. (K15/6)

9 Todennäköisyys

9.1 Klassinen todennäköisyys

Klassisessa todennäköisyydessä on yhtä suuri todennäköisyys saada suotuisista alkeistapauksista mikä vain. Esimerkiksi rahanheitossa on yhtä todennäköistä saada klaava tai kruunu.
$P(A) = \frac{suotuisat}{kaikki}$

Esim. 1 Laske todennäköisyys, että nopanheitossa saadaan vähintään 4.

Ratkaisu :
Suotuisia alkeistapauksia ovat nopan luvut $4, 5$ ja 6.
$P($ silmäluku vähintään 4 $) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Esim. 2 : Esteratsastukseen osallistuu 4 valkoista, 6 ruskeaa ja 5 mustaa hevosta.
a) Laske todennäköisyys, että voittaja hevonen on musta väriltään.
b) Laske todennäköisyys, että voittaja hevonen ei ole valkoinen väriltään.

Ratkaisu :
a) $P($ musta $) = \frac{6}{4+6+5} = \frac{6}{15}$
b) $P($ ei valkoinen $) = \frac{6+5}{4+6+5} = \frac{11}{15}$

Esim. 3 Tallilla on yhteensä 40 hevosta, niistä 19 hevosella ratsastetaan, 17 hevosella ajetaan ravia ja 7 hevosella ratsastetaan sekä ajetaan ravia. Lopuilla hevosilla tehdään metsätöitä.
a) Laske todennäköisyys, että satunnaisesti tallista valitsemallasi hevosella ei ratsasteta eikä ajeta ravia.
b) Laske todennäköisyys, että satunnaisesti tallista valitsemallasi hevosella vain ratsastetaan.

Ratkaisu :
Pelkkiä ratsastushevosia on $19 - 7 = 12$.
Pelkkiä ravihevosia on $17 - 7 = 10$.
Hevosia, joilla ei ratsasteta eikä ajeta ravia, on $40 - (12 + 7 + 10) = 11$.
a) $P($ Ei ratsasteta eikä ajeta ravia $) = \frac{11}{40}$
b) $P($ Hevosella ratsastetaan $) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

9.2 Tilastollinen todennäköisyys

Tilastollista todennäköisyyttä laskettaessa, käytetään hyväksi tilastoihin kerättyä tietoa.

Esim. 4 : Viikolla 36 vuonna 2015 saapui Suomeen 1153 turvapaikanhakijaa.
a) Laske, millä todennäköisyydellä Suomen kansalainen törmää seuraavalla viikolla edellisellä viikolla tulleista pakalaisista juuri irakilaisiin tai somaleihin.
b) Irak ja Syyria ovat lähi-idän maita. Laske todennäköisyys, että kadulla seuraavalla viikolla vastaan tuleva lähi-idästä tullut turvapaikan hakija on Irakista.

Ratkaisu :

Maat	Turvapaikanhakijat *	Turvapaikanhalijat % **
Afganistan	59	5,1
Irak	912	79,1
Somalia	63	5,5
Syyria	34	2,9
Muut	85	7,4

* Lähde: Maahanmuuttovirasto, Helsingin sanomat 8.9.2015
** Kirjan tekijän laskelma

Kuva 25: Maahanmuuttajat viikolla 36 vuonna 2015 [27]

Ratkaisu :
a) $P(\text{Irakilainen tai somali}) = (79,1 + 5,5)\% = 84,6\% = 0,846$
b) $P(\text{Lähi-idästä tullut turvapaikan hakija on Irakista}) = \frac{912}{912+34} = \frac{912}{946} = 0,964059... \approx 0,964$

9.3 Geometrinen todennäköisyys

Geometrisessa todennäköisyydessä kuvaillaan kaikkia alkeistapauksia ja suotuisia alkeistapauksia janoilla, pinta-aloilla tai tilavuuksilla. Aikaan liittyviä todennäköisyyksiä lasketaan usein tällä tavalla.

Esim. 5 : Laiva kulkee kolmen eri sataman välillä. Satamasta A matka kestää 15 minuuttia satamaan B. Satamassa B laiva on 10 minuuttia. Satamasta B matka kestää 5 minuuttia satamaan C. Satamassa C laiva on 10 minuuttia. Satamasta C matka kestää 10 minuuttia satamaan A. Satamassa A laiva on 10 minuuttia.

a) Laske todennäköisyys, että matkustaja pääsee suoraan laivaan satamassa C.
b) Laske todennäköisyys, että matkustaja joutuu odottamaan satamassa C yli 10 minuuttia.

Ratkaisu :
a) $P($ Pääsee laivaan suoraan satamassa C $) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$
b) $P($ Joutuu odottamaan satamassa C yli 10 minuuttia $) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

Matka A→B	B:ssä	Matka B→C	C:ssä	Matka C→A	A:ssa
15 min	10 min	5 min	10 min	10 min	10 min

Kuva 26: Aikajana laivan liikkeistä.

9.4 Kombinatoriikka

Tuloperiaate :

- Kokonaisuus muodostuu vaiheista, joita on k kappaletta.
- Ensimmäisessä vaiheesa on n_1 vaihtoehtoa, joista valittaa yksi vaihtoehto.
- Toisessa vaiheessa on n_2 vaihtoehtoa, joista valitaan yksi vaihtoehto.
- jne
- k vaiheessa on n_k vaihtoehtoa, joista valitaan yksi vaihtoehto.
- Valintamahdollisuuksia on $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$.

Esim. 6 : Liisa on ostanut kaupasta kolmet housut: veryttelyhousut, farkut ja collegehousut. Hän on ostanut viisi puseroa: t-paidan, paitapuseron, collegepuseron, farkkupaidan ja röyhelöpuseron. Hän on ostanut myös kolmet kengät: lenkkarit, kävelykengät ja sandaalit.
a) Kuinka monta erilaista asukokonaisuutta Liisa voi muodostaa uusista vaateistaan?
b) Liisa on kutsuttu ystävänsä synttäreille. Liisa ei halua laittaa päälle veryttelyhousuja, collegehousuja eikä lenkkareita. Kuinka monta erilaista asukokonaisuutta hänellä on nyt?

Ratkaisu :
a) $3 \cdot 5 \cdot 3 = 45$
b) $1 \cdot 5 \cdot 2 = 10$

Esim. 7 Otetaan 20 kirjainta.
a) Kuinka monta erilaista 5 kirjaimen kirjainyhdistelmää saadaan, jos sama kirjain voin esiintyä monta kertaa?
b)Kuinka monta erilaista 5 kirjaimen kirjainyhdistelmää saadaan, jos kukin kirjain voi esiintyä vain kerran?

Ratkaisu :
a) $20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 3200000$
b) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1860480$

Kertoma :

- Jonojen lukumäärä, kun kaikista alkioista muodostatetaan jono.
- Kertoma on tulo, joka muodostetaan positiivisista kokonaisluvuista. n, $n-1$, $n-2$,..., 2 ja 1.
- Tulo lyhennetään merkinnällä $n!$.
  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$.
- Kertoman avulla voidaan laskea, kuinka monenlaisia jonoja voidaan muodostaa alkiosta n.
- Ensimmäinen jäsen valitaan n alkiosta.
- Toinen jäsen valitaan $n-1$ alkiosta.
- Toiseksi viimeinen jäsen valitaan 2 alkiosta.
- Viimeistä jäsentä ei enää tarvitse valita.
- On sovittu, että $0! = 1$.

k-permutaatio eli variaatio :

- Jonojen lukumäärä, kun n alkiosta tehdään lyhyempiä jonoja. $(n \geq k)$.
- Jonoja kutsutaan k-permutaatioiksi. Alkioden järjestyksellä on väliä.
- k-permutaatiota lyhennetään merkinnöillä $(n)_k$ ja $\frac{n!}{(n-k)!}$.
- k-permutaatiota lasketaan kaavalla
  $(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Esim. 8 Kuinka monta erilaista jonoa voidaan muodostaa opettajasta ja kahdeksasta oppilaasta.
a) Opettaja voi olla missä kohdin vain jonoa?
b) Opettaja on aina ensimmäisenä jonossa?
c) Kuinka monta erilaista 4 hengen jonoa voidaan muodostaa. Opettajan ei tarviste olla jonossa.

Ratkaisu :
a) $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$
b) $1 \cdot 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$
c) $(9)_4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ tai toisin
$(9)_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 3024$

Esim. 9 Muodosta k-permutaatiot joukon C alkoista, $C = \{e, i, o\}$.
Ratkaisu :
a) $3-$permutaatiot. Erilaista joukkoa $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
eio, *eoi*, *ieo*, *ioe*, *oei*, *oie*.
b) $2-$permutaatiot. Erilaista joukkoa $3 \cdot 2 = 6$
ei, *eo*, *ie*, *io*, *oe*, *oi*.
c) $1-$permutaatiot. Erilaisia joukkoja 3
e, *i*, *o*

k-kombinaatio :

- Osajoukkojen määrä, kun alkioiden järjestyksellä ei ole väliä.
- Joukossa, jossa on n alkiota, voidaan muodostaa erilaisia osajoukkoja. Osajoukoissa voi olla $0, 1, 2, 3, ...$ tai n alkiota.
- Kun joukossa on n alkiota, voidaan muodostaa k- alkion osajoukkoja kaavalla $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Esim. 10 Muodosta k-kombinaatiot joukon C alkioista, $C = \{e, i, o\}$.
Ratkaisu :
a) $3-$kombinaatiot.
eio
b) $2-$kombinaatiot.
ei, *eo*, *io*
Siis *ei* ja *ie* ovat samoja osajoukkoja. Osajoukon alkioiden järjestyksellä ei ole väliä.
c)$1-$kombinaatiot.
e, *i*, *o*

Esim. 11 Myyjäisissä on arvonta. Arpaliput on numeroitu $1 - 300$. Palkintoja on 5 kpl. Palkinnot ovat samanlaisia.
a) Kuinka monta erilaista voittajaosajoukkoa voidaan muodostaa 300 arpalipusta.
b) Millä todennäköisyydellä viiden hengen porukasta, kaksi voittaa palkinnon?
c) Laske todennäköisyys, että kukaan viiden hengen porukasta ei voita.

Ratkaisu :

a) $\binom{300}{5} = \frac{300!}{(300-5)!\,5!} = \frac{300!}{295!\,5!} = \frac{300 \cdot 299 \cdot 298 \cdot 297 \cdot 296}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1,95828... \cdot 10^{10} \approx 1,96 \cdot 10^{10}$

b) $\frac{\binom{5}{2}\binom{295}{3}}{\binom{300}{5}} = \frac{10 \cdot 4235315}{\binom{300}{5}} = 0,00216277... \approx 0,00216$

c) $\frac{\binom{5}{0}\binom{295}{5}}{\binom{300}{5}} = \frac{\binom{295}{5}}{\binom{300}{5}} = 0,918874... \approx 0,919$

9.5 Komplementtisääntö

Kun perusjoukosta otetaan suotuisat tapahtumat A, jää perusjoukkoon komplementtitapahtumat $\overline{A}$.
$P(A) + P(\overline{A}) = 1$ ja $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Esim. 12 Korttipakassa on 52 korttia. Sieltä nostetan 5 korttia. Mikä on todenäisyys, että korteista ainakin yksi on kuvakortti. Kortteja ei palauteta pakkaan.

Ratkaisu :
Pakassa on 12 kuvakorttia. Numerokortteja on $52 - 12 = 40$.
Ainakin yksi kuvakortti tarkoittaa, että saadaan joko $1, 2, 3, 4$ tai 5 kuvakorttia. Tehtävä ratkaistaan käyttämällä hyväksi komplementtisääntöä.
$P(A)$ =saadaan ainakin yksi kuvakortti
$P(\overline{A})$ =ei saada yhtään kuvakorttia
$P(\overline{A}) = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{2109}{8330}$
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{2109}{8330} = 0,7468... \approx 0,747$

Esim. 13 Laske todennäköisyys, että saadaan korkeintaan 5 ykköstä, kun heitetään 6 kertaa noppaa.

Ratkaisu :
$P(A)$ =saadaa korkeintaan 5 ykkästä
$P(\overline{A})$ =saadaan 6 kappaletta ykköstä
$P(\overline{A}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{46656}$
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{46656} = 0,9999786... \approx 0,99998$

9.6 Kertolaskusääntö

Ehdollinen todennäköisyys :

$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B|A)$.
On kaksi tapahtumaa A ja B, joista "A tapahtuu ja B tapahtuu, kun A on tapahtunut"[17, s. 81]. $P(B|A) = \frac{P(AjaB)}{P(A)}$.

Esim. 14 Korttipakasta otetaan 4 korttia. Lasketaan todennäköisyys, että kaikki kortit ovat ässiä.

Ratkaisu :
$P(\text{kaikki ässiä}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} = \frac{24}{6497400} = 0,000003694... \approx 0,0000037$

Riippumattomien tapahtumien kertolasku :

On kaksi tapahtumaa A ja B. Ne ovat toisistaan riippumattomia. Todennäköisyys, että ne molemmat tapahtuvat on todennäköisyyksien tulo.
$P(\text{A ja B }) = P(A)(B)$.

Esim. 15 Jukka on sirkuksessa ja kokeilee onneaan kahdessa heittokojussa. Ensimmäisessä kojussa Jukan onnistumisprosentti on 40 % ja toisessa kojussa 30 %.
a) Laske todennäköisyys, että Jukka voittaa kummastakin kojusta nallen itselleen.
b) Laske todennäköisyys, että Jukka ei voita kummastakaan kojusta nallea.
c) Laske todennäköisyys, että Jukka voittaa ainakin toisesta kojusta nallen.

Ratkaisu :
a) $P(\text{ molemmista pelistä voitto }) =$
$P(\text{1 pelistä voitto ja toisesta pelistä voitto }) =$
$P(\text{1 pelistä voitto }) \cdot (\text{ ja 2 pelistä voitto }) =$
$0,40 \cdot 0,30 = 0,12$
b) $P(\text{1 pelistä ei voittoa }) \cdot (\text{ 2 pelistä ei voittoa }) =$
$(1 - 0,40) \cdot (1 - 0,30) = 0,60 \cdot 0,70 = 0,42$
c) $1 - P(\text{ ei voita kummastakaan pelistä }) = 1 - 0,42 = 0,58$

9.7 Yhteenlaskusääntö

Yleinen yhteenlaskusääntö :
On kaksi tapahtumaa A ja B, jotka eivät ole erillisiä. Laskettaessa todennäköisyyttä, että tapahtuma A tai tapahtuma B tapahtuu, lasketaan yhteen tapahtumien A ja B todennäköisyydet ja tästä summasta vähennetään todennäköisyys, että sekä tapahtuma A että tapahtuma B tapahtuu.
$P(\text{A tai B }) = P(A) + P(B) - P(\text{A ja B })$.

Erillisten tapahtumien yhteenlasku :
On kaksi tapahtumaa A ja B, jotka ovat erillisiä. Siis ne ovat toisistaan riippumattomia. Todennäköisyys, että ne molemmat tapahtuvat on todennäköisyyksien summa. $P(\text{A tai B }) = P(A) + P(B)$.

Esim. 16 Laatikossa on 10 tennispalloa, joista 8 on keltaista tennispalloa ja 2 valkoista vanhan ajan tennispalloa. Lisäksi laatikossa on 8 lasten leikkipalloa, joista 5 on keltaista ja 3 valkoista. Kaikki pallot ovat samankokoisia
a) Laske todennäköisyys, että kun laatikosta otetaan silmät kiinni pallo, se on keltainen tai tennispallo.
b) Laske todennäköisyys, että kun laatikosta otetaan silmät kiinni pallo, se on joko keltainen tai tennispallo.
c) Laske todennäköisyys, että kun laatikosta otetaan silmät kiinni kaksi palloa, niin ensimmäinen pallo on keltainen tennispallo tai toinen pallo on keltainen tennispallo.
d) Laske todennäköisyys, että kun laatikosta otetaan silmät kiinni kaksi palloa, niin vain toinen pallo on keltainen tennispallo.

Ratkaisu :
a) A =pallo on keltainen, B =pallo on tennispallo
P(A ja B)= pallo on sekä keltainen että tennispallo
$P(A) = \frac{13}{18}$ (8 tennispalloa + 5 lasten palloa)
$P(B) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$
$P(\text{A ja B }) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$
$P(\text{A tai B }) = P(A) + P(B) - P(\text{A ja B }) = \frac{13}{18} + \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{6} = 0,83333... \approx 0,833$
b) $P(\text{joko A tai B }) = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(\text{A ja B }) = \frac{13}{18} + \frac{5}{9} - 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{7}{18} = 0,38888... \approx 0,389$
c)A =1. pallo on keltainen tennispallo ja 2. pallo on keltainen tennispallo
B =1. on keltainen tennispallo ja 2. pallo on muunlainen
C =1. pallon on muunlainen ja 2. pallon on keltainen tennispallo
$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} + \frac{8}{18} \cdot \frac{10}{17} + \frac{10}{18} \cdot \frac{8}{17} = \frac{12}{17} = 0,70588... \approx 0,706$
d) $P(B) + P(C) = \frac{8}{18} \cdot \frac{10}{17} + \frac{10}{18} \cdot \frac{8}{17} = \frac{80}{153} = 0,52287... \approx 0,523$

9.8 Binomitodennäköisyys

Binomitodennäköisyydessä tehdään toistokokeita. Jokaisessa toistokokeessa joko onnistutaan tai epäonnistutaan. Toistokokeiden tulokset ovat toisistaan riippumattomia.
$P(\text{n kertaa toistoja, k kertaa onnistumisia}) = \binom{n}{k}(p)^k(q)^{n-k}$
n =toistojen määrä
k =onnistumisten määrä
p =todennäköisyys, että koe onnistuu
q =todennäköisyys, että koe epäonnistuu, $1 - p = q$

Esim. 17 Pekka saa korin 5 metrin etäisyydeltä 60 prosentin todennäköisyydellä.
a) Laske todennäköisyys, että pekka saa tasan 4 koria, kun hän heittää kuusi kertaa.
b) Laske todennäköisyys, että pekka saa ainakin 5 koria, kun hän heittää kuusi kertaa.

Ratkaisu :
a) $p = 0,6$ ja $q = 1 - 0,6 = 0,4$
$P(\text{tasan 4 koria}) = \binom{6}{4}(0,6)^4(0,4)^{6-4} = 0,31104$
b) $P(\text{5 tai 6 koria}) = \binom{6}{5}(0,6)^5(0,4)^{6-5} + \binom{6}{6}(0,6)^6(0,4)^{6-6} = \binom{6}{5}(0,6)^5(0,4)^1 + (0,6)^6 = 0,23328$

EXTRA ASIAA

Multinomikerroin

$$\binom{n}{n_1, n_2 \cdots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Joukosta, jossa on n kappaletta alkiota, muodostetaan osajoukkoja. Osajoukkoja on yhteensä k kappaletta. Osajoukoissa on $n_1, n_2 \cdots n_k$ kappaletta alkioita. Kaavassa pitää muistaa, että $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ eli kaikki alkiot jaetaan osajoukkoihin. Multinomikertoimen avulla voidaan laskea, kuinka monella tavalla alkioiden jako osajoukkohin voidaan tehdä. Binomikaava on multinomikertoimen erikoistapaus.

Esim. 18 Varsinais-Suomen aluekilpailuissa on 27 pikajuoksijaa. Juoksijoista muodostetaan 4 alkuerää. Ensimmäisessä, toisessa ja kolmannessa erässä juoksee 7 juoksijaa ja neljännessä erässä 6 juoksijaa. Kuinka monella eri tavalla erien muodostaminen voidaan tehdä?

Ratkaisu :
$\binom{27}{7\,7\,7\,6} = \frac{27!}{7!7!7!6!} = 1,18 \cdot 10^{14}$ tavalla.

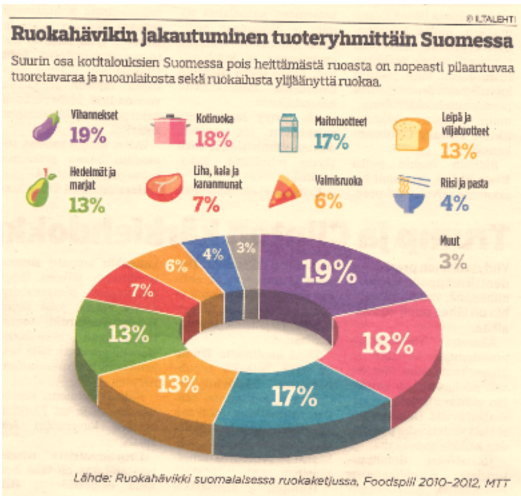
Esim. 19 Laske $\binom{27}{7\,7\,7\,7}$

Ratkaisu :
Multinokerrointa ei voi laskea, koska $7 + 7 + 7 + 7 = 28 \neq 27$.

Tehtäviä

84 Ankkalinnan liikuntaluokassa on 35 oppilasta. Heistä 19 pelaa amerikkalaista jalkapalloa ja 15 pelaa golfia. Luokan oppilaista 8 pelaa sekä amerikkalaista jalkopalloa että pelaa golfia. Muut ovat uimareita.
a) Kun luokasta otetaan sattumanvaraisesti oppilas, mikä on todennäköisyys, että hän on uimari?
b) Kun luokasta otetaan sattumanvaraisesti oppilas, mikä on todennäköisyys, että hän pelaa vain golfia tai amerikkalaista jalkapalloa?

85 Suomessa pois heitetään paljon ruokaa. Maa- ja elintarviketalouden tutkimuskeskus MTT on tehnyt tutkimuksen ruokahävikistä vuosilta 2010 – 2012.
a) Laske todennäköisyys, että satunnaisesti roskiksiin heitetty ruoka on vihanneksia, hedelmiä tai marjoja.
b) Laske todennäköisyys, että satunnaisesti roskiksiin heitetyistä vihanneksista, hedelmistä ja marjoista, roskiksiin on juuri heitetty hedelmiä ja marjoja.



Kuva 27: Ruokahävikki Suomessa 2010 – 2012, (IL 30.9.2015) [34]

86 Ankkalinnan saaristossa kulkee viiden eri sataman välillä pieni alus, joka kiertää viisi satamaa tunnissa. Satamasta A matka satamaan B kestää 6 minuuttia. Satamassa B alus on 5 minuuttia. Satamasta B matka satamaan C kestää 7 minuuttia. Satamassa C alus on 5 minuuttia. Satamasta C alus jatkaa satamaan D. Matka kestää 9 minuuttia. Satamassa D alus on 4 minuuttia. Satamasta D matka E kestää 5 minuuttia. Satamassa E alus on 6

minuuttia. Lopuksi alus palaa satamaa A. Matka kestää 7 minuuttia. Satamassa A on 6 minuuttia ennenkuin aloittaa saaristokierroksen uudelleen.
a) Laske todennäköisyys, että asiakas pääsee suoraan alukseen satamassa A.
b) Laske todennäköisyys, että asiakas joutuu odottamaan satamassa D yli 4 minuuttia

87 Tupun, Hupun ja Lupun luokalla on 25 oppilasta.
a) Kuinka monella tavalla luokan kaikista oppilaista voidaan tehdä jono, niin että Tupu, Hupu ja Lupu ovat ensimmäisinä jonossa?
b) Ankkalinnan koulun ruokalassa tehdään 8 erilaista keittoa, leivotaan 4 erilaista leipää, tarjotaan 3 erilaista juomaa ja tarjoillaan 10 erilaista jälkiruokaa. Laske kuinka monta erilaista ruokalistaa voidaan tehdä?
c) Kuinka monella tavalla poikien luokan oppilaista voidaan tehdä 6 henkinen uintiviestijoukkue, kun uijien järjestyksellä on väliä. Tiedetään, että kaikki ankat ovat loistavia uimareita.
d) Kuinka monella tavalla voidaan tehdä 6 henkinen uintiviestijoukkue, jonka uijien järjestyksellä on väliä, kun Tupu, Hupu ja Lupu valitaan ensimmäisiksi kolmeksi uijaksi, koska he voittivat kesällä ankkalinnan kesäkisoissa kultaa omalla uimajoukkueellaan? Tupun, Hupun ja Lupun järjestys voi olla myös eri.
e) Kuinka monella tavalla poikien luokasta voidaan tehdä 4 henkinen lähetystö, joka vie luokanvalvojalleen kotiin syntymäpäiväkukkia. Luokan kaikki oppilaat haluavat lähetystöön.
f) Poikien luokalla on 11 tyttöä ja 14 poikaa. Laske kuinka monella tavalla voidaan muodostaa tyttöpoikapari, joka kevätjuhlassa pitää yhdessä puheen luokanvalvojalleen.
g) Laske todennäköisyys, että joku pojista Tupu, Hupu tai Lupu pääsee kevätjuhlan tyttöpoikapariin.

88 a) Korttipakassa on 52 korttia. Nostetaan pakasta 4 korttia palauttamatta niitä takaisin pakkaan. Laske todennäköisyys, että korkeintaan kolmessa kortissa on luku viisi.
b) Heitetään 7-sivuista noppaa 7 kertaa. Nopassa on luvut $1-7$. Laske todennäköisyys, että saadaan ainakin yksi 7.

89 Tapio on luonnonlahjakkuus tikanheitossa ja ampumisessa. Tapion onnistumisprosentti saada kymppi tikanheitossa on 80 % ja onnistumisprosentti ampumalla osua taulun keskipisteeseen on 90 %.
a) Laske todennäköisyys, että, kun Tapio heittää yhden tikan, se osuu kymppiin ja kun Tapio ampuu kerran, laukaus lävistää taulun keskipisteen.
b) Laske todennäköisyys, että Tapio ei saa kymppiä tikanheitossa, kun hän heittää vain yhden tikan eikä hän osu taulun keskipisteeseen, kun hän ampuu vain yhden kerran.
c) Laske todennäköisyys, että Tapio onnistuu ainakin toisessa taitolajissa. Hän joko heittää kympin tikanheitossa yhdellä tikalla tai hän ampuessa osuu taulun keskipisteeseen, kun hän ampuu vain kerran.
d) Laske todennäköisyys, että kun Tapio heittää tikkaa 5 kertaa, hän saa tasan 4 kertaa kympin.
e) Laske todennäköisyys, että kun Tapio ampuu 10 kertaa, hän osuu taulun keskipisteeseen ainakin 4 kertaa.

90 Ankkalinnassa on ratsutila, jossa on 30 hevosta. Tammoja on 16. Tammoista 9 ja oreista 8 on lämminverisiä. Muut hevoset ovat kylmäverisiä. Missään tallin pilttuussa ei lue hevosen nimeä.
a) Kun vierailija menee talliin ja satunnanvaraisesti valitsee pilttuun katsomatta hevosta, millä todennäköisyydellä hevonen on ori tai kylmäverinen?
b) Kun vierailija menee talliin ja satunnanvaraisesti valitsee pilttuun katsomatta hevosta, millä todennäköisyydellä hevonen on joko ori tai kylmäverinen?
c) Kun vierailija menee talliin ja satunnanvaraisesti valitsee kaksi pilttuuta katsomatta hevosia. Laske todennäköisyys, että ensimmäinen hevonen on kylmäverinen ori tai toinen hevonen on kylmäverinen ori.
d) Kun vierailija menee talliin ja satunnanvaraisesti valitsee kaksi pilttuuta katsomatta hevosia. Laske todennäköisyys, että toinen hevosista on kylmäverinen ori.

10 Matemaattiset menetelmät

10.1 Puolisuunnikassääntö

Puolisuunnikassäännön avulla voidaan numeerisesti laskea pinta-aloja. Puolisuunnikassäännön avulla lasketaan käyrien välinen alue tietyltä väliltä. Rajoitettu alue jaetaan x-koordinaatien pisteiden eli jakopisteiden avulla pinta-aloiksi. Pinta-alat muutetaan puolisuunnikkaiksi tekemällä janoja peräkkäisten y-koordinaattien välille. Mitä enemmän jakopisteitä on, sitä tarmemmin saadaan laskettua alkuperäisen alueen pinta-ala. Määrätty pinta-ala saadaan laskemalla yhteen puolisuunnikkaiden pinta-alat. Jakovälien pituudet eivät tarvitse olla samoja.

Puolisuunnikassääntö :

* $A =$ puolisuunnikkaan ala + puolisuunnikkaan ala +...+ puolisuunnikkaan ala.
* $A = \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} \cdot h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \cdot h + ... + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \cdot h =$
  $h[\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) + ... + \frac{1}{2}f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)] =$
  $h[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)]$

Kaavan merkinnät
$A =$käyrien välinen alue
$x_0, x_1...x_n = x$-koordinaatit jakovälien h päässä toisistaan
$f(x_0), f(x_1)...f(x_n) =$ peräkkäiset y-koordinaatit jakovälien h päässä toisistaan
$h = \frac{x_n - x_0}{n}$ jakovälin pituus
$n =$ jakovälien määrä

Esim. 1 Laske $f(x) = 2x^2+2x+1$ ja x-akselin välinen alue väliltä $1 \leq x \leq 4$,
a) kun jakovälejä on 1.
b) kun jakovälejä on 3.
c) kun jakovälejä on 6.
d) Laske alueen pinta-ala integraalilla.
e) Millä jakovälillä saatiin tarkin pinta-ala?

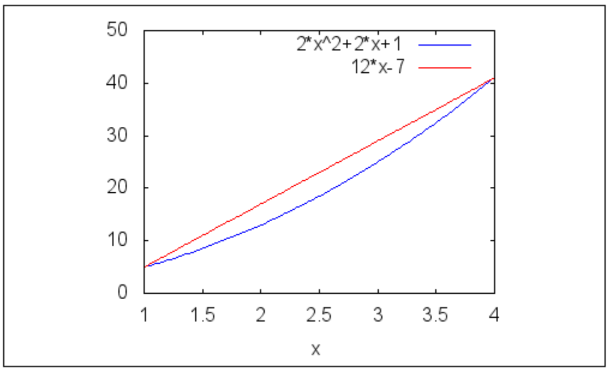
Ratkaisu :
a) Jakovälejä on 1. Jakovälin pituus $\frac{4-1}{1} = 3$
$f(1) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 5$
$f(4) = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = 41$
$A = h[\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_n)] = 3[\frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 41] = 69$

b) Jakovälejä on 3. Jakovälin pituus $\frac{4-1}{3} = 1$
$f(1) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 5$
$f(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 13$
$f(3) = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 25$
$f(4) = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = 41$
$A = h[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \frac{1}{2}f(x_n)] = 1[\frac{1}{2} \cdot 5 + 13 + 25 + \frac{1}{2} \cdot 41] = 61$

c) Jakovälejä on 6. Jakovälin pituus $\frac{4-1}{6} = \frac{1}{2}$
$f(1) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 5$
$f(1,5) = 2 \cdot 1,5^2 + 2 \cdot 1,5 + 1 = 8,5$
$f(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 13$
$f(2,5) = 2 \cdot 2,5^2 + 2 \cdot 2,5 + 1 = 18,5$
$f(3) = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 25$
$f(3,5) = 2 \cdot 3,5^2 + 2 \cdot 3,5 + 1 = 32,5$
$f(4) = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = 41$
$h[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)] =$
$0,5[\frac{1}{2} \cdot 5 + 8,5 + 13 + 18,5 + 25 + 32,5 + \frac{1}{2} \cdot 41] = 60,25$

d) $\int_1^4 (2x^2 + 2x + 1)dx = |_1^4 \frac{2}{3}x^3 + x^2 + x = \frac{2}{3} \cdot 4^3 + 4^2 + 4 - (\frac{2}{3} + 1 + 1) =$
$62\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3} = 60$

e) Puolisuunnikassäännöllä saatiin tarkin pinta-ala suurimmalla jakovälillä.



Kuva 28: Jakovälillä 1 laskettiin suoran $y = 12x - 7$ alapuolelle jäävä alue. Virheen laskussa muodosti funktion $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$ ja suoran $y = 12x - 7$ välinen alue.

10.2 Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmän avulla voidaan laskea funktion nollakohdat. Menetelmää voidaan käyttää, kun funktion on jatkuva. Lisäksi funktion pitää olla derivoituva funktion nollakohdan läheellä.
Newtonin menetelmällä on myös huonoja puolia. Nollakohtaa, jota etsitään ei aina löydetä. Sen sijaan päädytään toiseen nollakohtaan. Näin voi tapahtua, jos on jaksollinen funktio. Jotta näin ei tapahtuisi, alkuarvon pitää olla tarpeeksi läheellä nollakohtaa.

Newtonin menetelmän toteutus :

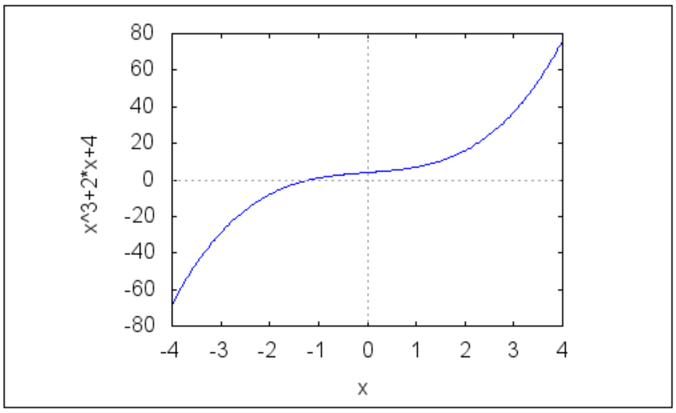
- Valitaan funktion nollakohdan läheeltä alkuarvo $x = x_o$.
- Piirretään tangentti funktion pisteestä $(x_0, f(x_0))$ x-akselille.
- Ratkaistaan tangentin ja x-akselin leikkauskohta $x = x_1$. Saatu leikkauspiste on yleensä tarkempi nollakohta kuin alkuarvo.
- Piirretään tangentti funktion pisteestä $(x_1, f(x_1))$ x-akselille. Ratkaistaan leikkauskohta. Näin toistetaan, kunnes saadaan halutun tarkka nollakohta.

Newtonin menetelmän kaavan muodostaminen :

- Muodostetaan tangentin yhtälö käyrälle $y = f(x)$ kohdassa $x = x_0$.
  $y - y_0 = k(x - x_0) \quad |y_0 = f(x_0),\ k = f'(x_0)$
  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad |y = 0$
  $0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
  $f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0)$
  $x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
  $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Esim. 1 Etsi Newtonin menetelmän avulla funktion $f(x) = x^3 + 2x + 4$ nollakohta.

Ratkaisu :
Derivoidaan funktio $f(x) = x^3 + 2x + 4$. $f'(x) = 3x^2 + 2$.
Newtonin menetelmä lauseke on $x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3+2x+4}{3x^2+2}$



Kuva 29: Funktio$f(x) = x^3 + 2x + 4$

Katsotaan kuvaa ja otetaan alkuarvoksi $x = -1$. Sijoitetaan $x = -1$ Newtonin menetelmä lausekkeeseen. Uusi likiarvo on $-1,2$. Tämä arvo sijoitetaan lausekkeeseen jä näin jatketaan eteenpäin monta kierrosta.
Saadaan likiarvo jono:
$x = -1$
$x = -1,2$
$x = -1,179746835$
$x = -1,179509057$
$x = -1,179509025$
$x = -1,179509025$
Funktion 9−desimaalinen likiarvo on $x = -1,179509025$.

EXTRA ASIAA
Lukion oppikirjoissa, kun ratkaistaan Newtonin menetelmällä nollakohtia, pyydetään vastaus jonkun desimaalin tarkkuudella. Toinen tapa, kun ratkaistaan nollakohtia Newtonin menetelmällä, on sopia, kuinka pieni ero kahden peräkkäisen laskun vastauksen välillä voi olla (ε), jotta vastaus hyväksytään.

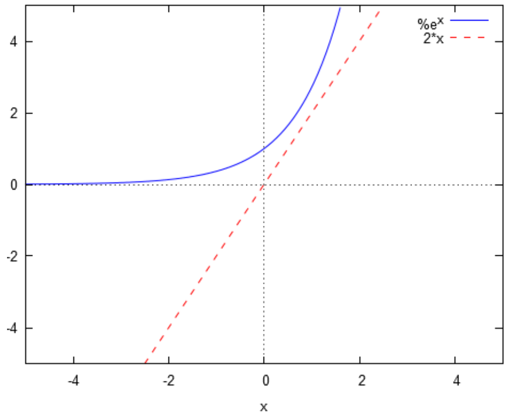
Newtonin laskun algoritmi :

- Valitaan funktion nollakohdan alkuarvo $x = x_o$.
- Lasketaan $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ eli n saa arvoja $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
- Lopetetaan lasku, kun $|x_x - x_{n+1}| < \varepsilon$.

Newtonin menetelmällä ei aina saa ratkaisua.

Esim. 2 Etsi Newtonin menetelmän avulla funktion $f(x) = e^x - 2x = 0$ nollakohta. Olkoon alkuarvo $x_1 = 0$. [36]

Ratkaisu :
Derivoidaan funktio $f(x) = e^x - 2x$. $f'(x) = e^x - 2$.
Newtonin menetelmä lauseke on $x_{n+1} = x_n - \frac{e^x - 2x}{e^x - 2}$.
$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_3 = 1, \ldots$
Tämä siksi, että funktiolla ei ole nollakohtaa. Funktion $f(x) = e^x - 2x = 0$ voidaan kirjoittaa muotoon $e^x = 2x$. Tälle ei löydy ratkaisua.



Kuva 30: Funktiot e^x ja $2x$

Tehtäviä

91 Määritä funktion $f(x) = x^3+3x^2-3$ nollakohdat Newtonin menetelmällä. Ota alkuarvoiksi luvut -4, -1 ja 2. Ilmoita nollakohdat seitsemän desimaalin tarkkuudella.

92 Tupu, Hupu ja Lupu ratkaisevat funktion $f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 1/2$ nollakohtia.
a) Tupu lähtee alkuarvosta 0,6 ja Lupu alkuarvosta 0,1. Kumpi pojista saa funktion nollakohdan 0,3566916 vähemmällä määrällä Newtonin menetelmän laskuja.
b) Hupu lähtee alkuarvosta -0.1. Ratkaise, minkä nollakohdan hän ratkaisee. Laske nollakohdan arvo seitsemän desimaalin tarkkuudella.
c) Laske funktion $f(x)$ suurin nollakohta seitsemän desimaalin tarkkuudella.

93 Laske $f(x) = x^2+3x+3$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala väliltä $1 \leq x \leq 4$,
a) kun jakovälejä on 1.
b) kun jakovälejä on 3.
c) kun jakovälejä on 6.
d) Laske alueen pinta-ala integroimalla.

94 Tupu, Hupu ja Lupu halusivat laskea kartalta erään alueen pinta-alan. Aluetta reunusti Kaunisjoki $f(x) = -3x^2-2x+1$ ja kartan $x-$akseli. Tupun jakoi alueen 2 jakoväliin, Hupu 3 jakoväliin ja Lupu 6 jakoväliin. Laske, mitä pojat saivat pinta-aloiksi. Kenen laskelma oli tarkin. Mistä tiedät?

11 Lähteet

Viitteet

[1] Alatupa S., Hassinen S., Hemmo-Ilvonen K., Leikas M. ja Taskinen T. (2009) Pitkä sigma 1. Funktiot ja yhtälöt. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. Tammi. 1. painos.

[2] Alatupa S., Hassinen S., Hemmo K., Leikas M., Taskinen T. ja Tolonen T. (2011) Pitkä sigma 2. Polynomifunktiot. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. Tammi. 2. painos.

[3] Alatupa S., Hassinen S., Hemmo K., Leikas M., Taskinen T. ja Tolonen T. (2010) Pitkä sigma 4. Analyyttinen geometria. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. Tammi. 2. painos.

[4] Alatupa S., Hassinen S., Leikas M., Taskinen T. ja Tolonen T. (2010) Pitkä sigma 6. Todennäköisyys ja tilastot. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. Tammi. 1. painos.

[5] Alatupa S., Hassinen S., Hemmo K. ja Leikas M. (2012) Pitkä sigma 7. Derivaatta. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. Sanoma Pro oy. 1. – 2. painos.

[6] Alatupa S., Hassinen S., Hemmo K. ja Leikas M. (2011) Pitkä sigma 8. Juuri- ja logaritmifunktiot. Lukion pitkän matematiikan oppikirja.Tammi. 1. painos.

[7] Alatupa S., Hassinen S., Hemmo K. ja Leikas M. (2013) Pitkä sigma 10. Integraalilaskenta. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. Sanoma Pro oy. 1. – 2. painos.

[8] Etälukio. Derivaatta. http://www02.oph.fi/etalukio/pitka_matematiikka/kurssi7/maa7_teoria8.html Luettu 25.5.2016.

[9] Etälukio. Todennäköisyys ja tilastot. http://www02.oph.fi/etalukio/pitka_matematiikka/kurssi6/maa6_teoria4.html Luettu 26.5.2016

[10] Diskreetti matematiikka. http://lipas.uwasa.fi/~mamo/diskreettiluennot.pdf. Luettu 28.4.2016.

[11] Hautajärvi T., Ottelin J. ja Wallin-Jaakkola L. (2005) Laudatur 1. Funktiot ja yhtälöt. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. Otava. 1. painos.

[12] Hautajärvi T., Ottelin J. ja Wallin-Jaakkola L. (2008) Laudatur 2. Polynomifunktiot. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. Otava. 1. – 2. painos.

[13] Hautajärvi T., Ottelin J. ja Wallin-Jaakkola L. (2005) Laudatur 4. Analyyttinen geometria. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. Otava. 1. painos.

[14] Hautajärvi T., Ottelin J. ja Wallin-Jaakkola L. (2007) Laudatur 10. Integraalilaskenta. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. Otava. 1. painos.

[15] Hautajärvi T., Ottelin J. ja Wallin-Jaakkola L. (2007) Laudatur 12. Numeerisia ja algebraalisia menetelmiä. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. Otava. 1. painos.

[16] Harjulehto P., Klén R. ja Koskenoja M. (2014) Analyysiä reaaliluvuilla. Unigrafia Oy.

[17] Kangasaho J., Mäkinen J., Oikkonen J.; Paasonen J., Salmela M. ja Tahvanainen J. (2005) Pitkä matematiikka 6. Todennäköisyys ja tilastot. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. WSOY. 1. painos.

[18] Kangasaho J., Mäkinen J., Oikkonen J., Paasonen J., Salmela M. ja Tahvanainen J. (2007) Pitkä matematiikka 10. Integraalilaskenta. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. WSOY. 1. painos.

[19] Kangasaho J., Mäkinen J., Oikkonen J., Paasonen J., Salmela M. ja Tahvanainen J. (2008) Pitkä matematiikka 12. Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. WSOY. 1. – 2. painos.

[20] Kangasaho J., Mäkinen J., Oikkonen J., Paasonen J., Salmela M. ja Tahvanainen J. (2008) Pitkä matematiikka 13. Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi. Lukion pitkän matematiikan oppikirja. WSOY. 1. – 2. painos.

[21] Karkela L., Kervinen M., Meriläinen P., Parkkila I. ja Seppänen R. (2009) maol taulukot matematiikka fysiikka kemia. Otava. 2. – 7. painos.

[22] Kauhala K., Holmala K., Lammers W. ja Schregel J. (2006) Keskikokoisten petojen elinpiirit ja tiheydet Kaakkois-Suomessa – pohdintaa rabieksen leviämisestä. http://www.rktl.fi/www/uploads/Selosteet/seloste_1_07.pdf. Luettu 1.10.2015.

[23] Koppinen M. (2008) Lineaarialgebra Osa 1. Turun yliopisto.

[24] Lahtonen J. (2010) Analyysi I. Turun yliopisto.

[25] Lahtonen J. (2010) Analyysi II osa 1. Turun yliopisto.

[26] Lahtonen J. Analyysi II osa 2. Turun yliopisto.

[27] Lassila A. (2015) Suomeen saattaa tulla vielä tuhansia Etelä-Euroopasta. 8.9.2015 http://www.hs.fi/kotimaa/a1441598231088 Luettu 10.5.2016.

[28] Lehtonen K. (2014) Matematiikan perusteet, Matematiikan perusteet 1 insinöörikoulutukseen. http://issuu.com/lehtk/docs/matematiikanperusteet. Luettu 11.5.2016.

[29] Lipschutz S. ja Schiller J. (1995) Theory and problems of finite mathematics. McGraw-Hill. 2nd edition.

[30] Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015. http://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf Luettu 10.5.2016.

[31] Lundahl R. (1997) Pitkä matematiikka.

[32] Mellin I. (2006) Tilastolliset menetelmät: Johdanto. https://math.aalto.fi/opetus/sovtoda/oppikirja/Johdanto.pdf. Luettu 2.5.2016.

[33] Mittaustulosten käsittely http://viesti.physics.aalto.fi/pub/kurssit/Tfy-3.15xx/Luentomat/Tulostenkasittely.pdf. Luettu 11.4.2016

[34] Monto V. 50 lautasellista ruokaa roskiin! Iltasanomat 30.9.2015.

[35] Neuvonen T. Matematiikan peruskurssi A.

[36] Newton's Method. http://www.ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math100/notes/approx/newton.html (UBC Calculus Online Course Notes). Luettu 3.5.2016

[37] Parmanen K., Portaankorva-Koivisto P. ja Sirviö S. (2014) Kertoma 4! Matemaattinen analyysi. Lukion lyhyen matematiikan oppikirja. Otava. 2. – 3. korjattu painos.

[38] Ruotsalainen K. Numeeriset menetelmät 031022P. Teknillinen tiedekunta matematiikan jaos. 11. helmikuuta 2010. http://s-mat-pcs.oulu.fi/~keba/NumMen/num_luentomoniste.pdf. Luettu 1.5.2016

[39] Saarinen M. (2003) Reaalifunktion analyysia. Avoimen yliopiston julkaisusarja. Oppimateriaalia 8. Jyväskylän yliopistopaino.

[40] Stein S. ja Barcellos A. (1992) Calculus and analytic geometry. McGraw-Hill, inc. 5th edition.

[41] Valtonen E. (2010) Mittaustulosten käsittelystä ja työturvallisuudesta fysiikan harjoitustöissä. Turun yliopisto.

[42] Varberg D., Purcell E. ja Rigdon S. (2007) Calculus. Pearson International Edition. 9th edition.

[43] Vilja I. (2016) Fysiikan matemattiset apuneuvot 2. Fysiikan ja tähtitieteen laitos, Turun yliopisto.

99

12 Liitteet

12.1 Ratkaisut

1. a) 0,−8,−9 b) $-\frac{1}{3}$,−1, ei määritelty c) $-1\frac{1}{6}$, ei määritelty, ei määritelty
2. a) $24ab$ b) $32b^2$ c) $-8x^2+8x$
3. a) x^3+3x^2+3x+1 b) $8x^3-24x^2+24x-8$ c) $8x^3+4x^2-2x-1$
4. a) $2x^2-4x-1$ b) $-2x+3$ c) $2x-3$ d) $x^4-4x^3+2x^2+5x-2$ e) $\frac{x+1}{x-1}$
5. a) $x+1$ b) 1 c) $\frac{3a+3}{a-1}$
6. a) Tupun vastaus. $x \neq 1$ eikä $x \neq -1$ b) Hupu ei muistanut ottaa jälkimmäisestä rationaalilauseesta sen käänteislukua.
7. a) $y=x+1$ b) $y=-x$ c) $x=2$ d) $y=1$
8. $y=\frac{4}{5}x+1\frac{4}{5}$, $y=-\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}$, $y=-4x+21$
9. $2\frac{1}{2}$
10. a) $y=-2x+3$ b) 54,5°
11. 2,21
12. a) Lyhin matka omaan kotiin. b) $y=-\frac{2}{3}x+8\frac{1}{3}$
13. a) Kaikki reaaliluvut b) ei ratkaisua c) $\frac{13}{16}$
14. a) $x=-10$ b) $x=12$ c) $x=-3$
15. a) $x=5$ b) $x=-2$
16. a) $A=\frac{F}{p}$ b) $F=pA$ c) $h=\frac{p}{\rho g}$ d) $\rho=\frac{p}{hg}$ e) $k=\frac{2E_p}{x^2}$
17. $x=2400$
18. Tupu sai 500 euroa, Hupu sai 525 euroa ja Lupu sai 423 euroa
19. a) $x=-2$ b) $(-2,0)$ c) katso s. 124 d) $(x+2)^2$
20. a) $-\frac{3}{2}$, $x=1$ b) $(-\frac{1}{4},-3\frac{1}{8})$ c) katso s. 125 d) $2(x-1)(x+\frac{3}{2})$
21. a) ei ole nollakohtaa b) $(\frac{3}{4},-1\frac{7}{8})$ c) katso s. 126 d) Koska ei nollakohtia, niin ei voida myöskään jakaa funktiota tekijöihin.
22. a) $x=-3$, $x=1\frac{2}{3}$ b) $x=\frac{7-\sqrt{93}}{2}$, $x=\frac{7+\sqrt{93}}{2}$ c) $x=-2$, $x=1\frac{1}{4}$ d) $x=1$
23. a) $x=0$ b) $x=0$, $x=1$ c) $x=-5$, $x=5$ d) ei ratkaisua
24. $(3,32)$, $(-1,8)$
25. a) $x=-\frac{2}{3}$, $x=0$, $x=2$ b) $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ c) $x=-1$, $x=-2$ d) $x=-2$, $x=0$, $x=2$
26. a)$x=-\frac{2}{3}$, $x=0$, $x=1$ b) $x=-\frac{1}{5}$, $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{5}$ c) $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=-\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$
27. a) $2x^3-4x^2-10x+12$ b) $-3x^3-3x^2+3x+3$ c) $4x^3-24x^2+48x-32$
28. a) $f(x)=2(x-2)(x-1)(x+1)$ b) $g(x)=-3(x-3)(x+1)(x+2)^2$
29. Funktion $f(x)$ leikkaa x-akselin, kun $x=-1$, $x=1$. Funktion $g(x)$ leikkaa x-akselin, kun $x=-3$, $x=2$, $x=5$
30. Aku ja pojat voivat törmätä pisteissä $(-2,0)$, $(0,0)$, $(2,0)$

31. a) $x=-1$, $y=3$ b) $x=2$, $y=2$
32. Suora s on $y=\frac{x}{2}+1\frac{1}{2}$, suora l on $y=-x+6x$, $(3,3)$
33. a) $a=15$, $b=5$ b) $4x^3-15x^2-24x-5$ c) $4(x-5)(x+1)(x+\frac{1}{4})$
34. a) $x=1$, $y=-1$, $z=2$ b) $x=-2$, $y=3$, $z=1$,
35. a) $3x^3+6x^2-3x$ b) $3x(x^2+2x-1)$ c) $x=-1-\sqrt{2}$, $x=-1+\sqrt{2}$, $x=0$
36. 16,50 dollaria
37. a) 0 b) 2
38.

a)

$$\begin{cases} 2x-5 & \text{, kun } x \geq 2\frac{1}{2} \\ -2x+5 & \text{, kun } x < 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x^2-2x-3 & \text{, kun } x \leq -1 \text{ tai } x \geq 3 \\ -x^2+2x+3 & \text{, kun } -1 < x < 3 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x^3-3x+2 & \text{, kun } x \geq -2 \\ -x^3+3x-2 & \text{, kun } x < -2 \end{cases}$$

39. a) $x=-2$, $x=2$, $x=-\sqrt{6}$, $x=\sqrt{6}$ b) $x=-1\frac{1}{5}$, $x=2$ c) $x=-1$, $x=1$, $x=-\sqrt{7}$, $x=\sqrt{7}$
40. a) $x=-2$, $x=-\frac{6}{7}$ b) $x=0$, $x=2$ c) $x=-3$, $x=-\frac{7}{9}$,
41. a) $-1<x<-\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3}<x<1$ c) $x<-1\frac{1}{2}$ tai $x>3$ d) $x<-\frac{1}{5}$ tai $x>1$ e) $x<-\frac{4}{5}$ tai $x>4$
42. Pojat ovat pisteessä $(-9,-27)$ ja Aku pisteessä $(-9,-22)$ tai pojat ovat pisteessä $(1,3)$ ja Aku pisteessä $(1,-2)$ kuvaaja sivulla 145
43. a) $34\frac{7}{27}$ b) $\frac{3}{b^2}$
44. a) $x=-3$, $x=3$ b) $x=-4$ c) ei ratkaisua
45. a) $x=2$ b) $x=3\frac{1}{2}$ c) $x=10$
46. a) $x=3$ b) $x=5$ c) $x=2$
47. a) $x=6$ b) $x=3$ c) $x=4$ d) $x>2$ e) $x>\frac{1}{4}$
48. a) $900\cdot 1,015^x$ b) 1125 kanaa c) vuoden 2010 lopussa d) vuoden 2025 lopussa
49. a. $25-3\sqrt{3}$ b) $31-2\sqrt{10}$ c) 11 d) $-5+3\sqrt[3]{4}$
50. a) 1 b) $2+2\sqrt[5]{2}$ c) $3\sqrt[5]{27}$ d) $16\sqrt[7]{4}$
51. a) $x=3$ b) $x=\frac{2\sqrt{15}}{15}$
52. a) määrittelyehto $x\geq-\frac{1}{3}$, neliöönkorotusehto $x\geq 3$, ratkaisu $x=5$
b) määrittelyehto $x\leq-5$ tai $x>1$, neliöönkorotusehto $x\geq 1\frac{2}{3}$, ratkaisu $x=3$
53. a) $x=0$, $x=1$, $x=2$ b) $x=3$

54. a) $(2,\sqrt{2})$ b)$(1,2)$
55. a) 4 b) 1 c) -3 d) 10 e) $\frac{3}{4}$ f) ei määritelty g) ei määritelty h) 4 i) 5
56. a) 5 b) 1 c) 1 d) -3 e) 2,84 f) -5
57. a) $x=3$ b) $x=0,146$
58. a) $x=3$ b) $x=4$ c) $x=e^5$ d) $x=10000000000$ e) $x=e$ f) $x=216$ g) $x=9$
59. a) $x=1$ tai $x=2$ b) $x=1$ c) $\frac{1}{2}<x<1$ d) $x>\frac{25}{32}$
60. 32-vuotiaina he lähtevät matkalle
61. a) -15 b) $3^{\sqrt{2}}$ c) 1 d) 0
62. a) $\frac{10}{3}$ b) -4 c) ei ole raja-arvoa
63. a) 0 b) $\frac{1}{6}$ c) $-\infty$ d) $-\frac{1}{4}$ e) $1\frac{1}{2}$
64. a) jatkuva b) Funktio on jatkuva ja saa erimerkkiset funktion arvot $f(10)=28$ ja $f(-10)=-18$, siispä funktiolla on ainakin yksi nollakohta.
65. epäjatkuva
66. a) vasemmanpuoleinen raja-arvo ja oikeanpuoleinen raja-arvot ovat samat. Siispä ei ole epäjatkuvuuskohta. Voidaan kävellä. b) Vasemmanpuoleinen raja-arvo ja oikeanpuoleinen raja-arvo ovat erisuuruiset. On epäjatkuvuuskohta. On kohtisuora pudotus.
67. 40
68. $y=5x+7$
69. a) $f'(x)=35x^6+6$ b) $m'(x)=12x^3+6x^2+2x+2$ c) $k'(x)=16(4x-5)^3$ d) $-\frac{8}{x^2-4x+4}$ e) $10e^x$ f) $(16x^3-2)e^{4x^4-2x}$
70. a) $g'(x)=200^x ln200$ b) $h'(x)=(2x+2)7^{x^2+2x+1}ln7$ c) $\frac{3x^2+2}{(x^3+2x)ln4}$ d) $\frac{3}{x}$, $x\neq 0$ e) $\frac{5(lnx)^4}{x}$, $x\neq 0$
71. a) $x=-1$, $x=0$, $x=1$ b) $x<\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ja $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$, d) minimikohta $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, maksimikohta $x=\frac{-1}{\sqrt{3}}$, minimiarvo $\frac{-2}{3\sqrt{3}}$, maksimiarvo $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, minimipiste $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-2}{3\sqrt{3}})$, maksimikohta $(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{2}{3\sqrt{3}})$ e) $f'(-2)=11$, funktion on kasvava, $f'(\frac{1}{2})=\frac{-1}{4}$ funktio on laskeva f) katso s. 181
72. 2 $m^2\cdot$ 2 m^2
73. a) $\frac{1}{5}x^5+x^2+3x+C$ b) $-\frac{1}{6x^6}+C$ c) $\frac{6}{11}x\sqrt[6]{x^5}+C$ d) $7\cdot ln|x|+C$, $x\neq 0$ e) $\frac{1}{72}(6x^2+3)^6+C$
74. a) $\frac{1}{3}ln|9x+4|+C$ b) $\frac{1}{4}e^{x^4}+C$ c) $\frac{1}{ln5}\cdot 5^x+C$ d) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+C$ e) $3x-15ln|x+5|+C$, $x\neq -5$ f) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+C$, $x\neq 3$ g) $\frac{1}{3}x^3+x^2+x+9ln|x+1|+C$, $x\neq -1$
75. $F(x)=x^3+3x^2+x-20$
76.
77. a) Tupun alue 41 b) Hupun alue 37,27 c) Lupun alue 38,88. Tupun alue isoin.

$$\begin{cases} 4x + C & \text{, kun } x \leq 2 \\ \frac{5}{2}x^2 - 6x + 10 + C & \text{, kun } x > 2 \end{cases}$$

78. a) 305,58 cm^3 b) 315,29 cm^3 c) 75,40 cm^3 vähiten kultaa d) 1,455 kg
79. a) 3,9 b) 3,71 c) 0,72
80. a) 0,16 b) 4,12
81. a) 0,7939 b) 0,2514 c) 0,063 d) 0,5910 e) 0,4274
82. a) 0,3821 b) 0,4312 c) 56 kissalla
83. $[90, 110]$ tai $[89, 111]$
84. a) $\frac{9}{35}$, b) $\frac{18}{35}$
85. a) 0,32 b) $\frac{13}{32}$
86. a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{17}{20}$
87. a) $6,74 \cdot 10^{21}$ b) 960 c) 127512000 d) 55440 e) 12650 f) 154 g) $\frac{3}{14}$
88.a) 0,999996 b) 0,660
89. a) 0,72 b) 0,02 c) 0,98 d) 0,4096 e) 0,99999
90. a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0,366 d) 0,331
91. a) $-2,5320889$ b) $-1,3472964$ c) 0,8793852
92. a) tupu 3 Newtonin laskulla b) $-0,2917256$ c) 1,6017007
93. a) 57 b) 53 c) $52\frac{5}{8}$ d) $52\frac{1}{2}$
94. Tupu $\frac{8}{9}$, Hupu $1\frac{13}{243}$, ja Lupu $1\frac{37}{243}$. Integroimalla $1\frac{5}{27}$. Lupulla on tarkin lasku, koska hänellä on jakovälejä eniten.

12.2 Ratkaisut wxMaximalla

1 Laske lausekkeiden arvot a) $(-x-2)(4-x)$ b) $\frac{x^2+2x+1}{x-1}$ c) $\frac{1}{x}+\frac{x}{1-x}$ kun $x=-2$, $x=0$ ja $x=1$.

```
1a)

(%i1) f(x):=(-x-2)*(4-x);
(%o1) f(x) := (-x-2) (4-x)

(%i2) f(-2);
(%o2) 0

(%i3) f(0);
(%o3) -8

(%i4) f(1);
(%o4) -9

1b)

(%i6) g(x):=(x^2+2*x+1)/(x-1);
                 2
                x +2 x+1
(%o6) g(x) := ---------
                  x-1

(%i7) g(-2);
         1
(%o7) - -
         3

(%i8) g(0);
(%o8) -1

(%i9) g(1);
expt: undefined: 0 to a negative exponent.
#0: g(x=1)
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

1b) ei voida laskea silloin, kun x=1, koska nimittäjään tulee silloin 0.
```

```
1c)

(%i12) h(x):=1/x+x/(1-x);
(%o12) h(x):=1/x+x/(1-x)

(%i13) h(-2);
(%o13) -7/6

(%i14) h(0);
expt: undefined: 0 to a negative exponent.
#0: h(x=0)
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

(%i15) h(1);
expt: undefined: 0 to a negative exponent.
#0: h(x=1)
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

1c) ei voida laskea silloin, kun x=0 tai x=1, koska nimittäjään tulee silloin 0.
```

2 Sievennä a) $(2a+3b)^2-(2a-3b)^2$, b) $2(-4b+3)^2-(-24b+9)2$, c) $(2+2x)(2-2x)-(2-2x)^2$

```
2a)

(%i1) (2*a+3*b)^2-(2*a-3*b)^2;
(%o1) (3 b+2 a)^2-(2 a-3 b)^2

(%i2) ratsimp(%);
(%o2) 24 a b

2b)

(%i4) 2*(-4*b+3)^2-(-24*b+9)*2;
(%o4) 2 (3-4 b)^2-2 (9-24 b)

(%i5) ratsimp(%);
(%o5) 32 b^2

2c)

(%i6) (2+2*x)*(2-2*x)-(2-2*x)^2;
(%o6) (2-2 x) (2 x+2)-(2-2 x)^2

(%i7) ratsimp(%);
(%o7) 8 x-8 x^2

Vastaus on parempi merkitä järjestyksessä -8x^2+8x.
```

3 Sievennä a) $(x+1)^3$, b) $(2x-2)^3$, c) $(2x+1)^2(2x-1)$

```
3a)

(%i1) (x+1)^3;
(%o1) (x+1)^3

(%i2) ratsimp(%);
(%o2) x^3+3 x^2+3 x+1

3b)

(%i3) (2*x-2)^3;
(%o3) (2 x-2)^3

(%i4) ratsimp(%);
(%o4) 8 x^3-24 x^2+24 x-8

3c)

(%i5) (2*x+1)^2*(2*x-1);
(%o5) (2 x-1) (2 x+1)^2

(%i6) ratsimp(%);
(%o6) 8 x^3+4 x^2-2 x-1
```

4 Laske polynomien $P(x) = x^2 - x - 2$ ja $R(x) = x^2 - 3x + 1$
a) summa $P(x) + R(x)$, b) erotus $R(x) - P(x)$ c) erotus $P(x) - R(x)$ d) kertolasku $P(x)R(x)$, e)jakolasku $\frac{P(x)}{R(x)}$,kun $R(x) = x^2 - 3x + 2$.

```
(%i2) P(x):=x^2-x-2;
(%o2) P(x):=x^2-x-2

(%i3) R(x):=x^2-3*x+1;
(%o3) R(x):=x^2-3 x+1

4a)

(%i4) P(x)+R(x);
(%o4) 2 x^2-4 x-1

4b)

(%i5) R(x)-P(x);
(%o5) 3-2 x

Parempi merkitä vastaus -2x+3
```

```
4c)

(%i6) P(x)-R(x);
(%o6) 2 x-3

4d)

(%i7) P(x)*R(x);
(%o7) (x^2-3 x+1) (x^2-x-2)

(%i8) ratsimp(%);
(%o8) x^4-4 x^3+2 x^2+5 x-2

4e)

(%i13) R(x):=x^2-3*x+2;
(%o13) R(x):=x^2-3 x+2

(%i14) P(x)/R(x);
(%o14) (x^2-x-2)/(x^2-3 x+2)

(%i15) radcan(%);
(%o15) (x+1)/(x-1)

Huomaa, että x ei saa olla 1. Jos x=1, niin nimittäjään
tulee nolla.
```

5 Sievennä a) $\frac{x^2-1}{x+1} + \frac{2x}{x}$. b) $\frac{2(a-b)}{a-1} : \frac{2(b-a)}{1-a}$ c) $\frac{12(a^2+2a+1)}{4(a^2-2a+1)2} \cdot \frac{6(a-1)}{(a+1)3}$

```
5a)

(%i1) (x^2-1)/(x+1)+2*x/x;
(%o1) (x^2-1)/(x+1)+2

(%i2) ratsimp(%);
(%o2) x+1
```

5b)

```
(%i9) r(x):=2*(a-b)/(a-1);
```

(%o9) $r(x) := \frac{2\,(a-b)}{a-1}$

```
(%i10) p(x):=2*(b-a)/(1-a);
```

(%o10) $p(x) := \frac{2\,(b-a)}{1-a}$

```
(%i11) r(x)/p(x);
```

(%o11) $\frac{(1-a)\,(a-b)}{(a-1)\,(b-a)}$

```
(%i12) ratsimp(%);
```

(%o12) 1

5c)

```
(%i7) (12*(a^2+2*a+1))/(4*(a^2-2*a+1)*2)*(6*(a-1))/((a+1)*3);
```

(%o7) $\frac{3\,(a-1)\,(a^2+2\,a+1)}{(a+1)\,(a^2-2\,a+1)}$

```
(%i8) ratsimp(%);
```

(%o8) $\frac{3\,a+3}{a-1}$

6 Tupu ja Hupu laskevat kotilaskua $\frac{x+1}{x^2-1} : \frac{x+1}{x^2-1}$ Tupu sai vastaukseksi 1 ja Hupu $\frac{1}{(x-1)^2}$. a) Kumpi sai oikean vastauksen? b) Minkä virheen toinen poika teki heti laskunsa alussa?

6a)

```
(%i1) k(x):=(x+1)/(x^2-1);
```

(%o1) $k(x) := \frac{x+1}{x^2-1}$

```
(%i2) l(x):=(x+1)/(x^2-1);
```

(%o2) $l(x) := \frac{x+1}{x^2-1}$

```
(%i3) k(x)/l(x);
```

(%o3) 1

Tupun vastaus on oikein. x ei saa olla 1 eikä -1.

```
6b)

(%i10) k(x)*l(x);
```
(%o10) $\frac{(x+1)^2}{(x^2-1)^2}$
```
(%i11) ratsimp(%);
```
(%o11) $\frac{1}{x^2-2\,x+1}$
```
(%i12) factor(%);
```
(%o12) $\frac{1}{(x-1)^2}$
```
Hupu ei muistanut ottaa jälkimäisestä rationaalilauseesta sen
käänteislukua.
```

7 Määritä suoran yhtälö, kun pisteet ovat a) $(1, 2)$ ja $(4, 5)$ b) $(-1, 1)$ ja $(2, -2)$ c) $(2, 0)$ ja $(2, -2)$ d) $(-1, 1)$ ja $(1, 1)$.

```
Kulmakertoimen määritys, kun pisteet ovat (x_1,y_1) ja (x_2,y_2).
Kulmakerroin on haluttu nyt lyhentää kk.

(%i1) kk(x_1,y_1,x_2,y_2):=(y_2-y_1)/(x_2-x_1);y_1
```
(%o1) kk(x_1,y_1,x_2,y_2) := $\frac{y\_2-y\_1}{x\_2-x\_1}$
```
Suoran yhtälön määritys, joka laskee itse kulmakertoimen.

(%i11) suora(x_1,y_1,x_2,y_2):=solve(y-y_1=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)*(x-x_1),y)[1];
```
(%o11) suora(x_1,y_1,x_2,y_2) := $\left(\mathrm{solve}\left(y-y\_1=\frac{y\_2-y\_1}{x\_2-x\_1}(x-x\_1),y\right)\right)_1$
```
7a)

(%i6) x_1:1;    y_1:2;    x_2:4;    y_2:5;
(%o6) 1
(%o7) 2
(%o8) 4
(%o9) 5

(%i13) kk(x_1,y_1,x_2,y_2);
(%o13) 1

(%i12) suora(x_1,y_1,x_2,y_2);
(%o12) y=x+1
```

```
7b)
```

```
(%i14) x_1:-1;   y_1:1;   x_2:2;    y_2:-2;
(%o14) -1
(%o15) 1
(%o16) 2
(%o17) -2
```

```
(%i18) kk(x_1,y_1,x_2,y_2);
(%o18) -1
```

```
(%i19) suora(x_1,y_1,x_2,y_2);
(%o19) y=-x
```

```
7c)
```

```
(%i21) x_1:2;   y_1:0;   x_2:2;    y_2:-2;
(%o21) 2
(%o22) 0
(%o23) 2
(%o24) -2
```

```
(%i25) kk(x_1,y_1,x_2,y_2);
expt: undefined: 0 to a negative exponent.
#0: kk(x_1=2,y_1=0,x_2=2,y_2=-2)
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
ei kulmakerrointa, koska nimittäjään tulee nolla.
```

```
Suora pitää nyt päätellä, koska kulmakerrointa ei ole.
Suora on x=2.
```

```
7d)
```

```
(%i27) x_1:-1;   y_1:1;   x_2:1;    y_2:1;
(%o27) -1
(%o28) 1
(%o29) 1
(%o30) 1
```

```
(%i31) kk(x_1,y_1,x_2,y_2);
(%o31) 0
```

```
(%i32) suora(x_1,y_1,x_2,y_2);
(%o32) y=1
```

8 Kolmion kärkipisteet ovat $(-1, 1)$, $(4, 5)$ ja $(6, -3)$. Laske kolmion sivujen kautta kulkevat suorat.

```
8
```

```
(%i77) suora(x_1,y_1,x_2,y_2):=solve(y-y_1=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)*(x-x_1),y)[1];
```

(%o77) $\mathrm{suora}(x\_1,y\_1,x\_2,y\_2) := \left(\mathrm{solve}\left(y-y\_1=\frac{y\_2-y\_1}{x\_2-x\_1}(x-x\_1),y\right)\right)_1$

```
(%i83) x_1:-1;   y_1:1;   x_2:4;   y_2:5;
(%o83) -1
(%o84) 1
(%o85) 4
(%o86) 5
```

```
(%i88) suora(x_1,y_1,x_2,y_2);
```

(%o88) $y=\frac{4x+9}{5}$

```
Suora on siis y=4/5x+9/5
```

```
(%i91) x_1:-1;   y_1:1;   x_2:6;   y_2:-3;
(%o91) -1
(%o92) 1
(%o93) 6
(%o94) -3
```

```
(%i95) suora(x_1,y_1,x_2,y_2);
```

(%o95) $y=-\frac{4x-3}{7}$

```
Suora on siis y=-4/7x+3/7
```

```
(%i96) x_1:4;   y_1:5;   x_2:6;   y_2:-3;
(%o96) 4
(%o97) 5
(%o98) 6
(%o99) -3
```

```
(%i100) suora(x_1,y_1,x_2,y_2);
```

(%o100) $y=21-4x$

```
suora on siis y=-4x+21
```

9 Kolmion kärkipisteet ovat $(1,2)$, $(2,4)$ ja $(3,1)$. Laske kolmion ala.

```
9
```

```
Lasketaan pisteiden (1,2) ja (2,4) kautta kulkevan
suoran kulmakerroin.
```

```
(%i3) kk(x_1,y_1,x_2,y_2):=(y_2-y_1)/(x_2-x_1);
```

(%o3) $\mathrm{kk}(x\_1,y\_1,x\_2,y\_2) := \frac{y\_2-y\_1}{x\_2-x\_1}$

```
(%i4) x_1:1;   y_1:2;   x_2:2;   y_2:4;
(%o4) 1
(%o5) 2
(%o6) 2
(%o7) 4
```

```
(%i8) kk(x_1,y_1,x_2,y_2);
(%o8) 2
```

Lasketaan pisteiden (1,2) ja (3,1) kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

```
(%i9) x_1:1;   y_1:2;   x_2:3;   y_2:1;
(%o9) 1
(%o10) 2
(%o11) 3
(%o12) 1
```

```
(%i13) kk(x_1,y_1,x_2,y_2);
```

(%o13) $-\frac{1}{2}$

Lasketaan suorien kulmakertoimien tulo.

```
(%i14) 2*-1/2;
(%o14) -1
```

Koska kulmakertoimien tulo on -1, on suorat kohtisuorassa toisiinsa nähden. Kolmio on suorakulmainen.

Lasketaan pisteiden (1,2) ja (2,4) välinen etäisyys.

```
(%i15) sqrt((2-1)^2+(4-2)^2);
```

(%o15) $\sqrt{5}$

Lasketaan pisteiden (1,2) ja (3,1) välinen etäisyys.

```
(%i16) sqrt((3-1)^2+(1-2)^2);
```

(%o16) $\sqrt{5}$

Lasketaan kolmion ala.

```
(%i17) (%o15*%o16)/2;
```

(%o17) $\frac{5}{2}$

Kolmion ala on 5/2 eli 2 1/2.

10 Janan päätepisteet ovat $(3,2)$ ja $(-3,4)$. a) Määritä janan keskipisteen kautta kulkevan suoran yhtälö, joka kulkee myös pisteen $(1,1)$ kautta. b) Laske janan ja suoran välisen kulman suuruus yhden desimaalin tarkkuudella.

10a)

Lasketaan janan keskipiste.

```
(%i1) (3+(-3))/2;
(%o1) 0
```

```
(%i2) (2+4)/2;
(%o2) 3
```

Janan keskipiste on (0,3).

Pisteiden (0,3) ja (1,1) kautta kulkeva suora.

```
(%i3) suora(x_1,y_1,x_2,y_2):=solve(y-y_1=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)*(x-x_1),y)[1];
```

(%o3) $\mathrm{suora}(x\_1, y\_1, x\_2, y\_2) := \left(\mathrm{solve}\left(y - y\_1 = \frac{y\_2 - y\_1}{x\_2 - x\_1}(x - x\_1), y\right)\right)_1$

```
(%i4) x_1:0;   y_1:3;   x_2:1;    y_2:1;
(%o4) 0
(%o5) 3
(%o6) 1
(%o7) 1
```

```
(%i8) suora(x_1,y_1,x_2,y_2);
```

(%o8) $y = 3 - 2\,x$

Suoran yhtälö on y=-2x+3.

10b)

Lasketaan janaa pitkin menevän suoran kulmakerroin.

```
(%i17) kk(x_1,y_1,x_2,y_2):=(y_2-y_1)/(x_2-x_1);
```

(%o17) $\mathrm{kk}(x\_1, y\_1, x\_2, y\_2) := \frac{y\_2 - y\_1}{x\_2 - x\_1}$

```
(%i18) x_1:3;   y_1:2;   x_2:-3;    y_2:4;
(%o18) 3
(%o19) 2
(%o20) -3
(%o21) 4
```

```
(%i22) kk(x_1,y_1,x_2,y_2);
```

(%o22) $-\frac{1}{3}$

Lasketaan tan alfa. Kulmakertoimet ovat -2 ja -1/3.

```
(%i23) abs(-2-(1/3))/(1+-2*(-1/3));
```

(%o23) $\frac{7}{5}$

```
(%i32) atan(7/5);
(%o32) atan(7/5)
```

$$\operatorname{atan}\left(\frac{7}{5}\right)$$

```
(%i33) float(%), numer;
(%o33) 0.9505468408120751
```

muutetaan radiaani kulmiksi.

```
(%i34) %*(360)/(2*%pi);
```

(%o34) $\frac{171.0984313461735}{\pi}$

```
(%i35) float(%), numer;
(%o35) 54.46232220802562
```

Kulman suuruus on 54,5 astetta.

11 Laske suorien $9x - 3y + 15 = 0$ ja $12x - 4y - 8 = 0$ välinen etäisyys kahden desimaalin tarkkuudella.

11

Lasketaan yksi piste suoralta 9x-3y+15=0. Lasketaan, mitä y on, kun x on 1.
Muutetaan suoran yhtälö 9x-3y+15=0 toiseen muotoon y=3x+5

```
(%i2) f(x):= 3*x+5;
(%o2) f(x):=3 x+5
```

```
(%i3) f(1);
(%o3) 8
```

Suoralla 9x-3y+15=0 on piste (1,8).

Lasketaan pisten (1,8) etäisyys suorasta 12x-4y-8=0.

```
(%i5) (abs(12*1-4*8-8))/(sqrt(12^2+(-4)^2));
```

(%o5) $\frac{7}{\sqrt{10}}$

```
(%i7) float(%), numer;
(%o7) 2.213594362117866
```

12 Tupu, Hupu ja Lupu ovat metsänkorvessa. He ovat todella väsyneitä. Heidän sijaintinsa Ankkalinnan kartalla on (5,5). a) Laske minne heillä on lyhyin matka Ankka Hotelliin, jonka sijainti on (2,2), omaan kotiin (8,3) vai Akun mökille (6,9). b) Määritä lyhyimmän polun tarkka reitti, eli suoran yhtälö.

```
12a)
```

```
Lasketaan pisteiden (5,5) ja (2,2) etäisyys toisistaan.
```

```
(%i4) sqrt((5-2)^2+(5-2)^2);
```

(%o4) $3\sqrt{2}$

```
(%i5) float(%), numer;
(%o5) 4.242640687119286
```

```
Lasketaan pisteiden (5,5) ja (8,3) etäisyys toisistaan.
```

```
(%i6) sqrt((5-8)^2+(5-3)^2);
```

(%o6) $\sqrt{13}$

```
(%i7) float(%), numer;
(%o7) 3.605551275463989
```

```
Lasketaan pisteiden (5,5) ja (6,9) etäisyys toisistaan.
```

```
(%i8) sqrt((5-6)^2+(5-9)^2);
```

(%o8) $\sqrt{17}$

```
(%i9) float(%), numer;
(%o9) 4.123105625617661
```

```
Pisteiden (5,5) ja (8,3) välillä on lyhin matka. Siis lyhin matka on
omaan kotiin.
```

```
12b)

(%i10) suora(x_1,y_1,x_2,y_2):=solve(y-y_1=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)*(x-x_1),y)[1];
```

(%o10) $\mathrm{suora}(x\_1,y\_1,x\_2,y\_2):=\left(\mathrm{solve}\left(y-y\_1=\frac{y\_2-y\_1}{x\_2-x\_1}(x-x\_1),y\right)\right)_1$

```
(%i11) x_1:5;    y_1:5;    x_2:8;    y_2:3;
(%o11) 5
(%o12) 5
(%o13) 8
(%o14) 3

(%i15) suora(x_1,y_1,x_2,y_2);
```

(%o15) $y=-\frac{2x-25}{3}$

```
Suoran yhtälö on y=-2/3x + 25/3 eli y=-2/3 + 8 1/3.
```

13 Ratkaise a) $4(2x+2)3 = 3(4x+4)2$ b) $3(3+5x)6 = 6(3x+2)5$
c) $2(-5x+2)4 = 3(2x-3)4$

```
13a)

(%i1) 4*(2*x+2)*3=3*(4*x+4)*2;
(%o1) 12 (2 x+2) =6 (4 x+4)

(%i2) solve([%], [x]);
(%o2) [x=x]

Polynomin vastauksia ovat kaikki reaaliluvut.

13b)

(%i3) 3*(3+5*x)*6=6*(3*x+2)*5;
(%o3) 18 (5 x+3) =30 (3 x+2)

(%i4) solve([%], [x]);
(%o4) []

Polynomilla ei ole ratkaisua.

13c)

(%i5) 2*(-5*x+2)*4=3*(2*x-3)*4;
(%o5) 8 (2-5 x) =12 (2 x-3)

(%i6) solve([%], [x]);
```

(%o6) $[x=\frac{13}{16}]$

14 Ratkaise a) $2(x+3x)-5(2x+3)=5$ b) $-5(-2x+7)+4(3-2x)=1$ c) $-8(2+x)-2(y+5)2=-y+3(x-y)+x$

14a)

```
(%i1) 2*(x+3*x)-5*(2*x+3)=5;
(%o1) 8 x-5 (2 x+3) =5
```

```
(%i2) solve([%], [x]);
(%o2) [x=-10]
```

14b)

```
(%i3) -5*(-2*x+7)+4*(3-2*x)=1;
(%o3) 4 (3-2 x) -5 (7-2 x) =1
```

```
(%i4) solve([%], [x]);
(%o4) [x=12]
```

14c)

```
(%i9) -8*(2+x)-2*(y+5)*2=-y+3*(x-y)+x;
(%o9) -4 (y+5) -8 (x+2) =-y+3 (x-y) +x
```

```
(%i10) solve([%], [x]);
(%o10) [x=-3]
```

15 Ratkaise a) $-3x+x^2-30+3x^2=4x^2-8x-5$ b) $3(x^2+3x+1)-4(x^2+5x+2)=-x^2-13x-9$

15a)

```
(%i1) -3*x+x^2-30+3*x^2=4*x^2-8*x-5;
(%o1) 4 x^2-3 x-30=4 x^2-8 x-5
```

```
(%i2) solve([%], [x]);
(%o2) [x=5]
```

15b)

```
(%i3) 3*(x^2+3*x+1)-4*(x^2+5*x+2)=-x^2-13*x-9;
(%o3) 3 (x^2+3 x+1) -4 (x^2+5 x+2) =-x^2-13 x-9
```

```
(%i4) solve([%], [x]);
(%o4) [x=-2]
```

16 Ratkaise fysiikan kaavoja.
a) $A =?$ kun $p = \frac{F}{A}$, b) $F =?$ kun $p = \frac{F}{A}$, c) $h =?$ kun $p = h\rho g$, d) $\rho =?$ kun $p = h\rho g$, e)$k =?$ kun $E_p = \frac{1}{2}kx^2$.

```
16a)
```

```
(%i1) p=F/A;
```
(%o1) $p=\frac{F}{A}$

```
(%i2) solve([%], [A]);
```
(%o2) $[A=\frac{F}{p}]$

```
16b)
```

```
(%i3) p=F/A;
```
(%o3) $p=\frac{F}{A}$

```
(%i4) solve([%], [F]);
```
(%o4) $[F=p\ A]$

```
16c)
```

```
Laitetaan lyhenteen rho tunnukseksi r.
```

```
(%i7) p=h*r*g;
```
(%o7) $p=g\ h\ r$

```
(%i8) solve([%], [h]);
```
(%o8) $[h=\frac{p}{g\ r}]$

$h = \frac{p}{g\rho}$

```
16d)
```

```
Laitetaan lyhenteen rho tunnukseksi r.
```

```
(%i11) p=h*r*g;
```
(%o11) $p=g\ h\ r$

```
(%i12) solve([%], [r]);
```
(%o12) $[r=\frac{p}{g\ h}]$

$\rho = \frac{p}{hg}$

```
16e)

Laitetaan lyheenteen E_{p} tunukseksi E.

(%i9) E=1/2*k*x^2;
```

$$(\%o9)\quad E=\frac{k\,x^2}{2}$$

```
(%i10) solve([%], [k]);
```

$$(\%o10)\quad [k=\frac{2\,E}{x^2}]$$

$k = \frac{2E_p}{x^2}$

17 Akun palkkapussista meni viime kuussa 25% veroihin, neljäsosa vuokraan, kuudesosa auton kustannuksiin ja muuhun elämiseen jäi 800 euroa. Kuinka paljon Aku tienasi?

```
17)

(%i1) x-25/100*x-1/4*x-1/6*x-800=0;
```

$$(\%o1)\quad \frac{x}{3}-800=0$$

```
(%i2) solve([%], [x]);
(%o2) [x=2400]
```

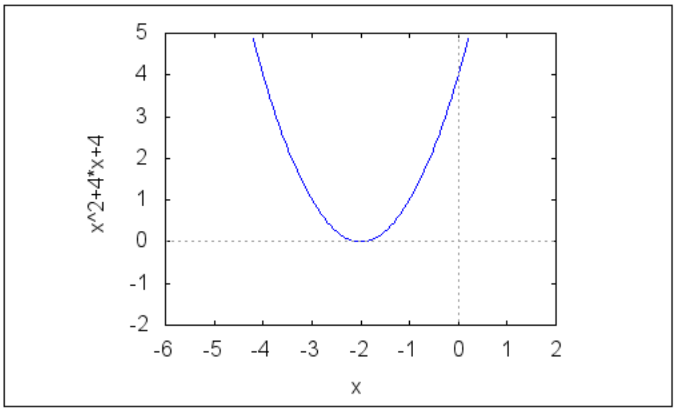
18 Tupu, Hupu ja Lupu olivat hiihtolomalla töissä. He saivat eri suuret palkkapussit. Hupu sai 25 euroa enemmän kuin Tupu. Lupu sai 77 euroa vähemmän kuin Tupu. Yhteensä he saivat 1448 euroa. Laske, kuinka paljon kukin poika sai palkkaa.

```
18)

(%i1) (25+x)+x+(x-77)=1448;
(%o1) 3 x-52=1448

(%i2) solve([%], [x]);
(%o2) [x=500]

(%i4) 25+500;
(%o4) 525

(%i5) 500-77;
(%o5) 423

Tupu sai 500 euroa, Hupu sai 525 euroa ja Lupu sai 423 euroa.
```

19 Funktio on $f(x) = x^2 + 4x + 4$. a) Laske funktion nollakohdat.

b) Laske funktion huippukohta. c) Piirrä funktio xy-koordinaatistoon. d) Jaa funktio tekijöihinsä.

```
19a)

(%i5) solve([x^2+4*x+4], [x]);
(%o5) [x=-2]

19b)

Funktiolla on yksi nollakohta. Huipun x-koordinaatti
on -2. y-koordinaatti saadaan laskemalla f(-2).

(%i6) f(-2);
(%o6) 0

Huippu on (-2,0).

19c)

(%i13) wxplot2d([x^2+4*x+4], [x,-6,2], [y,-2,5])$
plot2d: some values were clipped.
(%t13)
```




```
19d)

(%i26) x^2+4*x+4;
(%o26) x^2+4 x+4

(%i27) factor(%);
(%o27) (x+2)^2
```

20 Funktio on $g(x) = 2x^2 + x - 3$. a) Laske funktion nollakohdat. b) Laske funktion huippukohta. c) Piirrä funktio xy-koordinaatistoon. d) Jaa funktio tekijöihinsä.

20a)

```
(%i2) solve( 2*x^2+x-3,[x]);
```

(%o2) $[x=-\frac{3}{2}, x=1]$

20b) Funktiolla on kaksi nollakohta. Huippukohta sijaitsee näiden puolessa välissä.

```
(%i3) (-3/2+1)/2;
```

(%o3) $-\frac{1}{4}$

Funktion huippukohdan x-koordinaatti on -1/4. y-koordinaatti saadaan laskemalla g(-1/4).

```
(%i4) g(-1/4);
```

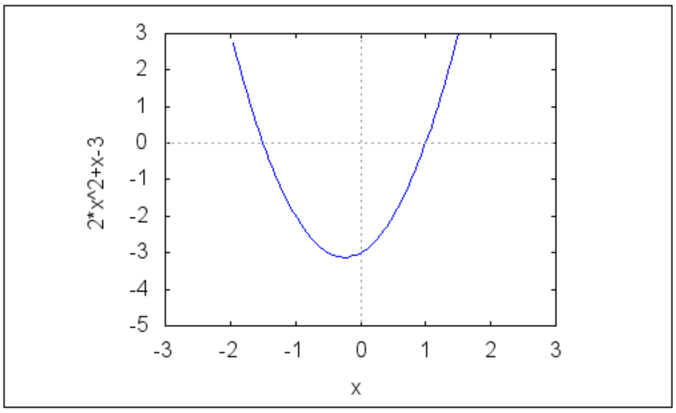
(%o4) $-\frac{25}{8}$

Funktion huippukohta on (-1/4,-25/8)

20c)

```
(%i9) wxplot2d([2*x^2+x-3], [x,-3,3], [y,-5,3])$
plot2d: some values were clipped.
```

(%t9)



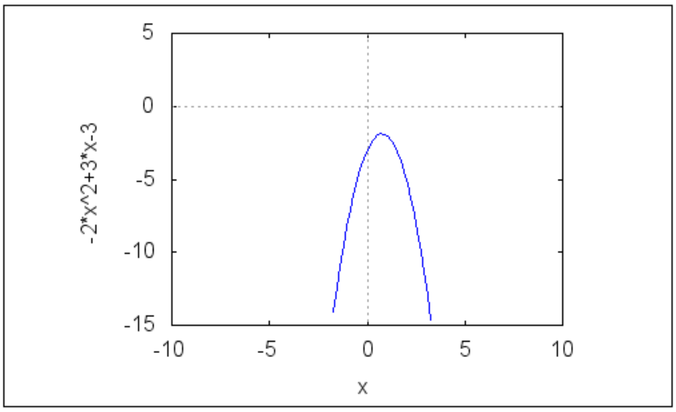
20d)

```
(%i7) factor(2*x^2+x-3);
```

(%o7) $(x-1)\,(2\,x+3)$

21 Funktio on $l(x) = -2x^2 + 3x - 3$. a) Laske funktion nollakohdat. b) Laske funktion huippukohta. c) Piirrä funktio xy-koordinaatistoon. d) Jaa funktio tekijöihinsä.

```
21a)

(%i3) l(x):=-2*x^2+3*x-3;
(%o3) l(x) := (-2) x^2+3 x-3

(%i4) solve([%], [x]);
(%o4) [(l(x) :=-2 x^2+3 x-3)=0]

funktiolla ei ole nollakohtia.

21b)

(%i7) diff(-2*x^2+3*x-3,x,1);
(%o7) 3-4 x

(%i8) solve([%], [x]);
(%o8) [x=3/4]

(%i9) l(3/4);
(%o9) -15/8

Funktion huippukohda on (3/4,-15/8).
(Tehtävä on ratkaistu derivoimalla)

21c)

(%i6) wxplot2d([-2*x^2+3*x-3], [x,-10,10], [y,-15,5])$
plot2d: some values were clipped.
(%t6)
```




```
21d) Funktiota ei voi jakaa tekijöihinsä, koska funktiolla ei ole nollakohtia.
```

22 Ratkaise a) $2x^2 + 5 + 6x - 20 - 2x + x^2 = 0$ b) $2x + 5 = x^2 - 5x - 6$ c) $2x - 10 = -4x^2 - x$ d) $x^2 + x = -x^2 + 5x - 2$

22a)

```
(%i3) 2*x^2+5+6*x-20-2*x+x^2=0;
```
(%o3) $3\,x^2+4\,x-15=0$

```
(%i4) solve([%], [x]);
```
(%o4) $[x=\frac{5}{3},x=-3]$

22b)

```
(%i5) 2*x+5=x^2-5*x-6;
```
(%o5) $2\,x+5=x^2-5\,x-6$

```
(%i6) solve([%], [x]);
```
(%o6) $[x=-\frac{\sqrt{93}-7}{2},x=\frac{\sqrt{93}+7}{2}]$

22c)

```
(%i7) 2*x-10=-4*x^2-x;
```
(%o7) $2\,x-10=-4\,x^2-x$

```
(%i8) solve([%], [x]);
```
(%o8) $[x=-2,x=\frac{5}{4}]$

22d)

```
(%i9) x^2+x=-x^2+5*x-2;
```
(%o9) $x^2+x=-x^2+5\,x-2$

```
(%i10) solve([%], [x]);
```
(%o10) $[x=1]$

23 Ratkaise a) $6x^2=4x^2$ b) $4x^2-x=3x$ c) $5x^2-125=0$ d) $3x^2+10=0$

23a)

```
(%i1) 6*x^2=4*x^2;
```
(%o1) $6\,x^2=4\,x^2$

```
(%i2) solve([%], [x]);
```
(%o2) $[x=0]$

```
23b)

(%i3) 4*x^2-x=3*x;
(%o3) 4 x^2 -x=3 x

(%i4) solve([%], [x]);
(%o4) [x=0,x=1]

23c)

(%i5) 5*x^2-125=0;
(%o5) 5 x^2 -125=0

(%i6) solve([%], [x]);
(%o6) [x=-5,x=5]

23d)

(%i7) 3*x^2+10=0;
(%o7) 3 x^2 +10=0

(%i8) solve([%], [x]);
```

(%o8) $[x=-\frac{\sqrt{10}\,\%i}{\sqrt{3}},x=\frac{\sqrt{10}\,\%i}{\sqrt{3}}]$

```
      Funktiolla ei ole ratkaisua
```

24 Tupu, Hupu ja Lupu löysivät kadulta karhukoplan aarrekartan. Kartassa luki, ratkaise, missä polynomifunktiot $f(x) = 5x^2 - 4x - 1$ ja $g(x) = 4x^2 - 2x + 2$ leikkaavat toisensa. Leikkauspisteiden koordinaatit löytyvät Ankkalinnan kartalta. Kätkömme ovat leikkauspisteissä.

```
24)

(%i39) f(x):=5*x^2-4*x-1;
(%o39) f(x) :=5 x^2 -4 x-1

(%i40) g(x):=4*x^2-2*x+2;
(%o40) g(x) :=4 x^2 -2 x+2

(%i41) f(x)=g(x);
(%o41) 5 x^2 -4 x-1=4 x^2 -2 x+2
```

```
(%i42) solve([%], [x]);
(%o42) [x=3,x=-1]
```

```
(%i43) f(3);
(%o43) 32
```

```
(%i44) f(-1);
(%o44) 8
```

```
Kätköt sijaitsevat kohdissa (3,32) ja (-1,8).
```

25 Ratkaise a) $-3x^3+4x^2+4x=0$ b) $4x^3+4x^2-x-1=0$ c) $x^3+5x^2+8x+4=0$ d) $4-x^4+4x^2-4=0$

```
25a)
```

```
(%i1)  -3*x^3+4*x^2+4*x=0;
(%o1) -3 x^3+4 x^2+4 x=0
```

```
(%i2) solve([%], [x]);
(%o2) [x=-2/3,x=2,x=0]
```

```
25b)
```

```
(%i3) 4*x^3+4*x^2-x-1=0;
(%o3) 4 x^3+4 x^2-x-1=0
```

```
(%i4) solve([%], [x]);
(%o4) [x=1/2,x=-1,x=-1/2]
```

```
25c)
```

```
(%i8) x^3+5*x^2+8*x+4=0;
(%o8) x^3+5 x^2+8 x+4=0
```

```
(%i9) solve([%], [x]);
(%o9) [x=-1,x=-2]
```

```
25d)
```

```
(%i10) 4-x^4+4*x^2-4=0;
(%o10) 4 x^2-x^4=0
```

```
(%i11) solve([%], [x]);
(%o11) [x=-2,x=2,x=0]
```

26 Ratkaise a) $2x^3-2x^2=-x^3-x^2+2x$
b) $70x^3-8x^2+1=-5x^3+17x^2+3x$ c) $12-x^2=12x^2-24-x^4$

```
26a)

(%i1) 3*x^3-x^2-2*x;
(%o1) 3 x^3 - x^2 - 2 x

(%i2) solve([%], [x]);
(%o2) [x=1, x=-2/3, x=0]

26b)

(%i5) 70*x^3-8*x^2+1=-5*x^3+17*x^2+3*x;
(%o5) 70 x^3 - 8 x^2 + 1 = -5 x^3 + 17 x^2 + 3 x

(%i6) solve([%], [x]);
(%o6) [x=-1/5, x=1/3, x=1/5]

26c)

(%i5) 12-x^2=12*x^2-24-x^4;
(%o5) 12 - x^2 = -x^4 + 12 x^2 - 24

(%i6) solve([%], [x]);
(%o6) [x=-2, x=2, x=-3, x=3]
```

27 Muodosta polynomin yleinen muoto, a) kun korkeimman asteen termin kerroin on 2 ja polynomin kaikki yksinkertaiset nollakohdat ovat $1, -2$ ja 3. b) kun korkeimman asteen kerroin on -3 ja kaksinkertaiset nollakohdat ovat -1 ja yksinkertainen nollakohta on 1. c) kun korkeimman asteen termin kerroin on 4 ja polynomilla on kolminkertainen nollakohta 2.

```
27a)
(%i1) 2*(x+2)*(x-1)*(x-3);
(%o1) 2 (x-3) (x-1) (x+2)
(%i2) ratsimp(%);
(%o2) 2 x^3-4 x^2-10 x+12
```

```
27b)
(%i3) -3*(x+1)^2*(x-1);
(%o3) -3 (x-1) (x+1)^2
(%i4) ratsimp(%);
(%o4) -3 x^3-3 x^2+3 x+3
```

```
27c)
(%i5) 4*(x-2)^3;
(%o5) 4 (x-2)^3
(%i6) ratsimp(%);
(%o6) 4 x^3-24 x^2+48 x-32
```

28 a) Funktiolla $f(x)$ on kolme yksinkertaista nollakohtaa $x = -1$, $x = 1$ ja $x = 2$. Funktio on $f(3) = 16$. Määritä $f(x)$.
b) Funktiolla $g(x)$ on yksinkertaisia nollakohtia $x = -1$ ja $x = 3$ ja kaksinkertainen nollakohta $x = -2$. Funktio $g(2) = 144$. Määritä $g(x)$.

```
28a)

(%i4) f(x,a):=a*(x+1)*(x-1)*(x-2);
(%o4) f(x,a):=a (x+1) (x-1) (x-2)

(%i5) f(3,a)=16;
(%o5) 8 a=16

(%i6) solve([%], [a]);
(%o6) [a=2]

(%i7) f(x,2);
(%o7) 2 (x-2) (x-1) (x+1)

Funktio on siis f(x)= 2(x-2)(x-1)(x+1)

28b)

(%i8) g(x,a):=a*(x+2)^2*(x-3)*(x+1);
(%o8) g(x,a):=a (x+2)^2 (x-3) (x+1)

(%i9) g(2,a)=144;
(%o9) -48 a=144

(%i10) solve([%], [a]);
(%o10) [a=-3]

(%i11) g(x,-3);
(%o11) -3 (x-3) (x+1) (x+2)^2

Funktio on siis g(x)=-3(x-3)(x+1)(x+2)^2
```

29 Laske, koska funktiot $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ ja $g(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ leikkaa x-akselin.

```
29)

(%i1) x^3-x^2-x+1;
(%o1) x^3-x^2-x+1

(%i2) factor(%);
(%o2) (x-1)^2 (x+1)
```

Funktio f(x) leikkaa x-akselin, kun x=-1 ja x=1.

```
(%i3) x^3-4*x^2-11*x+30;
(%o3) x^3-4 x^2-11 x+30

(%i4) factor(%);
(%o4) (x-5) (x-2) (x+3)
```

Funktio g(x) leikkaa x-akselin , kun x=-3, x=2 ja x=5.

30 Tupu, Hupu ja Lupu kulkevat Ankkalinnassa mutkittelevaa polkua pitkin, jota kuvaa funktio $f(x) = x^4 - 4x^2$. Aku kulkee Ankkalinnassa mutkittelevaa polkua $g(x) = 2x^3 - 8x$. Missä kartan koordinaateissa Tupu, Hupu ja Lupu voivat törmätä Akuun eli polut leikkaavat aivan toisensa.

```
30)

(%i1) f(x):=x^4-4*x^2;
(%o1) f(x):=x^4-4 x^2

(%i2) g(x):=2*x^3-8*x;
(%o2) g(x):=2 x^3-8 x

(%i5) f(x)=g(x);
(%o5) x^4-4 x^2=2 x^3-8 x

(%i6) f(x)-g(x);
(%o6) x^4-2 x^3-4 x^2+8 x

(%i7) factor(%);
(%o7) (x-2)^2 x (x+2)
```

Aku ja pojat voivat törmätä toisiinsa pisteissä (-2,0), (0,0) ja (2,0).

31 Ratkaise

a) $\begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 1 - 2x = y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2 = 2y \\ 2 + 3y = 4x \end{cases}$

```
31a)

(%i1) solve([3*x+2*y-3, 1-2*x=y], [x,y]);
(%o1) [[x=-1,y=3]]

31b)

(%i2) solve([3*x-2=2*y,2+3*y=4*x], [x,y]);
(%o2) [[x=2,y=2]]
```

32 Suora s kulkee pisteiden $(-1, 1)$ ja $(1, 2,)$ kautta. Suora l kulkee pisteiden $(2, 4)$ ja $(4, 2)$ kautta. Missä pisteessä suorat s ja l leikkaavat toisensa.

```
32)

Lasketaan pisteiden (-1,1) ja (1,2,)kautta kulkevan suoran yhtälö.

(%i10) suora(x_1,y_1,x_2,y_2):=solve(y-y_1=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)*(x-x_1),y)[1];
```

(%o10) $\mathrm{suora}(x\_1, y\_1, x\_2, y\_2) := \left(\mathrm{solve}\left(y - y\_1 = \frac{y\_2 - y\_1}{x\_2 - x\_1}(x - x\_1), y\right)\right)_1$

```
(%i11) x_1:-1;   y_1:1;   x_2:1;    y_2:2;
(%o11) -1
(%o12) 1
(%o13) 1
(%o14) 2

(%i15) suora(x_1,y_1,x_2,y_2);
```

(%o15) $y = \frac{x+3}{2}$

```
(%i16) expand(%);
```

(%o16) $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

```
Lasketaan pisteiden (2,4) ja (4,2)kautta kulkevan suoran yhtälö.

(%i18) suora(x_1,y_1,x_2,y_2):=solve(y-y_1=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)*(x-x_1),y)[1];
```

(%o18) $\mathrm{suora}(x\_1, y\_1, x\_2, y\_2) := \left(\mathrm{solve}\left(y - y\_1 = \frac{y\_2 - y\_1}{x\_2 - x\_1}(x - x\_1), y\right)\right)_1$

```
(%i19) x_1:2;   y_1:4;   x_2:4;   y_2:2;
(%o19) 2
(%o20) 4
(%o21) 4
(%o22) 2
```

```
(%i23) suora(x_1,y_1,x_2,y_2);
(%o23) y=6-x
```

```
Suorat leikkavat toisensa pistessä.
```

```
(%i25) solve([%o16,%o23], [x,y]);
(%o25) [[x=3,y=3]]
```

33 Funktio on $f(x) = 4x^3 - ax^2 - 24x - b$. Funktion tekijöitä ovat $(x - 5)$ ja $(x + 1)$. a) Ratkaise a ja b. b) Määritä $f(x)$. c) Ilmoita $f(x)$ tekijöihin jaetussa muodossa.

```
33a)
```

```
(%i1) f(x,a,b):=4*x^3-a*x^2-24*x-b;
(%o1) f(x,a,b):=4 x^3-a x^2+(-24) x-b
```

```
(%i2) solve([f(5,a,b)=0,f(-1,a,b)=0], [a,b]);
(%o2) [[a=15,b=5]]
```

```
33b)
```

```
(%i3) f(x,15,5);
(%o3) 4 x^3-15 x^2-24 x-5
```

```
33c)
```

```
(%i4) factor(%);
(%o4) (x-5) (x+1) (4 x+1)
```

```
Funktio tekijöihin jaetussa muodossa on f(x)=4(x+1/4)(x+1)(x-5).
(Funktio tekijöihin jaetussa muodossa on muotoa f(x)= a(x-b)(x-c)(x-d)
a on korkeimman asteen termin kerroin. b,c ja d ovat funktion nollakohdat.)
```

34 Ratkaise

a) $\begin{cases} -2x + 3y + 4z = 3 \\ -2y + 2z + 3x = 9 \\ -4z + 5x - y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3 + 3x + 2y = -3z \\ 10z + 3 + 2x = 3y \\ y + 2z - 3 = -x \end{cases}$

34a)

```
(%i1) solve([-2*x+3*y+4*z=3,-2*y+2*z+3*x=9,-4*z+5*x-y=-2], [x,y,z]);
(%o1) [[x=1,y=-1,z=2]]
```

34b)

```
(%i3) solve([-3+3*x+2*y=-3*z,10*z+3+2*x=3*y,y+2*z-3=-x], [x,y,z]);
(%o3) [[x=-2,y=3,z=1]]
```

35 Funktio on muotoa $f(x) = ax^3 + bx^2 - cx$. Funktio saa seuraavat arvot $f(1) = 6$, $f(-1) = 6$ ja $f(2) = 42$. a) Ratkaise a, b ja c. Määritä $f(x)$.

b) Jaa funktio $f(x)$ tekijöihin. c) Mitkä ovat funktion nollakohdat.

35a)

```
(%i3) f(x,a,b,c):=a*x^3+b*x^2-c*x;
```
$$(\%o3)\ f(x,a,b,c) := a\,x^3 + b\,x^2 + (-c)\,x$$

```
(%i4) solve([f(1,a,b,c)=6, f(-1,a,b,c)=6,f(2,a,b,c)=42], [a,b,c]);
(%o4) [[a=3,b=6,c=3]]
```

```
(%i5) f(x,3,6,3);
```
$$(\%o5)\ 3\,x^3 + 6\,x^2 - 3\,x$$

35b)

```
(%i6) factor(%);
```
$$(\%o6)\ 3\,x\,(x^2 + 2\,x - 1)$$

35c)

```
(%i7) solve([%], [x]);
```
$$(\%o7)\ [x = -\sqrt{2} - 1, x = \sqrt{2} - 1, x = 0]$$

36 Akun perhe on lähdössä viikon vaellusretkelle luontoon. Ennen retkeä käydään kaupassa ostamassa vähän herkkuja patikoinnille. Tupu osti 3 suklaalevyä, 2 purkkapussia ja 3 salmiakkiaskia. Tupun ostokset maksoivat yhteensä 19,90 dollaria. Hupu osti 2 suklaalevyä, 3 purkkapussia ja 4 salmiakkiaskia. Hupun ostokset maksoivat yhteensä 23,30 dollaria. Lupu osti 5 suklaalevyä, 2 purkkapussia ja 2 salmiakkiaskia. Lupun ostokset maksoivat yhteensä 22,20 dollaria. Miten paljon Akun ostokset maksoivat, kun hän osti 4 suklaalevyä, 1 purkkapussin ja 2 salmiakkiaskia.

36)

```
(%i21) solve([3*x+2*y+3*z=199/10, 2*x+3*y+4*z=233/10, 5*x+2*y+2*z=222/10], [x,y,z]);
```

(%o21) $[[x=\frac{11}{5}, y=\frac{7}{2}, z=\frac{21}{10}]]$

```
(%i22) float(%), numer;
(%o22) [[x=2.2,y=3.5,z=2.1]]
```

```
(%i23) 4*2.2+1*3.5+2*2.1;
(%o23) 16.5
```

---

37 Laske

a) $16 : |(-2)\cdot 1|^3 \cdot 2 - |2\cdot(-2)|$

b) $3|-2+|-2|2| : 2 - |-3+2|$

37a)

```
(%i1) 16/abs(-2*1)^3*2-abs(2*-2);
(%o1) 0
```

37b)

```
(%i3) 3*abs(-2+abs(-2)*2)/2-abs(-3+2);
(%o3) 2
```

38 Poista itseisarvomerkit a) $|2x-5|$ b) $|x^2-2x-3|$ c) $|x^3-3x+2|$

38a)

Ratkaistaan 2x-5=0 nollakohta

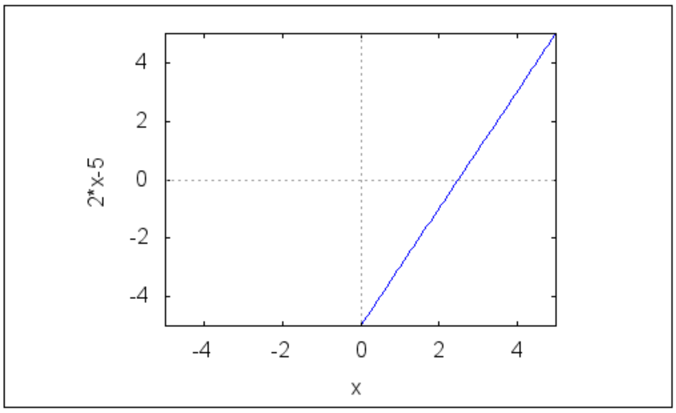
```
(%i1) 2*x-5=0;
(%o1) 2 x-5=0
```

```
(%i2) solve([%], [x]);
```

(%o2) $[x=\frac{5}{2}]$

Piirretään funktion 2x-5 kuvaaja.

```
(%i3) wxplot2d([2*x-5], [x,-5,5], [y,-5,5])$
plot2d: some values were clipped.
```

(%t3) 

Katsotaan kuvaajasta, koska funktio on x-akselin alapuolella ja koska funktio on x-akselin yläpuolella. Päätellään tästä funktion merkit, kun itseisarvomerkit poistetaan.

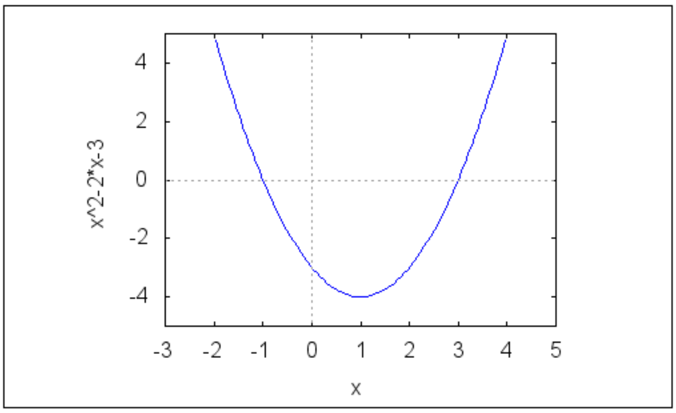
2x-5,kun x>=5/2
-2x+5, kun x<5/2

38b)

Ratkaistaan x^2-2x-3 nollakohdat

```
(%i4) solve([x^2-2*x-3], [x]);
(%o4) [x=3,x=-1]
```

```
(%i8) wxplot2d([x^2-2*x-3], [x,-3,5], [y,-5,5])$
plot2d: some values were clipped.
```

(%t8) 

x^2-2x-3, kun x<=-1 tai x>=3
-x^2+2x+3, kun -1<x<3

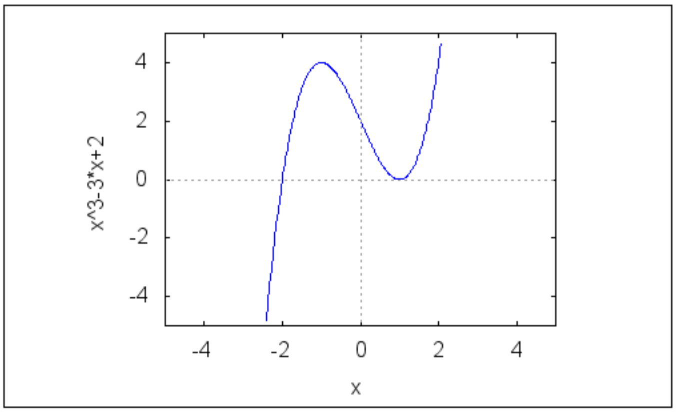
```
38c)
```

```
Ratkaistaan x^3-3x+2 nollakohdat
```

```
(%i12) solve([x^3-3*x+2], [x]);
(%o12) [x=-2,x=1]
```

```
(%i13) wxplot2d([x^3-3*x+2], [x,-5,5], [y,-5,5])$
plot2d: some values were clipped.
```

(%t13)




```
x^3-3x+2,kun x>=-2
-x^3+3x-2, kun x<-2
```

39 Ratkaise a) $3|x^2-5|-3=0$ b) $|5x-2|:2-3=1$ c) $3:|x^2-4|2=2$

```
39a)
```

```
(%i3) 3*abs(x^2-5)-3=0;
```
(%o3) $3\left|x^2-5\right|-3=0$

```
(%i4) to_poly_solve([%], [x]);
```
(%o4) %union $([x=-2],[x=2],[x=-\sqrt{6}],[x=\sqrt{6}])$

```
39b)
```

```
(%i5) abs(5*x-2)/2-3=1;
```
(%o5) $\frac{|5x-2|}{2}-3=1$

```
(%i6) to_poly_solve([%], [x]);
```
(%o6) %union $\left([x=-\frac{6}{5}],[x=2]\right)$

39c)

```
(%i14) 3/abs(x^2-4)*2=2;
```

(%o14) $\frac{6}{|x^2-4|}=2$

```
(%i15) to_poly_solve([%], [x]);
```

(%o15) %union$([x=-1],[x=1],[x=-\sqrt{7}],[x=\sqrt{7}])$

40 Ratkaise a) $|3x+2| = |-4x-4|$ b) $|2x+4| - |6x-4| = 0$
c) $|5x+5| : |-4x-2| = 1$

40a)

```
(%i3) abs(3*x+2)=abs(-4*x-4);
```

(%o3) $|3x+2|=|4x+4|$

```
(%i4) to_poly_solve([%], [x]);
```

(%o4) %union$\left([x=-2],[x=-\frac{6}{7}]\right)$

40b)

```
(%i5) abs(2*x+4)-abs(6*x-4)=0;
```

(%o5) $|2x+4|-|6x-4|=0$

```
(%i6) to_poly_solve([%], [x]);
```

(%o6) %union$([x=0],[x=2])$

40c)

```
(%i7) abs(5*x+5)/(abs(-4*x-2))=1;
```

(%o7) $\frac{|5x+5|}{|4x+2|}=1$

```
(%i8) to_poly_solve([%], [x]);
```

(%o8) %union$\left([x=-3],[x=-\frac{7}{9}]\right)$

41 Ratkaise a) $|-3x-2| < 1$ b) $|3x^2-10x+5| < 2$
c) $|4x-3| > 9$ d) $|5x^2-4x+2| > 3$ e) $|3x| > |2x+4|$

41a)

(%i1) abs(-3*x-2)<1;

(%o1) $|3\,x+2|<1$

(%i2) to_poly_solve([%], [x]);

to_poly_solve: to_poly_solver.mac is obsolete; I'm loading to_poly_solve.mac instead.
Loading maxima-grobner $Revision: 1.6 $ $Date: 2009-06-02 07:49:49 $
STYLE-WARNING: redefining MAXIMA::OPAPPLY in DEFMACRO
STYLE-WARNING: redefining MAXIMA::OPCONS in DEFMACRO

(%o2) $\%union\left(\,[-1<x\,,x<-\frac{1}{3}]\right)$

vastaus -1 < x < -1/3

41b)

(%i3) abs(3*x^2-10*x+5)<2;

(%o3) $|3\,x^2-10\,x+5|<2$

Poistetaan itseisarvomerkit ja saadaan kaksi epäyhtälöä. Muodostetaan epäyhtälöistä yhtälöitä ja lasketaan yhtälöiden nollakohdat. Piirretään yhtälöiden kuvaajat ja päätellään kuvaajista vastaukset.

(%i4) 3*x^2-10*x+5<2;

(%o4) $3\,x^2-10\,x+5<2$

(%i5) 3*x^2-10*x+3<0;

(%o5) $3\,x^2-10\,x+3<0$

(%i6) 3*x^2-10*x+3=0;

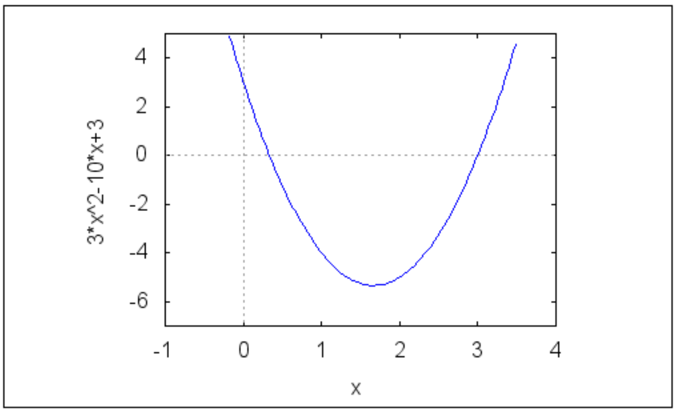
(%o6) $3\,x^2-10\,x+3=0$

(%i7) solve([%], [x]);

(%o7) $[x=\frac{1}{3},x=3]$

```
(%i8) wxplot2d([3*x^2-10*x+3], [x,-1,4], [y,-7,5])$
plot2d: some values were clipped.
```

(%t8)



Kuvaajasta nähdään, että 3*x^2-10*x+3<0 toteutuu, kun 1/3 < x < 1.

Toinen epäyhtälö

```
(%i9) -2<3*x^2-10*x+5;
```

(%o9) $-2<3\,x^2-10\,x+5$

```
(%i10) 3*x^2-10*x+7>0;
```

(%o10) $3\,x^2-10\,x+7>0$

```
(%i11) 3*x^2-10*x+7=0;
```

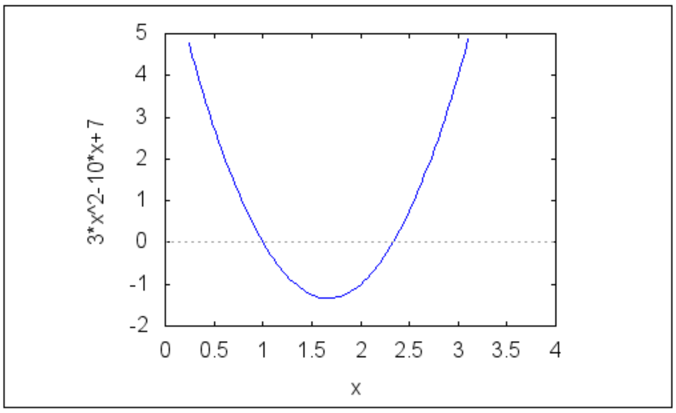
(%o11) $3\,x^2-10\,x+7=0$

```
(%i12) solve([%], [x]);
```

(%o12) $[x=1, x=\frac{7}{3}]$

```
(%i13) wxplot2d([3*x^2-10*x+7], [x,0,4], [y,-2,5])$
plot2d: some values were clipped.
```

(%t13)



Kuvaajasta nähdään, että 3*x^2-10*x+7>0, kun x<1 tai x>7/3.

Tämän jälkeen näistä kahdesta kuvaajasta saadut tiedot yhdistetään.
Epäyhtälö toteutuu, kun vastauksista otetaan yhteinen osuus.

vastaus on 1/3 < x < 1

41c)

```
(%i1) abs(4*x-3)>9;
```

(%o1) $|4x-3|>9$

```
(%i2) to_poly_solve([%], [x]);
to_poly_solve: to_poly_solver.mac is obsolete; I'm loading to_poly_solve.mac instead.
Loading maxima-grobner $Revision: 1.6 $ $Date: 2009-06-02 07:49:49 $
STYLE-WARNING: redefining MAXIMA::OPAPPLY in DEFMACRO
STYLE-WARNING: redefining MAXIMA::OPCONS in DEFMACRO
```

(%o2) $\%union\left([3<x],[x<-\frac{3}{2}]\right)$

x > 3 tai x < -3/2

41d)

```
(%i1) abs(5*x^2-4*x+2)>3;
```

(%o1) $|5x^2-4x+2|>3$

```
--> 5*x^2-4*x+2<-3;
--> 5*x^2-4*x+5<0;
(%i2) 5*x^2-4*x+5=0;
```

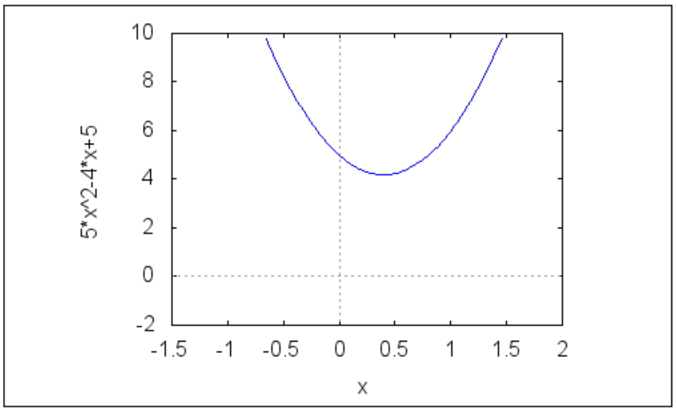
(%o2) $5x^2-4x+5=0$

```
(%i3) solve([%], [x]);
```

(%o3) $[x=-\frac{\sqrt{21}\,\%i-2}{5}, x=\frac{\sqrt{21}\,\%i+2}{5}]$

```
(%i4) wxplot2d([5*x^2-4*x+5], [x,-1.5,2], [y,-2,10])$
plot2d: some values were clipped.
```

(%t4)



5*x^2-4*x+5<0 ei ole ratkaisua.

Toinen epäyhtälö

```
--> 5*x^2-4*x+2>3;
```

```
--> 5*x^2-4*x-1>0;
```

```
(%i5) 5*x^2-4*x-1=0;
```

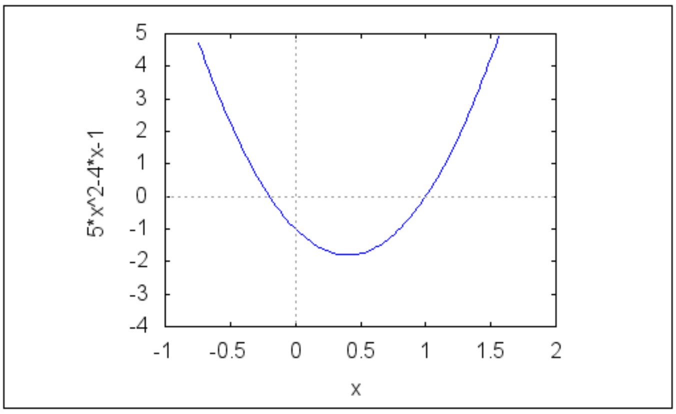
(%o5) $5\,x^2-4\,x-1=0$

```
(%i6) solve([%], [x]);
```

(%o6) $[x=1, x=-\frac{1}{5}]$

```
(%i7) wxplot2d([5*x^2-4*x-1], [x,-1,2], [y,-4,5])$
plot2d: some values were clipped.
```

(%t7)




```
5*x^2-4*x-1>0, kun x < -1/5 tai x > 1.
```

```
abs((5*x^2-4*x+2)>3 on x < -1/5 tai x > 1.
(Epäyhtälön abs((5*x^2-4*x+2)>3 ratkaisut ovat tehtyjen
epäyhtälöiden ratkaisut.)
```

```
41e)
```

```
Korotetaan kummatkin epäyhtälön puolet potenssiin 2.
```

```
(%i5) (abs(3*x))^2>(abs(2*x+4))^2;
```

(%o5) $9\,x^2 > (2\,x+4)^2$

```
(%i6) to_poly_solve([%], [x]);
```

(%o6) $\%union\left([4<x],[x<-\frac{4}{5}]\right)$

```
x > 4 tai x < - 4/5.
```

42 Tupu, Hupu ja Lupu kävelevät polkua $f(x) = 3x$ pitkin. Aku kävelee toista polkua $g(x) = 2x - 4$ pitkin. Laske, missä kartan pisteissä polkujen etäisyys on toisistaan tasan 5 karttayksikköä. Siis pojilla ja Akulla on sama x-koordinaatti. (Pojat ovat (a, b) ja Aku on (a, c)). Piirrä tilanteesta kuvaaja.

```
42)
```

```
(%i1) f(x):=3*x;
(%o1) f(x):=3 x
```

```
(%i2) g(x):=2*x-4;
(%o2) g(x):=2 x-4
```

```
(%i5) abs(f(x)-g(x))=5;
(%o5) |x+4|=5
```

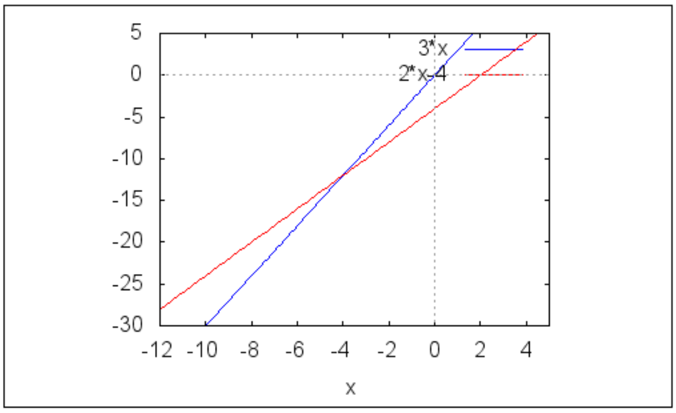
```
(%i6) to_poly_solve([%], [x]);
to_poly_solve: to_poly_solver.mac is obsolete; I'm loading to_poly_solve.mac instead.
Loading maxima-grobner $Revision: 1.6 $ $Date: 2009-06-02 07:49:49 $
STYLE-WARNING: redefining MAXIMA::OPAPPLY in DEFMACRO
STYLE-WARNING: redefining MAXIMA::OPCONS in DEFMACRO
(%o6) %union([x=-9],[x=1])
```

```
(%i7) f(-9);g(-9);
(%o7) -27
(%o8) -22
```

```
(%i9) f(1);g(1);
(%o9) 3
(%o10) -2
```

```
(%i14) wxplot2d([3*x,2*x-4], [x,-12,5], [y,-30,5])$
plot2d: some values were clipped.
plot2d: some values were clipped.
```

(%t14)




```
Pojat on  pisteessä (-9,-27) ja Aku on pisteessä (-9,-22)
tai pojat on pisteessä (1,3) ja Aku pisteessä (1,-2).
```

43 Laske

a) $-3^2+3^2\cdot 3^2-3^0-3^{-1}-(\frac{3}{2})^{-3}-\frac{3^4}{3^6}-(3\cdot 2)^2$ b) $\frac{3x^3 2b^2 2x}{x^4 6b^4}+(\frac{4b^3 2}{8b^2})^{-2}$

```
43a)

(%i1) -3^2+3^2*3^2-3^0-3^(-1)-(3/2)^(-3)-(3^4)/(3^6)-(3*2)^2;
```

$$(\%o1)\quad \frac{925}{27}$$

```
34 7/27

43b)

(%i3) (3*x^(3)*2*b^(2)*2*x)/(x^4*6*b^4)+((4*b^(3)*2)/(8*b^(2)))^(-2);
```

$$(\%o3)\quad \frac{3}{b^2}$$

44 Ratkaise

a) $6x^4 = 486$ b) $3x^5 + 3072 = 0$ c) $4x^8 + 1024 = 0$

```
44a)

(%i1) 6*x^4=486;
(%o1) 6 x^4=486

(%i2) solve([%], [x]);
(%o2) [x=3 %i,x=-3,x=-3 %i,x=3]

x = -3 tai x = 3

44b)

(%i3) 3*x^5+3072=0;
(%o3) 3 x^5+3072=0

(%i4) solve([%], [x]);
```

$$(\%o4)\quad [x=-4\,\%e^{\frac{2\,\%i\,\pi}{5}},x=-4\,\%e^{\frac{4\,\%i\,\pi}{5}},x=-4\,\%e^{-\frac{4\,\%i\,\pi}{5}},x=-4\,\%e^{-\frac{2\,\%i\,\pi}{5}},x=-4]$$

```
x = -4
```

44c)

```
(%i5)  4*x^8+1024=0;
(%o5)  4 x^8+1024=0
```

```
(%i7)  solve([%], [x]);
```

(%o7) $[[x=\frac{2\,(-1)^{1/8}\,\%i+2\,(-1)^{1/8}}{\sqrt{2}}, x=2\,(-1)^{1/8}\,\%i, x=\frac{2\,(-1)^{1/8}\,\%i-2\,(-1)^{1/8}}{\sqrt{2}}, x=-2\,(-1)^{1/8}\frac{2\,(-1)^{1/8}\,\%i-2\,(-1)^{1/8}}{\sqrt{2}}, x=2\,(-1)^{1/8}]=0]$

```
(%i9)  radcan(%);
```

(%o9) $[[x=\frac{2\,(-1)^{1/8}\,\%i+2\,(-1)^{1/8}}{\sqrt{2}}, x=2\,(-1)^{1/8}\,\%i, x=\frac{2\,(-1)^{1/8}\,\%i-2\,(-1)^{1/8}}{\sqrt{2}}, x=-2\,(-1)^{1/8}\frac{2\,(-1)^{1/8}\,\%i-2\,(-1)^{1/8}}{\sqrt{2}}, x=2\,(-1)^{1/8}]=0]$

Ei ole ratkaisua.

---

45 Ratkaise

a) $4^{2x} = 256$ b) $3^{3x-2} \cdot 9^{-x-1} = \frac{1}{\sqrt{(3)}}$ c) $\frac{1}{5^{2x}} \cdot 125^{x-2} = 625$

45a)

```
(%i1)  4^(2*x)=256;
(%o1)  4^(2 x)=256
```

```
(%i2)  find_root(4^(2*x)=256, x, -10, 10);
(%o2)  2.0
```

45b)

```
(%i3)  3^(3*x-2)*9^(-x-1)=3^(-1/2);
```

(%o3) $9^{-x-1}\,3^{3\,x-2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

```
(%i4)  find_root(3^(3*x-2)*9^(-x-1)=3^(-1/2), x, -100, 100);
(%o4)  3.5
```

```
45c)

(%i5) 1/(5^(2*x))*125^(x-2)=625;
```

$$\text{(\%o5)} \quad \frac{125^{x-2}}{5^{2x}}=625$$

```
(%i6) find_root(1/(5^(2*x))*125^(x-2)=625, x, -100, 100);
(%o6) 9.999999999999995

x = 10
```

46 Ratkaise

a) $4^x + 16^x - 4160 = 0$ b) $3 \cdot 2^x + 4^x = 1120$ c) $207 - 5 \cdot 3^x - 2 \cdot 9^x = 0$

```
46a)

(%i1) 4^x+16^x-4160=0;
```

$$\text{(\%o1)} \quad 16^x+4^x-4160=0$$

```
(%i3) find_root(4^x+16^x-4160=0, x, -100, 100);
(%o3) 3.0

46b)

(%i7) 3*2^x+4^x=1120;
```

$$\text{(\%o7)} \quad 4^x+3\,2^x=1120$$

```
(%i8) find_root(3*2^x+4^x=1120, x, -100, 100);
(%o8) 5.0

46c)

(%i9) 207-5*3^x-2*9^x=0;
```

$$\text{(\%o9)} \quad -2\,9^x-5\,3^x+207=0$$

```
(%i10) find_root(207-5*3^x-2*9^x=0, x, -100, 100);
(%o10) 2.0
```

47 Ratkaise

a) $6^x = 46656$ b) $4 \cdot 5^x - 500 = 0$ c) $6 \cdot 3^{2x-2} - 4374 = 0$ d) $3 \cdot 2^{2x} > 48$
e) $4 \cdot (\frac{1}{2})^{4x} < 2$

47a)

```
(%i1) 6^x=46656;
(%o1) 6^x=46656
```

```
(%i2) find_root(6^x=46656, x, -100, 100);
(%o2) 6.0
```

47b)

```
(%i3) 4*5^x-500=0;
(%o3) 4 5^x-500=0
```

```
(%i4) find_root(4*5^x-500=0, x, -100, 100);
(%o4) 3.0
```

47c)

```
(%i5) 6*3^(2*x-2)-4374=0;
(%o5) 2 3^(2 x-1)-4374=0
```

```
(%i6) find_root(6*3^(2*x-2)-4374=0, x, -100, 100);
(%o6) 4.0
```

47d)

Muodostetaan 3*2^(2*x)-48=0 yhtälö, ratkaistaan nollakohta, katsotaan kuvaajasta, koska 3*2^(2*x)-48>0 toteutuu.

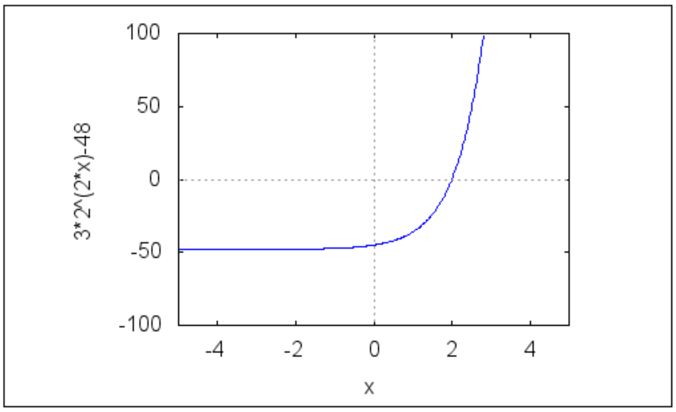
```
--> 3*2^(2*x)>48;
```

```
--> 3*2^(2*x)-48>0;
```

```
(%i7) 3*2^(2*x)-48=0;
(%o7) 3 2^(2 x)-48=0
```

```
(%i8) find_root(3*2^(2*x)-48=0, x, -100, 100);
(%o8) 2.0
```

```
(%i9) wxplot2d([3*2^(2*x)-48], [x,-5,5], [y,-100,100])$
plot2d: some values were clipped.
(%t9)
```



Epäyhtälö 3*2^(2*x)>48 toteutuu, kun x > 2.

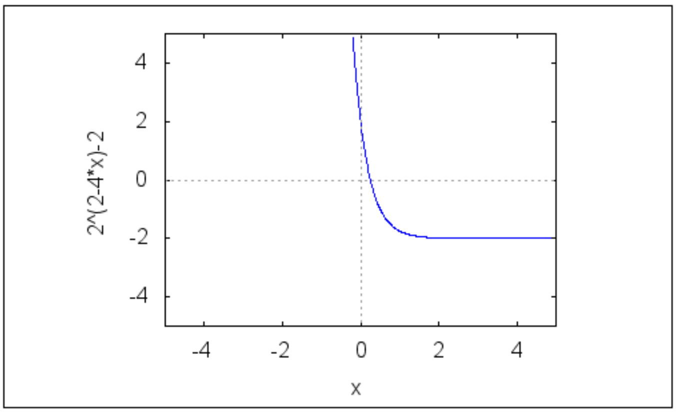
47e)

Muodostetaan yhtälö 4*(1/2)^(4*x)-2=0, ratkaistaan nollakohta, katsotaan kuvaajasta, koska 4*(1/2)^(4*x)<2.

```
 --> 4*(1/2)^(4*x)<2;

 --> 4*(1/2)^(4*x)-2<0;

(%i10) 4*(1/2)^(4*x)-2=0;
```

(%o10) $2^{2-4\,x}-2=0$

```
(%i11) find_root(4*(1/2)^(4*x)-2=0, x, -100, 100);
(%o11) 0.25

(%i12) wxplot2d([4*(1/2)^(4*x)-2], [x,-5,5], [y,-5,5])$
plot2d: some values were clipped.
(%t12)
```



Epäyhtälö 4*(1/2)^(4*x)<2 toteutuu, kun x > 0,25.

48 Roope ankan kilpailijalla Pennosella oli vuoden 2001 alussa 900 kanaa. Hänen kanojensa määrä tilalla lisääntyi vuosittain 1,5 %.

a) Muodosta funktio, jonka avulla voit laskea, kuinka monta kanaa Pennosella on jonkun tietyn vuoden lopussa.

b) Kuinka paljon kanoja Pennosella on vuoden 2015 lopussa?

c) Koska Pennosella oli kanoja 1044 kappaletta?

d) Koska Pennosella tulee olemaan kanoja yli 1300 kappaletta?

```
48a)

(%i2) f(x):=900*1.015^x;
(%o2) f(x):=900 1.015^x

48b)

(%i3) f(15);
(%o3) 1125.208859988931

Vuoden 2015 lopussa Pennosella on 1125 kanaa.

48c)

(%i4) f(x)=1044;
(%o4) 900 1.015^x=1044

(%i5) find_root(f(x)=1044, x, -100, 100);
(%o5) 9.968692863795873

(%i6) 2000+10;
(%o6) 2010

Pennosella on kanoja 1044 kappaletta vuoden  2010 lopussa.

48d)

(%i7) f(x)>1300;
(%o7) 900 1.015^x>1300

(%i8) 900*1.015^x-1300>0;
(%o8) 900 1.015^x-1300>0

(%i9) 900*1.015^x-1300=0;
(%o9) 900 1.015^x-1300=0

(%i10) find_root(900*1.015^x-1300=0, x, -100, 100);
(%o10) 24.69839149078992
```

```
(%i11) 2000+25;
(%o11) 2025
```

```
Pennosella on kanoja yli 1300 vuoden 2025 lopussa.
```

49 Laske

a) $\sqrt{4^{2\cdot 2}} + \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} - \sqrt{27} - \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} + \sqrt{3^2} + (\sqrt{4})^2$

b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} - \sqrt{16} + \sqrt{625} + \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} + (\sqrt{5})^2 - \sqrt{7^2} - \sqrt{40}$

c) $(\sqrt[3]{8})^3 + \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{8} - \frac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt[3]{27} - \frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{-3} + \sqrt[3]{108}$

```
49a)
```

```
(%i1) sqrt(4^(2*2))+(sqrt(50))/(sqrt(2))-sqrt(27)-sqrt(3)*sqrt(3)+sqrt(3^2)
      +(sqrt(4))^2;
(%o1) 25-3^(3/2)
```

```
49b)
```

```
(%i2) sqrt(5)*sqrt(5)-sqrt(16)+sqrt(625)+(sqrt(147))/(sqrt(3))+(sqrt(5))^2
      -sqrt(7^2)-sqrt(40);
(%o2) 31-2 sqrt(10)
```

```
49c)
```

```
(%i3) (8^(1/3))^3+8^(1/3)*8^(1/3)-(192^(1/3))/(3^(1/3))-(-27)^(1/3);
(%o3) 11
```

```
49d)
```

```
(%i4) 27^(1/3)-(250^(1/3))/(2^(1/3))+9^(1/3)*(-3)^(1/3)+108^(1/3);
(%o4) -3^(1/3) 9^(1/3)+3 4^(1/3)-2
```

```
(%i5) radcan(%);
(%o5) 3 2^(2/3)-5
```

50 Laske

a) $\sqrt[5]{(-3)^5} + \frac{\sqrt[4]{18^2}}{\sqrt[4]{4}} + \sqrt[6]{((-2)\cdot 2)^6} + \sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{125}$

b) $\sqrt[7]{(-8)^7} - \sqrt[6]{(-8)^6} + \frac{\sqrt[7]{(384}}{\sqrt[7]{3}} + \sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{32}$

c) $81^{\frac{2}{5}}$

d) $1024^{\frac{3}{7}}$

```
50a)

(%i2) (-3)^(5/5)+(18^(2/4))/(4^(1/4))+((-2)*2)^(6/6)+5^(1/4)*125^(1/4);
(%o2) 5^(1/4) 125^(1/4) -4

(%i3) radcan(%);
(%o3) 1
```

```
50b)

(%i3) (-8)^(7/7)-(-8)^(6/6)+(384^(1/7))/(3^(1/7))+2^(1/5)*32^(1/5);
(%o3) 2^(6/5)+2

 --> radcan(%);

2 + 2*2^(1/5)

50c)

(%i4) 81^(2/5);
(%o4) 81^(2/5)

(%i5) radcan(%);
(%o5) 3^(8/5)

3*3^(3/5)=3*27^(1/5)

50d)

(%i6) 1024^(3/7);
(%o6) 8^(10/7)

(%i7) radcan(%);
(%o7) 2^(30/7)

2^4*2^(2/7)=16*2^(2/7)=16*4^(1/7)
```

51 Ratkaise
a) $(\sqrt{9}x - \sqrt{25})\sqrt{4} = 8$ b) $\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{5}x) = 5$

51a)

(%i1) (sqrt(9)*x-sqrt(25))*sqrt(4)=8;
(%o1) $2\ (3\ x-5)=8$

(%i2) solve([%], [x]);
(%o2) $[x=3]$

51b)

(%i3) sqrt(3)*(sqrt(3)+sqrt(5)*x)=5;
(%o3) $\sqrt{3}\ (\sqrt{5}\ x+\sqrt{3})=5$

(%i4) solve([%], [x]);
(%o4) $[x=\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{5}}]$

x = (2*sqrt15)/15   Nimittäjä lasketaan sellaiseen muotoon, että siellä ei ole neliöjuuria.

52 a) Juuriyhtälö on $\sqrt{3x+1} = 2x - 6$. Määritä määrittelyehto, neliöönkorotusehto ja ratkaise yhtälö.
b) Juuriyhtälö on $\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 3x + 5 = 0$. Määritä määrittelyehto, neliöönkorotusehto ja ratkaise yhtälö.

52a)

(%i46) 3*x+1>=0;
(%o46) $3\ x+1>=0$

(%i47) to_poly_solve([%], [x]);
(%o47) $\%union\left([-\frac{1}{3}<x],[x=-\frac{1}{3}]\right)$

Määrittelyehto x >=-1/3

```
(%i6) 2*x-6>=0;
(%o6) 2 x-6>=0

(%i7) to_poly_solve([%], [x]);
(%o7) %union([3<x],[x=3])
```

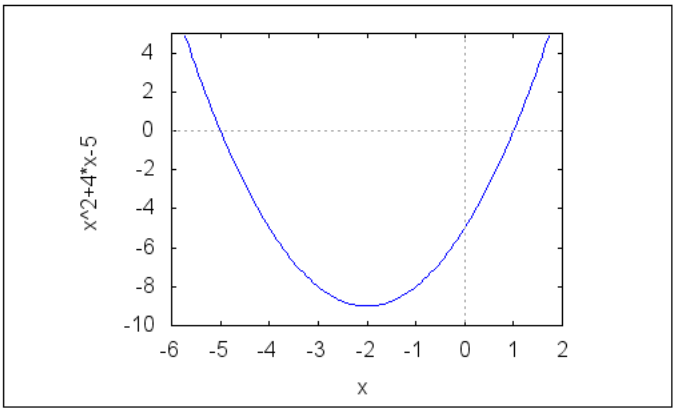
Neliöönkorotusehto x>=3

```
(%i9) sqrt(3*x+1)=2*x-6;
(%o9) sqrt(3 x+1)=2 x-6

(%i10) to_poly_solve([%], [x]);
(%o10) %union([x=5])
```

Ratkaisu on X=5. Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon ja neliöönkorotusehdon.

52b)

```
(%i25) sqrt(x^2+4*x-5)-3*x+5=0;
(%o25) sqrt(x^2+4 x-5)-3 x+5=0

(%i26) sqrt(x^2+4*x-5)=3*x-5;
(%o26) sqrt(x^2+4 x-5)=3 x-5

 --> x^2+4*x-5>=0;

(%i27) x^2+4*x-5=0;
(%o27) x^2+4 x-5=0

(%i28) solve([%], [x]);
(%o28) [x=-5,x=1]

(%i31) wxplot2d([x^2+4*x-5], [x,-6,2], [y,-10,5])$
plot2d: some values were clipped.
(%t31)
```



Määrittelyehto x < -5 tai x > 1

```
(%i35) 3*x-5>=0;
```
(%o35) $3\,x-5>=0$

```
(%i36) to_poly_solve([%], [x]);
```
(%o36) $\%union\left([\frac{5}{3}<x],[x=\frac{5}{3}]\right)$

Neliöönkorotusehto x>=5/3

```
(%i43) sqrt(x^2+4*x-5)-3*x+5=0;
```
(%o43) $\sqrt{x^2+4\,x-5}-3\,x+5=0$

```
(%i44) to_poly_solve([%], [x]);
```
(%o44) $\%union([x=3])$

Ratkaisu on X=3. Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon ja neliöönkorotusehdon.

53 a) Ratkaise $\sqrt[3]{3x^2-2x}=x$ b) Ratkaise $\sqrt{3x+1}=\sqrt{4x-2}$

53a)

```
(%i7) (3*x^2-2*x)^(1/3)=x;
```
(%o7) $(3\,x^2-2\,x)^{1/3}=x$

```
(%i8) to_poly_solve([%], [x]);
```
(%o8) $\%union([x=0],[x=1],[x=2])$

Tarkastus

```
(%i4) (3*0^2-2*0)^(1/3);
```
(%o4) 0

```
(%i5) (3*1^2-2*1)^(1/3);
```
(%o5) 1

```
(%i6) (3*2^2-2*2)^(1/3);
```
(%o6) 2

Vastaukset x=0, x=1, x=2. Kaikki toteuttivat yhtälön.

```
53b)

(%i6) sqrt(3*x+1)=sqrt(4*x-2);
(%o6) √(3 x+1)=√(4 x-2)

(%i7) 3*x+1>=0;
(%o7) 3 x+1>=0

(%i8) to_poly_solve([%], [x]);
(%o8) %union([-1/3<x],[x=-1/3])

Määrittelyehto x>=-1/3

(%i9) 4*x-2>=0;
(%o9) 4 x-2>=0

(%i10) to_poly_solve([%], [x]);
(%o10) %union([1/2<x],[x=1/2])

Määrittelyehto x>=1/2

(%i13) sqrt(3*x+1)=sqrt(4*x-2);
(%o13) √(3 x+1)=√(4 x-2)

(%i14) to_poly_solve([%], [x]);
(%o14) %union([x=3])

Vastaus x=3. Vastaus kuuluu kumpaankin määrittelyehtoon.
```

54 Tupu, Hupu ja Lupu saivat syntymäpäivälahjaksi kukin kaksi kultakolikkoa Roope-sedältä. Pojat päättivät piilottaa rahansa Mummo-ankan maatilalle luontoon hyvässä arkussa. a) Arkun avaimen karttakoordinaatit saat ratkaisemalla funktioiden $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x}$ ja $g(x) = \sqrt{-x + 4}$ leikkauspisteen. b) Arkun karttakoordinaatit saat ratkaisemalla funktioiden $h(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 4}$ ja $m(x) = x + 1$ leikkauspisteen.

54a)

Lasketaan, koska yhtälö on määritelty.

```
(%i2) -x^2+3*x>=0;
```

(%o2) $3x-x^2>=0$

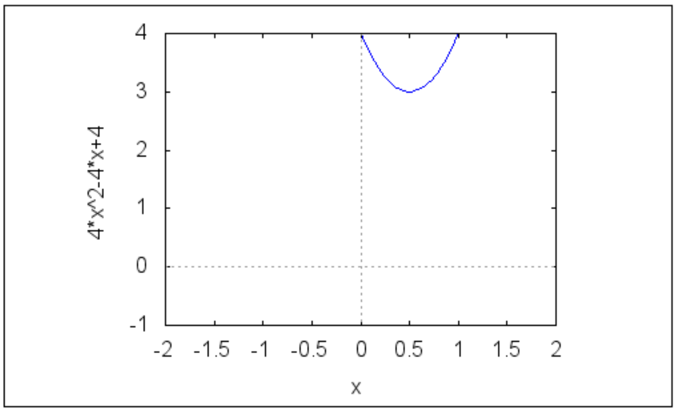
```
(%i3) to_poly_solve([%], [x]);
```

to_poly_solve: to_poly_solver.mac is obsolete; I'm loading to_poly_solve.mac instead.
Loading maxima-grobner $Revision: 1.6 $ $Date: 2009-06-02 07:49:49 $
STYLE-WARNING: redefining MAXIMA::OPAPPLY in DEFMACRO
STYLE-WARNING: redefining MAXIMA::OPCONS in DEFMACRO

(%o3) %union$([0<x, x<3], [x=0], [x=3])$

Määritelty 0<=x<=3.

```
(%i12) wxplot2d([4*x^2-4*x+4], [x,-2,2], [y,-1,4])$
plot2d: some values were clipped.
```

(%t12) 

Määritelty kaikilla reaaliluvuilla.

```
(%i13) x+1>=0;
(%o13) x+1>=0
```

```
(%i14) to_poly_solve([%], [x]);
(%o14) %union([-1<x],[x=-1])
```

Määritelty x>=-1

Yhtälön määrittelyalue on x>=-1

```
(%i15) h(x):=sqrt(4*x^2-4*x+4);m(x):=x+1;
```

(%o15) $h(x) := \sqrt{4\,x^2-4\,x+4}$

(%o16) $m(x) := x+1$

```
(%i17) h(x)=m(x);
```

(%o17) $\sqrt{4\,x^2-4\,x+4}=x+1$

```
(%i18) to_poly_solve([%], [x]);
(%o18) %union([x=1])
```

Lasketaan y arvo

```
(%i19) h(1);
(%o19) 2
```

```
(%i20) m(1);
(%o20) 2
```

Arkku on pistessä (1,2).

55 Laske

a) $log_5 625$ b) $(log_9 9)^9$ c) $log_4 \frac{1}{64}$ d) $8^{log_8 10}$ e) $log_5 \sqrt[4]{125}$ f)$log_3(-9)$
g) $log_{(-3)} 9$ h) $lg10000$ i) lne^5

55a)

```
(%i3) log(625)/(log(5));
(%o3) log(625)/log(5)
```

```
(%i4) radcan(%);
(%o4) 4
```

55b)

```
(%i5) (log(9)/(log(9)))^9;
(%o5) 1
```

55c)

```
(%i6) log(1/64)/(log(4));
(%o6) -log(64)/log(4)
```

```
(%i7) radcan(%);
(%o7) -3
```

55d)

```
(%i8) 8^(log(10)/(log(8)));
(%o8) 8^(log(10)/log(8))
```

```
(%i9) radcan(%);
(%o9) 10
```

55e)

```
(%i10) log(125^(1/4))/(log(5));
(%o10) log(125)/(4 log(5))
```

```
(%i11) radcan(%);
(%o11) 3/4
```

55f)

```
(%i10) log(-9)/(log(3));
```

(%o10) $\dfrac{\log(-9)}{\log(3)}$

```
(%i11) radcan(%);
```

(%o11) $\dfrac{2\log(3)+\log(-1)}{\log(3)}$

Ei määritelty. wxMaxima ei tajua, että numerus ei saa olla negatiivinen.

55g)

```
(%i12) log(9)/(log(-3));
```

(%o12) $\dfrac{\log(9)}{\log(-3)}$

```
(%i13) radcan(%);
```

(%o13) $\dfrac{2\log(3)}{\log(-3)}$

Ei määritelty. wxMaxima ei tajua, että kantaluku ei saa olla negatiivinen.

55h)

```
(%i17) log(10000)/(log(10));
```

(%o17) $\dfrac{\log(10000)}{\log(10)}$

```
(%i18) radcan(%);
(%o18) 4
```

55i)

```
(%i16) log(%e^5)/(log(%e));
(%o16) 5
```

56 Laske

a) $log_4 64 + log_4 16$ b) $log_3 243 - 2 \cdot log_3 9$ c) $log_3 6 \cdot log_6 3$ d) $log_3 \frac{1}{27} + log_3 1$
e) $log_3 8 + log_9 8$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 32$

56a)

(%i1) `log(64)/(log(4))+log(16)/(log(4));`

(%o1) $\frac{\log(64)}{\log(4)} + \frac{\log(16)}{\log(4)}$

(%i2) `radcan(%);`

(%o2) 5

56b)

(%i3) `log(243)/(log(3))-2*(log(9)/(log(3)));`

(%o3) $\frac{\log(243)}{\log(3)} - \frac{2\log(9)}{\log(3)}$

(%i4) `radcan(%);`

(%o4) 1

56c)

(%i5) `log(6)/(log(3))*log(3)/(log(6));`

(%o5) 1

56d)

(%i6) `log(1/27)/(log(3))+log(1)/(log(3));`

(%o6) $-\frac{\log(27)}{\log(3)}$

(%i7) `radcan(%);`

(%o7) -3

56e)

(%i16) `log(8)/(log(3))+log(8)/(log(9));`

(%o16) $\frac{\log(8)}{\log(9)} + \frac{\log(8)}{\log(3)}$

(%i17) `radcan(%);`

(%o17) $\frac{9\log(2)}{2\log(3)}$

```
(%i18) float(%), numer;
(%o18) 2.839183891071558
```

56f)

```
(%i10) log(32)/(log(1/2));
```

$$(\%o10)\ -\frac{\log(32)}{\log(2)}$$

```
(%i11) radcan(%);
(%o11) -5
```

57 Ratkaise

a) $4 \cdot 10^{3x-7} - 400 = 0$ b) $2^{4x+1} = 3$

57a)

```
(%i1) 4*10^(3*x-7)-400=0;
```

$$(\%o1)\ 4\ 10^{3\,x-7}-400=0$$

```
(%i4) find_root(4*10^(3*x-7)-400=0, x, -10, 10);
(%o4) 3.0
```

57b)

```
(%i8) 2^(4*x+1)=3;
```

$$(\%o8)\ 2^{4\,x+1}=3$$

```
(%i11) find_root(2^(4*x+1)=3, x, -10, 10);
(%o11) 0.14624062518028
```

58 Ratkaise

a) $log_x 243 - 5 = 0$ b) $2 \cdot log_x 64 = 6$ c) $lnx = 5$ d) $lgx = 10$
e) $2 \cdot lnx = 2$ f) $log_6 x - 2 = 1$ g) $3 \cdot log_3 x - 1 = 5$

58a)

```
(%i4) log(243)/(log(x))-5=0;
```

$$(\%o4)\ \frac{\log(243)}{\log(x)}-5=0$$

```
(%i5) solve([%], [x]);
```

$$(\%o5)\ [x=\%e^{\frac{\log(243)}{5}}]$$

```
(%i6) radcan(%);
(%o6) [x=3]
```

58b)

```
(%i7) 2*(log(64)/(log(x)))=6;
```

(%o7) $\frac{2\log(64)}{\log(x)}=6$

```
(%i8) solve([%], [x]);
```

(%o8) $[x=\%e^{\frac{\log(64)}{3}}]$

```
(%i9) radcan(%);
```

(%o9) $[x=4]$

58c)

```
(%i10) log(x)/(log(%e))=5;
```

(%o10) $\log(x)=5$

```
(%i11) solve([%], [x]);
```

(%o11) $[x=\%e^5]$

58d)

```
(%i12) log(x)/(log(10))=10;
```

(%o12) $\frac{\log(x)}{\log(10)}=10$

```
(%i13) solve([%], [x]);
```

(%o13) $[x=10000000000]$

58e)

```
(%i25) 2*(log(x)/(log(%e)))=2;
```

(%o25) $2\log(x)=2$

```
(%i26) solve([%], [x]);
```

(%o26) $[x=\%e]$

58f)

```
(%i31) log(x)/(log(6))-2=1;
```

(%o31) $\frac{\log(x)}{\log(6)}-2=1$

```
(%i32) solve([%], [x]);
```

(%o32) $[x=216]$

58g)

```
(%i70) 3*(log(x)/(log(3)))-1=5;
```

(%o70) $\frac{3\log(x)}{\log(3)}-1=5$

```
(%i71) find_root(''(%), x, -1, 10);
```

(%o71) 9.0

Rajaamalla juuren etsimisen välille (-1,10) löytyi yhtälölle ratkaisu.
wxMaxima ei löytänyt ratkaisua, jos laittoin välin (-10,10).

59 Ratkaise

a) $log_3(3x+2) = log_3(x^2+4)$ b) $log_2[3(x+2)] = log_2 x + log_2 9$

c) $log_4(2x-1) < log_4 x$ d) $log_{\frac{1}{2}}(4x-3) - 3 < 0$

59a)

```
(%i1) log(3*x+2)/(log(3))=log(x^2+4)/(log(3));
```

(%o1) $\frac{\log(3x+2)}{\log(3)}=\frac{\log(x^2+4)}{\log(3)}$

Lasketaan määrittelyalue

```
(%i2) 3*x+2>0;
```

(%o2) $3x+2>0$

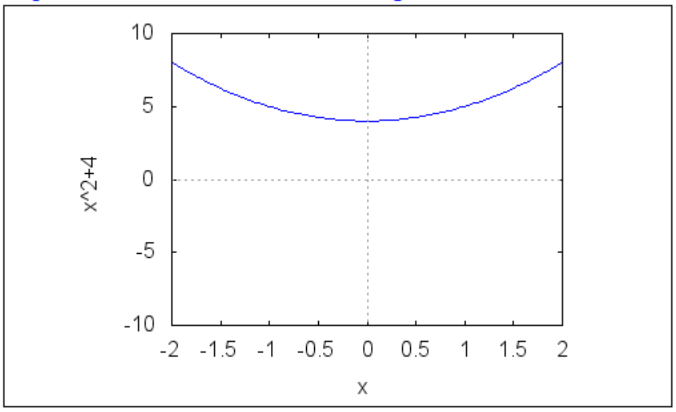
```
(%i3) to_poly_solve([%], [x]);
to_poly_solve: to_poly_solver.mac is obsolete; I'm loading to_poly_solve.mac instead.
Loading maxima-grobner $Revision: 1.6 $ $Date: 2009-06-02 07:49:49 $
STYLE-WARNING: redefining MAXIMA::OPAPPLY in DEFMACRO
STYLE-WARNING: redefining MAXIMA::OPCONS in DEFMACRO
```

(%o3) %union$\left(\left[-\frac{2}{3}<x\right]\right)$

x > -2/3

```
(%i4) x^2+4>0;
(%o4) x^2+4>0
```

```
(%i5) wxplot2d([x^2+4], [x,-2,2], [y,-10,10])$
(%t5)
```



Määrittelyalue on kaikki reaaliluvut

Yhtälön määrittelyalue on x>-2/3

```
(%i6) to_poly_solve([log(3*x+2)/(log(3))=log(x^2+4)/(log(3))], [x]);
(%o6) %union([x=1],[x=2])
```

Vastaus x=1 tai X=2. Kummatkin ovat määrittelyalueella.

59b)

```
(%i7) log(3*(x+2))/(log(2))=log(x)/(log(2))+log(9)/(log(2));
```

(%o7) $\frac{\log(3\ (x+2))}{\log(2)}=\frac{\log(x)}{\log(2)}+\frac{\log(9)}{\log(2)}$

Määrittelyehdot

```
(%i8) 3*(x+2)>0;
(%o8) 3 (x+2)>0
```

```
(%i9) to_poly_solve([3*(x+2)>0], [x]);
(%o9) %union([-2<x])
```

x > -2

Yhtälön määrittelyalue on x>0, koska yksi numerus on x.

```
(%i10) to_poly_solve([log(3*(x+2))/(log(2))=log(x)/(log(2))+log(9)/(log(2))], [x]);
(%o10) %union([x=1])
```

Ratkaisu on x=1, koska se on määrittelyalueella.

```
59c)

(%i11) log(2*x-1)/(log(4))<log(x)/(log(4));
```
(%o11) $\dfrac{\log(2x-1)}{\log(4)} < \dfrac{\log(x)}{\log(4)}$

```
Määrittelyehdot

(%i12) 2*x-1>0;
```
(%o12) $2x-1>0$

```
(%i13) to_poly_solve([%], [x]);
```
(%o13) %union$\left([\frac{1}{2}<x] \right)$

```
x > 1/2

(%i14) to_poly_solve([log(2*x-1)/(log(4))<log(x)/(log(4))], [x]);
```
(%o14) %union $([\log(x) - \log(2x-1) > 0])$

```
(%i19) log(x)>log(2*x-1);
```
(%o19) $\log(x) > \log(2x-1)$

```
(%i20) to_poly_solve([log(x)>log(2*x-1)], [x]);
```
(%o20) %union$\left([\frac{1}{2}<x, x<1] \right)$

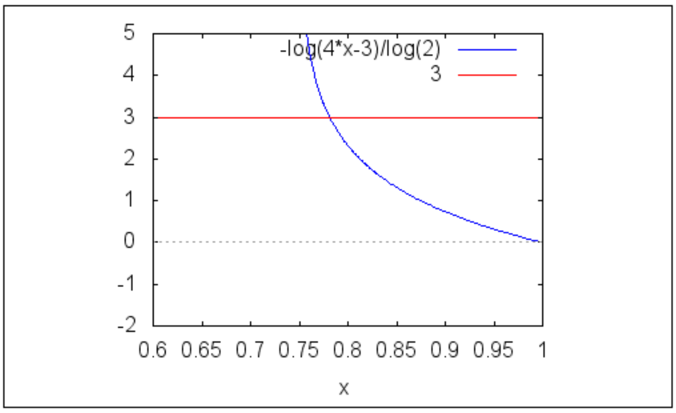
```
1/2 < x < 1

59d)

(%i24) log(4*x-3)/(log(1/2))-3<0;
```
(%o24) $-\dfrac{\log(4x-3)}{\log(2)} - 3 < 0$

```
Määrittelyehdot

(%i25) 4*x-3>0;
```
(%o25) $4x-3>0$

```
(%i26) to_poly_solve([%], [x]);
```
(%o26) %union$\left([\frac{3}{4}<x] \right)$

```
x > 3/4

wxMaxima ei osaa ratkaista tehtävää. Katsomme, ratkaisua kuvaajasta.

 -->  log(4*x-3)/(log(1/2))<3;
```

```
(%i56) wxplot2d([log(4*x-3)/(log(1/2)),3], [x,0.6
       ,1], [y,-2,5])$
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.
plot2d: some values were clipped.
(%t56)
```




```
Selvitämme, missä on leikkauskohta.
```

```
(%i53) log(4*x-3)/(log(1/2))=3;
```

(%o53) $-\frac{\log(4x-3)}{\log(2)}=3$

```
(%i54) to_poly_solve([log(4*x-3)/(log(1/2))=3], [x]);
```

(%o54) $\%union\left([x=\frac{25}{32}]\right)$

```
x > 25/32
```

60 Roope-ankka antoi aikoinaan Tupulle, Hupulle ja Lupulle yhteiseksi syntymäpävälahjaksi 3000 dollaria, kun he täyttivät 3 vuotta. Aku-ankka laittoi rahan heti pankkiin kasvamaan korkoa. Raha on kasvaa korkoa vuosittain 2,5 %. Pojat ovat päättäneet lähteä maailmanympärysmatkalle, sitten kun tilillä on yli 6000 dollaria. Laske, kuinka vanhoja pojat tuolloin ovat, kun he lähtevät matkalleen.

60)

```
(%i5) 1.025^x*3000>6000;
(%o5) 3000 1.025^x>6000
```

Jaettiin 3000 kumpikin puoli.

```
(%i18) 1.025^x>2;
(%o18) 1.025^x>2
```

```
(%i19) 1.025^x=2;
(%o19) 1.025^x=2
```

```
(%i22) find_root(1.025^x=2, x, 0, 50);
(%o22) 28.07103452593873
```

```
(%i23) 29+3;
(%o23) 32
```

32 vuotiaina he lähtevät matkalle.

61 Laske

a) $\lim_{x \to -2} (3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 1)$ b) $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} 3^{\sqrt{4x+4}}$ c) $\lim_{x \to 1} \sqrt[4]{3x - 2}$

d) $\lim_{x \to \frac{2}{5}} log_3(5x - 1)$

61a)

```
(%i2) 3*x^4+7*x^3-2*x^2+1;
(%o2) 3 x^4+7 x^3-2 x^2+1
```

```
(%i3) limit(%, x, -2);
(%o3) -15
```

61b)

Ekspnenttifunktion on määritelty, kun

```
(%i4) 4*x+4>0;
(%o4) 4 x+4>0
```

```
(%i5) to_poly_solve([%], [x]);
to_poly_solve: to_poly_solver.mac is obsolete; I'm loading to_poly_solve.mac instead.
Loading maxima-grobner $Revision: 1.6 $ $Date: 2009-06-02 07:49:49 $
STYLE-WARNING: redefining MAXIMA::OPAPPLY in DEFMACRO
STYLE-WARNING: redefining MAXIMA::OPCONS in DEFMACRO
```

(%o5) $\%union([-1<x])$

x > -1

```
(%i7) 3^(sqrt(4*x+4));
```

(%o7) $3^{\sqrt{4x+4}}$

```
(%i8) limit(%, x, -1/2);
```

(%o8) $3^{\sqrt{2}}$

61c)

Juurifunktion on määritelty, kun

```
(%i9) 3*x-2>=0;
(%o9) 3 x-2>=0
```

```
(%i10) to_poly_solve([%], [x]);
```

(%o10) $\%union\left([\frac{2}{3}<x], [x=\frac{2}{3}]\right)$

x>=2/3

```
(%i12) (3*x-2)^(1/4);
```

(%o12) $(3x-2)^{1/4}$

```
(%i13) limit(%, x, 1);
(%o13) 1
```

61d)

Logaritmifunktio on määritelty, kun

```
(%i14) 5*x-1>0;
(%o14) 5 x-1>0
```

```
(%i15) to_poly_solve([%], [x]);
```

(%o15) %union$\left([\frac{1}{5}<x]\right)$

x>1/5

```
(%i16) log(5*x-1)/(log(3));
```

(%o16) $\frac{\log(5x-1)}{\log(3)}$

```
(%i17) limit(%, x, 2/5);
(%o17) 0
```

62 Laske

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+2}{x+1}$ b) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x+1}$ c) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x-2}$

62a)

```
(%i1) (x^2+2*x+2)/(x+1);
```

(%o1) $\frac{x^2+2x+2}{x+1}$

```
(%i2) limit(%, x, 2);
```

(%o2) $\frac{10}{3}$

62b)

```
(%i3) (x^2-2*x-3)/(x+1);
```

(%o3) $\frac{x^2-2x-3}{x+1}$

```
(%i4) limit(%, x, -1);
(%o4) -4
```

62c)

Rationaalifunktiossa 2 on nimittäjän nollakohta. Ei voida supistaa.

```
(%i16) (x^2)/(x-2);
```

(%o16) $\frac{x^2}{x-2}$

```
(%i18) limit((x^2)/(x-2), x, 2, minus);
```

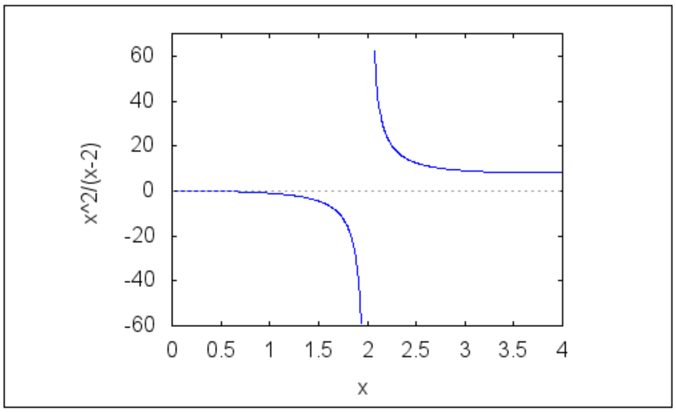
(%o18) $-\infty$

```
(%i19) limit((x^2)/(x-2), x, 2, plus);
```

(%o19) ∞

```
(%i28) wxplot2d([(x^2)/(x-2)], [x,0,4], [y,-60,70])$
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.
plot2d: some values were clipped.
```

(%t28)



Rationaalifunktiolla ei ole raja-arvoa.

63 Laske

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x+3}{2x^2+2x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{6x^2-2x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^6+3x^2+2}{-4x^4+3x^3+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{-x+6}-2}{x-2}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+6x}-2x$

63a)

```
(%i1) (3*x+3)/(2*x^2+2*x);
```

(%o1) $\frac{3\,x+3}{2\,x^2+2\,x}$

```
(%i2) limit(%, x, minf);
```

(%o2) 0

63b)

```
(%i1) (x^2+x+1)/(6*x^2-2*x-2);
```

(%o1) $\frac{x^2+x+1}{6\,x^2-2\,x-2}$

```
(%i2) limit(%, x, inf);
```

(%o2) $\frac{1}{6}$

63c)

```
(%i3) (2*x^6+3*x^2+2)/(-4*x^4+3*x^3+2);
```

(%o3) $\frac{2\,x^6+3\,x^2+2}{-4\,x^4+3\,x^3+2}$

```
(%i4) limit(%, x, minf);
```

(%o4) $-\infty$

63d)

```
(%i5) (sqrt(-x+6)-2)/(x-2);
```

(%o5) $\frac{\sqrt{6-x}-2}{x-2}$

```
(%i6) limit(%, x, 2);
```

(%o6) $-\frac{1}{4}$

63f)

```
(%i7) sqrt(4*x^2+6*x)-2*x;
```

(%o7) $\sqrt{4\,x^2+6\,x}-2\,x$

```
(%i8) limit(%, x, inf);
```

(%o8) $\frac{3}{2}$

64 a) Onko funktio $f(x)$ jatkuva pisteessä $x = 4$?

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{, kun } 4 < \text{x} \leq 10 \\ 10 & \text{, kun x} = 4 \\ 2x+2 & \text{, kun -10} \leq \text{x} < 4 \end{cases}$$

b) Todista, että funktiolla $f(x)$ on ainakin yksi nollakohta?

```
64a)
```

```
Vasemmanpuoleinen raja-arvo
```

```
(%i1) 2*x+2;
(%o1) 2 x+2
```

```
(%i2) limit(%, x, 4);
(%o2) 10
```

```
Oikeanpuoleinen raja-arvo
```

```
(%i3) 3*x-2;

(%o3) 3 x-2
```

```
(%i4) limit(%, x, 4);
(%o4) 10
```

```
Funktion arvo on f(4)=10. Funktion on jatkuva pisteessä x=4, koska
toispuoleiset raja-arvot ja funktion arvo ovat samat.
```

```
64b)
```

```
(%i5) 2*(-10)+2;
(%o5) -18
```

```
(%i7) 3*(10)-2;

(%o7) 28
```

```
Funktio on jatkuva ja funktio saa erimerkkiset funktion arvot f(10)=28 ja
f(-10)=-18, siispä funktiolla on ainakin yksi nollakohta.
```

65 Onko funktio $g(x)$ jatkuva pisteessä $x = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-4x^3} & \text{, kun x} \leq 0 \\ \sqrt{4x} + 4 & \text{, kun x} > 0 \end{cases}$$

```
65a)
```

```
Vasemmanpuoleinen raja-arvo
```

```
(%i1) sqrt(-4*x^3);
(%o1) 2 sqrt(-x^3)
```

```
(%i2) limit(%, x, 0);
(%o2) 0
```

```
Oikeanpuoleinen raja-arvo
```

```
(%i10) sqrt(4*x)+4;
(%o10) 2 √x + 4
```

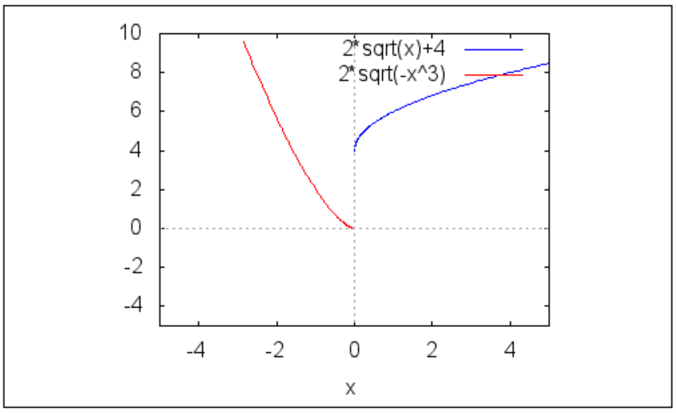
```
(%i11) limit(%, x, 0);
(%o11) 4
```

```
Funktion arvo f(0)=0.
Funktion on epäjatkuva kohdassa x=0, koska toispuoleiset raja-arvot ja
funktion arvo ovat erisuuret.
```

```
65b)
```

```
(%i9) wxplot2d([sqrt(4*x)+4,sqrt(-4*x^3)], [x,-5,5], [y,-5,10])$
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.
plot2d: some values were clipped.
```

(%t9)



66 Tupu, Hupu ja Lupu suunnittelivat kiipeävänsä korkealle Mount Ankalle. He olivat saaneet tietää, että vuori muodostui kolmesta eri funktiosta. Alkunousu vuorelle tapahtuu funktion $f(x) = 2x + 75$ mukaisesti, kun $x \in [-37, -5]$. Sen jälkeen vuoren huippu muistuttaa funktiota $r(x) = -x^2 + 2x + 100$, kun $x \in (-5, 5)$. Loppulaskurinnettä kuvaa funktio $t(x) = -2x + 65$, kun $x \in [5, 32]$.

a) Auta poikia selvittämään, onko nousu normaalisti jalkaisin mahdollista vai onko rintessä kohdassa $x = -5$ pystysuoraseinämä, jota ei voi kävellä ylös (siis epäjatkuvuuskohta)?

b) Onko laskurinne käveltävissä helposti alas vai onko kohtisuora pudotus (epäjatkuvuuskohta) kohdassa $x = 5$?

66a)

Vasemmanpuoleinen raja-arvo

```
(%i1) 2*x+75;
(%o1) 2 x+75

(%i2) limit(%, x, -5, minus);
(%o2) 65
```

Oikeanpuoleinen raja-arvo

```
(%i3) -x^2+2*x+100;
```

(%o3) $-x^2+2\,x+100$

```
(%i4) limit(%, x, -5, plus);
(%o4) 65
```

Vasemmanpuoleinen raja-arvo ja oikeanpuoleinen raja-arvo samat. Siis ei epäjatkuvuuskohta, voidaan kävellä ylös.

66b)

Vasemmanpuoleinen raja-arvo

```
(%i5) -x^2+2*x+100;
```

(%o5) $-x^2+2\,x+100$

```
(%i6) limit(%, x, 5, minus);
(%o6) 85
```

Oikeanpuoleinen raja-arvo

```
(%i7) -2*x+65;
(%o7) 65-2 x

(%i8) limit(%, x, 5, plus);
(%o8) 55
```

Vasemmanpuoleinen raja-arvo ja oikeanpuoleinen raja-arvo eri.
On epäjatkuvuuskohta. On kohtisuora pudotus.

67 Määritä funktion $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x$ muutosnopeus kohdassa $x = 2$.

```
67

(%i3) diff(4*x^3-3*x^2+4*x,x,1);
(%o3) 12 x^2-6 x+4

(%i4) derivoitu(x):=12*x^2-6*x+4;
(%o4) derivoitu(x):=12 x^2-6 x+4

(%i5) derivoitu(2);
(%o5) 40
```

68 Muodosta tangentin yhtälö. Tangentti sivuaa funktiota $f(x) = x^3+2x+1$ pisteessä $(-1, 2)$.

```
68

(%i1) diff(x^3+2*x+1,x,1);
(%o1) 3 x^2+2

(%i2) derivoitu(x):=3*x^2+2;
(%o2) derivoitu(x):=3 x^2+2

(%i3) derivoitu(-1);
(%o3) 5

Sijoitetaan laskettu tangentin kulmakerroin kohdassa x=-1 suoran yhtälön
kulmakertoimeksi.

(%i8) suora(x_1,y_1):=solve(y-y_1=5*(x-x_1),y)[1];
(%o8) suora(x_1,y_1) := (solve(y-y_1=5 (x-x_1),y))_1

(%i9) x_1:-1; y_1:2;
(%o9) -1
(%o10) 2

(%i11) suora(x_1,y_1);
(%o11) y=5 x+7
```

69 Derivoi a) $f(x) = 5x^7 + 6x + 5$ b) $m(x) = (x^2+1)(3x^2+2x-2)$ c) $k(x) = (4x-5)^4$ d) $f(x) = \frac{3x+2}{x-2}$ e) $D(10e^x)$ f) $D(e^{4x^4-2x})$

69a)

```
(%i1) diff(5*x^7+6*x+5,x,1);
```

(%o1) $35\,x^6+6$

69b)

```
(%i2) diff((x^2+1)*(3*x^2+2*x-2),x,1);
```

(%o2) $2\,x\,(3\,x^2+2\,x-2)+(6\,x+2)\,(x^2+1)$

```
(%i3) ratsimp(%);
```

(%o3) $12\,x^3+6\,x^2+2\,x+2$

69c)

```
(%i4) diff((4*x-5)^4,x,1);
```

(%o4) $16\,(4\,x-5)^3$

69d)

```
(%i5) diff((3*x+2)/(x-2),x,1);
```

(%o5) $\frac{3}{x-2}-\frac{3\,x+2}{(x-2)^2}$

```
(%i6) ratsimp(%);
```

(%o6) $-\frac{8}{x^2-4\,x+4}$

69e)

```
(%i7) diff(10*%e^x,x,1);
```

(%o7) $10\,\%e^x$

69f)

```
(%i8) diff(%e^(4*x^4-2*x),x,1);
```

(%o8) $(16\,x^3-2)\,\%e^{4\,x^4-2\,x}$

70 Derivoi a) $g(x) = 200^x$ b) $h(x) = 7^{x^2+2x+1}$ c) $Dlog_4(x^3+2x)$ d) $Dln(5x^2)$ e) $D(lnx)^3$

70a)

```
(%i1) diff(200^x,x,1);
```
(%o1) $\log(200)\, 200^x$

70b)

```
(%i2) diff(7^(x^2+2*x+1),x,1);
```
(%o2) $\log(7)\,(2x+2)\,7^{x^2+2x+1}$

70c)

```
(%i3) diff(log(x^3+2*x)/(log(4)),x,1);
```
(%o3) $\dfrac{3x^2+2}{\log(4)\,(x^3+2x)}$

70d)

```
(%i4) diff(log(6*x^3)/(log(%e)),x,1);
```
(%o4) $\dfrac{3}{x}$

Muuttuja x on positiivinen luku.

70e)

```
(%i5) diff((log(x)/(log(%e)))^5,x,1);
```
(%o5) $\dfrac{5\log(x)^4}{x}$

Muuttuja x on positiivinen luku.

71 Funktion on $f(x) = x^3 - x$. a) Mitkä ovat funktion $f(x)$ nollakohdat? b) Koska funktio $f(x)$ on kasvava? c) Koska funktio $f(x)$ on vähenevä? d) Mitkä ovat ääriarvokohdat, ääriarvot ja ääripisteet? e) Määritä derivaatat $f'(-2)$ ja $f'(1/2)$, mitä vastaukset kertovat? f) Piirrä funktio $f(x)$ ja sen derivaatta funktio $f'(x)$.

71a)

```
(%i1) solve([x^3-x], [x]);
```
(%o1) $[x=-1, x=1, x=0]$

71b)

```
(%i2) diff(x^3-x,x,1);
```
(%o2) $3x^2-1$

```
(%i3) solve([3*x^2-1], [x]);
```
(%o3) $[x=-\frac{1}{\sqrt{3}}, x=\frac{1}{\sqrt{3}}]$

```
(%i4) derivoitu(x):=3*x^2-1;
```
(%o4) $\text{derivoitu}(x) := 3\,x^2-1$

```
(%i6) derivoitu(-1);
(%o6) 2
```

```
(%i5) derivoitu(0);
(%o5) -1
```

```
(%i7) derivoitu(1);
(%o7) 2
```

Funktio on kasvava x<-1/sqrt(3), tai x>1/sqrt(3)

71c)

Funktio on vähenevä -1/sqrt(3)<x<1/sqrt(3)

71d)

```
(%i8) f(x):=x^3-x;
```
(%o8) $f(x) := x^3-x$

```
(%i9) f(-1/sqrt(3));
```
(%o9) $\frac{2}{3^{3/2}}$

```
(%i10) f(1/sqrt(3));
```
(%o10) $-\frac{2}{3^{3/2}}$

Minimikohta x=1/sqrt(3), maksimikohta x=-1/sqrt(3).

Minimiarvo -2/3^(3/2), maksimiarvo 2/3^(3/2).

Minimipiste (1/sqrt(3),-2/3^(3/2)), maksimiarvo (-1/sqrt(3),2/3^(3/2))

71e)

```
(%i11) derivoitu(-2);
(%o11) 11
```

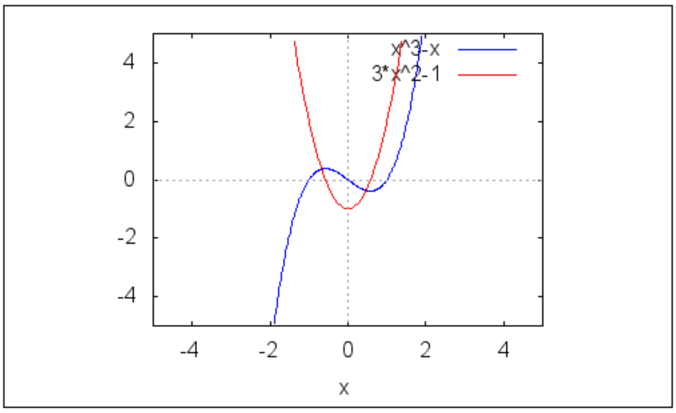
Funktion f(x) kohdassa x=-2, tangentin kulmakerroin on 11.
Funktion on nouseva kohdassa x=-2.

```
(%i14) derivoitu(1/2);
(%o14) -1/4
```

```
Funktion f(x) kohdassa x=1/2, tangentin kulmakerroin on -1/4.
Funktion on laskeva kohdassa x=1/2.
```

```
71f)
```

```
(%i16) wxplot2d([x^3-x,3*x^2-1], [x,-5,5], [y,-5,5])$
plot2d: some values were clipped.
plot2d: some values were clipped.
(%t16)
```



72 Roope-ankka suunnittelee työhuoneeseensa suorakulmion muotoista muotokuvaa itsestään. Taulun pinta-ala tulee olemaan 4 m^2. Taulun kehykset valmistetaan kullasta. Roope-ankan tavoite on, että kultaa kuluu mahdollisimman vähän kehyksiin. Laske, taulun mitat.

```
72
```

```
Taulun pinta-ala on A=xy. Tästä seuraa, että x > 0 ja y > 0.
Roope-sedän taulun pinta-ala on 4 m^2.
xy=4
y=4/x
```

```
Kullan määrä riippuu taulun piiristä. Taulun piiri on
T(x)=2x+2y=2x+2*4/x=2x+8/x.
```

```
Määritetään taulun pienin piirin arvo.
```

```
Derivoidaan T(x)
```

```
(%i1) diff(2*x+8/x,x,1);
(%o1) 2-8/x^2
```

Lasketaan derivaatan nollakohta.

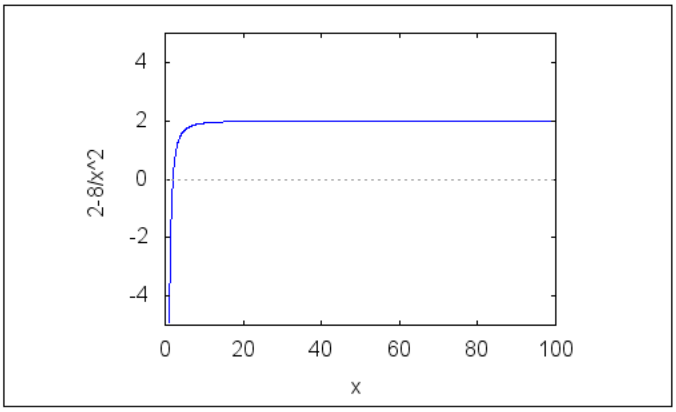
```
(%i2) solve([2-8/x^2], [x]);
(%o2) [x=-2,x=2]
```

Taulun sivun pituus ei voi olla -2 metriä.

Piirretään derivaatan kuvaaja.

```
(%i12) wxplot2d([2-8/(x^2)], [x,0,100], [y,-5,5])$
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.
plot2d: some values were clipped.
```

(%t12)



Derivaatan kuvaajasta nähdään, että kohta X = 2 on derivaatan nollakohta.
0<x<2 funktio on vähenevä ja x > 2 funktio on kasvava.

Lasketaan taulun toisen sivun pituus.

```
(%i15) Toinensivu(x):=4/x;
```

(%o15) $\mathrm{Toinensivu}(x) := \frac{4}{x}$

```
(%i16) Toinensivu(2);
(%o16) 2
```

Taulun mitat ovat 2 m^2 * 2 m^2.

73 Integroi.

a) $\int (x^4 + 2x + 3)dx$ b) $\int \frac{1}{x^7}dx$ c) $\int \sqrt[6]{x^5}dx$ d) $\int \frac{7}{x}dx$ e) $\int x(6x^2 + 3)^5 dx$

73a)

wxMaxima ei lisää vakiota C.

```
(%i1) integrate(x^4+2*x+3, x);
```

(%o1) $\frac{x^5}{5} + x^2 + 3\,x$

73b)

```
(%i1) integrate(x^-7, x);
```

(%o1) $-\frac{1}{6\,x^6}$

73c)

```
(%i2) integrate(x^(5/6), x);
```

(%o2) $\frac{6\,x^{11/6}}{11}$

73d)

```
(%i3) integrate(7/x, x);
```

(%o3) $7\log(x)$

käsin laskien 7*ln|x|+C, x ei saa olla nolla.

73e)

```
(%i4) integrate(x*(6*x^2+3)^5, x);
```

(%o4) $\frac{(6\,x^2+3)^6}{72}$

74 Integroi.

a) $\int \frac{3}{9x+4}dx$ b) $\int x^3e^{x^4}dx$ c) $\int 5^x dx$ d) $\int \frac{x^6-x^4}{x^3}dx$ e) $\int \frac{3x}{5+x}dx$

f) $\int \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-3}dx$ g) $\int \frac{x^3+3x^2+3x+10}{x+1}dx$

74a)

wxMaxima ei kirjoita vakiota C.

```
(%i1) integrate(3/(9*x+4), x);
```

(%o1) $\frac{\log(9\,x+4)}{3}$

Käsin laskien 1/3*ln|9x+4|+C

74b)

(%i9) integrate(x^3*e^(x^4), x);

(%o9) $\frac{e^{x^4}}{4\log(e)}$

Käsin laskien 1/4e^(x^4)+C.

74c)

(%i10) integrate(5^x, x);

(%o10) $\frac{5^x}{\log(5)}$

Käsin laskien 1/(ln5)*5^x+C.

74d)

(%i11) integrate((x^6-x^4)/x^3, x);

(%o11) $\frac{x^4-2x^2}{4}$

74e)

(%i13) integrate((3*x)/(5+x), x);

(%o13) $3\,(x-5\log(x+5))$

Käsin laskien 3x-15ln|5+x|+C. x ei saa olla -5.

74f)

(%i24) (x^3-2*x^2-5*x+6)/(x-3);

(%o24) $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-3}$

(%i25) ratsimp(%);

(%o25) x^2+x-2

(%i27) integrate(x^2+x-2, x);

(%o27) $0.3333333333333333\,x^3+0.5\,x^2-2\,x$

x ei saa olla 3.

74g)

(%i41) (x^3+3*x^2+3*x+10)/(x+1);

(%o41) $\frac{x^3+3x^2+3x+10}{x+1}$

```
(%i42) integrate(%, x);
(%o42) 9 log(x+1)+0.3333333333333333 (x^3+3 x^2+3 x)
```

```
Käsin laskien 1/3x^3+x^2+x+9ln|x+1|+C. x ei saa olla -1.
```

75 Määritä funktion $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$ integraalifunktio $F(x)$, joka kulkee pisteen $(2, 2)$ kautta.

```
75
```

```
(%i1) integrate(3*x^2+6*x+1, x);
(%o1) x^3+3 x^2+x
```

```
Integraali, kun vakio on merkitty x^3+3x^2+x+C.
Integraalifunktio menee pisteen (2,2) kautta.
Sijoitetaan piste funktioon.
```

```
(%i2) 2^3+3*2^2+2+C=2;
(%o2) C+22=2
```

```
(%i5) solve([C+22=2], [C]);
(%o5) [C=-20]
```

```
Integraalifunktio on F(x)=x^3+3x^2+x-20
```

76 Määritä funktion $g(x)$ integraali.

$$g(x) = \begin{cases} 4 & \text{, kun x} \leq 2 \\ 5x - 6 & \text{, kun x} > 2 \end{cases}$$

```
76
```

```
Vasemmanpuoleinen raja-arvo
```

```
(%i4) limit(4, x, 2, minus);
(%o4) 4
```

```
Oikeanpuoleinen raja-arvo
```

```
(%i3) limit(5*x-6, x, 2, plus);
(%o3) 4
```

```
Funktion arvo
```

```
(%i5) f(x):=4;
(%o5) f(x):=4
```

```
(%i6) f(2);
(%o6) 4
```

```
Koska funktio on jatkuvat pisteessä x=2, niin sillä on
integraalifunktio F(x).

(%i5) integrate(4, x);
(%o5) 4 x

(%i6) integrate(5*x-6, x);
         2
      5 x
(%o6) ---- - 6 x
       2

Funktiot ovat 4x+C, (5x^2)/2-6x+D.
Integraalifunktion täytyy olla myös jatkuva.

Vasemmanpuoleinen raja-arvo

(%i7) limit(4*x+C, x, 2);
(%o7) C+8

Oikeanpuoleinen raja-arvo

(%i8) limit((5*x^2)/2-6*x+D, x, 2);
(%o8) D-2

Raja-arvot ovat samat

(%i9) C+8=D-2;
(%o9) C+8=D-2

(%i10) solve([%], [D]);
(%o10) [D=C+10]

Integraalifunktio on F(x)=4x+c, kun x<=2
                      (5x^2)/2-6x+C+10, kun x>2
```

77 Tupu, Hupu ja Lupu ovat saaneet Roope-sedältä kukin oman arvotto man maatilkun Ankkalinnasta. Kuka pojista sai pinta-alaltaan suurimman maatilkun?

a) Tupun maatilkkua rajaavat Lumijoki $f(x) = -2x + 30$ ja kartan x-akseli kun $x \in [10, 19]$.

b) Hupun maatilkkua rajaavat Jääjoki $g(x) = x^3 - 2$ ja kartan y-akseli, kun $y \in [-20, 0]$.

c) Lupun maatilkkua rajaavat Kyntövuoristo $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$ ja Aura vuoristo $k(x) = -2x^2 + 5x + 18$.

77a

Lasketaan, koska funktion leikkaa x-akselin

```
(%i1) solve([-2*x+30], [x]);
```

(%o1) $[x=15]$

Tarkastetaan, minkälaisia arvoja funktio saa alueen päätepisteissä.

```
(%i2) f(x):=-2*x+30;
```

(%o2) $f(x) := (-2)\,x+30$

```
(%i3) f(10);
```

(%o3) 10

```
(%i4) f(18);
```

(%o4) -6

Suora on x-akselin yläpuolella, kun x < 15 ja suora on x-akselin alapuolella, kun x > 15.

Lasketaan kahden alueen pinta-alat.

```
(%i5) integrate(-2*x+30, x, 10, 15);
```

(%o5) 25

```
(%i16) integrate(-2*x+30, x, 15, 19);
```

(%o16) -16

Tupun alue

```
(%i17) %o5-%o16;
```

(%o17) 41

77b

Muodostetaan funktion g(x)=x^3-2 käänteisfunktio.

```
(%i1) solve([y=x^3-2], [x]);
```

(%o1) $\left[x=\frac{(\sqrt{3}\,\%i-1)\;(y+2)^{1/3}}{2}, x=-\frac{(\sqrt{3}\,\%i+1)\;(y+2)^{1/3}}{2}, x=(y+2)^{1/3}\right]$

Funktion g(x) käänteisfunktio on x=(y+2)^(1/3).

Määritetään, koska funktio g(x) leikkaa y-akselin.

```
(%i2) g(x):=x^3-2;
```

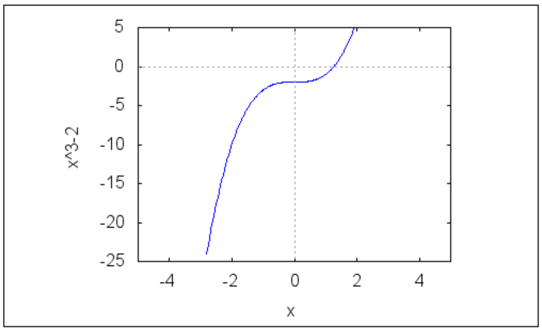
(%o2) $g(x) := x^3-2$

```
(%i3) g(0);
```

(%o3) -2

Piirretään funktion g(x) kuvaaja.

```
(%i11) wxplot2d([x^3-2], [x,-5,5], [y,-25,5])$
plot2d: some values were clipped.
```

(%t11) 

Pinta-ala muodostuu kahdesta alueesta.

```
(%i12) integrate((y+2)^(1/3), y, -2, 0);
```

(%o12) $\frac{3}{2^{2/3}}$

```
(%i13) integrate((y+2)^(1/3), y, -20, -2);
```

(%o13) $-\frac{27\ 18^{1/3}}{2}$

Hupun alue

```
(%i16) %o12-%o13;
```

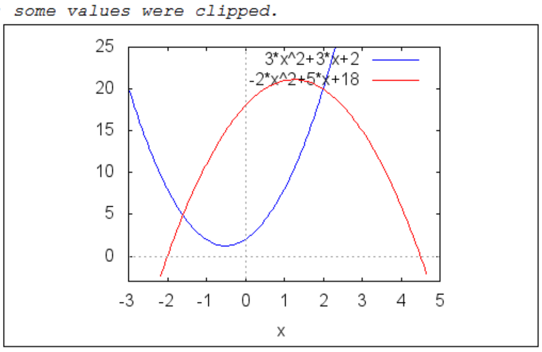
(%o16) $\frac{27\ 18^{1/3}}{2}+\frac{3}{2^{2/3}}$

```
(%i17) float(%), numer;
(%o17) 37.2698903966624
```

77c)

Piirretään funktiot.

```
(%i4) wxplot2d([3*x^2+3*x+2, -2*x^2+5*x+18], [x,-3,5], [y,-3,25])$
plot2d: some values were clipped.
plot2d: some values were clipped.
```

(%t4) 

```
Ratkaistaan funktioiden leikkauskohdat.

(%i2) solve([3*x^2+3*x+2=-2*x^2+5*x+18], [x]);
```

$$(\%o2)\quad [x=2, x=-\frac{8}{5}]$$

```
Funktio k(x) saa korkeampia arvoja välillä [-8/5,2].
Lasketaan Lupun alue.

(%i3) integrate( -2*x^2+5*x+18-(3*x^2+3*x+2), x, -8/5, 2);
```

$$(\%o3)\quad \frac{972}{25}$$

```
(%i4) float(%), numer;
(%o4) 38.88

Tupu sai pinta-alaltaan suurimman maatilkun.
```

78 Pelle Peloton on suunnitellut kolme koriste-esinettä. Laske, mihin niistä tarvitaan vähiten valmistusmateriaalia kultaa. Näissä tehtävissä yksi yksikkö koordinaatissa vastaa 1 cm.

a) Maljakko: Sitä rajaavat suorat $x = 2$, $x = 7$ ja $y = 0$. Funktiot $f(x) = \frac{4}{3}x$ ja $g(x) = \sqrt{10x - 25}$ pyörähtävät x-akselinsa ympäri.

b) Astia: Sitä rajaavat suorat $x = 0$, $x = \frac{18}{5}$ ja $y = 2$. Funktiot $h(x) = \frac{4}{3}x + 5$ ja $l(x) = 3x - 1$ pyörähtävät suoran $y = 2$ ympäri.

c) Kulho: Sitä rajaavat suorat $y = 0$ ja $y = 2$. Funktiot $h(x) = \frac{1}{2}x - 1$ ja $l(x) = \frac{1}{2}x$ pyörähtävät y-akselin ympäri.

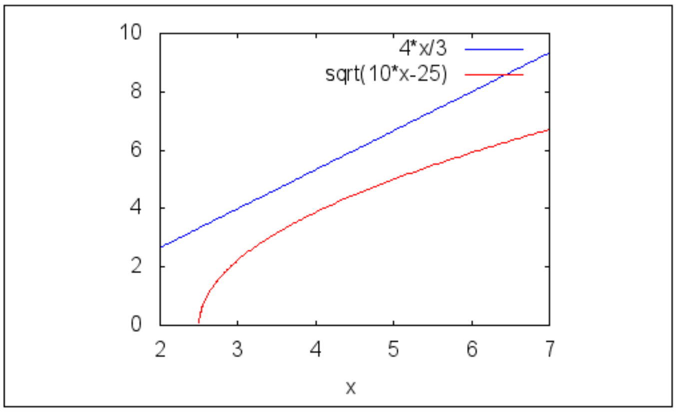
d) Mitä painaa se koriste-esine, jossa on kultaa vähiten. Kullan tiheys on $19,3 \cdot 10^3 \ \frac{kg}{m^3}$.

78a)

Piirretään funktiot.

```
(%i1) wxplot2d([4/3*x, (10*x-25)^(1/2)], [x,2,7], [y,0,10])$
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.
```

(%t1)



Maljakon ulkopinnan muodostaa suora f(x)=4/3x, kun se pyörähtää x-akselin ympäri. Sisäpinnan muodostaa g(x)=(10*x-25)^(1/2), kun se pyörähtää x-akselin ympäri.

Maljakon tilavuus saadaan vähentämällä ulkotilavuudesta sisätilavuus.

Ulkotilavuus

```
(%i2) integrate(%pi*(4/3*x)^2, x, 2, 7);
```

(%o2) $\frac{5360\,\pi}{27}$

Ratkaistaan koska funktio g(x)=10*x-25)^(1/2) leikkaa x-akselin.

```
(%i3) solve([(10*x-25)^(1/2)], [x]);
```

(%o3) $[x=\frac{5}{2}]$

Sisätilavuus

```
(%i4) integrate(%pi*((10*x-25)^(1/2))^2, x, 5/2, 7);
```

(%o4) $\frac{405\,\pi}{4}$

Maljakon tilavuus

```
(%i5) %o2-%o4;
```

(%o5) $\frac{10505\,\pi}{108}$

```
(%i6) float(%), numer;
(%o6) 305.5780632033405
```

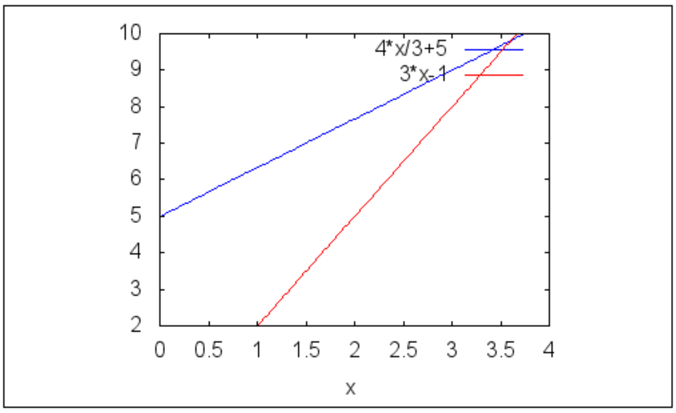
Kultaa on 305,58 cm^3.

78b)

Piirretään funktiot.

```
(%i1) wxplot2d([4/3*x+5, 3*x-1], [x,0,4], [y,2,10])$
plot2d: some values were clipped.
plot2d: some values were clipped.
```

(%t1)



Astian ulkopinta syntyy, kun suora 4/3x+5 pyörähtää suoran y=2 ympäri.
Astian sisäpinta syntyy, kun suora 3x-1 pyörähtää suoran y=2 ympäri.

Astian tilavuus saadaan vähentämällä ulkotilavuudesta sisätilavuus.

Ulkotilavuus

```
(%i2) integrate(%pi*(4/3*x+5)^2, x, 0, 18/5);
```

(%o2) $\frac{25506\,\pi}{125}$

Lasketaan, koska suora 3x-1 leikkaa suoran y=2.

```
(%i3) solve([3*x-1=2], [x]);
```

(%o3) $[x=1]$

Sisätilavuus

```
(%i4) integrate(%pi*(3*x-1)^2, x, 1, 18/5);
```

(%o4) $\frac{12961\,\pi}{125}$

Astia tilavuus

```
(%i5) %o2-%o4;
```

(%o5) $\frac{2509\,\pi}{25}$

```
(%i6) float(%), numer;
(%o6) 315.2902387142717
```

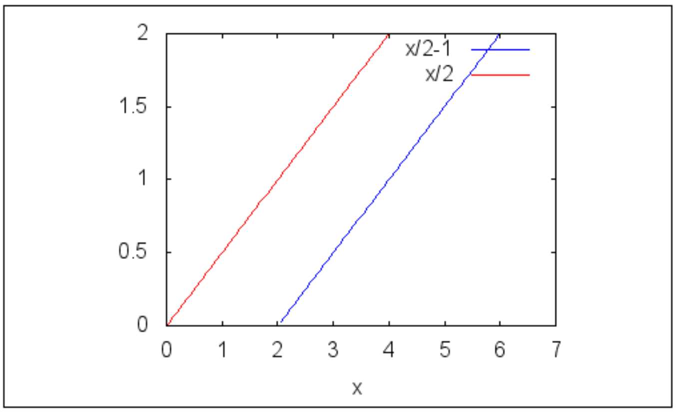
Kultaa on 315,29 cm^3.

78c)

Piirretään funktiot.

```
(%i1) wxplot2d([1/2*x-1, 1/2*x], [x,0,7], [y,0,2])$
plot2d: some values were clipped.
plot2d: some values were clipped.
```

(%t1)



Kulhon ulkopinnan muodostaa suora 1/2x-1, kun se pyörähtää y-akselin ympäri.
Kulhon sisäpinnan muodostaa suora 1/2x, kun se pyörähtää y-akselin ympäri.

Kulhon tilavuus saadaan vähentämässä ulkotilavuudesta sisätilavuus.

Ulkotilavuus

Muodostetaan suoran y=1/2x-1 käänteisfunktio x=2y+2.

```
(%i2) integrate(%pi*(2*y+2)^2, y, 0, 2);
```

(%o2) $\frac{104\,\pi}{3}$

```
Sisätilavuus

Muodostetaan suoran y=1/2x käänteisfunktio x=2y.

(%i3) integrate(%pi*(2*y)^2, y, 0, 2);
```

$$(\%o3)\quad \frac{32\,\pi}{3}$$

```
Kulhon tilavuus

(%i4) %o2-%o3;
(%o4) 24 π

(%i5) float(%), numer;
(%o5) 75.39822368615503

Kultaa on 75,40 cm^3.
Tässä koriste-esineessä on vähiten kultaa.

78d)

Kulho painaa

(%i7) 0.00007540*19.3*10^3;
(%o7) 1.45522

Painoa on 1,455 kg
```

79 Ankkalinnan kaupassa on myytävänä monia 60 grammaisia suklaapatukoita. Hinnaltaan ne ovat 3.5, 4.0, 2.5, 3.5, 4.2, 4.1, 2.5, 5.0, 4.0 ja 3,8.
a) Laske suklaapatukoiden mediaani.
b) Laske suklaaputukoiden keskiarvo.
c) Laske suklaapatukoiden keskihajonta.

```
79

(%i9) lista:[3.5, 4.0, 2.5, 3.5, 4.2, 4.1, 2.5, 5.0, 4.0, 3.8];
(%o9) [3.5,4.0,2.5,3.5,4.2,4.1,2.5,5.0,4.0,3.8]

79a

(%i10) median(lista);
(%o10) 3.9

79b

(%i11) mean(lista);
(%o11) 3.71
```

```
79c
(%i12) std(lista);
(%o12) 0.7244998274671982
```

80 Kaakkois-Suomessa tutkittiin vuosina 2000 – 2004 mäyrien ja supikoirien elinpiirejä. Mäyrien elinpiirin keskiarvo oli 14,7 km^2 ja keskihajonta 8,32 km^2. Supikoirien elinpiirin keskiarvo oli 3,9 km^2 ja keskihajonta 1,42 km^2.
a) Jos yhden mäyrän elinpiiri on 16 km^2, mikä on tämän mäyrän normitettu elinpiirin arvo?
b) Jos tämä mäyrä voisi uudesti syntyä supikoiraksi, kuinka suuri elinpiiri sillä silloin olisi, jos se liikkuisi vastaavalla tavalla kuin oli mäyränä liikkunut muihin mäyriin verrattuna?

```
80a
(%i14) f(x):=(x-14.7)/8.32;
(%o14) f(x) := (x-14.7)/8.32
(%i15) f(16);
(%o15) 0.1562500000000001
80b
(%i16) (y-3.9)/1.42=%o15;
(%o16) 0.7042253521126761 (y-3.9) =0.1562500000000001
(%i17) solve([%], [y]);
rat: replaced -0.1562500000000001 by -5/32 = -0.15625
rat: replaced 0.7042253521126761 by 50/71 = 0.704225352112676
rat: replaced -3.9 by -39/10 = -3.9
(%o17) [y=1319/320]
(%i18) float(%), numer;
(%o18) [y=4.121875]
```

81 Laske todennäköisyydet.

a) $P(X \leq 0,82)$ b) $P(X \geq 0,67)$ c) $P(X < -1,53)$ d) $P(X > -0,23)$
e) $P(-0,51 < X \leq 0,62)$

```
81
```

```
(%i1) load(distrib);
(%o1) C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.35.1/share/distrib/distrib.mac
```

```
81a
```

```
(%i3) cdf_normal(0.82, 0, 1);
```

(%o3) $\dfrac{\mathrm{erf}\left(\frac{0.82}{\sqrt{2}}\right)}{2}+\dfrac{1}{2}$

```
(%i4) float(%), numer;
(%o4) 0.7938919464141869
```

```
81b
```

```
(%i5) 1-cdf_normal(0.67, 0, 1);
```

(%o5) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{erf}\left(\frac{0.67}{\sqrt{2}}\right)}{2}$

```
(%i6) float(%), numer;
(%o6) 0.2514288950953101
```

```
81c
```

```
(%i7) cdf_normal(-1.53, 0, 1);
```

(%o7) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{erf}\left(\frac{1.53}{\sqrt{2}}\right)}{2}$

```
(%i8) float(%), numer;
(%o8) 0.0630083644639784
```

81d

```
(%i10) 1-cdf_normal(-0.23, 0, 1);
```

(%o10) $\dfrac{\operatorname{erf}\left(\frac{0.23}{\sqrt{2}}\right)}{2}+\dfrac{1}{2}$

```
(%i11) float(%), numer;
(%o11) 0.5909541151420059
```

81e

```
(%i12) cdf_normal(0.62, 0, 1)-cdf_normal(-0.51, 0, 1);
```

(%o12) $\dfrac{\operatorname{erf}\left(\frac{0.62}{\sqrt{2}}\right)}{2}+\dfrac{\operatorname{erf}\left(\frac{0.51}{\sqrt{2}}\right)}{2}$

```
(%i13) float(%), numer;
(%o13) 0.4273453756334975
```

82 Kaakkois-Suomessa tutkittiin vuosina 2000 – 2004 kissojen elinpiirejä. Kissojen elinpiirin keskiarvo oli 1,5 km^2 ja keskihajonta 1,69 km^2.
a) Laske, millä todennäköisyydellä kissan elinpiiri on vähintään 2 km^2?
b) Laske, millä todennäköisyydellä kissan elinpiiri on 1 – 3 km^2?
c) Laske, kuinka monella kissalla 200 on suurempi reviiri kuin 2,5 km^2?

82

```
(%i1) load(distrib);
(%o1) C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.35.1/share/distrib/distrib.mac
```

82a

```
(%i2) 1-cdf_normal(2, 1.5, 1.69);
```

(%o2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\operatorname{erf}\left(\frac{0.2958579881656805}{\sqrt{2}}\right)}{2}$

```
(%i3) float(%), numer;
(%o3) 0.3836692680200062
```

82b

```
(%i4) cdf_normal(3, 1.5, 1.69) - cdf_normal(1, 1.5, 1.69);
```

(%o4) $\dfrac{\operatorname{erf}\left(\frac{0.8875739644970415}{\sqrt{2}}\right)}{2}+\dfrac{\operatorname{erf}\left(\frac{0.2958579881656805}{\sqrt{2}}\right)}{2}$

```
(%i5) float(%), numer;
(%o5) 0.428945750195132
```

```
82c

(%i6) 1-cdf_normal(2.5, 1.5, 1.69);
```

$$(\%o6)\quad \frac{1}{2}-\frac{\mathrm{erf}\left(\frac{0.591715976331361}{\sqrt{2}}\right)}{2}$$

```
(%i7) float(%), numer;
(%o7) 0.2770203982038213

(%i8) 200*%o7;
(%o8) 55.40407964076427

56 kissalla.
```

83 Oletetaan, että väestön älykkyysosamäärä noudattaa normaalijakaumaa $N(100, 15)$. Määritä odotusarvon 100 ympäriltä symmetrinen väli, johon kuuluu täsmälleen puolet väestöstä. (K15/6)

```
83

Jos kysytty yläraja on a, niin symmetrinen väli on puolestaan  P(-a<X<a)=50.
Ja P(X<a)=0,75

(%i4) load(distrib);
(%o4) C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.35.1/share/distrib/distrib.mac

(%i5) quantile_normal(0.75,100,15);
```

$$(\%o5)\quad 7.154044143067048\sqrt{2}+100$$

```
(%i6) float(%), numer;
(%o6) 110.1173462529412

Kysytty väli

(%i21) %o6-100;
(%o21) 10.11734625294123

(%i22) 100+%o21;
(%o22) 110.1173462529412

(%i23) 100-%o21;
(%o23) 89.88265374705877

Kysytty väli [90,110]
```

84 Ankkalinnan liikuntaluokassa on 35 oppilasta. Heistä 19 pelaa amerikkalaista jalkapalloa ja 15 pelaa golfia. Luokan oppilaista 8 pelaa sekä amerikkalaista jalkopalloa että pelaa golfia. Muut ovat uimareita.
a) Kun luokasta otetaan sattumanvaraisesti oppilas, mikä on todennäköisyys, että hän on uimari?
b) Kun luokasta otetaan sattumanvaraisesti oppilas, mikä on todennäköisyys, että hän pelaa vain golfia tai amerikkalaista jalkapalloa?

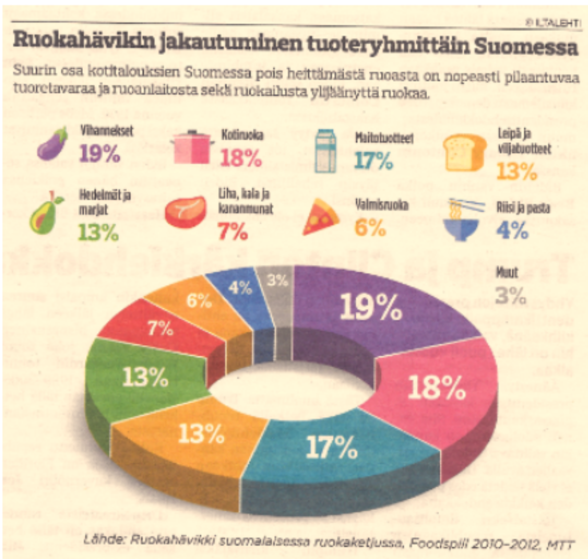
```
84

Pelaa vain amerikkalaista jalkapalloa

(%i1) 19-8;
(%o1) 11

Pelaa vain golfia

(%i2) 15-8;
(%o2) 7

Ei pelaa kumpaakaan amerikkalaista jalkapalloa eikä golfia

(%i3) 35-(%o1+%o2+8);
(%o3) 9

84a

Uimari

(%i6) %o3/35;
```

(%o6) $\frac{9}{35}$

```
84b

Pelaa vain golfia tai amerikkalaista jalkapalloa

(%i5) %o1/35+%o2/35;
```

(%o5) $\frac{18}{35}$

85 Suomessa pois heitetään paljon ruokaa. Maa- ja elintarviketalouden tutkimuskeskus MTT on tehnyt tutkimuksen ruokahävikistä vuosilta 2010 – 2012.
a) Laske todennäköisyys, että satunnaisesti roskiksiin heitetty ruoka on vihanneksia, hedelmiä tai marjoja.
b) Laske todennäköisyys, että satunnaisesti roskiksiin heitetyistä vihanneksista, hedelmistä ja marjoista, roskiksiin on juuri heitetty hedelmiä ja marjoja.




```
85a
```

```
(%i2) 19+13;
(%o2) 32
```

```
32 % eli 0,32.
```

```
85b
```

```
Kirjaimella a merkitään kaikkia pois heitettyä ruokaa.
```

```
(%i3) (13*a)/(19*a+13*a);
```

(%o3) $\frac{13}{32}$

86 Ankkalinnan saaristossa kulkee viiden eri sataman välillä pieni alus, jo-
ka kiertää viisi satamaa tunnissa. Satamasta A matka satamaan B kestää
6 minuuttia. Satamassa B alus on 5 minuuttia. Satamasta B matka sata-
maan C kestää 7 minuuttia. Satamassa C alus on 5 minuuttia. Satamasta
C alus jatkaa satamaan D. Matka kestää 9 minuuttia. Satamassa D alus on
4 minuuttia. Satamasta D matka E kestää 5 minuuttia. Satamassa E alus
on 6 minuuttia. Lopuksi alus palaa satamaa A. Matka kestää 7 minuuttia.
Satamassa A on 6 minuttia ennenkuin aloittaa saaristokierroksen uudelleen.
a) Laske todennäköisyys, että asiakas pääsee suoraan alukseen satamassa A
b) Laske todennäköisyys, että asiakas joutuu odottamaan satamassa D yli 4
minuuttia

```
86a
```

```
Asiakas pääsee suoraan alukseen satamassa A.
```

```
(%i1) 6/60;
```

(%o1) $\frac{1}{10}$

```
86b
```

```
Asiakas joutuu olemaan satamassa D yli 4 minuuttia.
```

```
(%i2) (60-(4+5))/60;
```

(%o2) $\frac{17}{20}$

87 Tupun, Hupun ja Lupun luokalla on 25 oppilasta.

a) Kuinka monella tavalla luokan kaikista oppilaista voidaan tehdä jono, niin että Tupu, Hupu ja Lupu ovat ensimmäisinä jonossa?

b) Ankkalinnan koulun ruokalassa tehdään 8 erilaista keittoa, leivotaan 4 erilaista leipää, tarjotaan 3 erilaista juomaa ja tarjoillaan 10 erilaista jälkiruokaa. Laske kuinka monta erilaista ruokalistaa voidaan tehdä?

c) Kuinka monella tavalla poikien luokan oppilaista voidaan tehdä 6 henkinen uintiviestijoukkue, kun uijien järjestyksellä on väliä. Tiedetään, että kaikki ankat ovat loistavia uimareita.

d) Kuinka monella tavalla voidaan tehdä 6 henkinen uintiviestijoukkue, jonka uijien järjestyksellä on väliä, kun Tupu, Hupu ja Lupu valitaan ensimmäisiksi kolmeksi uijaksi, koska he voittivat kesällä ankkalinnan kesäkisoissa kultaa omalla uimajoukkueellaan? Tupun, Hupun ja Lupun järjestys voi olla myös eri.

e) Kuinka monella tavalla poikien luokasta voidaan tehdä 4 henkinen lähetystö, joka vie luokanvalvojalleen kotiin syntymäpäiväkukkia. Luokan kaikki oppilaat haluavat lähetystöön.
f) Poikien luokalla on 11 tyttöä ja 14 poikaa. Laske kuinka monella tavalla voidaan muodostaa tyttöpoikapari, joka kevätjuhlassa pitää yhdessä puheen luokanvalvojalleen.
g) Laske todennäköisyys, että joku pojista Tupu, Hupu tai Lupu pääsee kevätjuhlan tyttöpoikapariin.

```
87a

(%i1) 3*2*1*22!;
(%o1) 6744004366665646080000

87b

(%i2) 8*4*3*10;
(%o2) 960

87c

(%i3) 25*24*23*22*21*20;
(%o3) 127512000

87d

(%i4) 3*2*1*22*21*20;
(%o4) 55440

87e

(%i5) 25!/(4!*(25-4)!);
(%o5) 12650

Toisella tavalla

(%i6) (binomial(25,4));
(%o6) 12650
```

87f

```
(%i7) 11*14;
(%o7) 154
```

Toisella tavalla

```
(%i8) (binomial(11,1))*(binomial(14,1));
(%o8) 154
```

87g

```
(%i9) ((binomial(3,1))*(binomial(11,1)))/%o7;
```

(%o9) $\frac{3}{14}$

88 a) Korttipakassa on 52 korttia. Nostetaan pakasta 4 korttia palauttamatta niitä takaisin pakkaan. Laske todennäköisyys, että korkeintaan kolmessa kortissa on luku viisi.
b) Heitetään 7-sivuista noppaa 7 kertaa. Nopassa on luvut $1-7$. Laske todennäköisyys, että saadaan ainakin yksi 7.

88a

Lasketaan todennäköisyys, että kaikissa neljässä kortissa on luku viisi.

```
(%i1) (4*3*2*1)/(52*51*50*49);
```

(%o1) $\frac{1}{270725}$

Lasketaan todennäköisyys, että korkeintaan kolmessa kortissa on luku viisi.
Käytetään hyväksi komplementtisääntöä.

```
(%i2) 1-%o1;
```

(%o2) $\frac{270724}{270725}$

```
(%i3) float(%), numer;
(%o3) 0.9999963062147936
```

```
88b
```

```
Lasketaan todennäköisyys, että ei saada yhtään seitsemää, kun heitetään
noppaa seitsemän kertaa.
```

```
(%i4) (6*6*6*6*6*6*6)/(7*7*7*7*7*7*7);
(%o4) 279936/823543
```

```
Lasketaan todennäköisyys, että saadaan ainakin yksi seitsemän.
Käytetään hyväksi kompleksisääntöä.
```

```
(%i5) 1-%o4;
(%o5) 543607/823543
```

```
(%i6) float(%), numer;
(%o6) 0.6600833229108862
```

89 Tapio on luonnonlahjakkuus tikanheitossa ja ampumisessa. Tapion onnistumisprosentti saada kymppi tikanheitossa on 80 % ja onnistumisprosentti ampumalla osua taulun keskipisteeseen on 90 %.
a) Laske todennäköisyys, että, kun Tapio heittää yhden tikan, se osuu kymppiin ja kun Tapio ampuu kerran, laukaus lävistää taulun keskipisteen.
b) Laske todennäköisyys, että Tapio ei saa kymppiä tikanheitossa, kun hän heittää vain yhden tikan eikä hän osu taulun keskipisteeseen, kun hän ampuu vain yhden kerran.
c) Laske todennäköisyys, että Tapio onnistuu ainakin toisessa taitolajissa. Hän joko heittää kympin tikanheitossa yhdellä tikalla tai hän ampuessa osuu taulun keskipisteeseen, kun hän ampuu vain kerran.
d) Laske todennäköisyys, että kun Tapio heittää tikkaa 5 kertaa, hän saa tasan 4 kertaa kympin.
e) Laske todennäköisyys, että kun Tapio ampuu 10 kertaa, hän osuu taulun keskipisteeseen ainakin 4 kertaa.

```
89a
```

```
(%i2) 0.8*0.9;
(%o2) 0.7200000000000001
```

```
89b
```

```
(%i3) (1-0.8)*(1-0.9);
(%o3) 0.01999999999999999
```

```
89c
```

```
Tapio onnistuu ainakin toisessa taitolajissa.
Käytetään hyväksi komplementtisääntöä.
1-P(kumpikaan taitolaji ei onnistu)
```

```
(%i4) 1-%o3;
(%o4) 0.98
```

```
89d
```

```
(%i5) binomial(5,4)*(0.80)^4*(0.20)^1;
(%o5) 0.4096000000000001
```

```
89e
```

```
Tapio osuu ampumalla keskipisteeseen 0,1,2 tai 3 kertaa.
```

```
(%i7) binomial(10,0)*(0.90)^0*(0.10)^10+binomial(10,1)*(0.90)^1*(0.10)^9+
      binomial(10,2)*(0.90)^2*(0.10)^8+binomial(10,3)*(0.90)^3*(0.10)^7;
```

(%o7) $9.121600000000005\ 10^{-6}$

```
Tapio osuu ampumalla keskipisteeseen ainakin 4 kertaa.
Käytetään hyväksi komplementtisääntöä.
```

```
(%i8) 1-%o7;
(%o8) 0.9999908784
```

90 Ankkalinnassa on ratsutila, jossa on 30 hevosta. Tammoja on 16. Tammoista 9 ja oreista 8 on lämminverisiä. Muut hevoset ovat kylmäverisiä. Missään tallin pilttuussa ei lue hevosen nimeä.
a) Kun vierailija menee talliin ja satunnanvaraisesti valitsee pilttuun katsomatta hevosta, millä todennäköisyydellä hevonen on ori tai kylmäverinen?
b) Kun vierailija menee talliin ja satunnanvaraisesti valitsee pilttuun katsomatta hevosta, millä todennäköisyydellä hevonen on joko ori tai kylmäverinen?
c) Kun vierailija menee talliin ja satunnanvaraisesti valitsee kaksi pilttuuta katsomatta hevosia. Laske todennäköisyys, että ensimmäinen hevonen on kylmäverinen ori tai toinen hevonen on kylmäverinen ori.
d) Kun vierailija menee talliin ja satunnanvaraisesti valitsee kaksi pilttuuta katsomatta hevosia. Laske todennäköisyys, että toinen hevosista on kylmäverinen ori.

90

Oreja on

```
(%i8) 30-16;
(%o8) 14
```

Kylmäverisiä on

```
(%i2) 30-9-8;
(%o2) 13
```

Oreista kylmäverisiä on

```
(%i9) 14-8;
(%o9) 6
```

90a

```
(%i10) 14/30+13/30-6/30;
```

(%o10) $\frac{7}{10}$

```
(%i11) float(%), numer;
(%o11) 0.7
```

90b

```
(%i12) 14/30+13/30-2*6/30;
```

(%o12) $\frac{1}{2}$

```
(%i13) float(%), numer;
(%o13) 0.5
```

90c

```
(%i14) 6/30*5/29+6/30*24/29+24/30*6/29;
```

(%o14) $\frac{53}{145}$

```
(%i15) float(%), numer;
(%o15) 0.3655172413793104
```

90d

```
(%i16) 6/30*24/29+24/30*6/29;
```

(%o16) $\frac{48}{145}$

```
(%i17) float(%), numer;
(%o17) 0.3310344827586207
```

91 Määritä funktion $f(x) = x^3+3x^2-3$ nollakohdat Newtonin menetelmällä. Ota alkuarvoiksi luvut -4, -1 ja 2. Ilmoita nollakohdat seitsemän desimaalin tarkkuudella.

```
91

(%i1) load("mnewton");
(%o1) C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.35.1/share/mnewton/mnewton.mac

(%i2) mnewton(x^3+3*x^2-3,[x],[-4]);
(%o2) [[x=-2.532088886237955]]

(%i3) mnewton(x^3+3*x^2-3,[x],[-1]);
(%o3) [[x=-1.347296355333861]]

(%i4) mnewton(x^3+3*x^2-3,[x],[2]);
(%o4) [[x=0.8793852415718167]]
```

92 Tupu, Hupu ja Lupu ratkaisevat funktion $f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 1/2$ nollakohtia.

a) Tupu lähtee alkuarvosta 0,6 ja Lupu alkuarvosta 0,1. Kumpi pojista saa funktion nollakohdan 0,3566916 vähemmällä määrällä Newtonin menetelmän laskuja.

b) Hupu lähtee alkuarvosta -0.1. Ratkaise, minkä nollakohdan hän ratkaisee. Laske nollakohdan arvo seitsemän desimaalin tarkkuudella.

c) Laske funktion $f(x)$ suurin nollakohta seitsemän desimaalin tarkkuudella.

```
92a

(%i20) -3*x^3+5*x^2-1/2;
```
(%o20) $-3\,x^3+5\,x^2-\frac{1}{2}$

```
(%i21) diff(%,x,1);
```
(%o21) $10\,x-9\,x^2$

```
(%i22) Newton(x):=x-(-3*x^3+5*x^2-1/2)/(10*x-9*x^2);
```
(%o22) $\mathrm{Newton}(x) := x - \frac{(-3)\,x^3+5\,x^2+\frac{-1}{2}}{10\,x-9\,x^2}$

```
(%i23) Newton(0.6);
(%o23) 0.363768115942029

(%i24) Newton(%);
(%o24) 0.3567273414982324
```

```
(%i25) Newton(%);
(%o25) 0.356691580095291
```

```
(%i26) Newton(%);
(%o26) 0.3566915791503006
```

```
(%i27) Newton(%);
(%o27) 0.3566915791503007
```

Tupu pääsi kolmella Newtonin laskulla arvoon 0,3566916.

```
(%i28) Newton(0.1);
(%o28) 0.5978021978021979
```

```
(%i29) Newton(%);
(%o29) 0.3639141174840719
```

```
(%i30) Newton(%);
(%o30) 0.356728806060408
```

```
(%i31) Newton(%);
(%o31) 0.3566915801742683
```

```
(%i32) Newton(%);
(%o32) 0.3566915791503007
```

Lupu pääsi neljännellä Newtonin laskulla arvoon 0,3566916.

92b

```
(%i33) load("mnewton");
(%o33) C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.35.1/share/mnewton/mnewton.mac
```

```
(%i35) mnewton(-3*x^3+5*x^2-1/2,[x],[-0.1]);
(%o35) [[x=-0.2917255939409534]]
```

Nollakohta on -0,2917256.

92c

```
(%i36) mnewton(-3*x^3+5*x^2-1/2,[x],[100]);
(%o36) [[x=1.601700681457319]]
```

Suurin nollakohta on 1,6017007, koska funktiolla voi vain olla 3 nollakohtaa, koska funktio on kolmannen asteen funktio.

93 Laske $f(x) = x^2 + 3x + 3$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala väliltä $1 \leq x \leq 4$,

a) kun jakovälejä on 1.

b) kun jakovälejä on 3.

c) kun jakovälejä on 6.

d) Laske alueen pinta-ala integroimalla.

```
93

(%i1) f:x^2+3*x+3;
(%o1) x^2+3 x+3

(%i2) a:1;
(%o2) 1

(%i3) b:4;
(%o3) 4

93a

(%i4) N:1;
(%o4) 1

(%i5) h: float( b - a ) / N;
(%o5) 3.0

(%i6) sum: ( ev( f, numer, x=a ) + ev( f, numer, x=b ) ) / 2.0;
(%o6) 19.0

(%i7) t: float( a );
(%o7) 1.0

(%i8) for i: 1 thru N-1 do
      (  t: t + h,
      sum: sum + ev( f, numer, x=t ));
(%o8) done

(%i9) print( "Trapezoid rule approximation is: ", h * sum );
Trapezoid rule approximation is:  57.0
(%o9) 57.0

93b

(%i10) N:3;
(%o10) 3

(%i11) h: float( b - a ) / N;
(%o11) 1.0
```

```
(%i12) sum: ( ev( f, numer, x=a ) + ev( f, numer, x=b ) ) / 2.0;
(%o12) 19.0

(%i13) t: float( a );
(%o13) 1.0

(%i14) for i: 1 thru N-1 do
       (  t: t + h,
       sum: sum + ev( f, numer, x=t ));
(%o14) done

(%i15) print( "Trapezoid rule approximation is: ", h * sum );
Trapezoid rule approximation is:  53.0
(%o15) 53.0
```

93c

```
(%i16) N:6;
(%o16) 6

(%i17) h: float( b - a ) / N;
(%o17) 0.5

(%i18) sum: ( ev( f, numer, x=a ) + ev( f, numer, x=b ) ) / 2.0;
(%o18) 19.0

(%i19) t: float( a );
(%o19) 1.0

(%i20) for i: 1 thru N-1 do
       (  t: t + h,
       sum: sum + ev( f, numer, x=t ));
(%o20) done

(%i21) print( "Trapezoid rule approximation is: ", h * sum );
Trapezoid rule approximation is:  52.625
(%o21) 52.625
```

93d

```
(%i22) integrate(x^2+3*x+3, x, 1, 4);
```

(%o22) $\frac{105}{2}$

```
(%i23) float(%), numer;
(%o23) 52.5
```

94 Tupu, Hupu ja Lupu halusivat laskea kartalta erään alueen pinta-alan
Aluetta reunusti Kaunisjoki $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$ ja kartan $x-$akseli. Tupu
jakoi alueen 2 jakoväliin, Hupu 3 jakoväliin ja Lupu 6 jakoväliin. Laske, mit
pojat saivat pinta-aloiksi. Kenen laskelma oli tarkin. Mistä tiedät?

94

Lasketaan funktion f(x) nollakohdat.

```
(%i1) solve([-3*x^2-2*x+1], [x]);
```
(%o1) $[x=\frac{1}{3}, x=-1]$

```
(%i2) f:-3*x^2-2*x+1;
```
(%o2) $-3\,x^2-2\,x+1$

```
(%i3) a:-1;
(%o3) -1
```

```
(%i4) b:1/3;
```
(%o4) $\frac{1}{3}$

Tupun lasku

```
(%i5) N:2;
(%o5) 2
```

```
(%i6) h: float( b - a ) / N;
(%o6) 0.6666666666666666
```

```
(%i7) sum: ( ev( f, numer, x=a ) + ev( f, numer, x=b ) ) / 2.0;
```
(%o7) $2.775557561562891\ 10^{-17}$

```
(%i8) t: float( a );
(%o8) -1.0
```

```
(%i9) for i: 1 thru N-1 do
      (  t: t + h,
      sum: sum + ev( f, numer, x=t ));
(%o9) done
```

```
(%i10) print( "Trapezoid rule approximation is: ", h * sum );
Trapezoid rule approximation is:  0.888888888888889
(%o10) 0.888888888888889
```

Hupun lasku

```
(%i11) N:3;
(%o11) 3
```

```
(%i12) h: float( b - a ) / N;
(%o12) 0.4444444444444444
```

```
(%i13) sum: ( ev( f, numer, x=a ) + ev( f, numer, x=b ) ) / 2.0;
(%o13) 2.775557561562891 10^-17
```

```
(%i14) t: float( a );
(%o14) -1.0
```

```
(%i15) for i: 1 thru N-1 do
       (  t: t + h,
       sum: sum + ev( f, numer, x=t ));
(%o15) done
```

```
(%i16) print( "Trapezoid rule approximation is: ", h * sum );
Trapezoid rule approximation is:  1.053497942386831
(%o16) 1.053497942386831
```

Lupun lasku

```
(%i17) N:6;
(%o17) 6
```

```
(%i18) h: float( b - a ) / N;
(%o18) 0.2222222222222222
```

```
(%i19) sum: ( ev( f, numer, x=a ) + ev( f, numer, x=b ) ) / 2.0;
(%o19) 2.775557561562891 10^-17
```

```
(%i20) t: float( a );
(%o20) -1.0
```

```
(%i21) for i: 1 thru N-1 do
       (  t: t + h,
       sum: sum + ev( f, numer, x=t ));
(%o21) done
```

```
(%i22) print( "Trapezoid rule approximation is: ", h * sum );
Trapezoid rule approximation is:  1.152263374485597
(%o22) 1.152263374485597
```

Integraalilla laskettu ala

```
(%i23) integrate(-3*x^2-2*x+1, x, -1, 1/3);
```

(%o23) $\frac{32}{27}$

```
(%i24) float(%), numer;
(%o24) 1.185185185185185
```

Lupun lasku oli tarkin.

Mitä enemmän on jakovälejä, sitä tarkimman vastauksen saa.

wxMaximan pikaopas

Tuula Ruuskanen

Kandintyö
Toukokuu 2016

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tuula Ruuskanen: wxMaximan pikaopas
Kandintyö, 26 s.
Matematiikka
Toukokuu 2016

Tämän pikaoppaan tarkoituksena on opettaa lukiolaisille wxMaximan käyttöä. Oppaassa kerrotaan wxMaximan toimintaperiaatteet ja neuvotaan lukion matematiikassa tarvittavien laskutoimitusten tekimistä: funtkion arvon laskemista, yhtälön, yhtälöparin ja yhtälöryhmän ratkaisemista, epäyhtälön ratkaisemista, logaritmia, trigonometriaa, raja-arvoa, derivaattaa, integraalia, tilastoa ja todennäköisyyttä. Oppaassa neuvotaan myös, miten voi piirtää kaksi- tai kolmiulotteisesti.

Oppaaseen on laitettu paljon esimerkkejä, joiden avulla oppiminen onnistuu helposti. Oppaassa kerrotaan, miten laskeminen onnistuu käyttämällä ohjelmassa olevia valikkoja hyväksi tai mitä tulee kirjoittaa käskyksi komentoriville.

Avainsanat: wxMaxima, lukion matematiikka

Sisältö

1 Johdanto

Tämän oppaan tarkoitus on opettaa lukiolaisille, miten wxMaxima-ohjelmaa voi käyttää apuna lukion matematiikan laskuissa. Tähän oppaaseen on kirjoitettu juuri sellaisia komentoja, joita lukion matematiikassa tarvitaan. Tällaisen oppaan tekeminen on aivan ajankohtaista, sillä vuonna 2019 matematiikan yo-kirjoituksista tulee sähköisiä. wxMaxima ohjelma on valittu juuri yhdeksi ohjelmaksi, jota opiskelijat voivat käyttää sähköisissä yo-kirjoituksissaan.

wxMaximan voi ladata ilmaisesti omalle koneelleen sivustolta, joka löytyy andrejv.githubio/wxmaxima/. wxMaximan voi ladata Windows, Mac OS X ja Source koneille.

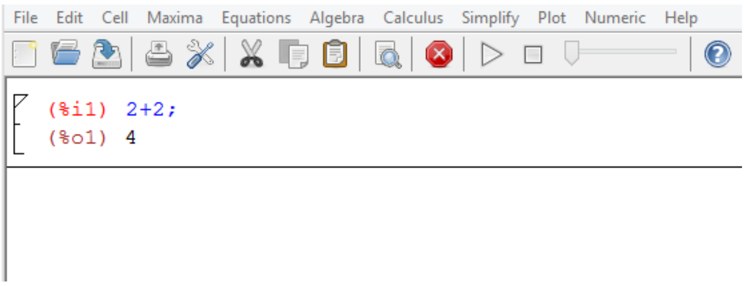
Iloista opiskelumieltä!

Turussa helmikuussa 2016.

2 wxMaximan toimintaperiaate

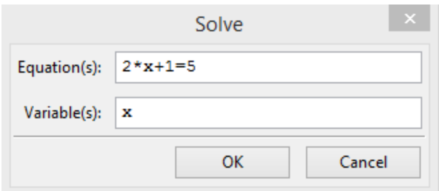
2.1 wxMaximan toimintaperiaate

wxMaximaa voi käyttää kahdella tavalla, joko käyttämällä kuvaruudun yläreunassa olevaa valikkoa hyväksi tai kirjoittamalla suoraan ruutuun komennot. Aluksi on helpompi aloittaa wxMaximan käyttö käyttämällä hyväksi kuvan yläreunassa olevaa valikkoa. (File, Edit, Cell...) [1, s. 1]

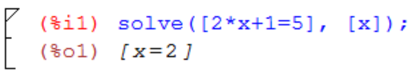


Kuva 1: wxMaximan kuvaruutu

Valikkojen alta löytyy alivalikoita. Esimerkiksi *Equations* alta löytyy 15 alivalikkoa. Ylin niistä on *Solve*.... Kun painaa *Solve*... kohdasta, saa *Solve*... laatikon, johon voi kirjoittaa yhtälön ja painamalla *OK* kohdasta, wxMaxima ratkaisee yhtälön. [1, s. 6]



Kuva 2: Solve laatikko



Kuva 3: Komentosolu laatikon avulla tehtynä tai suoraan kirjoitettuna (ylempi rivi) ja tulossolu (alempi rivi)

Samaan tulokseen olisi päästy kirjoittamalla solve([2*x+1=5], [x]) kuvaruutuun eli komentosoluun ja painamalla sen jälkeen yhtä aikaa $shift + enter$.

Aina, kun kirjoittaa kuvaruudulle jonkin komennon, pitää painaa yhtä aikaa $shift + enter$, jotta ohjelma suorittaa komennon. $shift + enter$ painaminen näkyy komentosolussa puolipisteenä ;. [1, s. 2]

Jokaisella komentosolulla ja jokaisella tulossolulla on oma tunniste. Komentosolun tunnisteet ilmestyvät kuvaruudulle loogisessa järjestyksessä (prosenttimerkki kirjain i ja lopuksi luku)(%i1). Ensimmäinen solun tunniste on 1, sitten 2 jne. Näihin tunnisteisiin voi myöhemmin viittailla. Tulossoluilla on kanssa omat tunnisteet. (Prosenttimerkki kirjain o ja lopuksi luku)(%o1). [1, s. 1] Ohjelmasta voi poistaa komentosolun ja tulossolun muodostaman kokonaisuuden valitsemalla hiirellä komento- ja tulossolun vieressä olevan "kolmipiikkisen kamman"ja painamalla sitten *delete*-näppäintä. Jos poistaa jonkun komento- ja tulossolun kokonaisuuden, häviää tästä ohjelmasta näiden tunnukset.

wxMaximassa hiiri on siinä kohdassa ruutua, jossa on vaakasuora viiva. [1, s. 1] Hiiren vasemman puoleisella painikkeella voi kursorin näpäyttää aikaisempaan kohtaan tiedostossa solukokonaisuuksien väliin. Pitää huomata, että solujen numerointi ei automaattisesti mene loogiseen järjestykseen, jos tekee uusia solukokonaisuuksia ohjelman väliin.

2.2 Funktion ja muuttujan muodostaminen

wxMaximalla funktiot muodostetaan kirjoittamalla funktiolle nimi esim $f(x)$ ja sen jälkeen merkit := siis $f(x)$:=. Funktion muuttuja on sulkeiden sisällä, niinkuin yleensä matematiikassa ilmaistaan. Muuttuja voi olla yksi kirjain tai jopa sana. Hyvä on huomioda, että x ja X ovat eri muuttujia. [1, s. 4]

Esim 1. Muodosta funktio $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$

```
(%i1) f(x):= 2*x^2+ 2*x+1;
(%o1) f(x) :=2 x^2+2 x+1
```

Esim 2. Laske minkälaista karjaa on yhteensä kahdella eri tilalla.Toivolassa on 10 sonnia ja 50 lehmää. Kerttulassa on 20 sonnia ja 34 lehmää. Muuttujat ovat sonni ja lehma.

```
--> 10*sonni + 50*lehma + 24*sonni + 34*lehma;
(%o3) 34 sonni+84 lehma
```

Funktion nimi voi olla myös pitempi sana, joka kuvaa paremmin funktiota ja funktiolla voi olla useampiakin muuttujia, jotka erotetaan toisistaan pilkulla funktion nimessä. [1, s. 4]

Esim 3. Muodosta funktio Suorakulmaisen särmiön ala= abc.

```
(%i1) suorakulmaisensarmionala(a,b,c):=a*b*c;
(%o1) suorakulmaisensarmionala(a,b,c):=a b c
```

Täytyy huomata, että useimmasta sanasta koostuva funktion nimi täytyy kirjoittaa yhteen ja funktion nimessä ei saa olla kirjaimia å,ä ja ö. Samoin muuttujiksikaan ei kannata valita näitä kirjaimia.

2.3 Funktioiden tarkastelu ja kuolettaminen

Jos haluaa tarkistaa, minkä nimisiä funktiota on tiedostossa, niin silloin valitaan valikko *Maxima* ja sieltä alivalikko*Show Funktion*. Heti ohjelma näyttää vastauksen.

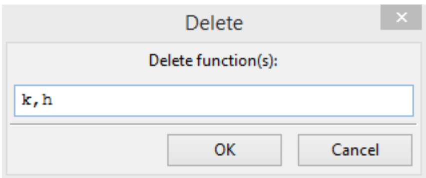
```
(%i3) functions;
(%o3) [f(x),g(x)]
```

Kuva 4: Funktiot f ja g on määritelty

```
(%i5) functions;
(%o5) []
```

Kuva 5: Yhtään funktiota ei ole määritelty

Funktion kuolettaminen käy helposti, kun määrittelee funktion uudestaan. Tai sitten valitsee valikon *Maxima* ja sieltä alivalikon *DeleteFunktion...*. *Delete* laatikossa kysytään, mitkä funktiot halutaan kuolettaa. Jos hyväksyy ehdotuksen *all*, niin ohjelma tuhoaa kaikki määritellyt funktiot. Jos haluaa kuolettaa vain tietyn funktion, niin sitten riittää kirjoittaa vain funktion nimi ilman muuttujia. Jos haluaa kuolettaa monta funktiota, niin sitten pitää kirjoittaa funktioiden nimet pilkulla toisistaan erottaen ilman argumentteja.

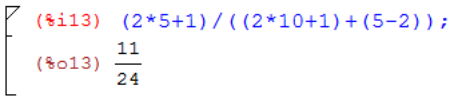


Kuva 6: Funktioden k ja h kuolettaminen

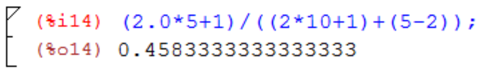
2.4 Laskun tuloksen numeromuoto

Kun wxMaximalla lasketaan kokonaisluvuilla, saadaan vastaukseksi kokonaisluku tai sitten rationaaliluku eli murtoluku. Jos vastaukseksi halutaan desimaaliluku, niin silloin yksi laskussa oleva luku pitää kirjoittaa desimaalimuodossa esim 2.0. wxMaximalla desimaaliluvut kirjoitetaan pistettä käyttäen. [1, s. 2]

Esim 1. Laske $\frac{(2 \cdot 5+1)}{(2 \cdot 10+1)+(5-2)} = \frac{11}{24}$



Kuva 7: Halutaan vastaus rationaalilukuna



Kuva 8: Halutaan vastaus desimaalilukuna

Laskun vastaus saadaan helposti desimaaliluvuksi kirjoittamalla komentosoluun komento $float(\%)$, silloin ohjelma muuttaa edellisen tulossolun tuloksen desimaaliluvuksi. Jos haluaa muuttaa jonkun aikaisemman tulossolun tuloksen desimaaliluvuksi, niin silloin pitää kirjoittaa $float$(tulossolun tunniste). [1, s. 3]

2.5 Virheiden korjaaminen

Esim 1. Laske $\frac{5(x+2)}{(2-x)(x+2)} = \frac{5}{2-x}$

Jokaiselle varmasti tapahtuu joskus, että kirjoittaa väärin komentosoluun ja ehtii jo painaa $shift + enter$. wxMaximalla tällaisen virheen korjaaminen on helppoa. Tässä esimerkissä näytetään, miten virhe korjataan. Tämän komentosolun virhe on se, että nimittäjästä on unohtuneet sulkeet, jotka ympäröivät koko nimittäjää, siksi ohjelma tulkitsee komennon aivan väärin.

```
(%i1) 5*(x+2)/(2-x)*(x+2);
```

$$\text{(\%o1)} \quad \frac{5\,(x+2)^2}{2-x}$$

Virhe korjataan helposti menemällä uudestaan äskeiseen komentosoluun ja lisäämällä siihen yhdet sulkeet ja painamalla uudelleen shift + enteriä. Komentosoluun voidaan kirjoittaa lisää, poistaa asioita, kopioda, liittää kopioituja asioita. Tässä on äskeiseen laskuun tehty korjaus.

```
(%i2) 5*(x+2)/((2-x)*(x+2));
```

$$\text{(\%o2)} \quad \frac{5}{2-x}$$

Välillä käytetään alivalikoita ja siellä täytetään laatikoita. Niissäkin saattaa tulla tehtyä virheitä. Virheen voi korjata tekemällä uudestaan saman laatikon. Toinen mahdollisuus on, että korjaa virheen komentosolussa, joka on ilmestynyt.

2.6 Tiedoston tallentaminen ja uudelleen avaaminen

On hyvä aina välillä tallentaa tiedostoa, mitä tekee. Tallentaminen tapahtuu valitsemalla valikon *File* ja sieltä alivalikko *Save* tai *Save as*. Sitten pitää vain valita, mihin paikkaan työnsä tallentaa. Saman tiedoston uudelleen avaaminen käy valitsemalla valikon *File* ja sieltä alivalikko *open*. Nyt pitää vain etsiä, se paikka, mihin tuli aikoinaan tallennettua tiedosto.

3 wxMaximalla erilaisia laskutoimituksia

3.1 Peruslaskut

wxMaximalla voi helposti laskea peruslaskutoimituksia kuten *yhteen-, vähennys-, kerto-, jako,-* ja *potenssilaskuja. Itseisarvo-*, ja *neliöjuurilaskujen* komennot ovat vähän pitempiä. Alla olevasta listasta näkee, miten nämä laskutoimitukset kirjoitetaan wxMaximalla komentosoluun tai jonkin valikon laatikkoon. [1, s. 2,4] Tämän luvun esimerkit on kirjoittu suoraan komentosoluun.

Laskutoimitukset wxMaximalla	
Yhteenlasku	+
Vähennyslasku	-
Kertolasku	*
Jakolasku	\
Potenssi	^
Neliöjuuri	sqrt()
Itseisarvo	abs()

Yhteen- ja vähennyslaskut

Esim 1. Laske $1999 - 587 + 877 = 2289$

```
(%i1) 1999-587+877;
(%o1) 2289
```

Kerto- ja jakolaskut

Esim 2. Laske $\frac{3(2x+1)}{(2x+1)(x-2)} = \frac{3}{x-2}$

```
(%i3) 3*(2*x+1)/((2*x+1)*(x-2));
        3
(%o3) -----
      x - 2
```

Kertolaskuissa on kaikki kertomerkit aina kirjoitettava komentosoluun. [1, s. 3] Sen sijaan on hyvä huomioida, että vastaussoluun wxMaxima-ohjelma ei merkitse yhtään kertomerkkiä.

Jakolaskuja kirjoitettaessa on tarvittaessa hyvä laittaa ylimääräisiä sulkuja, jotta ohjelma laskee laskun oikein. On hyvä myös ottaa huomioon, että ohjelma ei mitenkään ilmaise, voiko jakolaskussa kaikki luvut olla määrittelyjoukossa. [1, s. 5] Esimerkiksi esimerkin 2 määrittelyjoukossa ei voi olla $x = 2$, koska silloin jaettavaan tulisi nolla. Määrittelyjoukkoehdot pitää siis aina selvittää erikseen.

Potenssi- ja neliöjuurilaskut

Esim 3. Laske $\sqrt{\sqrt{10^2} + \sqrt{36}} = 4$

```
(%i1) sqrt(sqrt(10^2)+sqrt(36));
(%o1) 4
```

Neliöjuurilaskuissa on muistettava laittaa aina jokaisen neliöjuurilaskun ympärille käsky $sqrt()$. Muuten lasku ei onnistu.

Itseisarvolaskut

Esim 4. Laske $|100+|-50||=150$

```
(%i2) abs(100 +abs(-50));
(%o2) 150
```

Itseisarvolaskuissa tulee jokaisen itseisarvolaskun ympärille olla käsky $abs()$.

3.2 Erikoismerkit

wxMaximalla erikoismerkit kirjoitetaan vähän erilailla. Alla olevasta listasta näkee, miten. [1, s. 4]

Erikoismerkit wxMaximalla	
π	%pi
e	%e
∞	inf
- ∞	minf
i	%i

Esim 1. Laske ympyrän pinta-ala, kun ympyrän säteen pituus on 2. Ympyrän alan kaava on $A = \pi r^2$

```
(%i1) A(r):=%pi*r^2;
(%o1) A(r):=π r^2
(%i2) A(2);
(%o2) 4 π
```

Esim 2. Laske $\frac{2e^3+3e^3}{e^3} = 5$

```
(%i4) (2*%e^3 + 3*%e^3)/(%e^3);
(%o4) 5
```

Äärettömään (∞) liittyvä esimerkki löytyy raja-arvo luvusta 3.11 sivulta 17,18.

3.3 Funktion arvon laskeminen

Funktion arvon voi laskea monella tavalla. Tässä muutaman esimerkin avulla valotetaan asiaa.

Esim 1. Laske esimerkin 4 funktion $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$ arvot pisteissä $x = 2$ ja $x = -2$.

Lasku saadaan helposti laskettua samassa tiedostossa, jossa aikaisemmin määriteltiin funktio $f(x)$. Laskua laskettaessa vain viitataan aikaisemmin määriteltyyn funktioon, kirjoittamalla $f(2)$;$f(-2)$;. [1, s. 4] Siis mikä funktio(mikä muuttuja). Puolipiste merkitsee aina ohjelmalle käskyä tehdä laskutehtävä. Viimeiseksi komentosolussa pitää aina painaa $shift + enter$.

```
(%i2) f(2);f(-2);
(%o2) 13
(%o3) 5
```

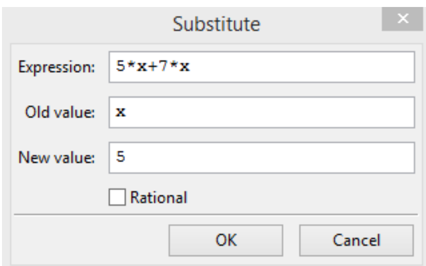
Esim 2. Laske esimerkin 7 suorakulmaisen särmiön ala, jos sivujen pituudet ovat $a = 5$, $b = 6$ ja $c = 7$.

Ohjelmalle tehdään seuraava komento suorakulmaisensarmionala(5,6,7);, jos funktio on aikaisemmin määritelty samassa tiedostossa.

```
(%i2) suorakulmaisensarmionala(5,6,7);
(%o2) 210
```

Esim 3. Laske funktion $f(x) = 5x + 7x$ arvo pisteessä $x = 5$.

Funktion arvon voi laskea käyttäen hyväksi myös valikkoja. Valitaan valikko *Simplify* ja sen alivalikko *Substitute*. Laatikon *Substitute Expression* kohtaa kirjoitetaan funktio. *OldValue* kohtaan merkitään, minkä muuttujan suhteen funktio lasketaan. *NewValue* kohtaan, merkitään mikä on muuttujan arvo.[1, s. 4] Lopuksi napsautetaan hiirellä OK kohdasta. Ohjelmaan muodostuu uusi komentosolu ja tulossolu.



```
(%i1) subst(5, x, 5*x+7*x);
(%o1) 60
```

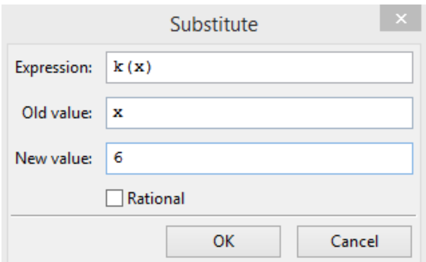
Tehtävä oltaisiin voitu ratkaista kirjoittamalla komentosoluun subst(muuttujan arvo, muuttuja, funktio)

Esim 4. Laske funktion $k(x) = 2x^3 + 3x + 10$ arvo pisteessä $x = 6$.

Määritellään aluksi funktio komentosolussa.

```
(%i4) k(x):= 2*x^3 +3*x+10;
(%o4) k(x):=2 x^3+3 x+10
```

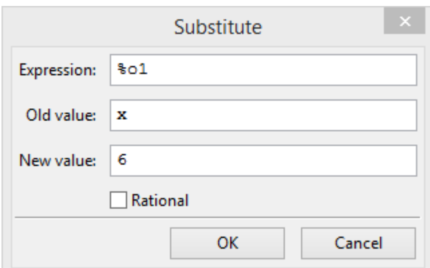
Sitten valitaan valikko $Simplify$ ja sen alivalikko $Substitute$. [1, s. 4] Laatikon $Substitute\ Expression$ kohtaan voidaan kirjoittaa nyt funktion nimi $k(x)$. $New\ Value$ kohtaan, merkitään muuttujan arvo 6.



Tulossolu on nyt erilainen. Funktion arvo voidaan laskea myös kirjoittamalla komentosoluun subst(muuttujan lukuarvo, muuttuja, funktion nimi).

```
(%i6) subst(6, x, k(x));
(%o6) 460
```

$Substitute$ laatikko voidaan täyttää vielä yhdellä tavalla, jos funktio on aikaisemmin määritelty. $Expression$ kohtaan merkitään funktion tulossolun tunniste. [1, s. 4]



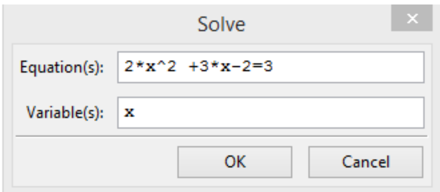
Tulossolu on nyt vähän erilainen verrattuna edelliseen kohtaan. Funktion arvo voidaan laskea myös kirjoittamalla suoraan komentosoluun subst(muuttujan lukuarvo, muuttuja, tulossolun tunniste).

```
(%i2) subst(6, x, %o1);
(%o2) k(6):=460
```

3.4 Yhtälön ratkaiseminen

Esim 1. Määrittele funktion $g(x) := 2x^2 + 3x - 2 = 3$ nollakohdat.

Valitaan valikko *Equations* ja sieltä alivalikko *Solve*.... Solven laatikon $Equation(s)$ kohtaan kirjoitetaan $2x^2+3x-2 = 3$. (Jos ratkaistaisiin yhtälöä $2x^2+3x-2 = 0$, jossa oikealla puolella yhtälöä on nolla, niin silloin $Equation(s)$ kohtaan riittäisi kirjoittaa vain $2x^2 + 3x - 2$). $Variable(s)$ kohtaan merkitään, minkä muuttujan suhteen funktio ratkaistaan. [1, s. 6]



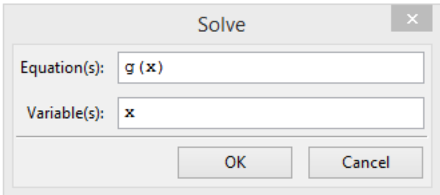
Saadaan seuraavanlainen komentosolu ja tulossolu. Yhtälön nollakohta voidaan ratkaista myös kirjoittamalla suoraan komentosoluun solve([funktio],[muuttuja]).

```
(%i2) solve([2*x^2 +3*x-2=3], [x]);
(%o2) [x=1,x=-5/2]
```

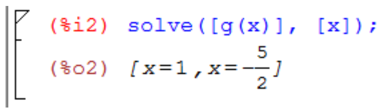
Kolmas tapa laskea tämän funktion nollakohta on määritellä normaalisti komentosolun kautta ohjelmalle tämä funktio.

```
(%i1) g(x):=2*x^2 + 3*x - 2 =3;
(%o1) g(x):=2 x^2+3 x-2=3
```

Sen jälkeen valitaan valikko *Equations* ja sieltä alivalikko *Solve*.... Alivalikon *Equation*(s) kohtaan voidaan kirjoittaa nyt tämän funktion nimi, siis tässä tapauksessa $g(x)$.



Saadaan seuraavanlainen komentosolu ja tulossolu. Neljäs tapa ratkaista yhtälö olisi ollut kirjoittaa komentoriville suoraan solve([g(x)], [x]);



Yhtälön saa myös ratkaistua, jos funktio on aikaisemmin määritelty ja valitsee valikon *Equation* ja sieltä alivalikon *Solve*.... Alivalikon *Equation*(s) kohtaan kirjoittaa tulossolun tunnisteen tai antaa olla dollarimerkin, jota ohjelma ehdottaa, jos funktio on määritelty juuri ennen kuin lähdettiin ratkaisemaan yhtälöä valikkojen avulla. [1, s. 6] Komentosoluun oltaisiin myös voitu kirjoittaa solve([tulossolu/%],[muuttuja]);.

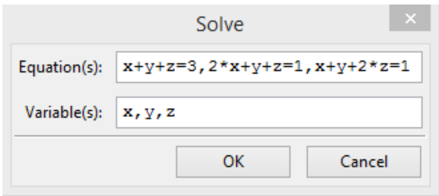
3.5 Yhtälöparin ja yhtälöryhmän ratkaiseminen

Yhtälöparin ja yhtälöryhmän ratkaiseminen onnistuu samalla tavalla kuin edellisessä luvussa ratkaistiin yhtälö. Jos yhtälöparit ratkaistaan valikkojen avulla, niin valitaan sama alivalikko, jota täytettiin kun yhtälöä ratkaistiin. Eli valitaan valikko *Equations* ja sieltä alivalikko *Solve*.... Laatikossa *Solve*... *Equation*(s) kohtaan kirjoitetaan kaikki yhtälöt. Yhtälöiden väliin kirjoitetaan aina pilkku. *Variable*(s) kohtaan merkitään kaikki muuttujat. [1, s. 7]

Esim 1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$$

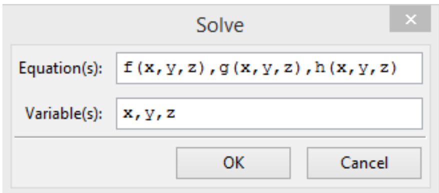
Valitaan valikko *Equations* ja sieltä alivalikko *Solve*.... Täytetään *Solve*... laatikko.[1, s. 7]



Saadaan alla oleva komentosolu ja tulossolu. Ratkaisu saadaan myös kirjoittamalla suoraan komentosoluun solve([funktio, funktio, ...], [muuttuja, muuttuja,...]);

```
(%i14) solve([x+y+z=3,2*x+y+z=1,x+y+2*z=1], [x,y,z]);
(%o14) [[x=-2,y=7,z=-2]]
```

Jos funktiot oli aikaisemmin määritelty, saadaan ratkaisu kirjoittamalla valikon *Equations* alivalikon *Solve...* *Equation(s)* kohtaan kaikkien yhtälöiden nimet.




```
(%i8) solve([f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)], [x,y,z]);
(%o8) [[x=-2,y=7,z=-2]]
```

3.6 Epäyhtälön ratkaiseminen

Epäyhtälön ratkaiseminen ei heti wxMaximalla onnistu vaan wxMaximaan pitää ladata lisäosapaketti. Se käy helposti kirjoittamalla komentosoluun load(solve_rat_ineq) ja painamalla shift + enter.[3] Sen jälkeen tässä tiedostossa voi ratkaista epäyhtälöitä. Mutta jos avaa uuden tiedoston, ja siinä haluaa ratkaista epäyhtälöitä, niin silloin pitää uudelleen ladata tämä lisäosa solve_rat_ineq.

```
(%i1) load(solve_rat_ineq);
(%o1)
C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.35.1/share/solve_rat_ineq/solve_rat_ineq.mac
```

Epäyhtälön ratkaiseminen käy helposti tämän jälkeen. Komentosoluun kirjoitetaan vain solve_rat_ineq(epäyhtälö).[3]

Esim 1. Ratkaise epäyhtälö $f(x) = x^2 + 3x - 4 > 0$.

```
(%i3) solve_rat_ineq(x^2+3*x-4>0);
(%o3) [[x<-4],[x>1]]
```

3.7 Sieventäminen

Sieventäminen käy helposti kirjoittamalla komentosoluun lausekkeen ja sen jälkeen painamalla enter + shift. Sitten valitaan valikko *Simplify* ja sieltä alivalikko *Simplify Expression*. Alivalikkoon ei nyt tarvitse kirjoittaa mitään. [1, s. 5]

Esim 1. Sievennä $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$

```
(%i1) (x-y)*(x+y);
(%o1) (x-y) (y+x)
```

```
(%i2) ratsimp(%);
(%o2) x^2-y^2
```

Muita tapoja sieventää lauseke on kirjoittaa suoraan komentosoluun ratsimp((x-y)(x+y)) eli ratsimp(lauseke); , ratsimp(%o1) eli ratsimp(tulossolun tunniste); tai ratsimp(%). Yksistään prosenttimerkki merkitsee sitä, ohjelma tekee ratsimp-komennon juuri edelliseen tulossolun vastaukseen.

Jos laukekkeessa on logaritmeja, eksponentteja jne silloin käytetään valikon *Simplify* alivalikkoa *Simplify Radicals*. Jos sievennetään trigonometrisiä funktiota, käytetään valikon *Simplify* alivalikkoa *Triconometric Simplification* ja sieltä tämän alavalikkoa *Simplify Trigonometric*.[7, s.10] (Valitettavasti trigonometriset kaavafunktiot, joita on taulukkokirjassa eivät sievene näillä komennoilla.)

3.8 Tekijöihin jakaminen ja alkulukuhajotelman tekeminen

Tekijöihin jakaminen tapahtuu helposti kun, kirjoittaa lausekkeen komentosoluun ja sen jälkeen painaa shift + enter. Sitten valitaan valikko *Simplify* ja sieltä alivalikon *Factor Expression*. [1, s. 5] Alivalikkoon ei nyt tarvitse mitään kirjoittaa.

Esim 1. Jaa tekijöihin $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 18x = x(x - 2)(x + 3)^2$

```
(%i1) x^4+4*x^3-3*x^2-18*x;
(%o1) x^4+4 x^3-3 x^2-18 x
(%i2) factor(%);
(%o2) (x-2) x (x+3)^2
```

Alkulukuhajotelma saadaan, kun kirjoitetaan komentoriville luku ja painetaan shift + enter. Sen jälkeen valitaan valikko *Simplify* ja sieltä alivalikon *Factor Expression*. [1, s. 5]

Esim 2. Jaa tekijöihin luku $237601900800 = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 43$

```
(%i1) 237601900800;
(%o1) 237601900800
(%i2) factor(%);
(%o2) 2^8 3^5 5^2 11 17 19 43
```

3.9 Trigonometria

Alla on lista trigonometrisistä funktiosta, miten ne kirjoitetaan wxMaximalla. [7, s. 8]

Trigonometriset funktiot wxMaximalla	
sin	sin()
cos	cos()
tan	tan()

Kuva 9:

Esim 1. Laske $\sin(\pi) - \cos(\pi) + \tan(\pi) = 1$

```
(%i1) sin(%pi) - cos(%pi) + tan(%pi);
(%o1) 1
```

Kuva 10:

3.10 Logaritmi

Luonnollinen logaritmi eli e-kantainen logaritmi lasketaan käskyllä $log()$.[5, s. 8] Jos vastaus halutaan desimaalilukuna laitetaan uusi käsky $float$(vastaussolun tunniste tai prosenttimerkki, joka viittaa edelliseen tulossolun tunnisteeseen). Tai heti suoraan desimaaliluvuksi $float(log())$;[1, s. 3],[5, s. 8],

Esim 1. Laske tarkka-arvo ja likiarvo laskulle
$\log(\mathrm{e}) + 2\log(\mathrm{e}) + \log(5) =$
Tarkka-arvo $3 + \log(5)$, likiarvo 4.609437912434101

```
(%i1) log(%e) + 2*log(%e) + log(5);
(%o1) log(5)+3

(%i2) float(%);
(%o2) 4.609437912434101
```

wxMaximalla ei ole omia käskyjä muun kantaisille logaritmeille, vaan esimerkiksi 10-kantainen logaritmi muodostetaan kaavalla[5, s. 8]

$$\log_{10}(x) = \frac{\log(x)}{\log(10)}$$

Esim 2. Ratkaise yhtälö $\log_2(x) = 1/3$. Vastaus: $x = 1.259921049894873$

```
(%i3) log(x)/(log(2))=1/3;
(%o3) log(x)/log(2) = 1/3

(%i4) solve([%], [x]);
(%o4) [x=%e^(log(2)/3)]

(%i5) float(%), numer;
(%o5) [x=1.259921049894873]
```

Esim 3. Ratkaise yhtälö $\lg(3x+1) = \lg(2x+3)$. Vastaus: $x = 2$

```
(%i1) to_poly_solve([log(3*x+1)/(log(10))=log(2*x+3)/(log(10))], [x]);
to_poly_solve: to_poly_solver.mac is obsolete; I'm loading to_poly_solve.mac instead.
(%o1) %union([x=2])
```

Logaritmilasku saatiin laskettua valitsemalla valikko *Equations* ja sieltä alivalikko *Solve(to_poly)...*. Laatikkon *Solve(to_poly)...* kirjoitettiin yhtälö. Yhtälön saa myös ratkaistua kirjoittamalla suoraan komentosoluun to_poly_solve([yhtälö],[muuttuja]);.

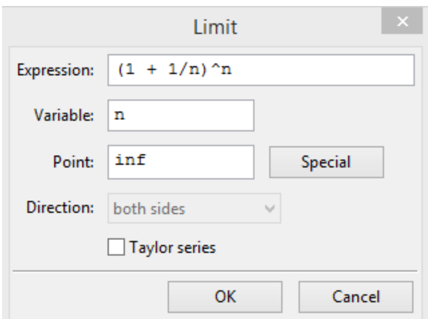
Logaritmilaskuissa täytyy aina vielä tarkistaa, kuuluuvatko saadut vastaukset määrittelyalueseen tai alueisiin.

3.11 Raja-arvo

Raja-arvo saadaan laskettua valitsemalla valikko *Calculus* ja sieltä alivalikko *Find Limits...*. *Expression* kohtaan kirjoitetaan funktio tai funktion nimi, jos funktio on jo aikaisemmin määritelty. *Variable* kohtaan kirjoitetaan muuttuja. *Point* kohtaan kirjoitetaan, missä kohtaan raja-arvo lasketaan. *Specialia* painamalla saa helposti valittua erikoismerkkejä ja *Direction* kohdasta voi valita, lasketaanko raja-arvo molemmista suunnista tai vain toispuoleisena. Alla olevassa listassa on *Special* ja *Direction* kohtien vaihtoehdot suomennettuina.

Special		**Direction**	
Pi	π	Both sides	Molemmin puolinen
E	e	Left	Vasemman puoleinen
Infinity	∞	Right	Oikean puoleinen
- Infinity	$-\infty$		

Esim 1. Laske $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$

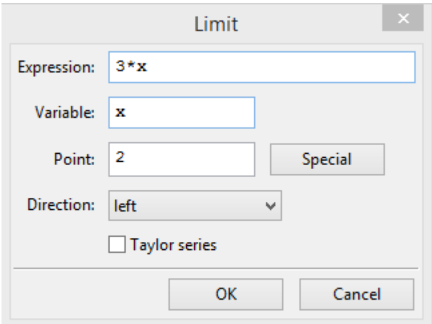


```
(%i1) limit((1+1/n)^n, n, inf);
(%o1) %e
```

Raja-arvo voidaan laskea suoraan kirjoittamalla komentosoluun limit(funktio, muuttuja, missä kohdin raja-arvo lasketaan);.

Esim 2. Laske funktion $f(x)$ toispuoleiset raja-arvot kohdassa $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{x} < 2 \\ 3^x + x^2 & \text{x} > 2 \end{cases}$$




```
(%i1) limit(3*x, x, 2, minus);
(%o1) 6
```

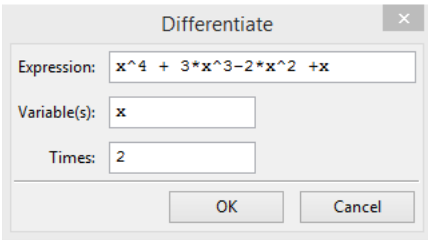
```
(%i2) limit(3^x +x^2, x, 2, plus);
(%o2) 13
```

Toispuoleinen raja-arvo voidaan laskea, kirjoittamalla komentosoluun suoraan käsky limit(funktio, muuttuja, missä kohdin raja-arvo, miltä puolelta raja-arvo(plus/minus));.

3.12 Derivaatta

Derivaatta voidaan laskea valitsemalla valikko *Calculus* ja sieltä alivalikko *Differentiate...*. *Expression* kohtaan kirjoitetaan yhtälö tai yhtälön nimi, jos yhtälö on jo aikaisemmin määritelty. *Variable(s)* kohtaan kirjoitetaan muuttuja tai muuttujat. *Times* kohtaan kirjoitetaan, kuinka mones derivaatta lasketaan. [1, s. 7]

Esim 1. Laske funktion $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x$ toinen derivaatta.



Saadaan alla oleva komentosolu ja tulossolu. Derivaatta voidaan ratkaista myös kirjoittamalla komentosoluun komento diff(funktio,muuttuja,kuinka mones derivaatta);

```
(%i1) diff(x^4 + 3*x^3 - 2*x^2 + x,x,2);
(%o1) 12 x^2+18 x-4
```

Kun funktio on jo aikaisemmin määritelty, voidaan kirjoittaa diff(funktion nimi,muuttuja,kuinka mones derivaatta);.

```
(%i2) diff(f(x),x,2);
(%o2) 12 x^2+18 x-4
```

3.13 Integraali

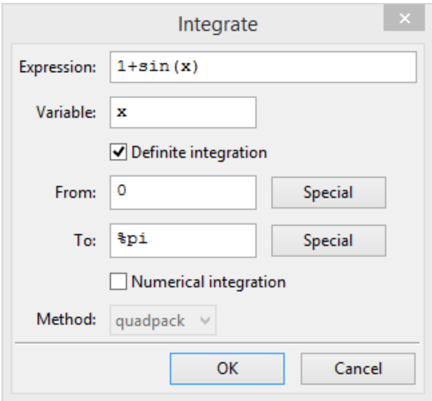
Integraali voidaan laskea valitsemalla valikko *Calculus* ja sieltä alivalikko *Integrate...*. *Expression* kohtaan kirjoitetaan yhtälö tai yhtälön nimi, jos yhtälö on jo aikaisemmin määritelty. *Variable* kohtaan kirjoitetaan muuttuja tai muuttujat. Jos lasketaan määrätty integraali, laitetaan rasti kohtaan kohtaan *Definite integration*. Silloin *From* kohtaan kirjoitetaan, mistä integraali alkaa ja *To* kohtaan, mihin integraali päättyy. *Special* kohtaa painamalla saa erikoismerkit π,e, $\infty ja - \infty.[1, s.7]$.

Special	
Pi	π
E	e
Infinity	∞
- Infinity	$-\infty$

Kuva 11: Special kohdan vaihtoehdot suomennettuina

Esim 1. Laske määrätty integraali (S08/3a)[4]

$$\int_0^{\pi} (1 + sinx)\mathrm{d}x$$



Saadaan seuraavanlainen komentosolu ja tulossolu. Ratkaisu saadaan myös kirjoittamalla suoraan komentosoluun integrate(funktio,muuttuja,mistä,mihin);

```
(%i9) integrate(1+sin(x), x, 0, %pi);
(%o9) π+2
```

3.14 Tilasto

wxMaximalla voidaan helposti laskea tilastotieteen tunnuslukuja. Aineistosta kannattaa ensin tehdä lista, josta lasketaan sitten erilaiset tunnusluvut.[6] Lista tehtään komennolla listannimi:[luvut pilkuilla erotettuina].

Esim 1. Tee lista luvuista 77,63,72,80,77,48,20,31,27,54,35

```
(%i1) lista:[77,63,72,80,77,48,20,31,27,54,35];
(%o1) [77,63,72,80,77,48,20,31,27,54,35]
```

Seuraavaksi on luettelo, miten eri tilastotieteen tunnusluvut lasketaan.[6] Jos vastaus on murtolukuna, saadaan murtoluku helposti desimaaliluvuksi käskyllä float(tulossolun tunnus).[1, s. 3]

Tunnusluvut	wxMaximalla
Keskiarvo	mean(lista) (murtolukuna)
Keskiarvo	mean(lista), numer (desimaalilukuna)
Vaihteluväli	range(lista)
Mediaani	median(lista)
Minimi	smin(lista)
Maximi	smax(lista)
Varianssi	var(lista) jakaja n
Varianssi	var1(lista) jakaja n-1
Keskipoikkeama	mean_deviation(lista)
Keskihajonta	std(lista) jakaja n
Keskihajonta	std1(lista) jakaja n-1

Esim 2. Laske aikaisemman listan keskiarvo.

```
(%i3) mean(lista),numer;
(%o3) 53.09090909090909
```

Esim 3. Laske aikaisemman listan vaihteluväli.

```
(%i4) range(lista);
(%o4) 60
```

Esim 4. Laske aikaisemman listan mediaani.

```
(%i5) median(lista);
(%o5) 54
```

Esim 5. Laske aikaisemman listan minimi ja maksimi.

```
(%i6) smin(lista); smax(lista);
(%o6) 20
(%o7) 80
```

Esim 6. Laske aikaisemman listan keskipoikkema, varianssi ja keskihajonta.

```
(%i16) mean_deviation(lista); var(lista); std(lista);
```

(%o16) $\frac{2298}{121}$

(%o17) $\frac{54350}{121}$

(%o18) $\frac{5\sqrt{2174}}{11}$

```
(%i19) float(%o16); float(%o17);float(%o18);
(%o19) 18.99173553719008
(%o20) 449.1735537190083
(%o21) 21.19371495795412
```

3.15 Todennäköisyyslaskenta

Todennäköisyydessä lasketaan kertomia, permutaatiota ja kombinaatioita.

Kertoma $n!$ lasketaan vain laittamalla ! luvun jälkeen. [1, s. 2]

Esim 1. Laske 9! kertoma.

```
(%i1) 9!;
(%o1) 362880
```

k-permutaation kaava muodostetetaan kertomia hyväksi käyttäen

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Esim 2. Kuinka monta erilaista neljän lapsen jonoa saadaan 20 lapsesta?

```
(%i1) 20!/((20-4)!);
(%o1) 116280
```

Kombinaatio kaava $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ saadaan kirjoittamalla binomial(n, k).[2]

Esim 3. Kuinka monella eri tavalla voidaan ottaa neljän lapsen ryhmä 20 lapsesta?

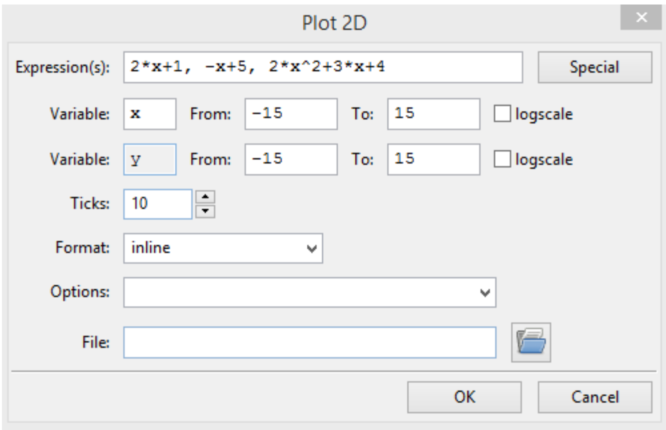
```
(%i1) binomial(20,4);
(%o1) 4845
```

4 wxMaximalla piirtäminen

4.1 Kaksiulotteinen piirtäminen

Kun halutaan piirtää kuvaajia xy-koordinaatistoon, valitaan valikko *Plot* ja sieltä alivalikko *Plot2d....* *Expression(s)* kohtaan kirjoitetaan funktio tai funktiot pilkulla erottaen. Jos aikaisemmin on määritetty funktiot, riittää tähän kohtaa kirjoitta vain funktioden nimet pilkulla erottaen. Muuttujiksi ehdotetaan muuttujat x ja y. Muuttujien alueet alkaa kohdasta *From* ja päättyy kohtaan *To*. *Format* kohdasta, jos valitaan *inline*, silloin kuvaaja muodostetaan tiedostoon. Jos valitaan *Format* kohdasta *default* muodostaa ohjelma kuvaajan uudelle pienelle välilehdelle. [1, s. 8]

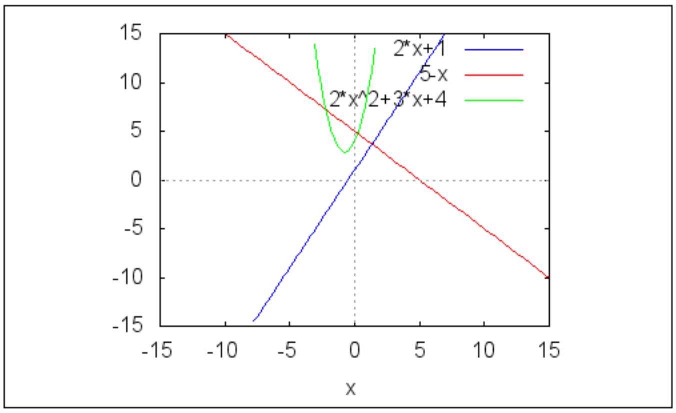
Esim 1. Piirrä funktioden $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -x + 5$ ja $h(x) = 2x^2 + 3x + 4$ kuvaajat $x \in [-\mathbf{15}, \mathbf{15}]$, $\quad y \in [-\mathbf{15}, \mathbf{15}]$.



Kuva 12:

```
(%i1) wxplot2d([2*x+1, -x+5, 2*x^2+3*x+4], [x,-15,15], [y,-15,15])$
plot2d: some values were clipped.
plot2d: some values were clipped.
plot2d: some values were clipped.
```

(%t1)



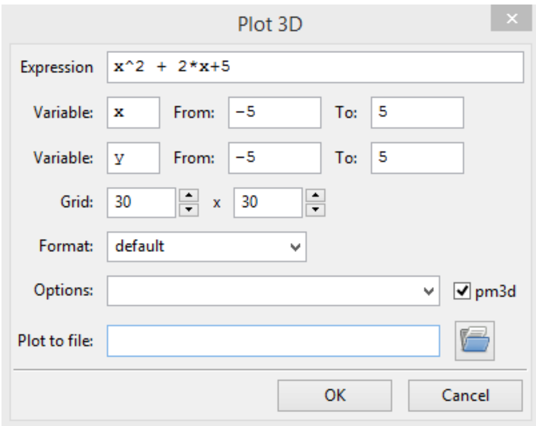
Kuva 13:

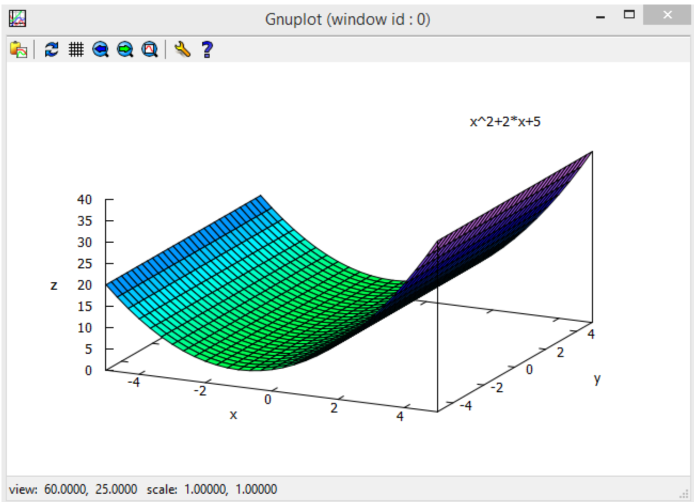
Ratkaisu saadaan myös kirjoittamalla suoraan komentoriville wxplot2d([funktio, funktio, funktio], [x,mistä,mihin], [y,mistä,mihin]);

4.2 Kolmiulotteinen piirtäminen

Kun halutaan piirtää kuvaaja xyz-koordinaatistoon, valitaan valikko *Plot* ja sieltä alivalikko *Plot3d...*. Kohtaan *Expressions* kirjoitetaan funktio. Muuttujiksi ehdotetaan muuttujat x ja y. Muuttujien alueet alkaa kohdasta *From* ja päättyy kohtaan *To*. *Format* kohdasta valitaan *inline*, silloin kuvaaja muodostetaan tiedostoon. Jos valitaan *Format* kohdasta $default$ muodostuu kuvaaja uudelle pienelle välilehdelle, jossa kuvaaja voidaan pyöritellä hiirellä. [1, s. 9]

Esim 1. Piirrä funktion $f(x) = x^2 + 2x + 5$ kuvaaja. $x \in [\mathbf{-15}, \mathbf{15}]$, y $\in [\mathbf{-15}, \mathbf{15}]$.

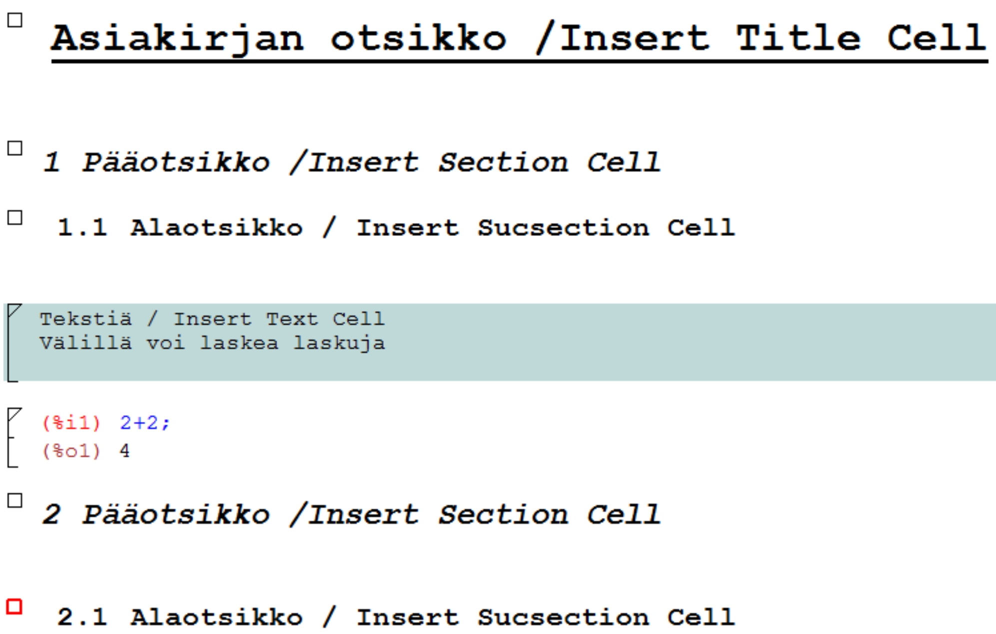




Funktion kuvaaja saadaan myös kirjoittamalla komentosoluun komento *plot3d*(funktio, [x,mistä,mihin], [y,mistä,mihin]) tällöin kuvaaja on omalla välilehdellä. Sen sijaan, jos kirjoitetaan komento *wxplot3d*(funktio, [x,mistä,mihin], [y,mistä,mihin]), niin kuvaajan saa samaan tiedostoon. Mutta kuvaajaa ei silloin voi pyöritellä hiirellä.

5 Asiakirjan tekeminen wxMaximalla

wxMaximalla voi tehdä helposti asiakirjan. Otsikko saadaan valikosta *Cell* ja sieltä alivalikosta *Insert Title Cell*. Päälukujen otsikot saadaan valikosta *Cell* ja sieltä alivalikosta *Insert Section Cell*. Alaotsikot saadaan valikosta *Cell* ja sieltä alivalikosta *Insert Subsection Cell*. Normaali teksti saadaan valikosta *Cell* ja sieltä alivalikosta *Insert Text Cell*.[1, s.9] Nämä *Text*, *Title*, *Secion* ja *subsection Cell* löytyvät myös asiakirjaa kirjoittaessa hiiren oikeaa korvaa painamalla. Mihinkään näistä mainituista *Cell* kohdista ei tule solutunnistetta. Välille voi tehdä laskuja. Laskujen komentosoluihin ja tulossoluihin tulee tunnisteet. Asiakirjaan voi tuoda kuvia, tekstejä muista tiedostoista valitsemalla *Cell* ja sieltä alivalikosta *InsertImage...*. Kuvien on hyvä olla png, jpg, bmp tai xpm muodossa.



Kuva 14:

Viitteet

[1] Sallasmaa, P (2014) wxMaxima Opas. http://docplayer.fi/726559-Wxmaxima-opas-1-mika-wxmaxima-on-2-wxmaximan-kaytto-petri-sallasmaa-13-toukokuuta-2014.html

[2] www.delorie.com/gnu/docs/maxima/maxima_95.html. Luettu 9.5.2016

[3] http://easyquestion.net/maxima/maxima does the test.html. Luettu 9.5.2016

[4] matematiikan ylioppilastehtävät. http://matta.hut.fi/matta/yoteht/s08p.pdf. Luettu 9.5.2016

[5] http://math.stanford.edu/∼paquin/MaximaBook.pdf. Luettu 9.5.2016

[6] http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima_47.html. Luettu 9.5.2016

[7] http://www.neng.usu.edu/cee/faculty/gurro/Software_Calculators/Maxima_Docs /MyMaximaBook/MaximaBookChapter1.pdf. Luettu 9.5.2016

99