

Kvanttikenttäteoria ja hiukkastuotto kaarevassa avaruudessa

Pro gradu
Turun yliopisto
Fysiikan ja tähtitieteen laitos
Teoreettinen fysiikka
Syyskuu 2016
Juho Lankinen
Tarkastajat:
dos. Iiro Vilja
dos. Juha-Pekka Pellonpää

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä.

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan ja tähtitieteen laitos

Lankinen, Juho: Kvanttikenttäteoria ja hiukkastuotto kaarevassa avaruudessa

Pro gradu, 81 s., 9 liites.
Teoreettinen fysiikka
Syyskuu 2016

Kvanttimekaniikka ja yleinen suhteellisuusteoria, kaksi modernin fysiikan kulmakiiveä, voidaan yhdistää yhdeksi teoriaksi mikäli itse metristä tensoria ei kvantisoida. Tämä teoria tunnetaan nimellä kvanttikenttäteoria kaarevassa avaruudessa.

Tässä tutkielmassa perehdytään kaarevan avaruuden kenttäteorian formalismiin, sekä siitä seuraaviin ilmiöihin. Näistä ilmiöistä suurimman painopisteen saa dynaamisessa avaruudessa syntyvät hiukkaset eli hiukkastuotto. Tätä ilmiötä on tarkasteltu kahden laajenevan universumin tapauksessa, sekä mustien aukkojen kohdalla.

Tutkimusosiossa tutkitaan mallia, joka kuvaa hiukkastuottoa jäykän materian dominoimassa universumissa. Tuloksena saadaan, että avaruuden laajenemisen seurauksena tämänlaisessa universumissa hiukkastuotto on voimakkainta erittäin raskailla ja pienen liikemäärän omaavilla kentillä.

Asiasanat: Kvanttikenttäteoria kaarevassa avaruudessa, hiukkastuotto, jäykän materian dominoima universumi

Sisältö

Yksiköt ja merkinnät	1
Johdanto	2
1 Kvanttikentät ja yleinen suhteellisuusteoria	4
1.1 Kvantisointi Minkowskin avaruudessa	4
1.1.1 Skalaarikenttä	4
1.1.2 Spinori- ja vektorikenttä	8
1.2 Kvantisointi kaarevassa avaruudessa	11
1.2.1 Avaruusan ajan kausaalinen rakenne	11
1.2.2 Skalaarikenttä	13
1.2.3 Bogoliubovin muunnokset	15
1.2.4 Spinori- ja vektorikenttä	16
1.3 Greenin funktiot ja propagaattorit	19
2 Hiukkasen ja vakuumin käsite	22
2.1 Unruh-in-DeWittin hiukkasdetektori	23
2.1.1 Inertiaalinen detektori	26
2.1.2 Tasaisesti kiihtyvä detektori	27
2.2 Fysikaalinen vakuumi	30
2.2.1 Adiabaattinen vakuumi	30
2.2.2 Bunchin-Daviesin vakuumi	33
3 Energiainpulssitensorin renormalisointi	36
3.1 Efektiivinen vaikutus kaarevassa avaruudessa	37
3.2 Regularisointi ja renormalisointi	39
3.2.1 Pisteensiirtoregularisointi	42
3.2.2 Adiabaattinen regularisointi	46
4 Hiukkastuotto laajenevassa universumissa	49
4.1 Asymptoottisesti Minkowskilainen malli	51
4.2 Asymptoottisesti säteilyn dominoima malli	53
5 Mustan aukon hiukkastuotto	56
5.1 Hawkingin säteily	57

6	Hiukkastuotto varhaisessa maailmankaikkeudessa	67
6.1	Hiukkastuotto jäykän materian dominoimassa universumissa	67
6.2	Energiatiheys ja lämpötila	71
7	Loppupäätelmät	76
	Viitteet	78
A	Tetradiformalismi	A-1
B	Schwingerin-DeWittin kehitelmä	B-1
C	Adiabaattisen regularisoinnin termejä	C-1

Yksiköt ja merkinnät

Tässä tutkielmassa käytetään luonnollisia yksiköitä $\hbar = c = G_N = 1$, ellei toisin mainita. Metrinen tensori määritellään positiivisella aikakomponentilla $(+, -, -, -)$ ja Einsteinin summaussääntö on voimassa. Kreikkalaiset indeksit vastaavat avaruusaajan koordinaatteja, ja latinalaiset indeksit puolestaan avaruudellisia koordinaatteja. Diracin matriiseille käytetään esitystä, jossa $\gamma^0 = \tau^3 \otimes I$, $\gamma^i = i\tau^2 \otimes \tau^i$, missä τ^i ovat Paulin matriisit. Tämän lisäksi käytössä ovat seuraavat merkinnät ja signatuurit:

Kompleksikonjugaatti	*
Hermiittinen konjugaatti	†
Osittaisderivaatta	$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ tai ∂_μ
Kovariantti derivaatta	∇_μ
Kommutaattori	$[A, B] = AB - BA$
Antikommutaattori	$\{A, B\} = AB + BA$
Reaaliosa	Re
Imaginaariosa	Im
Asymptoottisesti	\sim
Approksimatiivisesti	\approx
Christoffelin symboli	$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\sigma g_{\mu\nu})$
Riemannin tensori	$R^\lambda{}_{\tau\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\tau\mu}^\lambda - \partial_\mu \Gamma_{\tau\nu}^\lambda + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\tau\mu}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\tau\nu}^\sigma$
Riccin tensori	$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$
Riccin skalaari	$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$
Energiaimpulssitensori	$T_{\mu\nu}$
Eulerin vakio	γ_E

Johdanto

Kvanttikenttäteoria kaarevassa avaruudessa yhdistää kaksi modernin fysiikan kulmakiveä: kvanttimekaniikan ja yleisen suhteellisuusteorian. Se on teoria, jossa materiaa käsitellään kvanttikenttäteorian mukaan, mutta gravitaatiota klassisesti yleisen suhteellisuusteorian mukaan. Vaikka tämä teoria ei olekaan täydellinen kvanttigravitaatioteoria, sen uskotaan antavan hyvän approksimatiivisen kuvauksen tilanteista, jossa gravitaation kvantti-ilmiöt eivät ole dominoivassa asemassa.

Litteän avaruuden kvanttikenttäteoria nojaa vahvasti Poincarén symmetriaan ja Poincaré-invariantin vakuumitilan olemassaoloon. Siirryttäessä yleiseen kaarevaan avaruuteen nämä ominaisuudet menetetään eikä vakuumia voida enää yksikäsitteisesti määrittellä. Tämä johtaa kaarevan avaruuden kvanttikenttäteorian keskeiseen piirteeseen: dynaamisessa avaruudessa syntyviin hiukkasiin eli hiukkastuottoon. Hiukkastuotto löydettiin 1960-luvulla tutkittaessa kvanttikenttien etenemistä universumeissa, joissa metriikka muuttuu ajan myötä. Havaittiin, että kvanttikenttien positiiviset ja negatiiviset moodit sekoittuvat metriikan muuttuessa. Tämän seurauksena tilavektori, joka ei sisällä hiukkasia alkutilassa, sisältää hiukkasia lopputilassa implikoiden avaruuden laajenemisen seurauksena syntyneen hiukkasia. Seuraava suuri askel hiukkastuoton tutkimuksen kohdalla tuli kaarevan avaruuden kvanttikenttäteorian soveltamisesta mustiin aukkoihin. Tammikuussa 1974 S. Hawking julkaisi kuuluisan tuloksensa mustien aukkojen hiukkastuotosta. Mustat aukot eivät olleetkaan täysin mustia, vaan ne säteilivät kvantti-ilmiöiden seurauksena. Tätä ilmiötä kutsutaan sen löytäjän mukaan Hawkingin säteilyksi. Hieman myöhemmin W. Unruh, halutessaan ymmärtää paremmin Hawkingin tuloksia, päätyi tutkimaan hiukkasen käsitettä operationaalisesti. Hän päätyi tulokseen, että jopa Minkowskin avaruudessa tasaisessa kiihtyvässä liikkeessä oleva havaitsija havaitsee hiukkasia, siinä missä inertiaalinen havaitsija ei havaitse. Vaikka hiukkastuoton löytymisestä onkin kulunut jo 50 vuotta, on se edelleen aktiivisen tutkimuksen kohteena.

Tämän tutkielman tavoitteena on perehtyä kaarevan avaruuden kvanttikenttäteoriaan painottaen erityisesti hiukkastuoton ilmiötä. Tutkielma on jaettu kahteen osaan. Kolme ensimmäistä lukua keskittyvät kaarevan avaruuden kenttäteorian formalismiin. Ensimmäisessä luvussa kerrataan ensin lyhyesti Minkowskilaisen kenttäteorian perusteet, jonka jälkeen tulokset pyritään yleistämään kaarevaan avaruuteen. Erityisesti keskitytään vapaan skalaarikentän kvantisointiin, mutta myös spinori- ja vektorikenttiä käsitellään. Tässä luvussa esitellään keskeisessä asemassa olevat Bogoliubovin kertoimet. Toisessa luvussa käsitellään hiukkasen ja vakuumin määrittämistä kaarevassa avaruudessa. Hiukkasen käsitteen määrittelemiseksi esitellään hiukkas-

detektorimalli ja tarkastellaan havaitsijan mukana liikkuvaa detektoria tapauksissa, jossa havaitsija on inertiaalinen tai tasaisessa kiihtyvässä liikkeessä. Vakuumin valintaa puolestaan tarkastellaan kahdessa spesifoidussa avaruusajassa. Kolmas luku keskittyy energiaimpulssitensorin odotusarvossa esiintyvien äärettömyyksien poistamiseen eli renormalisointiin. Tällöin esitellään niin sanottu efektiivinen vaikutus ja sen yhteys energiaimpulssitensorin odotusarvoon. Lisäksi tarkastellaan kahta äärettömyyksiä kontrolloimiseen tarvittavaa menetelmää eli regularisointia.

Kaarevan avaruuden kvanttikenttäteorian ilmiötä tutkitaan kolmessa viimeisessä luvussa. Neljännessä luvussa perehdytään avaruuden laajenemisesta seuraavaan hiukkastuottoon. Tätä ilmiötä lähestytään kahden eri mallin avulla toisen ollessa asymptoottisesti Minkowskilainen ja toisen puolestaan asymptoottisesti säteilyn dominoima universumi. Luku viisi käsittelee mustien aukkojen hiukkastuottoa ja luvun päätavoitteena on Hawkingin säteilyn johtaminen. Kuudes luku sisältää omaa tutkimusta käsitellen hiukkastuottoa varhaisessa maailmankaikkeudessa. Tässä luvussa esitellään malli, jonka avulla voidaan tutkia hiukkastuottoa jäykän materian dominoimassa universumissa.

1 Kvanttikentät ja yleinen suhteellisuusteoria

Yleisen suhteellisuusteorian hyvin toteutuneet ennustukset ovat vakuuttavia todisteita siitä, että gravitaatioon liittyvät ilmiöt ymmärretään parhaiten avaruusaajan kaarevuutena. Yleisen suhteellisuusteorian mukaan materia kaareuttaa avaruusaikaa ilmaisten näin gravitaation vaikutuksen. Klassiset kentät etenevät tässä kaarevassa avaruudessa, joten on luonnollista tutkia myös kvantisoitujen kenttien etenemistä kaarevassa avaruudessa. Tällä tasolla gravitaatiokenttää ei kvantisoida ja Minkowskin avaruudesta tutut menetelmät pyritään siirtämään kaarevaan avaruuteen mahdollisuuksien mukaan.

Tässä luvussa esitellään kaarevan avaruuden kvanttikenttäteorian keskeiset ideat. Luku toimii pohjana myöhempää tarkastelua varten ja samalla kiinnitetään perusnotaatio, jota tullaan käyttämään läpi tämän tutkielman. Luku perustuu pitkälti peruslähteisiin [1] ja [2].

1.1 Kvantisointi Minkowskin avaruudessa

Minkowskin avaruus määritellään monistona $(M, \eta_{\mu\nu})$ varustettuna Minkowskilaisella metriikalla $\eta_{\mu\nu}$. Tämän alaluvun tarkoituksena on kerrata lyhyesti vapaiden skalaari-, spinori-, ja vektorikenttien kvantisointi Minkowskin avaruudessa kiinnittämällä erityisesti huomiota skalaarikenttään.

1.1.1 Skalaarikenttä

Tarkastellaan n -ulotteisessa Minkowskin avaruudessa olevaa reaalista skalaarikenttää $\phi(t, \mathbf{x})$, jolla on massa m ja sen Lagrangen tiheys on

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\partial_\mu\phi - m^2\phi^2). \quad (1.1)$$

Annetusta Lagrangen tiheydestä voidaan konstruoida vaikutusfunktio S , joka on vapaan skalaarikentän tapauksessa

$$S = \int d^n x \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^n x (\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\partial_\mu\phi - m^2\phi^2). \quad (1.2)$$

Pienimmän vaikutuksen periaatteen nojalla objektin liikeyhtälö saadaan, kun vaikutus on stationaarinen. Matemaattisesti tämä tarkoittaa, että variaatio $\delta S/\delta\phi$ häviää. Riittävä ja välttämätön ehto tälle on *Eulerin-Lagrangen yhtälö*

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0. \quad (1.3)$$

Skalaarikentän Lagrangen tiheyden (1.1) tapauksessa tämä johtaa niin sanottuun *Kleinin-Gordonin yhtälöön*

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (1.4)$$

missä on määritelty d'Alembertin operaattori $\square := \eta^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu$. Seuraavaksi pyritään löytämään ratkaisu Kleinin-Gordonin yhtälölle. Teknisten yksityiskohtien välttämiseksi rajoitetaan koko avaruuden sijaan rajoitettuun alueeseen, joka on $(n-1)$ -dimensioinen L -sivuinen torus. Valitaan siis jaksolliset reunaehdot. Kenttä $\phi(t, \mathbf{x})$ voidaan ilmaista Fourier'n muunnoksena muodossa

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{L^{n-1}}} \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (1.5)$$

missä vektori \mathbf{k} on muotoa

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(m_1, \dots, m_{n-1}), \quad m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

Jatkossa vahvennetut kirjaimet tulkitaan $n-1$ -dimensioisiksi paikkavektoreiksi. Fourier'n muunnoksen (1.5) kertoimet $\phi_{\mathbf{k}}(t)$ saadaan kaavasta

$$\phi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{L^{n-1}}} \int d^{n-1}x \phi(t, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (1.7)$$

Oletus kentän reaalisuudesta puolestaan implikoi välittömästi, että $\phi_{-\mathbf{k}}(t) = \phi_{\mathbf{k}}^*(t)$. Fourier-muunnettu Lagrangen tiheys (1.1) on tällöin

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} [|\dot{\phi}_{\mathbf{k}}|^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 |\phi_{\mathbf{k}}|^2], \quad (1.8)$$

missä $\omega_{\mathbf{k}}^2 := \mathbf{k}^2 + m^2$. Skalaarikentän Lagrangen funktio annettuna muodossa (1.8) voidaan tulkita äärettömän monen harmonisen oskillaattorin kokoelmana. Tällöin skalaarikentän kvanttikenttäteorian rakentamiseksi tulee harmonisen oskillaattorin kvantisointi yleistää numeroituvasti äärettömälle määrälle. Määritellään sisätulo, niin sanottu Kleinin-Gordonin sisätulo, kaavalla

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = -i \int_t d^{n-1}x \phi_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_2(x), \quad (1.9)$$

missä t on paikanluonteinen hyperpinta ja $\phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_2 := \phi_1 \partial_t \phi_2 - \partial_t \phi_1 \phi_2$. Kleinin-Gordonin sisätulon tärkeä ominaisuus on, että se ei riipu hyperpinnan valinnasta. Tämä osoitetaan seuraavassa kappaleessa yleisemmässä tapauksessa. Määritellään yhden hiukkasen Hilbertin avaruus \mathcal{H} Kleinin-Gordonin yhtälön positiivisten ratkaisuiden aliavaruutena, jossa määritelty Kleinin-Gordonin sisätulon normi on

äärellinen¹. Tällöin Hilbertin avaruuden \mathcal{H} ortonormaalikannaksi voidaan valita ta-soaalto-*ratkaisut*

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega(2\pi L)^{n-1}}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (1.10)$$

Yleisesti kahden systeemin yhdistetty tila-avaruus on niiden Hilbertin avaruuksien tensoritulo. Jos \mathcal{H}_1 on systeemin 1 Hilbertin avaruus, ja \mathcal{H}_2 systeemin 2 Hilbertin avaruus, on näiden yhdistetyn systeemin Hilbertin avaruus $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Systeemin hiukkasten ollessa samoja, voidaan molemmille valita Hilbertin avaruudeksi sama \mathcal{H} . Alkeishiukkaset ovat kuitenkin erottamattomia, joten alisysteemit ovat identtisiä. Tensoritulona rakennettu Hilbertin avaruus on tällöin liian suuri ja systeemin kuvaus on perustettava joko symmetriselle tai antisymmetriselle tensoritulolle. Skalaarikenttä kuvaa bosoneja, joten yhdistetyn systeemin kuvaamiseen käytetään symmetristä tensorituloa $\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}$. Tämä siis kuvaa kahden hiukkasen tila-avaruutta. Vastaavasti n -hiukkasen Hilbertin avaruus on symmetrinen tensorituloavaruus

$$\bigotimes_s^n \mathcal{H} = \mathcal{H} \otimes_s \cdots \otimes_s \mathcal{H}. \quad (1.11)$$

Avaruus, jossa ei ole yhtään hiukkasia ($n = 0$) on yksidimensioinen, joten sen voidaan valita olevan \mathbb{C} . Tällä avaruudella on yksi kantavektori, jota merkitään symbolilla $|0\rangle$ ja sitä kutsutaan *vakuumiksi*. Skalaarikentän kaikkien mahdollisten tilojen avaruudeksi otetaan siis *symmetrinen Fockin avaruus*

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\bigotimes_s^n \mathcal{H} \right). \quad (1.12)$$

Fockin avaruudelle voidaan rakentaa kantoja komponenttiavaruuksien kannoista. Eräs hyödyllinen kanta on niin sanottu *lukumääräkanta* tai *Fockin kanta*, joka koostuu komponenttiavaruuksien lukumääräkannoista. Merkitään tämänlaista vektoria

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \cdots. \quad (1.13)$$

Kantavektori (1.13) määrittää siis tilan, jossa on n_j hiukkasta tilassa e_j jokaisella indeksillä j kun $\{e_j\}$ on Hilbertin avaruuden \mathcal{H} ortonormaalikanta.

Seuraavaksi esitellään operaattorit, jotka nostavat tai laskevat tilan hiukkasmäärää. Tätä varten rajoitutaan äärellisen monen hiukkasen Fockin avaruuden tiheään aliavaruuteen \mathcal{F}_s^0 , jossa siis vektorissa $|n_1, n_2, \dots\rangle$, $n_j \neq 0$ vain äärellisen monella

¹Kleinin-Gordonin sisätulo ei yleisesti ole positiividefiniitti, jonka takia rajoitutaan positiivisten ratkaisuiden avaruuteen.

indeksin j arvolla. Määritellään operaattorit $a(\mathbf{k}) : \mathcal{F}_s^0 \rightarrow \mathcal{F}_s$ ja $a(\mathbf{k})^\dagger : \mathcal{F}_s^0 \rightarrow \mathcal{F}_s$ kaavoilla

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}_j) |n_1, \dots, n_j, \dots\rangle &= \sqrt{n_j} |n_1, \dots, n_j - 1, \dots\rangle \\ a(\mathbf{k}_j)^\dagger |n_1, \dots, n_j, \dots\rangle &= \sqrt{n_j + 1} |n_1, \dots, n_j + 1, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Näitä sanotaan vastaavasti *hävitys- ja luomisoperaattoreiksi*. Nämä ovat rajoittamattomia operaattoreita ja siksi määritelty vain tiheässä aliavaruudessa \mathcal{F}_s^0 . Nähdään myös, että hävitysoperaattori $a(\mathbf{k})$ annihiloi vakuumin, eli $a(\mathbf{k})|0\rangle = 0$. Erityisesti nämä operaattorit toteuttavat kanoniset kommutaatiorelaatiot

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')^\dagger] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a(\mathbf{k})^\dagger, a(\mathbf{k}')^\dagger] = 0. \quad (1.15)$$

Näiden operaattoreiden avulla voidaan $\phi_{\mathbf{k}}$ lausua Schrödingerin esityksessä muodossa

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a(\mathbf{k}) + a(-\mathbf{k})^\dagger). \quad (1.16)$$

Tämä, yhdessä yhtälön (1.5) kanssa, antaa nyt formaalin muodon Schrödingerin esityksen operaattorille $\phi(\mathbf{x})$ muodossa

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{L^{n-1}}} \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (1.17)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}L^{n-1}}} \sum_{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a(\mathbf{k})^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]. \quad (1.18)$$

Vastaava operaattori Heisenbergin esityksessä on silloin

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}L^{n-1}}} \sum_{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}}t} + a(\mathbf{k})^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega_{\mathbf{k}}t}]. \quad (1.19)$$

Viimeinen vaihe kvanttikentän konstruoinnissa on toruksen poistaminen. Yhtälö (1.19) tulkitaan siis \mathbf{k} -avaruuden integraalin Riemannin summaksi ja mennään rajalle $L \rightarrow \infty$. Tällöin kenttä on muotoa

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^{n-1}}} \int d^{n-1}k [a(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}}t} + a(\mathbf{k})^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega_{\mathbf{k}}t}] \\ &\equiv \int d\tilde{k} [a(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}} + a(\mathbf{k})^\dagger u_{\mathbf{k}}^*], \end{aligned} \quad (1.20)$$

missä

$$d\tilde{k} = d^{n-1}k, \quad u_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^{n-1}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}}t}.$$

Ratkaisuja $u_{\mathbf{k}}$ sanotaan positiiviratkaisuuksi tai positiivisiksi moodeiksi. Nimittäin jos ∂_t on ajanluonteinen Killing vektori, niin

$$\partial_t u_{\mathbf{k}} = -i\omega_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}, \quad \omega_{\mathbf{k}} > 0. \quad (1.21)$$

Tarkkaan ottaen summa (1.19) ei suppene, joten kenttä ϕ pitää itseasiassa tulkitella operaattoriarvoisena distribuutiona, eikä operaattoriarvoisena funktiona. Tähän asiaan ei kuitenkaan kiinnitetä sen tarkempaa huomiota.

Lopuksi määritellään vielä muutama hyödyllinen operaattori. Yhtälöistä (1.14) seuraa välittömästi, että

$$a(\mathbf{k}_j)^\dagger a(\mathbf{k}_j) |n_1, \dots, n_j, \dots\rangle = n_j |n_1, \dots, n_j, \dots\rangle, \quad (1.22)$$

joten määritellään *lukumääräoperaattori* kaavalla

$$N_j = \sum_j a(\mathbf{k}_j)^\dagger a(\mathbf{k}_j). \quad (1.23)$$

Lukumääräoperaattori kertoo kuinka monta hiukkasta annetussa tilassa on. Kaikkien hiukkasten lukumäärä saadaan puolestaan summaamalla jokaisen tilan lukumääräoperaattori

$$N = \sum_j N_j. \quad (1.24)$$

Koska luomisoperaattori $a(\mathbf{k})^\dagger$ nostaa jokaisen tilan hiukkaslukumäärää, operoimalla tällä vakuumiin useamman kerran, voidaan luoda useamman hiukkasen tiloja

$$|n_1, \dots, n_{m_i}\rangle = \prod_{j=1}^n \frac{[a(\mathbf{k}_j)^\dagger]^{m_j}}{\sqrt{m_j!}} |0\rangle. \quad (1.25)$$

1.1.2 Spinori- ja vektorikenttä

Seuraavassa rajoitutaan nelidimensioiseen Minkowskin avaruuteen. Spinorikentän konstruointi tapahtuu analogiseen tapaan kuin skalaarikentälle. Ajatellaan siis Diracin yhtälön ratkaisua klassisena kenttänä, kirjoitetaan se Fourier'n integraalina ja kvantisoidaan se vaihtamalla kertoimet luonti- ja hävitysoperaattoreiksi. Lagrangen tiheydestä

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} i[\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi \quad (1.26)$$

saadaan varioimalla *Diracin yhtälö*

$$i\cancel{\partial}\psi - m\psi = 0, \quad (1.27)$$

missä $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$, $\bar{\psi}$ on Diracin konjugaatti $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ ja Diracin matriisit γ^μ toteuttavat antikommutaatiorelaatiot

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (1.28)$$

Kentästä ψ voidaan ottaa Fourier'n muunnos, jolloin

$$\psi(x) = \int_{X_m^+ \cup X_m^-} \frac{\sqrt{m} d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik \cdot x} f(k) = \int_{X_m^+} \frac{\sqrt{m} d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} [e^{-ik \cdot x} f(k) + e^{ik \cdot x} f(-k)], \quad (1.29)$$

missä funktio f toteuttaa Fourier-muunnetun Diracin yhtälön $(k_\mu \gamma^\mu - m)f = 0$ ja integroidaan yli massakuoren,

$$X_m^+ \cup X_m^- = \{k : k^2 - m^2 = 0, k_0 > 0\} \cup \{k : k^2 - m^2 = 0, k_0 < 0\}, \quad (1.30)$$

missä $m > 0$. Seuraavaksi kirjoitetaan yhtälö (1.29) muodossa, joka näyttää eksplisiittisesti spin-tilat toteuttaen yhtälön $(k_\mu \gamma^\mu - m)f = 0$. Oletetaan hiukkasen olevan massiivinen ($m \neq 0$) ja työskennellään lepokoordinaatistossa. Olkoon

$$u(\mathbf{0}, +) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{0}, -) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{0}, +) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{0}, -) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

kannat avaruuden \mathbb{C}^4 aliavaruuksille jotka määritellään yhtälöillä $(k_m^+) u = mu$ ja $(k_m^-) v = mv$, missä $k_m^\pm = (\pm m, 0, 0, 0)$ ja matriisit γ^μ ovat Diracin esityksessä. Yhtälössä (1.31) on käytetty merkintöjä, jossa $\mathbf{0}$ on vektorin k_m^\pm avaruudellinen komponentti ja spin-tiloja merkitään symboleilla \pm . Tekemällä Lorentzin nopeussysteemi päästään vakionopeudella liikkuvan hiukkasen koordinaatistoon. Tällöin liikkuvalla hiukkasella $u(\mathbf{k}, \pm)$ ja $v(\mathbf{k}, \pm)$ muodostavat myös avaruuden \mathbb{C}^4 aliavaruuksien kannat määriteltynä yhtälöllä $k_\mu \gamma^\mu v = mv$, $k \in X_m^+$, $k \in X_m^-$. Jokainen funktio $f(k)$, joka toteuttaa yhtälön $k_\mu \gamma^\mu v = mv$ voidaan kirjoittaa kantojen $u(\mathbf{k}, \pm)$ ja $v(\mathbf{k}, \pm)$ lineaarikombinaationa kertoimien riippuessa vektorista \mathbf{k} . Yhtälö (1.29) voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{s=\pm} \sqrt{\frac{m}{2\omega_{\mathbf{k}}}} [f(\mathbf{k}, s) u(\mathbf{k}, s) e^{-ik_\mu x^\mu} + g(\mathbf{k}, s) v(\mathbf{k}, s) e^{ik_\mu x^\mu}]. \quad (1.32)$$

Kuten skalaarikentän tapauksessa, myös spinorikentälle voidaan konstruoida Fockin avaruus. Johtuen kuitenkin spinorien fermioniluonteesta, on Hilbertin avaruudeksi valittava *antisymmetrinen Fockin avaruus*

$$\mathcal{F}_a(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\bigotimes_a^n \mathcal{H} \right). \quad (1.33)$$

Tällöin luonti- ja hävitysoperaattorit toteuttavat kommutaatiorelaatioiden sijaan antikommutaatiorelaatiot

$$\{a(\mathbf{k}, s), a^\dagger(\mathbf{k}', s')\} = \{b(\mathbf{k}, s), b^\dagger(\mathbf{k}', s')\} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{ss'}$$

muiden antikommutaattorien hävitessä. Kvantisoitu spinorikenttä saadaan kuten skalaarikentän tapauksessa korvaamalla kertoimet $f(\mathbf{k}, s)$ ja $g(\mathbf{k}, s)$ hävitys- ja luomisoperaattoreilla. Kvantisoitu spinorikenttä on siis

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{s=\pm} \sqrt{\frac{m}{2\omega_k}} [a(\mathbf{k}, s)u(\mathbf{k}, s)e^{-ik_\mu x^\mu} + b^\dagger(\mathbf{k}, s)v(\mathbf{k}, s)e^{ik_\mu x^\mu}]. \quad (1.34)$$

Vektorikenttää kvantisoidessa ei itseasiassa kvantisoida sähkömagneettista kenttätensoria $F_{\mu\nu}$, vaan vektoripotentialiaali A_μ . Vektorikenttä vaatii erityistä huomiota, sillä vektoripotentialiaali A_μ on määritelty mittamuunnosta vaille ja fotonit, jota kuvaa vektorikenttä, on massaton. Pitämällä asiat yksinkertaisena kvantisoidaan vain massiivinen vektorikenttä. Tämänlainen kenttä kuvaa esimerkiksi heikon vuorovaikutuksen välittäviä mittabosoneja. Massiivisen vektorikentän Lagrangen tiheys on

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu, \quad (1.35)$$

missä on määritelty kenttätensori $F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Varioimalla tämän vaikutusta S saadaan massiivinen versio Maxwellin yhtälöistä:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (1.36)$$

Nämä tunnetaan myös *Procan yhtälöinä*. Laskemalla kenttätensarin toinen derivaatta saadaan

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square \partial_\nu A^\nu - \square \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (1.37)$$

Yhtälö (1.37) yhdessä yhtälön (1.36) kanssa implikoi, että $\partial_\nu A^\nu = 0$. Tämä ehto tunnetaan *Lorenzin mittaehtona*. Kenttätensarin $F^{\mu\nu}$ derivaatta voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu). \quad (1.38)$$

Tällöin yhtälö (1.36) on ekvivalentti Kleinin-Gordonin yhtälön kanssa Lorenzin mittaehdolla:

$$\square A^\nu + m^2 A^\nu = 0, \quad \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (1.39)$$

Rajalla $m \rightarrow 0$ tästä saadaan Maxwellin yhtälöt Lorenzin mittaehdolla. Vektorilla A^ν on neljä komponenttia ja Lorenzin mittaehdon $\partial_\nu A^\nu = 0$ mukaan näistä vain kolme on riippumatonta. Kvantisointi tapahtuu pitkälle samaan tapaan kuin spinorikentän tapauksessa jolloin kvantisoitu kenttä on

$$A^\nu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} [e^{-ik_\mu x^\mu} \varepsilon^\nu(\mathbf{k}, j) a(\mathbf{k}, j) + e^{ik_\mu x^\mu} \varepsilon^\nu(\mathbf{k}, j)^* b^\dagger(\mathbf{k}, j)]. \quad (1.40)$$

Jälleen kertoimet $a(\mathbf{k}, j)$ ja $b^\dagger(\mathbf{k}, j)$ esittävät hävitys- ja luomisoperaattoreita ja $\varepsilon(\mathbf{k}, j)$ ovat *polarisaatiovektorit*. Vektorikentän kuvatussa bosoneja, on sen Fockin avaruus myöskin symmetrinen Fockin avaruus $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$. Tällöin voimassa ovat myös kommutaatiorelaatiot

$$[a(\mathbf{k}, j), a^\dagger(\mathbf{k}', j')] = [b(\mathbf{k}, j), b^\dagger(\mathbf{k}', j')] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{jj'}. \quad (1.41)$$

Polarisaatiovektorit $\varepsilon^\nu(\mathbf{k}, j)$ määritellään seuraavalla tavalla. Kun $\mathbf{k} = 0$, niin joukko $\{\varepsilon^\nu(\mathbf{0}, j) : j = 1, 2, 3\}$ muodostaa ortonormaalin kannan. Lisäksi Lorenzin mittaehdon mukaan niiden tulee toteuttaa relaatio $k_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{k}, j) = 0$.

1.2 Kvantisointi kaarevassa avaruudessa

Seuraavaksi siirrytään kenttien kvantisointiin kaarevassa avaruudessa. Tällöin litteässä avaruudessa kvantisoinnin pohjalla ollut erikoinen suhteellisuusteoria korvataan yleisellä suhteellisuusteoriolla. Mukaan otetaan siis gravitaatio. Yleisessä suhteellisuusteoriassa avaruusaikaa kuvataan semi-Riemannin monistolla $(M, g_{\mu\nu})$ metriikan ollessa $g_{\mu\nu}$. Edellisen kappaleen tulokset pyritään yleistämään mahdollisimman hyvin tähän uuteen viitekehykseen.

1.2.1 Avaruusajan kausaalinen rakenne

Fysiikan ilmiöt voidaan hyvin usein ilmaista alkuarvo-ongelmana: jos on annettu systeemin tila tiettyinä ajanhetkenä, mikä on sen tila jonain myöhempänä ajanhetkenä? Tähän kysymykseen saadaan vastaus kausaliteetin ansiosta, jonka mukaan tulevaisuuden tapahtumat ovat seurausta alkuarvoista ja fysiikan laeista. Yleisessä suhteellisuusteoriassa kuitenkin avaruusajan dynaamisen luonteen takia alkuarvo-tehtävä ei ole niin yksinkertainen. Mielivaltaisessa kaarevassa avaruudessa nimittäin kentän liikeyhtälön klassiset olemassaolo- ja yksikäsitteisyysominaisuudet voivat olla hyvin erilaisia verrattuna Minkowskin avaruuteen. Haluamme siis rajoittaa avaruuksiin, joissa Kleinin-Gordonin tyyppisen liikeyhtälön määräämällä dynamiikalla

on hyvin määritelty alkuarvo-ongelma. Tämän vuoksi pitää ensin tutkia avaruusajan rakennetta.

Yleisessä suhteellisuusteoriassa puhutaan usein ajan-, valon- ja paikanluonteisista käyristä. Joskus on kuitenkin hyödyllistä yhdistää näistä kaksi ensimmäistä, joten määritellään *kausaalinen käyrä* käyränä, joka on joko ajan- tai valonluonteinen jokaisessa käyrän pisteessä. Tarkastellaan moniston M rakennetta hieman tarkemmin. Olkoon $S \subset M$. Sanotaan, että joukko S on *akronaalinen* mikäli mitään kahta pistettä $p, q \in S$ ei yhdistä ajanluonteinen käyrä. Tällöin mitkään kaksi joukon S pistettä eivät ole kausaalisesti yhdistettyjä, kun oletetaan valonnopeuden olevan suurin sallittu signaalinopeus. Jos akronaalinen joukko S on suljettu, niin määritellään joukon S *tulevaisuuden riippuvuusalue* joukkona

$$D^+(S) = \{p \in M : \text{jokainen menneisyyteen ulottuva kausaalinen käyrä} \quad (1.42)$$

pisteen p läpi leikkaa joukon $S\}$.

Tällöin informaation tunteminen suljetussa joukossa S määrittää tapahtumat alueessa $D^+(S)$ joukon S tulevaisuudessa. Täysin analogisesti määritellään menneisyyden riippuvuusalue $D^-(S)$. Näiden kahden joukon unionina saadaan *riippuvuusalue*

$$D(S) = D^+(S) \cup D^-(S). \quad (1.43)$$

Joukko $D(S)$ sisältää vain ne pisteet, jotka riippuvat siitä mitä tapahtui joukossa S . Menneisyyden riippuvuusalueen avulla voidaan myös määrittää menneisyyden Cauchyn horisontti H^- alueen $D^-(S)$ reunana. Vastaavasti määritellään myös tulevaisuuden Cauchyn horisontti H^+ .

Määritelmä 1.1. Moniston M suljettua $n - 1$ -ulotteista akronaalista pintaa Σ sanotaan *Cauchyn pinnaksi*, mikäli sen riippuvuusalue on koko monisto $D(\Sigma) = M$.

Cauchyn pinta on siis paikanluonteinen hyperpinta, jonka jokainen kausaalinen käyrä leikkaa vain kerran. Nyt voidaan antaa oleellinen määritelmä, jonka avulla voidaan karakterisoida 'hyvin käyttäytyvät' avaruudet.

Määritelmä 1.2. Monisto M on *globaalisti hyperbolinen*, jos sillä on olemassa Cauchyn pinta Σ .

Syy globaalin hyperbolisuuden taustalla on se, että tällöin moniston pisteessä $p \in M$ määritellyn aaltoyhtälön fundamentaaliratkaisu on yksikäsitteinen [3]. Erityisesti tällöin propagaattorit ovat hyvin määritellyjä. Lisäksi vaatimalla moniston olevan sileä (eli C^∞), taataan differentiaaliyhtälöiden olemassaolo. Jatkossa avaruusajan oletetaan olevan sileä n -ulotteinen, globaalisti hyperbolinen, semi-Riemannin monisto.

1.2.2 Skalaarikenttä

Siirryttäessä kaarevaan avaruuteen pitää vaikutusintegraaliin (1.2) tehdä muutoksia. Vaikkakin yhtälö (1.2) on Poincaré-kovariantti, yleinen suhteellisuusteoria vaatii yleisen kovarianssin. Tämä on seurausta yleisen suhteellisuusteorian vapaudesta valita koordinaatisto. Poincaré-invariantti teoria ja litteän avaruuden vaikutus saadaan yleisesti kovariantiksi tekemällä seuraavat muutokset: korvataan Minkowskin metriikka $\eta_{\mu\nu}$ yleisellä metriikalla $g_{\mu\nu}$, osittaisderivaatat ∂_μ kovarianteilla derivaatoilla ∇_μ , sekä Minkowskilainen tilavuuselementti $d^n x$ kovariantilla tilavuuselementillä $\sqrt{-g} d^n x$, jossa metrisen tensorin determinanttia on merkitty $g \equiv \det g_{\mu\nu}$. Geometrisesti kovariantti yleistys n -ulotteisesta Lagrangen tiheydestä kaarevaan avaruuteen on tällöin

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi - m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2), \quad (1.44)$$

missä, ξ on dimensioton vakio ja R Riccin skalaari. Varioimalla taas vaikutusta, saadaan skalaarikentälle likeyhtälö

$$(\square + m^2 + \xi R)\phi = 0, \quad (1.45)$$

missä on nyt määritelty kovariantti d'Alembertin operaattori $\square := g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\mu$.

Skalaarikentän ja gravitaatiokentän välistä kytkentää edustaa yhtälössä (1.44) termi $\xi R \phi^2$, joka on mukana sillä se on ainoa lokaali skalaarikytkentä, jolla on oikea dimensio [2]. Lisäksi voidaan osoittaa [4], että vuorovaikutustermin $\lambda \phi^4$ ollessa läsnä pitää teorian renormalisoituvuuden takia Lagrangen tiheyteen lisätä vastatermi joka on muotoa $R \phi^2$. Teorian kannalta kytkentävakiolla ξ on kaksi mielenkiintoista arvoa. Ensimmäinen on niin sanottu *minimaalikytkentä*, jolloin $\xi = 0$. Toinen on puolestaan niin sanottu *konformaalinen kytkentä*

$$\xi = \frac{n-2}{4(n-1)}, \quad (1.46)$$

sillä sen arvolla Lagrangen tiheys on invariantti konformaalisessa muunnoksessa. Konformaalinen muunnos on lokaali geometrian muutos, jossa muunnokset kutistavat tai venyttävät monistoa. Koska etäisyyksiä kuvataan metriikalla, määritellään konformaalinen muunnos kertomalla metriikkaa paikasta riippuvalla funktiolla

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}, \quad (1.47)$$

missä $\Omega(x)$ on jatkuva, ei-singulaarinen reaalfunktio.

Tarkastellaan sitten liikeyhtälön (1.45) ratkaisuja. Olkoon Σ Cauchyn pinta, n^μ sen yksikkönormaali ja $\gamma_{\mu\nu}$ pinnan Σ indusoitu metriikka, joka saadaan 'vetämällä' avaruuden metriikka $g_{\mu\nu}$ pinnalle Σ :

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}, \quad (1.48)$$

missä x^ρ ovat koordinaatit Cauchyn pinnalla Σ . Tällöin voidaan määritellä sisätulo

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = -i \int_{\Sigma} \phi_1(x) \overleftrightarrow{\nabla}_\mu \phi_2^*(x) \sqrt{-\gamma} n^\mu d^{n-1}x. \quad (1.49)$$

Tämän sisätulon tärkeä ominaisuus on, että se ei riipu hyperpinnan valinnasta. Tämän osoittamiseksi oletetaan, että kentät ϕ_1 ja ϕ_2 toteuttavat liikeyhtälön (1.45). Olkoon Σ_1 ja Σ_2 kaksi eri Cauchyn pintaa ja V niiden rajaama tilavuus. Tällöin käyttämällä hyväksi liikeyhtälöitä ja Stokesin teoremaa saadaan

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle_{\Sigma_1} - \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle_{\Sigma_2} &= -i \int_{\Sigma_1} \phi_1 \overleftrightarrow{\nabla}_\mu \phi_2^* \sqrt{-\gamma} n^\mu d^{n-1}x + i \int_{\Sigma_2} \phi_1 \overleftrightarrow{\nabla}_\mu \phi_2^* \sqrt{-\gamma} n^\mu d^{n-1}x \\ &= -i \int_{\Sigma_1 - \Sigma_2} \phi_1 \overleftrightarrow{\nabla}_\mu \phi_2^* \sqrt{-\gamma} n^\mu d^{n-1}x \\ &= -i \int_V \nabla^\mu (\phi_1 \overleftrightarrow{\nabla}_\mu \phi_2^*) \sqrt{-g} dV \\ &= -i \int_V [\nabla^\mu \phi_1 \nabla_\mu \phi_2^* + \phi_1 \square \phi_2^* - \square \phi_1 \phi_2^* - \nabla_\mu \phi_1 \nabla^\mu \phi_2^*] \sqrt{-g} dV \\ &= -i \int_V [-\phi_1 (m^2 + \xi R) \phi_2^* + (m^2 + \xi R) \phi_1 \phi_2^*] \sqrt{-g} dV \\ &= 0 \\ \therefore \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle_{\Sigma_1} &= \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle_{\Sigma_2}. \end{aligned}$$

Liikeyhtälölle (1.45) löydetään ratkaisut $u_i(x)$, jotka ovat ortonormaaleja sisätulon (1.49) suhteen toteuttaen yhtälöt

$$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle u_i^* | u_j^* \rangle = -\delta_{ij}, \quad \langle u_i | u_j^* \rangle = 0, \quad (1.50)$$

missä indeksi i voi olla jatkuva tai diskreetti. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan sen olevan diskreetti. Kenttä ϕ voidaan siis esittää näiden avulla kuten aikaisemminkin, jolloin

$$\phi(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)]. \quad (1.51)$$

Formalismissa on kuitenkin perustavanlaatuinen ero, kun metriikka ei ole eksplisiitaisesti Minkowskilainen [5]. Kvantisointi ja Hilbertin avaruuden konstruointi Minkowskin avaruudessa perustui nimenomaan positiivisten ratkaisuiden olemassaoloon,

jotka määriteltiin yhtälöllä (1.21). Erityisesti vektori ∂_t on Minkowskin avaruuden globaali Killingin vektori ja vakuumi Poincaré-invariantti. Yleisessä kaarevassa avaruudessa ei välttämättä ole kuitenkaan ollenkaan Killingin vektoreita tai jos on, niin ne eivät välttämättä ole globaaleja. Poincarén ryhmä ei ole tällöin enää avaruuden symmetriaryhmä, eikä positiivisia ratkaisuja voida määrittää [6]. Aaltoyhtälölle voidaan kyllä löytää ratkaisu ortonormaalien kantojen avulla, mutta ongelmaksi muodostuu, että nämä eivät ole yksikäsitteisiä. On siis olemassa useita eri kantoja. Uusien ja vanhojen kantojen välille voidaan kuitenkin löytää relaatioita ja tämä johtaa niin kutsuttuun Bogoliubovin muunnokseen.

1.2.3 Bogoliubovin muunnokset

Olkoon $\{\bar{u}_j\}$ toinen ortonormaalikanta, joka toteuttaa liikeyhtälön (1.45). Kenttä ϕ voidaan esittää myös tämän ortonormaalin kannan suhteen

$$\phi = \sum_j [\bar{a}_j \bar{u}_j + \bar{a}_j^\dagger \bar{u}_j^*], \quad (1.52)$$

missä selvyuden vuoksi argumentit on jätetty kirjoittamatta. Koska ortonormaalikanta $\{\bar{u}_j\}$ määrittää uuden Fockin avaruuden, tulee myös määritellyksi uusi vakuumi $|\bar{0}\rangle$, jonka ei tarvitse olla sama kuin vakuumi $|0\rangle$. Molempien kantojen ollessa ortonormaaleja, voidaan uusi kanta lausua myös vanhan kannan avulla muodossa

$$\bar{u}_j = \sum_i [\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*]. \quad (1.53)$$

Nämä muunnokset tunnetaan *Bogoliubovin muunnoksina* ja yhtälössä esiintyviä, mahdollisesti kompleksisia, kertoimia sanotaan *Bogoliubovin kertoimiksi*. Ne voidaan laskea käyttämällä kannan $\{u_j\}$ relaatioita (1.50), jolloin

$$\langle \bar{u}_i | u_j \rangle = \langle \alpha_{ij} u_j + \beta_{ij} u_j^* | u_j \rangle = \alpha_{ij} \langle u_j | u_j \rangle + \beta_{ij} \langle u_j | u_j^* \rangle = \alpha_{ij} \quad (1.54)$$

ja

$$\langle \bar{u}_i | u_j^* \rangle = \langle \alpha_{ij} u_j + \beta_{ij} u_j^* | u_j^* \rangle = \alpha_{ij} \langle u_j | u_j^* \rangle + \beta_{ij} \langle u_j^* | u_j^* \rangle = -\beta_{ij}. \quad (1.55)$$

Lisäksi Bogoliubovin kertoimet toteuttavat seuraavat relaatiot

$$\sum_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) = \delta_{ij} \quad (1.56)$$

$$\sum_k (\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk}) = 0. \quad (1.57)$$

Koska kenttä ϕ voidaan esittää ekvivalentisti useissa eri kannoissa, etsitään relaatiot hävitysoperaattoreille asettamalla yhtälöt (1.51) ja (1.52) yhtäsuuriksi. Tällöin

$$\begin{aligned}
\sum_i [a_i u_i + a_i^\dagger u_i^*] &= \sum_j [\bar{a}_j \bar{u}_j + \bar{a}_j^\dagger \bar{u}_j^*] \\
\sum_i a_i u_i &= \sum_j [\bar{a}_j \bar{u}_j + \bar{a}_j^\dagger \bar{u}_j^*] - \sum_i a_i^\dagger u_i^* \\
\sum_i a_i \langle u_i | u_i \rangle &= \sum_j [\bar{a}_j \langle \bar{u}_j | u_i \rangle + \bar{a}_j^\dagger \langle \bar{u}_j^* | u_i \rangle] - \sum_i a_i^\dagger \langle u_i^* | u_i \rangle \\
a_i &= \sum_j [\alpha_{ji} \bar{a}_j + \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger]. \tag{1.58}
\end{aligned}$$

Vastaavasti hävitysoperaattori kannan $\{\bar{u}_j\}$ suhteen on

$$\bar{a}_j = \sum_i [\alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji}^* a_i^\dagger]. \tag{1.59}$$

Välittömästi huomataan, että vakuunit ja siten Fockin avaruudet eivät ole samoja, jos kerroin β_{ji} poikkeaa nolasta. Esimerkiksi operaattori a_i ei annihiloivakuumia $|\bar{0}\rangle$, sillä

$$\begin{aligned}
a_i |\bar{0}\rangle &= \sum_j [\alpha_{ji} \bar{a}_j + \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger] |\bar{0}\rangle = \sum_j \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger |\bar{0}\rangle \\
&= \sum_j \beta_{ji}^* |\bar{1}_j\rangle \neq 0. \tag{1.60}
\end{aligned}$$

Laskettaessa nyt lukumääräoperaattorin odotusarvo moodien u_i hiukkasille vakuu-
missa $|\bar{0}\rangle$, saadaan

$$\begin{aligned}
\langle \bar{0} | N_i | \bar{0} \rangle &= \langle \bar{0} | a_i^\dagger a_i | \bar{0} \rangle = \langle a_i \bar{0} | a_i \bar{0} \rangle \\
&= \langle \sum_j \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger \bar{0} | \sum_j \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger \bar{0} \rangle \\
&= \sum_j |\beta_{ji}|^2 \langle \bar{1}_j | \bar{1}_j \rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2. \tag{1.61}
\end{aligned}$$

Bogoliubovin kertoimen β_{ji} poiketessa nolasta voidaan tällöin tulkita moodien \bar{u}_j määräämän vakuumin sisältävän moodissa u_i olevia hiukkasia.

1.2.4 Spinori- ja vektorikenttä

Skalaarikentän kohdalla vaikutuksen muutos kaarevaan avaruuteen oli suhteellisen yksinkertaista. Osittaisderivaatta korvattiin kovariantilla derivaatalla ja Minkowskin metriikka yleisellä metriikalla $g_{\mu\nu}$. Menetelmä pätee kuitenkin vain objekteille,

jotka muuntuvat kuten tensorit Lorentzin muunnoksissa. Spinorikenttien tapauksessa pitää siis etsiä menetelmä, jonka avulla spinorit voidaan sisällyttää yleiseen suhteellisuusteoriaan. Osoittautuu, että käyttämällä niin sanottua *vierbein-* tai *tetradiformalismia* tämä voidaan tehdä. Tetradiformalismia on käsitelty liitteessä A.

Minkowskin avaruudessa kenttien spin voidaan luokitella tavalla, jolla kentät muuntuvat infinitesimaalisissa Lorentzin muunnoksissa. Infinitesimaalinen Lorentzin ryhmä koostuu Lorentzin muunnoksista, jotka ovat infinitesimaalisen lähellä identiteettiä

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} + \omega_{\beta}^{\alpha}, \quad |\omega_{\beta}^{\alpha}| \ll 1, \quad \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}. \quad (1.62)$$

Tällöin Lorentzin muunnoksessa tensorikenttä $T^{\gamma\delta\cdots\lambda}(x)$ muuntuu kuten

$$T^{\gamma'\delta'\cdots\lambda'} = [D(\Lambda)]^{\gamma'\delta'\cdots\lambda'}_{\gamma\delta\cdots\lambda} T^{\gamma\delta\cdots\lambda}, \quad (1.63)$$

missä

$$D(\Lambda) = 1 + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} \quad (1.64)$$

on Lorentzin ryhmän esityksen matriisi. Operaattoreita $\sigma_{\alpha\beta}$ kutsutaan Lorentzin ryhmän generaattoreiksi ja ne toteuttavat kommutaatiorelaation

$$[\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\gamma\delta}] = \eta_{\gamma\beta}\sigma_{\alpha\delta} - \eta_{\alpha\gamma}\sigma_{\beta\delta} + \eta_{\delta\beta}\sigma_{\gamma\alpha} - \eta_{\delta\alpha}\sigma_{\gamma\beta}. \quad (1.65)$$

Yleisimmät objektit, jotka muuntuvat lineaarisesti infinitesimaalisessa Lorentzin muunnoksessa voidaan hajottaa kahteen irredusoitumattomaan komponenttiin joi- ta kuvataan parilla (A, B) . Tässä luvut A, B ovat joko kokonaislukuja tai niiden puolikkaita. Esimerkiksi vektorikentän tapauksessa generaattori on

$$[\sigma_{\alpha\beta}]^{\gamma}_{\delta} = \delta_{\alpha}^{\gamma}\eta_{\beta\delta} - \delta_{\beta}^{\gamma}\eta_{\alpha\delta}, \quad (1.66)$$

joka antaa Lorentzin ryhmän irredusoituvan esityksen $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Vektorikenttä vastaa siis kenttää jonka spin on $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Skalaarikentän kohdalla generaattorit ovat nollia, joten se voidaan tunnistaa spin-0 kenttänä. Spinorikentän kohdalla generaattorit ovat

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}[\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}], \quad (1.67)$$

missä matriisit γ_{α} ovat Diracin matriiseja. Tällöin irredusoituva esitys on $(\frac{1}{2}, 0)$ tai $(0, \frac{1}{2})$, eli spinorikenttä kuvaa spin-1/2 hiukkasia. Käyttämällä tetra- deja ja Lorentzin ryhmän esityksen generaattoreita, voidaan spinorikentät nyt yleistää kaarevaan avaruuteen.

Ekvivalenssiperiaatteen mukaan erikoisen suhteellisuusteorian tulee päteä jokaisessa lokaalissa inertiaalikoordinaatistossa. Tämän vuoksi Minkowskin avaruudessa kenttien vaikutukselta vaadittiin Lorentz-invarianssi. Kun taustalle otetaan yleinen suhteellisuusteoria, vaaditaan lisäksi vielä yleinen kovarianssi. Vaikutus ei riipu koordinaatiston valinnasta, joten kenttiä pidetään skalaareina tetradeja lukuunottamatta. Seuraavassa käytetään konventiota, jossa kreikkalaisten aakkosten alkupään kirjaimet α, β, \dots viittaavat lokaaliin inertiaalikoordinaatistoon ja loppupään kirjaimet μ, ν, \dots puolestaan yleisiin koordinaatteihin. Aakkosten alkupään indeksejä nostetaan ja lasketaan Minkowskin metriikalla ja loppupään puolestaan metrisellä tensorilla. Määrittelemällä kovariantti derivaatta kaavalla

$$\nabla_\alpha := V_\alpha^\mu \partial_\mu + \frac{1}{2} \sigma^{\beta\gamma} V_\beta^\nu V_\alpha^\mu \partial_\mu V_{\gamma\nu} \quad (1.68)$$

voidaan spinorikentän Lagrangen tiheys (1.26) Minkowskin avaruudessa yleistää kaarevassa avaruudessa muotoon

$$\mathcal{L} = \det V \left\{ \frac{1}{2} i [\bar{\psi} \gamma^\alpha V_\alpha^\mu \nabla_\mu \psi - V_\alpha^\mu (\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^\alpha \psi] - m \bar{\psi} \psi \right\} \quad (1.69)$$

$$= \det V \left\{ \frac{1}{2} i [\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - (\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi \right\} \quad (1.70)$$

missä $\gamma^\mu = V_\alpha^\mu \gamma^\alpha$ ovat Diracin matriisien vastineet kaarevassa avaruudessa, toteuttaen ehdon

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (1.71)$$

Varioimalla vaikutusta S kaarevassa avaruudessa kentän $\bar{\psi}$ suhteen saadaan kovariantti Diracin yhtälö

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi = 0, \quad (1.72)$$

missä kovariantti derivaatta on määritelty spin-konnektion (A.21) avulla kaavalla

$$\nabla_\mu := \partial_\mu + \frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} V_\alpha^\nu \partial_\nu V_{\beta\mu}. \quad (1.73)$$

Vektorikentän kvantisointi tapahtuu analogiseen tapaan. Vektorikenttä muuntuu Lorentzin muunnoksessa kuten tensori, joten siirtyminen kaarevaan avaruuteen tapahtuu korvaamalla osittaisderivaatta kovariantilla derivaatalla ∇_μ . Tällöin kenttätensori $F_{\mu\nu}$ muuntuu kuten

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.74)$$

Tässä konnektiotermit häviävät, sillä avaruuden oletetaan olevan torsioton. Tällöin konnektiossa esiintyvät Christoffelin symbolit ovat symmetrisiä alaindeksien suhteen. Lagrangen tiheyden (1.35) yleistys kaarevaan avaruuteen on siis

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu) \quad (1.75)$$

liikeyhtälön ollessa

$$\square A^\nu + m^2 A^\nu = 0, \quad \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (1.76)$$

1.3 Greenin funktiot ja propagaattorit

Tärkeässä asemassa kvanttikenttäteoriassa ovat erilaiset kenttien vakuumiodotusarvot. Ne voidaan tunnistaa olevan erilaisia aaltoyhtälön Greenin funktioita. Greenin funktion määrää reunaehdot ja erilaisilla reunaehdoilla saadaankin erilaisia Greenin funktioita, joita vastaa erilaiset odotusarvot. Tarkastellaan Kleinin-Gordonin yhtälön fundamentaaliratkaisua, toisin sanoen yhtälöä

$$(\square + m^2)G(x - x') = -\delta^n(x - x'). \quad (1.77)$$

Yhtälö (1.77) voidaan ratkaista Fourier'n muunnosten avulla. Funktion $G(x - x')$ Fourier'n muunnos on

$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \tilde{G}(k) e^{-ik(x-x')}. \quad (1.78)$$

Vastaavasti Fourier-muunnettu Kleinin-Gordonin yhtälö on

$$(i^2 k^2 + m^2)\tilde{G}(k) = -1 \Leftrightarrow \tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2}. \quad (1.79)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (1.78) saadaan

$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2}, \quad (1.80)$$

jonka integrandilla on navat kohdissa $k_0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Integrointi voidaan kuitenkin suorittaa tulkitsemalla integraali käyräintegraalina ja muuttamalla hieman napojen paikkaa. Siirretään napoja siis infinitesimaalisesti kompleksitasolla määrään $i\varepsilon$ verran ja valitaan käyrä siten, että se kiertää navat. Riippuen tavasta jolla käyrä on valittu, saadaan erilaisia Greenin funktioita ja erilaisia propagaattoreita. Tämä vastaa juuri reunaehtoien kiinnittämistä. Esimerkiksi *Feynmanin propagaattoria* vastaa Greenin funktio

$$G_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k e^{-ik \cdot (x-x')} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (1.81)$$

Feynmanin propagaattori, kuten muutkin Greenin funktiot voidaan tunnistaa kenttien erilaisina vakuumiodotusarvoina. Näistä tärkeimpiä ovat kenttien kommutaattoreiden ja antikommutaattoreiden odotusarvot:

$$iG(x, x') = \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle \quad (1.82)$$

$$G^{(1)}(x, x') = \langle 0 | \{ \phi(x), \phi(x') \} | 0 \rangle. \quad (1.83)$$

Näistä ensimmäinen tunnetaan myös nimellä *Schwingerin funktio* ja jälkimmäinen nimellä *Hadamardin funktio*. Käyttöön tulee myös *Wightmanin funktio* W joka määritellään kaavalla

$$W(x, x') = \langle 0 | \phi(x)\phi(x') | 0 \rangle. \quad (1.84)$$

Feynmanin propagaattori puolestaan voidaan tunnistaa kenttien aikajärjestettynä vakuumiodotusarvona

$$iG_F(x, x') = \langle 0 | T(\phi(x)\phi(x')) | 0 \rangle = \theta(t - t')W(x, x') + \theta(t' - t)W(x, x'), \quad (1.85)$$

missä $\theta(t)$ on *Heavisiden funktio*

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \quad (1.86)$$

Schwingerin funktion avulla voidaan antaa myös edistetty G_A ja jäljestetty G_R Greenin funktio

$$\begin{aligned} G_A(x, x') &= \theta(t' - t)G(x, x') \\ G_R(x, x') &= -\theta(t - t')G(x, x'). \end{aligned} \quad (1.87)$$

Lopuksi esitellään vielä spinorien ja vektorien Feynmanin propagaattorit. Spinorien Feynmanin propagaattori voidaan ilmaista skalaarikentän Feynmanin propagaattorin avulla muodossa

$$S_F(x - x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)G_F(x - x'). \quad (1.88)$$

Koska $G_F(x - x')$ tunnetaan, saadaan integraaliesitykseksi

$$S_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot (x-x')} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (1.89)$$

Vektorikentän tapauksessa saadaan

$$D_{F\mu\nu}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot (x-x')} \frac{-\eta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m^2}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (1.90)$$

Greenin funktiot yleistyvät suoraviivaisesti kaarevaan avaruuteen. Tällöin yhtälössä (1.77) käytetään litteän avaruuden liikeyhtälön sijaan kaarevan avaruuden liikeyhtälöä. Tarkkana pitää olla myös vakuumin $|0\rangle$ määrittämisestä. Skalaarikentän kohdalla Feynmanin propagaattoriksi saadaan tällöin

$$[\square_x + m^2 + \xi R]G_F(x - x') = -[-g]^{-1/2}\delta^n(x - x'). \quad (1.91)$$

Tässä d'Alembertin operaattorin alaindeksi viittaa koordinaattiin johon derivointi kohdistuu. Spinori- ja vektorikentälle puolestaan saadaan

$$[i\gamma^\mu \nabla_\mu^x - m]S_F(x - x') = [-g]^{-1/2}\delta^n(x - x') \quad (1.92)$$

ja

$$[\square_x + m^2]D_F(x - x') = [-g]^{-1/2}\delta^n(x - x'). \quad (1.93)$$

2 Hiukkasen ja vakuumin käsite

Litteän avaruuden kenttäteoriassa hiukkasen käsite on ollut erittäin onnistunut. Jopa niin hyvin, että helposti voisi luulla kvanttikenttäteorian olevan fundamentaalisella tasolla teoria hiukkasista. Hiukkasten määritelmä perustuu kuitenkin kenttäoperaattorin ϕ hajottamisesta luonti- ja hävitysoperaattoreihin. Tämä hajotelma puolestaan nojaa vahvasti Minkowskin avaruuden ajan translaatiosymmetriaan, sillä hävitysoperaattori on hajotelman positiivisen osan kerroin ja tämä positiivinen osa puolestaan määritellään globaalin ajanluonteisen Killingin vektorin avulla. Kaarevassa avaruudessa, jossa ei ole ollenkaan globaaleja ajanluonteisia Killingin vektoreita, hiukkasen käsite onkin kaukana ilmeisestä.

Eräs kaarevan avaruuden kvanttikenttäteorian ensimmäisistä ongelmista liittyikin positiivisten ratkaisuiden epämääräisyydestä seuraavaan hiukkasen käsitteen hämärtymiseen. Tähän liittyen B. DeWitt ehdotti hiukkasen käsitteen määrittelemistä operationaalisesti jonain jonka hiukkasdetektori havaitsee [7, 8]. Ensimmäistä kaareviin avaruuksiin sopivaa hiukkasdetektorimallia ehdotti W. Unruh [9]. Artikkelissaan [9] Unruh tutki mitä tasaisessa kiihtyvässä liikkeessä oleva havaitsija havaitsee Minkowskin avaruudessa ja päätyi tulokseen, että havaitsija havaitsee mustan kappaleen säteilyä jopa Minkowskin vakuuimissa. Tätä ilmiötä kutsutaankin *Unruhin ilmiöksi* sen löytäjän mukaan. Kiihtyvässä liikkeessä olevan havaitsijan käsitys hiukkasesta on siis erilainen kuin inertiaalisen havaitsijan käsitys. Vastaaviin tuloksiin päätyi G. Gibbons ja S. Hawking [10] käyttäen Unruhin esittämää detektoria de Sitterin avaruudessa. Hiukkasen konsepti riippuu siis havaitsijasta.

Tämän seurauksena, stationaarisia avaruusaikoja ja tiettyjä hyvin symmetrisiä avaruusaikoja lukuunottamatta, kaarevan avaruuden kvanttikenttäteoriassa ei ole mitään suotuisaa vakuumin valintaa. Ongelmana ei ole se etteikö vakuumitilaa voisi määritellä vaan se, että näitä vakuumitiloja on useita, eikä yleisessä avaruusajassa mitään näistä voida yksikäsitteisellä tavalla pitää parhaana vakuumitilana. Kaarevassa avaruudessa pitääkin olla hyvin varovainen, kun puhutaan vakuumista.

Tässä luvussa perehdytään yksinkertaiseen hiukkasdetektorimalliin nimeltään Unruhin-DeWittin hiukkasdetektori, sekä tarkastellaan fyysisen vakuumin valintaa.

2.1 Unruh-DeWittin hiukkasdetektori

B. DeWittin esittämässä hiukkasdetektorissa ideana on siis määrittää hiukkasen käsite operationaalisesti jonain jonka hiukkasdetektori havaitsee. Kytetään kvanttikenttä johonkin yksinkertaiseen kvanttimekaaniseen systeemiin ja ajatellaan tätä hiukkasdetektorina. Tällöin tämän kvanttimekaanisen systeemin siirtyessä korkeammalle energiatasolle voidaan se tulkita hiukkasen havaitsemisena, kun taas transiitio alemmalle tasolle tulkitaan hiukkasen emissiona. Unruh-DeWittin detektori on yksinkertainen detektorimalli, jossa detektori on kytketty kenttään lineaarisesti yksinkertaisella monopolikytkennällä². Tämän detektorin oletetaan olevan idealisoitu pistemäinen kvantittunut systeemi [7]. Detektorin liikkua avaruudessa, se absorboi kvantin kentän virittyessä korkeammalle tilalle alkutilastaan. Vastaavasti detektori voi myös emittoida kvantin kentän purkautuessa alkutilastaan toiseen tilaan. Kysymys johon etsitään vastausta on, että mikä on todennäköisyys tämänlaisen transition tapahtumiselle ja virityksen kohdalla mikä on todennäköisyys, että hiukkanen on havaittu.

Olkoon ϕ reaalin massaton skalaarikenttä, joka vuorovaikuttaa detektorin D kanssa. Detektori liikkuu ominaisajan τ avulla parametrisoitua sileää rataa $x^\mu(\tau)$ pitkin. Kentällä ϕ on oma Hilbertin avaruus \mathcal{H}_F ja detektorilla oma Hilbertin avaruus \mathcal{H}_D . Kokonaissysteemi on tällöin määritelty yhdistetyssä Hilbertin avaruudessa $\mathcal{H} = \mathcal{H}_F \otimes \mathcal{H}_D$. Unruh-DeWittin detektorimallissa kentän ja detektorin välistä kytkentää kuvaa vuorovaikutuksen Hamiltonin funktio

$$H_I = c \chi(\tau) m(\tau) \phi(x(\tau)). \quad (2.1)$$

Tässä c on kytkentävakio ja $m(\tau)$ detektorin monopolimomenttioperaattori. Funktiota $\chi(\tau)$ sanotaan *kytkentäfunktioksi*, joka kuvastaa detektorin päällekytkemistä: vuorovaikutus tapahtuu vain silloin kun $\chi(\tau)$ on nolasta poikkeava. Unruh ja DeWittin alkuperäisessä detektorimallissa kytkentäfunktio oli oleellisesti yksi eli detektori oli koko ajan päällä. Kytkentäfunktio on sileä, kompaktitukinen³ funktio, eli vuorovaikutus kestää vain äärellisen ajan verran. Detektorilla oletetaan olevan diskreetti joukko sisäisiä energian ominaistiloja, joita kuvataan vektorilla $|E\rangle$, missä $E = E_0$ kuvaa perustilaa. Detektori sisältää tällöin matriisielementtejä, jotka ovat muotoa

$$\langle E | m(\tau) | E' \rangle = \langle E | e^{iH_D \tau} m(0) e^{-iH_D \tau} | E' \rangle = \langle E | m(0) | E' \rangle e^{i(E-E')\tau}. \quad (2.2)$$

²Detektori voidaan kytkeä kenttään myös epälineaarisilla kytkennöillä. Katso esimerkiksi [11].

³Funktion χ tuki on $\text{supp}(\chi) := \{\tau \in \mathbb{R} : \chi(\tau) \neq 0\}$.

Työskenneltäessä vuorovaikutuskuvassa systeemin aikaevoluutio-operaattori on

$$U(\tau) = T \left[\exp \left(i \int_{-\infty}^{\infty} H_I(\tau) d\tau \right) \right], \quad (2.3)$$

missä T on kronologinen aikajärjestysoperaattori. Oletetaan systeemin alkutilan olevan ennen vuorovaikutusta $|\Psi\rangle \otimes |E_0\rangle$. Tällöin amplitudi, jossa yhdistetty systeemi siirtyy alkutilasta tilaan $|\Psi'\rangle \otimes |E\rangle$ on

$$\mathcal{A} = \langle E, \Psi' | T \left[\exp \left(i \int_{-\infty}^{\infty} H_I(\tau) d\tau \right) \right] | \Psi, E_0 \rangle. \quad (2.4)$$

Tarpeeksi pienillä kytkentävakion c arvoilla ja monopolimomentin ollessa tarpeeksi pieni voidaan käyttää Dysonin kehittämää. Tällöin ensimmäisen kertaluvun häiriöteoreettisena korjauksena amplitudi on

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\approx i \langle E, \Psi' | \int_{-\infty}^{\infty} c \chi(\tau) m(\tau) \phi(x(\tau)) d\tau | \Psi, E_0 \rangle \\ &= ic \langle E | m(0) | E_0 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E-E_0)\tau} \chi(\tau) \langle \Psi' | \phi(x(\tau)) | \Psi \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Todennäköisyys, että detektori löydetään tilasta jonka energia on E kun integrointi suoritetaan detektorin koko historian läpi, saadaan summaamalla amplitudin neliö kaikilla mahdollisilla tiloilla Ψ' . Käyttämällä tilojen täydellisyysrelaatiota todennäköisyydeksi saadaan

$$P(\omega) = \sum_{\Psi'} |\mathcal{A}|^2 \approx c^2 |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2 \mathcal{F}(\omega), \quad (2.6)$$

missä $\mathcal{F}(\omega)$ on *vastefunktio* määriteltynä kaavalla

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau'-\tau'')} \chi(\tau') \chi(\tau'') \langle \Psi | \phi(x(\tau')) \phi(x(\tau'')) | \Psi \rangle d\tau'' \quad (2.7)$$

ja $\omega := E - E_0$. Vastefunktio sisältää ominaisuudet jotka riippuvat kentän tilasta $|\Psi\rangle$ ja detektorin radasta ja sen kerroin yhtälössä (2.6) on vakio, joka riippuu vain detektorin sisäisestä rakenteesta. Tämän seurauksena jätetään usein tämä vakio huomioimatta ja keskitytään vain vastefunktioon $\mathcal{F}(\omega)$.

Oletetaan nyt alkutilan olevan tavallinen Minkowskin avaruuden vakuumi $|0\rangle$. Tällöin vastefunktio on muotoa

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau'-\tau'')} \chi(\tau') \chi(\tau'') W(\tau', \tau'') d\tau'', \quad (2.8)$$

missä $W(\tau', \tau'') := \langle 0 | \phi(x(\tau')) \phi(x(\tau'')) | 0 \rangle$ on Wightmanin funktio. Seuraten S. Schlichtin artikkelia [12] tehdään ylläolevaan integraaliin seuraavat muuttujanvaihdot

$u = \tau', s = \tau' - \tau''$, kun $\tau'' < \tau'$ ja $u = \tau'', s = \tau'' - \tau'$, kun $\tau' < \tau''$. Tällöin integraali on muotoa

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} ds [e^{-i\omega s} \chi(u) \chi(s-u) W(u, u-s) + e^{i\omega s} \chi(u-s) \chi(u) W(u-s, u)] \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} ds [e^{-i\omega s} \chi(u) \chi(s-u) W(u, u-s)], \end{aligned} \quad (2.9)$$

sillä Wightmanin funktion määritelmästä ja kenttien kommutoinnista seuraa, että $W(\tau'', \tau') = W^*(\tau', \tau'')$.

Kirjallisuudessa esiintyvät detektorit, tai niiden vastefunktiot, integroidaan tavallisesti läpi niiden koko historian detektorin ominaisajan asymptoottisesta menneisyydestä asymptoottiseen tulevaisuuteen [2]. Kuitenkin missä tahansa realistisessa tilanteessa detektoreja pidetään päällä vain äärellisen ajan verran. Tällöin detektorin vastefunktion pitäisi olla ajasta riippuva ja kausaalinen, eli tietyllä ajanhetkellä luettu detektorin vastaus riippuisi vain siitä radan osasta joka kuuluu sen menneisyyteen. Integraalit (2.7) ja (2.9) eivät ole kumpaakaan näistä eivätkä ne myöskään selkeästi erota niitä ominaisuuksia jotka johtuvat nimenomaan radasta ja niitä jotka johtuvat mielivaltaisesta kytkentäfunktiosta. Tämä on johtanut tutkijat [12, 13] miettimään paremminkin kysymystä: "mikä on transiitiodennäköisyys, jos detektorin kytketään päälle hetkellä τ_0 ja se luetaan hetkellä τ vuorovaikutuksen ollessa vielä päällä?". Jos regularisointiin liittyvät asiat hetkeksi sivuutetaan, matemaattisesti tämä vastaa kytkentäfunktion kirjoittamista muodossa $\chi(\tau') = \theta(\tau' - \tau_0)\theta(\tau - \tau')$, missä $\theta(\tau')$ on Heavisiden funktio. Vastaavat kirjoitelmat saadaan myös funktioille $\chi(\tau'')$, $\chi(u)$ ja $\chi(u-s)$. Tällöin vastefunktio (2.9) on muotoa

$$\mathcal{F}_\tau(\omega) = 2 \operatorname{Re} \int_{\tau_0}^{\tau} du \int_0^{u-\tau_0} e^{-i\omega s} W(u, u-s) ds, \quad (2.10)$$

joka on voimassa ajanhetkille $\tau < \tau'$. Määritellään hetkellinen transitionopeus vastefunktion derivaattana

$$\dot{\mathcal{F}}_\tau(\omega) = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\tau-\tau_0} e^{-i\omega s} W(\tau, \tau-s) ds, \quad (2.11)$$

missä piste tarkoittaa derivointia ominaisajan suhteen. Tällöin $\dot{\mathcal{F}}_\tau(\omega)$ ei riipu vain liiketilasta hetkellä τ , vaan myös koko radasta aikavälillä τ_0 ja τ . Olettaen, että detektorin on kytketty päälle asymptoottisessa menneisyydessä päästään mielivaltaisesta vakiosta τ_0 eroon rajalla $\tau_0 \rightarrow -\infty$, jolloin

$$\dot{\mathcal{F}}_\tau(\omega) = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-i\omega s} W(\tau, \tau-s) ds. \quad (2.12)$$

Tämä kuvaa hetkellistä transitionopeutta hetkellä τ , ottaen huomioon detektorin historian tähän hetkeen asti.

2.1.1 Inertiaalinen detektori

Minkowskin avaruuden stationaariset radat, jotka perustuvat ajanluonteiseen Killingin vektoriin, voidaan luokitella kuuteen eri luokkaan [14]. Stationaariset maailmanviivat ovat näiden Killingin vektorien integraalikäyriä. Näistä koordinaattisysteemeistä vain kolme on hyvin tunnettuja: Minkowskin, Rindlerin ja pyörivän systeemin koordinaatistot. Vastefunktiossa ja hetkellisessä transitionopeudessa esiintyvä Wightmanin funktio pitää itseasiassa tulkita myös distribuutiona sillä se koostuu kenttäoperaattoreiden tuloista

$$\langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik(x-x')}, \quad k_0 = |\mathbf{k}|, \quad (2.13)$$

jolloin vakuumin odotusarvon integraali ei suppene. Tavanomaisin tapa käsitellä näitä äärettömyyksiä on regularisoida integraali asettamalla siihen eksponenttitekijä $e^{-|\mathbf{k}|\varepsilon}$ tai ekvivalentisti tekemällä korvaus $t \rightarrow t - i\varepsilon$ ja ottamalla lopussa raja $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Toisin sanoen transitionopeus on

$$\dot{\mathcal{F}}_\tau(\omega) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty ds \operatorname{Re} (e^{-i\omega s} W_\varepsilon(\tau, \tau - s)). \quad (2.14)$$

Tällä regularisoinnilla Wightmanin funktio on muotoa [2]

$$W(\tau, \tau') = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(t - t' - i\varepsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}. \quad (2.15)$$

Stationaarisilla käyrillä Wightmanin funktio ei riipu ajasta vaan vain kahden pisteen välisestä ominaisajasta [14]

$$W(\tau, \tau - s) = W(s, 0), \quad (2.16)$$

missä $s = \tau - \tau'$. Inertiaalista rataa pitkin liikkuvan havaitsijan tapauksessa Wightmanin funktio on muotoa

$$W(s, 0) = -\frac{1}{4\pi^2(s - i\varepsilon)^2}. \quad (2.17)$$

Tällöin hetkellinen transitionopeus on

$$\dot{\mathcal{F}}_\tau(\omega) = -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^\infty ds \frac{e^{-i\omega s}}{(s - i\varepsilon)^2}. \quad (2.18)$$

Tämä integraali voidaan laskea käyräintegraalina reaaliakselia pitkin sulkien se äärettömällä puoliympyrällä reaaliakselin alemmassa tai ylemmässä osassa riippuen energian ω merkistä. Jos $\omega > 0$, suljetaan käyrä kompleksitason alapuolella ja jos

$\omega < 0$, suljetaan käyrä puolestaan kompleksitason yläpuolella. Tuloksena saadaan tällöin $2\pi\omega e^{\varepsilon\omega}\theta(-\omega)$ [12], jolloin hetkellinen transitionopeus on

$$\dot{\mathcal{F}}_{\tau}(\omega) = -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2\pi\omega e^{\varepsilon\omega}\theta(-\omega) = -\frac{1}{2\pi}\omega\theta(-\omega). \quad (2.19)$$

Kuten odotettua tämä tulos ei riipu ajasta. Integraalissa (2.19) esiintyvä Heavisiden funktio on nolla, jos sen argumentti on negatiivinen. Energian ω ollessa positiivinen on $\dot{\mathcal{F}}_{\tau}(\omega) = 0$ mikä kuvastaa sitä, että hiukkasia ei havaita. Energian ollessa negatiivinen, detektori puolestaan purkautuu spontaanisti alkutilaansa emittoiden hiukkasen.

2.1.2 Tasaisesti kiihtyvä detektori

Tasaisessa kiihtyvässä liikkeessä, kiihtyvyydellä α^{-1} , liikkuvan havaitsijan rata Minkowskin avaruudessa voidaan koordinaatisoida muodossa [15]

$$t(\tau) = \alpha \sinh(\tau/\alpha), \quad x(\tau) = \alpha \cosh(\tau/\alpha), \quad y(\tau) = z(\tau) = 0. \quad (2.20)$$

Sijoittamalla tämä rata Wightmanin funktioon (2.15) saadaan

$$\begin{aligned} W_{\varepsilon}(\tau, \tau - s) &= \frac{-1/4\pi^2}{(\alpha \sinh(\frac{\tau}{\alpha}) - \alpha \sinh(\frac{\tau'}{\alpha}) - i\varepsilon)^2 - (\alpha \cosh(\frac{\tau}{\alpha}) - \alpha \cosh(\frac{\tau'}{\alpha}))^2} \\ &= \frac{-1/4\pi^2}{4\alpha^2 \sinh^2(\frac{s}{2\alpha}) - 2\alpha i\varepsilon (\sinh(\frac{\tau}{\alpha}) - \sinh(\frac{\tau-s}{\alpha}))}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

On hieman yllättävää, että Wightmanin funktio riippuu ajasta sillä stationaarisen radan kohdalla transitionopeus on ajasta riippumaton. Tämä ei itsessään ole hälyttävää, sillä aikariippumattomuutta vaaditaan vain transitionopeudelta. Tämä sisältää rajan $\varepsilon \rightarrow 0$, jolloin Wightmanin funktio on selvästi ajasta riippumaton. Tyyppillisesti kirjallisuudessa esiintyvässä regularisoinnissa Wightmanin funktiossa raja $\varepsilon \rightarrow 0$ otetaan integraalin sisällä ennen integrointia [2]. Tämä johtaa kuitenkin epäselvään tulkintaan, sillä integraali ei ole enää hyvin määritelty kun $s = 0$. Tämän vuoksi etsitäänkin hetkellistä transitionopeutta tavalla, jossa ensin regularisoidaan Wightmanin funktio W , jonka jälkeen tehdään integrointi yli muuttujan s ja lopuksi poistamalla regularisointi. Tällöin ongelmana on kuitenkin mitä regularisointitapaa tulisi käyttää.

Schlicht on artikkelissaan [12] tarkastellut tasaisesti kiihtyvän detektorin tapaus-ta joka on kytketty päälle asymptootisessa menneisyydessä ja osoittanut numeerisesti laskemalla, että ylläolevaa Wightmanin funktiota (2.21) käyttämällä päädytään transitionopeuteen joka riippuu detektorin ominaisajasta. Tämä tulos rikkoo

Lorentz-invarianssin ja näyttää näin olevan epäfysikaalinen. Artikkelissaan Schlicht ei näe mitään syytä miksi Unruh-in ilmiötä ei voitaisi laskea eksplisiittisesti kausaalilla tavalla jolla tulos ei riippuisi ominaisajasta. Tämän vuoksi hän epäileekin, että korrelaatiofunktio (2.15) ei ole sopiva liikkuvan detektorin tapaukseen. Pohjautuen S. Takagin artikkeliin [16] Schlicht ehdottaakin regularisointia, jossa detektorille annetaan äärellinen koko sen hetkellisessä lepokoordinaatistossa. Tällöin detektori ei ole kytketty sen kenttäoperaattoriin maailmanviivalla, $\phi(x(\tau))$, vaan avaruudellisesti 'levitettyyn' kenttäoperaattoriin

$$\phi_f(\tau) := \int d^3\xi f_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})\phi(x(\tau, \boldsymbol{\xi})), \quad (2.22)$$

missä $(\tau, \boldsymbol{\xi})$ muodostavat joukon Fermi-Walkerin koordinaatteja, jotka liittyvät raataan $x(\tau, \boldsymbol{\xi}) = x(\tau) + \xi^i \mathbf{e}_i$, missä yksikkövektorit \mathbf{e}_i yhdessä nelinopeuden \dot{x} kanssa muodostavat ortonormaalin tetradin, joka on Fermi-Walker-siirretty⁴ liikkeen mukana. Funktio f_ε on normalisoitu profiilifunktio, joka riippuu positiivisesta parametrista ε siten, että $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) = \delta(\boldsymbol{\xi})$ ja toteuttaa skaalausominaisuuden

$$f_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon^{-3} f(\boldsymbol{\xi}/\varepsilon). \quad (2.23)$$

Profiilifunktio f_ε kuvaa siis detektorin 'muotoa' detektorin hetkellisessä lepokoordinaatistossa parametrin ε kuvatessa sen 'koko'. Ottamalla integrointien jälkeen raja $\varepsilon \rightarrow 0$ voidaan transitionopeus tulkita pistemäisen detektorin transitionopeutena. Kun profiilifunktioksi valitaan

$$f(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\varepsilon}{(|\boldsymbol{\xi}|^2 + \varepsilon^2)^2}, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.24)$$

Schlicht osoitti, että tällöin modifioitu korrelaatiofunktio on

$$W_\varepsilon(\tau, \tau') = \frac{1/4\pi^2}{(x(\tau) - x(\tau') - i\varepsilon(\dot{x}(\tau) - \dot{x}(\tau')))^2}, \quad (2.25)$$

missä \dot{x} ja \dot{x}' ovat detektorin nelinopeudet hetkillä τ ja τ' . Tämän uuden korrelaatiofunktion avulla tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan havaitsijan transitionopeus (2.14) on

$$\dot{\mathcal{F}}_\tau(\omega) = -\frac{1}{16\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{-i\omega s}}{(\sinh(s/2\alpha) - i\varepsilon \cosh(s/2\alpha))^2}, \quad (2.26)$$

joka voidaan laskea kompleksisena käyräintegraalina. Schlicht osoitti, että tällöin tuloksena on

$$\dot{\mathcal{F}}_\tau(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{e^{2\pi\omega\alpha} - 1}. \quad (2.27)$$

⁴Katso esimerkiksi [15].

Käyttäen modifioitua korrelaatiofunktioita tasaisesti kiihtyvällä detektorilla on siis Unruh-in ilmiön mukainen ajasta riippumaton Planckin jakauma. Artikkelissaan [17] J. Louko ja A. Satz ovat eksplisiittisesti laskeneet transitionopeuden mielivaltaiselle radalle, kun levitetty operaattori lähestyy rajaa $\varepsilon \rightarrow 0$. Tällöin Schlichtin modifioitua korrelaatiofunktioita käyttäen tulos asymptoottisessa menneisyydessä päällekytketyille detektorille on

$$\dot{\mathcal{F}}_\tau(\omega) = -\frac{\omega}{4\pi} + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \left(\frac{\cos(\omega s)}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{s^2} \right) ds, \quad (2.28)$$

kun taas tavanomaista regularisointia (2.15) käyttäen saadaan tulokseksi

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{F}}_\tau(\omega) = & -\frac{\omega}{4\pi} + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \left(\frac{\cos(\omega s)}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{s^2} \right) ds \\ & - \frac{1}{4\pi^2} \frac{\ddot{t}}{(t^2 - 1)^{3/2}} \left[\dot{t} \sqrt{t^2 - 1} + \ln \left(t - \sqrt{t^2 - 1} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

missä $(\Delta x)^2 = (x(\tau) - x(\tau - s))^2$. Yhtälön (2.29) jälkimmäinen termi ei ole Lorentz-invariantti ja juuri tämä termi on syypää Schlichtin löytämiin epäfysikaalisiin tuloksiin [18]. Inertiaalisille radoille $\dot{t} = 1$ tämä jälkimmäinen termi on nolla, jolloin molemmat regularisointitavat antavat saman tuloksen.

Syy minkä takia Schlicht päätyi epäfysikaalisiin tuloksiin oli se, että hän ei ottanut huomioon Wightmanin funktion distribuutioluonnetta jolloin tavanomaisesti distribuutiota integroidaan vasten sileää ja kompaktitukista testifunktioita. Artikkelissaan [12] Schlicht ei käyttänyt ollenkaan kytkentäfunktioita, jolloin yhtälön (2.12) johtamisessa katkaisufunktiona käytettiin implisiittisesti epäsileää ikkunafunktioita. Voidaankin osoittaa, että kun vastefunktion (2.9) kytkentäfunktiot χ ovat sileitä, niin yhtälössä (2.29) esiintyvä jälkimmäinen termi kumoutuu ja tulokset ovat täysin fysikaalisia [18]. Lisäksi tämä menetelmä on helpompi yleistää kaareviin avaruuksiin kuin modifioitu versio. Käytettäessä siis kausaalista Unruh-in-DeWittin detektoria tavallista regularisointimenetelmää voidaan käyttää, kunhan mukaan otetaan sileät katkaisufunktiot takaamaan fysikaaliset tulokset.

2.2 Fysikaalinen vakuumi

Minkowskin avaruudessa vakuumi määritellään tilana, jonka jokainen hävitysopeeraattori annihiloii. Liiketyhtälöiden ratkaisuina saadut positiiviset ratkaisut ovat puolestaan näiden operaattoreiden kertoimia. Positiiviset moodit ovat tällöin avainasemassa määriteltäessä fysikaalista vakuumia. Kaarevassa avaruudessa näiden positiivisten ratkaisuiden valinta ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen. Luvussa 1.2.3 nähtiin, että moodien välillä on relaatio, Bogoliubovin muunnos, joka tekee moodeista oleellisesti samanarvoisia. Tällöin herääkin kysymys siitä, mikä moodien valinta vastaa parhaiten käsitystä fysikaalisesta vakuumista. Seuraavaksi rajoitaudutaan skalaarikenttään ja tutkitaan vakuumin käsitettä kahdessa avaruusajassa. Adiabaattista vakuumia neliulotteisessa Friedmannin-Lemaîtren-Robertsonin-Walkerin (FLRW) avaruudessa, sekä Bunchin-Daviesin vakuumia neliulotteisessa de Sitterin avaruudessa seuraten teosta [2].

2.2.1 Adiabaattinen vakuumi

Neljässä dimensiossa yleisen FLRW-universumin viivaelementti on muotoa

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 h_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.30)$$

missä skalaarifunktio $a(t)$ on skaalatekijä, joka kuvaa universumin laajenemista tai kontraktoitumista ja

$$h_{ij} dx^i dx^j = (1 - Kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.31)$$

missä (r, θ, ϕ) ovat tavalliset pallokoordinaatiston koordinaatit. Yhtälö (2.31) antaa viivaelementin avaruudelliselle osalle, joka on avoin, litteä tai suljettu riippuen siitä onko vastaavasti parametri $K = -1, 0, 1$. Määritellään uusi aikaparametri η niin sanottu *konformaalinen aika* kaavalla $d\eta = dt/a$, jolloin viivaelementti voidaan kirjoittaa muodossa

$$ds^2 = a(\eta)^2 [d\eta^2 - h_{ij} dx^i dx^j] = C(\eta) [d\eta^2 - h_{ij} dx^i dx^j], \quad (2.32)$$

missä on määritelty konformaalinen skaalatekijä $C(\eta) = a(\eta)^2$, jonka oletetaan olevan nollasta poikkeava C^∞ -funktio. Tämä muoto paljastaa geometrian olevan konformaalisesti staattinen⁵ konformaalisen tekijän riippuen vain ajasta. Metriikan ollessa konformaalisesti staattinen, voidaan sen kenttäyhtälöissä avaruudelliset ja ajalliset muuttujat separoida [19]. Tällöin

$$u_{\mathbf{k}}(\eta, \mathbf{x}) = C^{-1/2}(\eta) \mathcal{Y}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \chi_{\mathbf{k}}(\eta), \quad (2.33)$$

⁵Konformaalisesti staattinen avaruusaika $g_{\mu\nu}$ saadaan muunnoksena $g_{\mu\nu} = C(\eta) \tilde{g}_{\mu\nu}$, missä $\tilde{g}_{\mu\nu}$ on staattinen metriikka.

missä $\mathbf{x} = (r, \theta, \phi)$, $k = |\mathbf{k}|$ ja funktio $\mathcal{Y}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ on yhtälön

$$h^{-1/2} \partial_i [h^{1/2} h^{ij} \partial_j \mathcal{Y}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})] = -(k^2 - K) \mathcal{Y}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \quad (2.34)$$

ratkaisu missä $h = \det(h_{ij})$. Ominaisfunktioiden $\mathcal{Y}_{\mathbf{k}}$ ratkaisut näissä kolmessa eri tapauksessa ovat [20]

$$\mathcal{Y}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} (2\pi)^{-3/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, & \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3), \quad (K = 0) \\ \Pi_{k\ell}^{(\pm)}(x) Y_{\ell}^m(\theta, \phi), & k = (k, \ell, m), \quad (K = \pm 1) \end{cases}, \quad (2.35)$$

missä funktio Y_{ℓ}^m on tavallinen palloharmoninen funktio, $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ ja

$$\begin{cases} -\infty < k_i < \infty; & k = |\mathbf{k}|, & (K = 0) \\ \ell = 0, 1, \dots, k-1; & k = 1, 2, \dots, & (K = 1) \\ \ell = 0, 1, \dots; & 0 < k < \infty, & (K = -1) \end{cases}. \quad (2.36)$$

Funktiot $\Pi^{(-)}$ on puolestaan määritelty kaavalla [21]

$$\Pi_{k\ell}^{(-)}(\alpha) = \left\{ \frac{1}{2} \pi k^2 (k^2 + 1 \dots [k^2 + (2 + \ell)^2]) \right\}^{-1/2} \sinh(\alpha) \left(\frac{d}{d \cosh(\alpha)} \right)^{1+\ell} \cos(k\alpha). \quad (2.37)$$

Funktio $\Pi_{k\ell}^{(+)}(\alpha)$ saadaan funktiosta $\Pi_{k\ell}^{(-)}(\alpha)$ vaihtamalla muuttujat $k \rightarrow -ik$ ja $\alpha \rightarrow -i\alpha$.

Sijoittamalla yhtälöstä (2.32) saatu metriikka Kleinin-Gordonin yhtälöön nähdään, että funktion χ_k tulee toteuttaa yhtälö

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \chi_k(\eta) + \Omega_k(\eta)^2 \chi_k(\eta) = 0, \quad (2.38)$$

missä

$$\Omega_k(\eta)^2 := \omega_k(\eta)^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) RC(\eta) \quad (2.39)$$

$$\omega_k(\eta)^2 := k^2 + C(\eta)m^2. \quad (2.40)$$

Tässä esiintyvä Riccin skalaari R on yleisessä FLRW-metriikassa muotoa

$$R = C^{-1} [3\dot{D} + \frac{3}{2} D^2 + 6K], \quad (2.41)$$

missä on määritelty $D = \dot{C}/C$. Normointiehdot (1.50) redusoituvat nyt sisätulon kaavaa (1.49) käyttämällä ratkaisuiden Wronskin determinantiksi

$$\chi_k \partial_{\eta} \chi_k^* - \chi_k^* \partial_{\eta} \chi_k = i. \quad (2.42)$$

Huolimatta yhtälön (2.38) yksinkertaisuudesta, sille ei tiettävästi ole olemassa analyttistä ratkaisua mielivaltaiselle funktiolle $\Omega_k(\eta)^2$. Olettaen funktion $\Omega_k(\eta)^2$ olevan hitaasti vaihteleva muuttujan η suhteen, voidaan todellista ratkaisua approksimoida Wentzelin-Kramersin-Brillouin'n (WKB) metodilla. Fysikaalisesti tämä vastaa hitaasti muuttuvaa avaruusaikaa, eli hitaasti muuttuvaa konformaalista tekijää $C(\eta)$. WKB-approksimaatiossa tehdään ratkaisuyrite

$$\chi_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2W_k(\eta)}} \exp\left[-i \int_{\eta_1}^{\eta} W_k(\eta') d\eta'\right], \quad (2.43)$$

missä funktio $W_k(\eta)$ toteuttaa epälineaarisen yhtälön

$$W_k(\eta)^2 = \Omega_k(\eta)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{W}_k}{W_k} - \frac{3\dot{W}_k^2}{2W_k^2} \right), \quad (2.44)$$

ja piste tarkoittaa derivointia konformaalisen ajan suhteen. Tällöin (2.43) toteuttaa normointiehdon (2.42). Mikäli avaruusaika laajenee tarpeeksi hitaasti, niin yhtälön (2.44) derivaattatermit ovat pieniä verrattuna termiin Ω_k^2 . Nollannen kertaluvun approksimaatiossa voidaan tällöin sijoittaa

$$W_k^{(0)}(\eta) \equiv \Omega_k(\eta) \quad (2.45)$$

yhtälön (2.43) integrandiin. Tällöin selvästi ratkaisu redusoituu tavalliseen Minkowskin avaruuden ratkaisuun, kun konformaalinen tekijä $C(\eta)$ lähestyy vakiota. Epälineaarisen yhtälön (2.44) ratkaisuja voidaan approksimoida iteroimalla, käyttäen muuttujaa $W_k^{(0)}$ alimpana kertalukuna. Tällöin yhtälön (2.44) seuraava iteraatio antaa termin

$$(W_k^{(1)}(\eta))^2 = \Omega_k^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{\Omega}_k}{\Omega_k} - \frac{3\dot{\Omega}_k^2}{2\Omega_k^2} \right), \quad (2.46)$$

joka sisältää kaksi derivaattaa termistä Ω_k ollen näin toista adiabaattista kertalukua. Kuten yleensäkin WKB-approksimaatiossa, näin saatu sarja on divergoiva asymptoottinen sarja, eikä sitä voida käyttää kuin tiettyyn kertalukuun n_{max} asti [22]. Selventääksemme edellä mainittua avaruuden laajenemisen hitautta määritellään uusi parametri T , jota kutsutaan *adiabaattiseksi parametriksi*. Skaalaamalla konformaalista aikaa adiabaattisen parametrin avulla $\tilde{\eta} = \eta/T$, voidaan yhtälö (2.38) kirjoittaa muodossa

$$\frac{d^2}{d\tilde{\eta}^2} \chi(\tilde{\eta}) + T^2 \Omega_k(\tilde{\eta})^2 \chi_k(\tilde{\eta}) = 0. \quad (2.47)$$

Koska tällä skaalauksella

$$\frac{d}{d\eta}C(\eta/T) = \frac{1}{T} \frac{d}{d\tilde{\eta}}C(\tilde{\eta}), \quad (2.48)$$

niin rajalla $T \rightarrow \infty$ funktio $C(\tilde{\eta})$ ja myöskin sen derivaatat muuttuvat äärettömän hitaasti. Hitaasti muuttuvan konformaalisen tekijän $C(\eta)$ muuttumista voidaan siis tutkia vaihtoehtoisesti suurilla parametrin T arvoilla.

Jatkossa merkitään moodin $u_{\mathbf{k}}$ kertaluvun A adiabaattista approksimaatiota merkinnällä $u_{\mathbf{k}}^{(A)}$. Näiden approksimoitujen moodien avulla voidaan määrittää liikeyhtälön eksakti ratkaisu relaation

$$u_{\mathbf{k}} = \alpha_k^{(A)}(\eta)u_{\mathbf{k}}^{(A)} + \beta_k^{(A)}(\eta)u_{\mathbf{k}}^{*(A)} \quad (2.49)$$

kautta, missä kertoimien $\alpha_k^{(A)}$ ja $\beta_k^{(A)}$ pitää olla vakioita kertalukuun A asti, sillä moodit $u_{\mathbf{k}}^{(A)}$ ja $u_{\mathbf{k}}^{*(A)}$ ovat kenttäyhtälön ratkaisuja tähän kertalukuun asti. Eksaktit moodit $u_{\mathbf{k}}$ voidaan kiinnittää jonain ajanhetkenä $\eta = \eta_0$ olemaan kertaluvun A positiivinen ratkaisu valitsemalla

$$\alpha_k^{(A)}(\eta_0) = 1 + \mathcal{O}(T^{-(A+1)}), \quad \beta_k^{(A)}(\eta_0) = 0 + \mathcal{O}(T^{-(A+1)}). \quad (2.50)$$

Tällä moodien valinnalla voidaan määrittää vakuumi normaaliin tapaan tilana, jonka hävitysoperaattori annihiloii. Vakuumia, joka konstruoidaan näillä moodien valinnalla sanotaan kertaluvun A *adiabaattiseksi vakuumiksi* $|0^{(A)}\rangle$.

2.2.2 Bunchin-Daviesin vakuumi

Mukava esitys nelidimensioisesta de Sitterin avaruudesta saavutetaan upottamalla se viisidimensioiseen Minkowskin avaruuteen hyperboloidina

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = -\alpha^2, \quad (2.51)$$

missä α on vakio ja Minkowskin avaruuden metriikkana on

$$ds^2 = dz_0^2 - dz_1^2 - dz_2^2 - dz_3^2 - dz_4^2. \quad (2.52)$$

Tämä hyperboloidi voidaan koordintisoida monella tapaa, joista eräs on

$$\begin{aligned} z_0 &= \alpha \sinh(t/\alpha) + \frac{1}{2}\alpha^{-1}e^{t/\alpha}|\mathbf{x}|^2 \\ z_4 &= \alpha \cosh(t/\alpha) - \frac{1}{2}\alpha^{-1}e^{t/\alpha}|\mathbf{x}|^2 \\ z_i &= e^{t/\alpha}x_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad -\infty < t, x_i < \infty. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Tämä peittää de Sitterin avaruudesta sen puolen, jossa $z_0 + z_4 > 0$. Näillä koordinaattien valinnoilla viivaelementti on muotoa

$$ds^2 = dt^2 - e^{2t/\alpha} \sum_{n=1}^3 (dx^n)^2. \quad (2.54)$$

Määrittelemällä konformaalinen aika, nyt kaavalla

$$\eta = -\alpha e^{-t/\alpha}, \quad -\infty < \eta < 0, \quad (2.55)$$

voidaan (2.54) kirjoittaa muodossa

$$ds^2 = (\alpha^2/\eta^2) [d\eta^2 - \sum_{n=1}^3 (dx^n)^2]. \quad (2.56)$$

Skaalatekijässä on nyt koordinaattisingulariteetti pisteessä $\eta = 0$. De Sitterin avaruuden toinen puolisko voidaan koordinatisoida antamalla konformaalisen ajan η juosta koko reaalityöskennän joukon läpi $-\infty < \eta < \infty$. Viivaelementin muoto (2.56) paljastaa koordinatisoidun puolen de Sitterin avaruudesta olevan konformaalinen Minkowskin avaruuden osan kanssa. Lisäksi tämä muoto vastaa avaruudellisesti litteää FLRW-universumia konformaalisen tekijän ollessa $C(\eta) = \alpha^2/\eta^2$. Tämän johdosta voidaan työskennellä edellisen osion viitekehysten puitteissa. Koska nyt kaikilla $l \geq 0$

$$\frac{d^l}{d\eta^l} \left(\frac{\dot{C}}{C} \right) = \frac{d^l}{d\eta^l} \left(\frac{-2}{\eta} \right) \xrightarrow{\eta \rightarrow \pm\infty} 0, \quad (2.57)$$

niin avaruus on hitaasti muuttuva jolloin adiabaattisen vakuumin voidaan olettaa olevan sopiva kandidaatti fysikaaliselle vakuumille, kun $\eta \rightarrow \pm\infty$. Eksaktit ratkaisut valitaan siis vastaamaan adiabaattisten moodien ratkaisua (2.43). Niiden tulee tällöin redusoitua muotoon

$$\chi_k^{(A)}(\eta) \sim \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad k, \eta \rightarrow \infty, \quad (2.58)$$

suurilla parametrien k tai η arvoilla.

Moodit voidaan jälleen separoida avaruuden ja ajan komponentteihin. Sijoittamalla moodit tällä metriikalla Klein-Gordon-yhtälöön, saadaan

$$C(\eta) \frac{d^2}{d\eta^2} \chi_k + [C(\eta)k^2 + C(\eta)^2(m^2 + \xi R)] \chi_k = 0, \quad (2.59)$$

missä Riccin skalaari on nyt $R = 12\alpha^{-2}$. Suorittamalla muuttujan vaihdos $z = \eta^3/27$ saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 z^{2/3}}{9} \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} + \left[\frac{\alpha^2}{9z^{2/3}} k^2 + \frac{12\alpha^2}{9^2 z^{4/3}} \left(\frac{\alpha^2}{12} m^2 + \xi \right) \right] \chi_k &= 0 \\ z^2 \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} + \left[z^{2/3} k^2 + \frac{4}{3} (m^2 R^{-1} + \xi) \right] \chi_k &= 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Yhtälö (2.60) on Besselin yhtälö, joka voidaan ratkaista eksaktisti. Tällöin normoitu ratkaisu on [2]:

$$\chi_k(\eta) = \frac{1}{2}(\pi\eta)^{1/2}H_\nu^{(2)}(k\eta), \quad (2.61)$$

missä $H_\nu^{(2)}$ on toisen lajin Hankelin funktio ja

$$\nu^2 = \frac{9}{4} - 12(m^2 R^{-1} + \xi). \quad (2.62)$$

Käyttämällä Hankelin funktion asymptoottista kehitelmää

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{2}\pi)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+m+\frac{1}{2})}{m!\Gamma(\nu-m+\frac{1}{2})(2iz)^m} \quad (2.63)$$

nähdään, että ratkaisut (2.61) redusoituvat muotoon

$$\chi_k(\eta) \sim \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad k, \eta \rightarrow \infty, \quad (2.64)$$

joten näin valituilla moodeilla on haluttu ominaisuus (2.58). Moodit (2.61) määrittelevät erään de Sitterin avaruuden vakuumin. Vakuumin konstruoimiseksi laajennetaan skalaarikenttä ϕ yhtälön (1.20) mukaan muodossa

$$\phi = \int d\tilde{k} [a(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}} + a(\mathbf{k})^\dagger u_{\mathbf{k}}^*], \quad (2.65)$$

missä moodit $u_{\mathbf{k}}$ ovat muotoa

$$u_{\mathbf{k}}(\chi, \mathbf{x}) = (32\pi^2)^{-1/2} \alpha^{-4} \eta^{9/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} H_\nu^{(2)}(k\eta). \quad (2.66)$$

Vakuumitila voidaan nyt määritellä tavalliseen tapaan

$$a(\mathbf{k}) |0_{BD}\rangle = 0. \quad (2.67)$$

Näin konstruoitua vakuumia sanotaan *Bunchin-Daviesin vakuumiksi* [23] ja sitä merkitään vektorilla $|0_{BD}\rangle$.

3 Energiainpulssitensorin renormalisointi

Edellisessä luvussa tarkasteltiin hiukkasen ja vakuumin käsitettä ja huomattiin, että vain erityisissä tapauksissa hiukkasen käsite vastaa intuitiivista käsitystämme alkeishiukkasesta. Ongelmia hiukkasen käsitteen kanssa syntyy siitä, että hiukkaset määritellään globaalisti kenttämoodien avulla. Usein onkin hyödyllistä ja mielenkiintoista tutkia lokaalisti määriteltyjen objektien odotusarvoja. Näistä objekteista tärkeimpänä on moniston pisteessä x määritelty *energiaimpulssitensori* $T_{\mu\nu}(x)$. Tämä suure kuvaa kentän lokaalia energiaa ja impulssia, sekä esiintyy myös gravitaation lähteenä Einsteinin kenttäyhtälössä

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

missä $R_{\mu\nu}$ on Riccin tensori, R Riccin skalaari, G_N Newtonin gravitaatiovakio ja Λ kosmologinen vakio. Energiainpulssitensori on siis oleellisessa asemassa, kun tutkitaan dynamiikkaa jossa gravitaatiokenttä on kytkeytyneenä kvanttikenttään. Tässä tutkielmassa käsitellään semiklassista mallia joka pohjautuu Einsteinin kenttäyhtälöön (3.1), kun energiainpulssitensoria pidetään kvanttimekaanisena odotusarvona:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda_B g_{\mu\nu} = -8\pi G_B \langle T_{\mu\nu} \rangle. \quad (3.2)$$

Tämä on semiklassinen Einsteinin yhtälö ja sen parametreissa esiintyvät alaindeksit B viittaavat paljaisiin, renormalisoimattomiin suureisiin.

Tarkasteltaessa energiainpulssitensorin odotusarvoa törmätään Minkowskilaisesta kenttäteoriasta tuttuihin ongelmiin, divergensseihin. Energiainpulssitensorin odotusarvo osoittautuu nimittäin äärettömäksi. Litteän avaruuden kenttäteoriassa näiden äärettömyyksiä kontrolloimiseen on kehitetty useita menetelmiä. Äärettömyyksiä tunnistamiseen tarvittavia regularisointitapoja, sekä äärettömyyksiä eliminointiin tarvittavaa renormalisaatioteoriaa, jossa divergoivat termit absorboidaan paljaisiin termeihin. Kaarevassa avaruudessa äärettömyyksiä kontrolloimiseen pitää kehittää vastaavia menetelmiä, mutta erityistä varovaisuutta on noudatettava sillä laskuissa on säilytettävä yleinen kovarianssi. Erilaisia kovariantteja regularisointitapoja on kuitenkin kehitetty kaarevan avaruuden tapaukseen. Näistä mainittakoon esimerkiksi zeeta-funktio regularisointi [24], dimensionaalinen regularisointi [25], adiabaattinen regularisointi [20], sekä pisteensiirtoregularisointi [26]. Näistä ensimmäisessä niin sanottu efektiivinen vaikutus W esitetään zeeta-funktion $\zeta(s)$ avulla, jolloin se ei suppene jokaisella parametrin s arvolla. Kuitenkin analyttisesti jatkamalla se näihin pisteisiin saadaan divergenssit eliminoidua. Dimensionaalissa

regularisoinnissa avaruusajan dimensiota n pidetään kompleksilukuna ja integroinnit suoritetaan n -tasossa, jossa ne suppenevat. Divergenssit esiintyvät tällöin eristettyinä napoina, kun tehdään analyttinen jatkaminen fyysikaaliseen dimensioon $n = 4$.

Tässä luvussa tarkastellaan ylläolevista regularisointimenetelmistä kahta viimeistä, sekä tutustutaan formalismiin jota tarvitaan energiaimpulssitensorin odotusarvon laskemiseen. Laskujen yksinkertaistamiseksi rajoitaudutaan massiiviseen skalaarikenttään ja neljään dimensioon.

3.1 Efektiivinen vaikutus kaarevassa avaruudessa

Klassinen Einsteinin yhtälö (3.1), yleisen suhteellisuusteorian liikeyhtälö, voidaan johtaa vaikutusfunktionaalista

$$S = S_g + S_m, \quad (3.3)$$

vaatimalla vaikutuksen variaation häviämistä metrisen tensorin suhteen

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (3.4)$$

Vaikutusfunktionaali (3.3) koostuu kahdesta osasta. Näistä ensimmäinen termi S_g on gravitaation vaikutus

$$S_g = \int \left(\frac{1}{16\pi G_N} (R - 2\Lambda) \right) \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.5)$$

jonka variointi antaa yhtälön (3.1) vasemman puolen. Vaikutuksen toinen termi S_m on puolestaan materian vaikutus

$$S_m = \int \mathcal{L}_m d^4x, \quad (3.6)$$

missä \mathcal{L}_m on vapaan skalaarikentän Lagrangen tiheys (1.44). Tämän variointi antaa⁶

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Materian vaikutuksen variointi antaa siis (klassisen) energiaimpulssitensorin. Ajateltaessa semiklassista mallia, jossa esiintyy energiaimpulssitensorin odotusarvo, voidaan kysyä olisiko se mahdollista saada samankaltaisella menetelmällä. Toisin sanoen onko olemassa jokin funktionaali W , joka funktionaalisesti differentioituna antaisi energiaimpulssitensorin odotusarvon. Osoittautuu [2], että tämänlainen funktionaali W voidaan löytää ja sitä kutsutaan *efektiiviseksi vaikutukseksi*. Tällöin

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\langle \text{out}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle}{\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle} := \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (3.8)$$

⁶Tekijä $[-g]^{-1/2}$ on asetettu, jotta saadaan tensoritiheyden sijaan aito tensori.

missä tilavektorit $|0, \text{in}\rangle$ ja $|0, \text{out}\rangle$ kuvaavat vakuumitilaa ennen gravitaatiokentän dynamiikkaa ja sen jälkeen. Käyttäen polkuintegraaliformalismia voidaan osoittaa [2], että efektiivinen vaikutus vapaan skalaarikentän kohdalla on muotoa

$$W = \frac{1}{2}i \int \sqrt{-g} d^4x \lim_{x' \rightarrow x} \int_{m^2}^{\infty} dm^2 G_F^{SD}(x, x'), \quad (3.9)$$

josta voidaan määrittellä *efektiivinen Lagrangen tiheys* \mathcal{L}_{eff} kaavalla

$$W = \int \mathcal{L}_{\text{eff}} d^4x = \int L_{\text{eff}} \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.10)$$

missä on määritelty

$$L_{\text{eff}} := [-g]^{-1/2} \mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}i \lim_{x' \rightarrow x} \int_{m^2}^{\infty} dm^2 G_F^{SD}(x, x'). \quad (3.11)$$

Yhtälössä (3.9) esiintyvä termi G_F^{SD} on Feynmanin propagaattorin integraaliesitys nelidimensioisessa kaarevassa avaruudessa nimeltään *Schwingerin-DeWittin kehitemä*

$$G_F^{SD}(x, x') = -\frac{\Delta^{1/2}(x, x')}{16\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2} \exp[-im^2s + \sigma/(2is)] F(x, x'; is), \quad (3.12)$$

missä Δ on Van Vleckin determinantti, funktio σ on pisteiden x ja x' välisen geodeettisen etäisyyden neliön puolikas määritelty kaavalla

$$\sigma := \sigma(x, x') = \frac{1}{2}y_\alpha y^\alpha, \quad (3.13)$$

missä koordinaatit y^μ ovat pisteeseen x konstruoidut Riemannin normaalikoordinaatit, kun origoksi on valittu piste x' ja funktiolla F on asymptoottinen kehitemä

$$F(x, x'; is) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, x')(is)^j, \quad (3.14)$$

jonka kolme ensimmäistä termiä ovat

$$\begin{aligned} a_0(x, x') &\equiv 1 \\ a_1(x, x') &= \left(\frac{1}{6} - \xi\right) R(x') - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi\right) \nabla_\alpha R(x') y^\alpha - \frac{1}{3} a_{\alpha\beta}(x') y^\alpha y^\beta \\ a_2(x, x') &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi\right)^2 R(x')^2 + \frac{1}{3} a^\lambda{}_\lambda(x'), \end{aligned} \quad (3.15)$$

missä

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6}\right) \nabla_\alpha \nabla_\beta R(x') + \frac{1}{120} \nabla_\alpha \nabla_\beta R(x') - \frac{1}{40} \square R_{\alpha\beta}(x') - \frac{1}{30} R_\alpha{}^\lambda(x') R_{\lambda\beta}(x') \\ &+ \frac{1}{60} R^{\kappa\lambda}{}_{\alpha\beta}(x') R_{\kappa\lambda}(x') + \frac{1}{60} R^{\lambda\mu\kappa}{}_\alpha(x') R_{\lambda\mu\kappa\beta}(x'). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Lisäksi termissä m^2 implisiittisesti esiintyvä pieni imaginaariosa $m^2 - i\varepsilon$ on jätetty eksplisiittisesti kirjoittamatta. Riemannin normaalikoordinaateista löytyy enemmän liitteessä B, missä on annettu myös Schwingerin-DeWittin kehitelmän johto.

Sijoittamalla nyt Schwingerin-DeWittin kehitelmä (3.12) kaavaan (3.11) ja vaihtamalla integroimisjärjestystä saadaan efektiiviseksi Lagrangen tiheydeksi neljässä dimensiossa

$$L_{\text{eff}} \sim - \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\Delta^{1/2}(x, x')}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \exp[-im^2s + \sigma/(2is)] \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, x')(is)^j. \quad (3.17)$$

Energiaimpulssitensoria $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ sitoo näin yhtälö

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int L_{\text{eff}} \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.18)$$

jonka nojalla energiaimpulssitensorin odotusarvoa voidaan tutkia tutkimalla efektiivistä Lagrangen funktiota L_{eff} .

3.2 Regularisointi ja renormalisointi

Tarkastelemalla nyt efektiivistä Lagrangen funktiota (3.17) ja käyttämällä hyväksi tietoa [27]

$$\lim_{x' \rightarrow x} \sigma(x, x') = 0 \quad (3.19)$$

huomataan, että indeksien arvoilla $j = 0, 1, 2$ integraali hajaantuu integraalin alarajalla, kun $x' \rightarrow x$. Termi $m^2 - i\varepsilon$ pitää huolta konvergenssista ylärajalla. Tällöin efektiivinen Lagrangen funktio ei ole määritelty ja yhtälön (3.18) nojalla myös energiaimpulssitensorin odotusarvo on ääretön. Fysikaalisesti järkevien tuloksien saamiseksi tarvitaan regularisointia ja renormalisointia.

Koska efektiivinen Lagrangen funktio (3.17) on rajalla $x' \rightarrow x$ äärellinen asympotoottisen sarjan termien indeksien arvoilla $j \geq 3$, on neljässä dimensiossa efektiivisen Lagrangen funktion divergoiva osa

$$L_{\text{div}} = - \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\Delta^{1/2}(x, x')}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-im^2s + \sigma/(2is)} [a_0(x, x') + a_1(x, x')is + a_2(x, x')(is)^2]. \quad (3.20)$$

Kertoimien a_0, a_1, a_2 arvot rajalla $x' \rightarrow x$ ovat puolestaan [26]

$$\begin{aligned} \lim_{x' \rightarrow x} a_0(x, x') &= 1, \\ \lim_{x' \rightarrow x} a_1(x, x') &= \left(\frac{1}{6} - \xi\right)R, \\ \lim_{x' \rightarrow x} a_2(x, x') &= -\frac{1}{180}R^{\rho\tau}R_{\rho\tau} + \frac{1}{180}R_{\rho\tau\kappa\lambda}R^{\rho\tau\kappa\lambda} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} - \xi\right)\square R + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \xi\right)^2 R^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Korkeamman asteen termin $a_3(x, x')$ arvo rajalla $x' \rightarrow x$ on myöskin laskettu. Se sisältää 28 termiä ja löytyy artikkelista [28]. Tämä tai korkeamman asteen termit tulevat tarpeelliseksi mikäli regularisointia tehtäisiin korkeammassa dimensiossa kuin neljä. Nyt nähdään, että yhtälön (3.20) sulkulausekkeessa olevat termit laskettuna rajalla $x' \rightarrow x$ ovat puhtaasti geometrisia. Ne koostuvat Riemannin tensorista ja sen kontraktioista. Tällöin divergoivaa osaa L_{div} tulisi pitää paremminkin kontribuutiona vaikutuksen gravitaation osaan, eikä materian osaan. Vaikka tämä termi syntyykin materian vaikutuksesta, se käyttäytyy kuten gravitaatiokentästä rakennettu suure⁷. Koska L_{div} on puhtaasti geometrinen, voidaan se yrittää absorboida vaikutuksen gravitaation osaan.

Divergoiva osa L_{div} sisältää kuitenkin kertoimen a_2 , joka on neljättä kertalukua metriikan derivaattojen suhteen. Se edustaa tällöin korkeamman kertaluvun korjausta yleiseen suhteellisuusteoriaan, joka sisältää vain korkeintaan toisia derivaattoja metriikan suhteen. Käyttämällä dimensionaalista regularisointia nähdään, että tämä lisätermi lisättynä gravitaation vaikutukseen modifioi Einsteinin yhtälön vasenta puolta antaen [2]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha {}^{(1)}H_{\mu\nu} + \beta {}^{(2)}H_{\mu\nu} + \gamma H_{\mu\nu}, \quad (3.22)$$

missä

$$\begin{aligned} {}^{(1)}H_{\mu\nu} &:= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{-g} R^2 d^4x = 2\nabla_\mu \nabla_\nu R - 2g_{\mu\nu} \square R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R^2 + 2RR_{\mu\nu}, \\ {}^{(2)}H_{\mu\nu} &:= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{-g} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} d^4x \\ &= \nabla_\mu \nabla_\nu R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \square R - \square R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + 2R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\mu\nu}, \\ H_{\mu\nu} &:= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{-g} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} d^4x. \\ &= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2R^{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\nu\alpha\beta\gamma} - 4\square R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu R - 4R_{\mu\alpha} R^\alpha_\nu \\ &\quad + 4R^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Alkuperäiseen gravitaation Lagrangen funktioon tulee tällöin lisätä termejä, jotka ovat metriikan derivaatan suhteen kertalukua neljä paljailla kertoimilla a_B, b_B ja c_B . Näihin termeihin voidaan tällöin absorboida kertoimien α, β, γ divergoivat termit antaen renormalisoidut kertoimet a, b ja c . Neljässä dimensiossa asia helpottuu vielä hieman sillä voidaan osoittaa [2], että

$$H_{\mu\nu} = -{}^{(1)}H_{\mu\nu} + 4{}^{(2)}H_{\mu\nu}. \quad (3.24)$$

⁷Tämä ei päde kuitenkaan efektiivisen Lagrangen funktion äärelliselle osalle.

Vain kaksi kertoimista a, b ja c ovat siis riippumattomia, joten voidaan valita kertoimen c olevan nolla. Renormalisoinnin avulla voidaan siis työskennellä vaikutuksen

$$S = S_g + W \quad (3.25)$$

kanssa, joka kytkee gravitaation ja kvanttikentän toisiinsa. Efektiivisen vaikutuksen W divergoivat osat voidaan siirtää tarpeeksi yleiseen gravitaation vaikutukseen S_g absorboimalla äärettömyydet renormalisoituihin vakioihin a, b, Λ ja G . Tällöin renormalisoidun vaikutuksen

$$S = (S_g)_{\text{ren}} + W_{\text{ren}}, \quad (3.26)$$

variointi (3.4) antaa neljässä dimensiossa semiklassisen Einsteinin yhtälön

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + a {}^{(1)}H_{\mu\nu} + b {}^{(2)}H_{\mu\nu} = -8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}, \quad (3.27)$$

missä oikea puoli on nyt äärellinen ja vakiot pitää määrätä kokeellisesti.

Vaikka formaalisti energiaimpulssitensorin odotusarvo $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}$ saadaankin funktionaalisesti differentioimalla efektiivistä vaikutusta W_{ren} , käytännön laskuissa tätä ei voida suoraan tehdä. Tämä johtuu siitä, että jos funktionaalinen differentiointi halutaan suorittaa metriikan suhteen, pitää yleisesti tietää W_{ren} kaikille metriikoille $g_{\mu\nu}$ [2]. Tällöin on usein tarpeellista työskennellä suoraan odotusarvon $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ kanssa. Kaavassa (3.8) esiintyvän energiaimpulssitensorin odotusarvon

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle := \frac{\langle \text{out}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle}{\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle} \quad (3.28)$$

vakuumitilat juontavat juurensa Schwingerin-DeWittin esityksen reunaehdoista. Usein ollaan enimmäkseen kiinnostuneita kuitenkin odotusarvosta

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} := \langle \text{in}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle, \quad (3.29)$$

energiaimpulssitensorin vakuuiodotusarvosta määriteltynä ennen gravitaatiokentän dynamiikkaa. Tai vastaavasti vakuumitilan $|0, \text{out}\rangle$ määräämästä odotusarvosta. Tämä suure oikein regularisoituna ja renormalisoituna antaa kaiken tiedon hiukkasuotosta sekä vakuumin polarisaatiosta ja on nimenomaan suure, jota käytetään semiklassisen Einsteinin yhtälön oikealla puolella [29]. Näiden kahden odotusarvon välillä on kuitenkin olemassa yhteys. Kuten B. DeWitt on osoittanut [8]

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} = \langle T_{\mu\nu} \rangle + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{fin}}, \quad (3.30)$$

missä $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{fin}}$ on aina äärellinen. Tällöin siis odotusarvoissa $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}$ ja $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ esiintyvät divergenssit ovat identtisiä. Regularisoitaessa näistä jälkimmäinen, tulee samalla

regularisoitua myös ensimmäinen. Kun $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ regularisoidaan, voidaan siitä erottaa divergoivat ja äärelliset termit

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{div}} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}, \quad (3.31)$$

missä $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{div}}$ sisältää äärettömät osat, jotka renormalisoidaan lisäämällä gravitaation vaikutukseen äärettömät vastatermit. Odotusarvo $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}$ on puolestaan jäljelle jäävä äärellinen osa. Samalla renormalisoitaessa odotusarvo $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{div}}$ antaa meille äärellisen, renormalisoidun energiaimpulssitensorin odotusarvon

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac,ren}} := \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} - \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{div}}. \quad (3.32)$$

Divergoivalle osalle $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{div}}$ pitää siis löytää muoto, joka voidaan renormalisoida.

3.2.1 Pisteensiirtoregularisointi

Pisteensiirtoregularisoinnin⁸ idea perustuu pohjimmiltaan siihen, että efektiivinen Lagrangen funktio (3.11) on äärellinen, kunhan pisteet x ja x' pidetään erotettuina toisistaan. Tämän regularisointitavan etuna on se, että se on täysin kovariantti ja sitä voidaan käyttää mille tahansa metriikalle. Seuraavaksi esitellään tämän regularisointitavan idea pääpiirteittäin käyttäen massiivista skalaarikenttää. Lisäksi tarkastellaan miten tätä regularisointia voidaan soveltaa käytännön laskuissa. Tässä seurataan pitkälti S. Christensenin artikkelia [26].

Kuten edellisessä kappaleessa todettiin, on usein hyödyllisempää työskennellä suoraan energiaimpulssitensorin kanssa. Varioimalla materian, tässä tapauksessa skalaarikentän, vaikutusfunktionaalia saadaan neljässä dimensiossa klassiseksi energiaimpulssitensoriksi

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & (1 - 2\xi)\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + (2\xi - \frac{1}{2})g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\phi\nabla_\sigma\phi - 2\xi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\phi \\ & + \frac{1}{2}\xi g_{\mu\nu}\phi\Box\phi - \xi(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{3}{2}\xi Rg_{\mu\nu})\phi\phi + (\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\xi)m^2g_{\mu\nu}\phi\phi, \end{aligned} \quad (3.33)$$

missä kentän $\phi(x)$ argumentti on notaation helpottamiseksi jätetty kirjoittamatta. Tämä ilmaisu voidaan kirjoittaa myös antikommutaattorien avulla symmetrisoidussa muodossa

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \frac{1}{2}(1 - 2\xi)\{\nabla_\mu\phi, \nabla_\nu\phi\} + \frac{1}{2}(2\xi - \frac{1}{2})g_{\mu\nu}\{\nabla^\sigma\phi, \nabla_\sigma\phi\} - \xi\{\nabla_\mu\nabla_\nu\phi, \phi\} \\ & + \frac{1}{4}\xi g_{\mu\nu}\{\phi, \Box\phi\} - \frac{1}{2}\xi(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu})\{\phi, \phi\} - \frac{3}{4}g_{\mu\nu}\xi(\xi R + m^2)\{\phi, \phi\} \\ & + \frac{1}{4}m^2g_{\mu\nu}\{\phi, \phi\}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

⁸Englanniksi "point-splitting regularization".

Seuraavaksi siirretään toisen kentän $\phi(x)$ argumentin piste pisteeseen x' , joka on lähellä alkuperäistä pistettä x . Ottamalla vielä yhtälössä (3.34) vakuuminodotusarvo puolittain, voidaan antikommutaattorit tunnistaa Hadamardin funktiona $G^{(1)}$ ja sen derivaattoina. Energiainpulssitensorin odotusarvo on tällöin

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle &= \lim_{x' \rightarrow x} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) (\nabla_{\mu'} \nabla_{\nu} + \nabla_{\mu} \nabla_{\nu'}) G^{(1)} + \left(\xi - \frac{1}{4} \right) g_{\mu\nu} \nabla_{\sigma} \nabla^{\sigma'} G^{(1)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \xi (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} + \nabla_{\mu'} \nabla_{\nu'}) G^{(1)} + \frac{1}{8} \xi g_{\mu\nu} (\nabla_{\sigma'} \nabla^{\sigma} + \nabla_{\sigma} \nabla^{\sigma'}) G^{(1)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \xi (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) G^{(1)} - \frac{3}{4} g_{\mu\nu} \xi (\xi R + m^2) G^{(1)} + \frac{1}{4} m^2 g_{\mu\nu} G^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

missä pilkku tarkoittaa derivointia pisteessä x' ja

$$G^{(1)}(x, x') := \frac{\langle \text{out}, 0 | \{ \phi(x), \phi(x') \} | 0, \text{in} \rangle}{\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle}. \quad (3.36)$$

Yhteys Hadamardin funktion ja Feynmanin propagaattorin välille saadaan yhtälön

$$G_F(x, x') = -\bar{G}(x, x') - \frac{1}{2} i G^{(1)}(x, x'), \quad (3.37)$$

kautta, missä $\bar{G}(x, x')$ on jälistetyn ja edistetyn Greenin funktion summan puolikas

$$\bar{G}(x, x') = \frac{1}{2} [G_R(x, x') + G_A(x, x')]. \quad (3.38)$$

Feynmanin propagaattorin integraaliesitys kaarevassa avaruudessa on Schwingerin-DeWittin kehitelmä, josta kaavan (3.37) mukaan Hadamardin funktio saadaan sen imaginaariosana. Kehittämällä Schwingerin-DeWittin kehitelmän (B.24) Hankelin funktio asympotoottisena sarjana ja suorittamalla summaukset ja derivoinnit saadaan siitä erotettua Hadamardin funktio, joka on muotoa

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x, x') &= \frac{\Delta^{1/2}}{4\pi^2} \left\{ a_0 \left[\frac{1}{\sigma} + m^2 (\gamma_E + \frac{1}{2} \ln |\frac{1}{2} m^2 \sigma|) (1 + \frac{1}{4} m^2 \sigma + \dots) - \frac{5}{16} m^2 \sigma + \dots \right] \right. \\ &\quad - a_1 \left[(\gamma_E + \frac{1}{2} \ln |\frac{1}{2} m^2 \sigma|) (1 + \frac{1}{2} \ln |\frac{1}{2} m^2 \sigma| + \dots) - \frac{1}{2} m^2 \sigma - \dots \right] \\ &\quad + a_2 \sigma \left[(\gamma_E + \frac{1}{2} \ln |\frac{1}{2} m^2 \sigma|) (\frac{1}{2} + \frac{1}{8} m^2 \sigma + \dots) - \frac{1}{4} - \dots \right] \\ &\quad \left. + \frac{1}{2m^2} [a_2 + \dots] + \frac{1}{2m^4} [a_3 + \dots] + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

missä γ_E on Eulerin vakio ja mukana ovat vain ne termit jotka aiheuttavat divergenssejä, sekä joitain äärellisiä termejä. Nämä divergenssit esiintyvät terminä σ^{-1} , sekä logaritmisena terminä $\ln |m^2 \sigma / 2|$, jotka hajaantuvat rajalla $\sigma \rightarrow 0$. Hadamardin funktio $G^{(1)}$ voidaan nyt sijoittaa takaisin energiainpulssitensorin odotusarvoon (3.35). Seuraavaksi luonteva tapa olisi laajentaa tällöin esiintyvät termit $a_i(x, x')$

ja $\Delta(x, x')$ sekä niiden derivaatat sarjaksi pisteessä x olevien funktioiden $t(x)$, sekä funktion σ potensseina. Ongelmaksi muodostuu kuitenkin se, että nämä termit ovat *bitensoreita*⁹, jolloin yhtälön eri puolilla on erilaiset muuntumisominaisuudet.

Bitensori $T_{\alpha\beta'}(x, x')$ muuntuu kuten kahdessa eri pisteessä olevan tensorin tulo $A_\alpha(x)B_{\beta'}(x')$. Jatkossa indeksin pilkku viittaa koordinaatteihin x' . Tällöin esimerkiksi laajennus

$$T_{\alpha\beta'} = t_{\alpha\beta}(x) + t_{\alpha\beta\rho}(x)\sigma^\rho + \dots \quad (3.40)$$

on merkityksetön sillä yhtälön eri puolilla on erilaiset muuntumisominaisuudet. Tässä $\sigma^\rho := \nabla^\rho\sigma$ on pisteiden x' ja x välisen geodeesin tangenttivektori pisteessä x suunnattuna suuntaan $x' \rightarrow x$ ja sen pituus on pisteiden x ja x' välisen geodeesin pituus¹⁰. Bitensori $T_{\alpha\beta'}$ pitää ensin muuttaa pisteessä x olevaksi tensoriksi, jonka jälkeen laajennus voidaan tehdä. Tätä varten tarvitaan bivektori $g_{\mu\nu'}$, joka määritellään yhtälöllä

$$\nabla^\tau\sigma\nabla_\tau g_{\mu\nu'} = 0, \quad \lim_{x' \rightarrow x} g_{\mu\nu'} = g_{\mu\nu}. \quad (3.41)$$

Tämän objektin operoidessa vektoriin $A^{\nu'}$ pisteessä x' antaa se vektorin \bar{A}^μ , joka saadaan yhdensuuntaissiirtämällä $A^{\nu'}$ pisteeseen x pitkin pisteitä x ja x' yhdistävää geodeesia. Siis

$$\bar{A}^\mu = g^\mu{}_{\nu'} A^{\nu'}. \quad (3.42)$$

Tässä on käytetty merkintää, jossa yleisesti tensorin yläpuolella oleva viiva tarkoittaa tensoria pisteessä x , joka on saatu pisteessä x' olevasta objektista yhdensuuntaissiirtolla. Bitensori $T_{\alpha\beta'}$ voidaan nyt muuttaa tensoriksi pisteessä x . Oletetaan, että bitensorin $T_{\alpha\beta'}$ ja sen derivaattojen arvot rajalla $x' \rightarrow x$ tunnetaan. Tällöin

$$\bar{T}_{\alpha\beta} = g_{\beta'}{}^{\rho'} T_{\alpha\rho'} = t_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta\mu}\sigma^\mu + \frac{1}{2!}t_{\alpha\beta\mu\nu}\sigma^\mu\sigma^\nu + \dots, \quad (3.43)$$

missä kertoimet t ovat pelkästään pisteen x funktioita. Nämä kertoimet saadaan derivoimalla ylläolevaa yhtälöä (3.43) ja ottamalla jokaisesta saadusta yhtälöstä raja-arvo $x' \rightarrow x$. Kaksi ensimmäistä termiä ovat esimerkiksi

$$t_{\alpha\beta} = \lim_{x' \rightarrow x} T_{\alpha\beta'}, \quad (3.44)$$

$$t_{\alpha\beta\mu} = \lim_{x' \rightarrow x} \nabla_\mu T_{\alpha\beta'} - \nabla_\mu t_{\alpha\beta}. \quad (3.45)$$

⁹Katso esimerkiksi [27].

¹⁰Riemannin normaalikoordinaattien avulla voidaan myös kirjoittaa $\nabla^\mu\sigma = y^\mu$.

Tällä tavalla voidaan esiintyvät bitensorit sekä niiden derivaatat muuntaa kovariantilla tavalla pisteessä x oleviksi tensoreiksi, sekä laajentaa ne eristäen divergenssit.

Laajentamalla nyt Hadamardin funktiossa esiintyvät bitensorit $a_1(x, x')$, $a_2(x, x')$, $\sigma(x, x')$ ja $\Delta^{1/2}(x, x')$ sarjaksi pisteessä x , sekä ryhmittelemällä eristetyt divergenssit voidaan muodostaa energiaimpulssitensorin odotusarvon divergoiva osa:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{div}} = \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{quartic}} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{quadratic}} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{log}} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{lin}} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{fin}}, \quad (3.46)$$

missä oikealla puolella termit ovat järjestetty neljännen asteen, toisen asteen, logaritmiin ja lineaarisiin divergensseihin, sekä äärelliseen termiin vastaavassa järjestyksessä. Näiden suureiden eksplisiittiset esitykset ovat hyvin pitkiä ja ne löytyvät Christensenin artikkeleista [26] massiiviselle skalaarikentälle ja [29] spinorikentälle, sekä vektorikentälle mielivaltaisella metriikalla $g_{\mu\nu}$ neljässä dimensiossa. Yleiselle n -dimensioliselle avaruudelle näitä eksplisiittisiä esityksiä ei toistaiseksi ole laskettu.

Kuinka sitten odotusarvoa $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{div}}$ voidaan käyttää käytännön laskuissa? Oletetaan, että annetulle metriikalle $g_{\mu\nu}$ löydetään täydellinen joukko moodeja $u_{\mathbf{k}}(x)$, jotka määrittävät fysikaalisen vakuumin. Näiden moodien avulla voidaan kenttäoperaattori ϕ esittää muodossa

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}(x) + a(\mathbf{k})^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(x)]. \quad (3.47)$$

Tarkastelemalla yhtälöä (3.34) huomataan, että energiaimpulssitensori koostuu kenttäoperaattoreiden tuloista ϕ^2 . Koska yhtälön (3.47) luomis- ja hävitysoperaattoreille pätee yhtälöt

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad \langle 0|a(\mathbf{k})^\dagger = 0, \quad \langle 0|a(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')^\dagger|0\rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (3.48)$$

nähdään, että energiaimpulssitensorin vakuuiodotusarvo voidaan lausua muodossa

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} = \sum_{\mathbf{k}} T_{\mu\nu}(u_{\mathbf{k}}(x), u_{\mathbf{k}}^*(x)), \quad (3.49)$$

missä $T_{\mu\nu}(u_{\mathbf{k}}(x), u_{\mathbf{k}}^*(x))$ on energiaimpulssitensorin bilineaarimuoto, joka muodostetaan sijoittamalla moodit $u_{\mathbf{k}}$ ja $u_{\mathbf{k}}^*$ kenttäoperaattorin ϕ tilalle yhtälössä (3.34). Summaus voidaan myös korvata integroinnilla mikäli \mathbf{k} on jatkuva. Tähän odotusarvoon tehdään pisteensiirto ja muodostetaan symmetrisoitu summa

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} = \frac{1}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \sum_{\mathbf{k}} \{T_{\mu\nu}(u_{\mathbf{k}}(x), u_{\mathbf{k}}^*(x')) + T_{\mu\nu}(u_{\mathbf{k}}(x'), u_{\mathbf{k}}^*(x))\}. \quad (3.50)$$

Kaikki pisteestä x' riippuvat suureet esitetään vektorin σ^ρ avulla ja summa laajennetaan tämän vektorin suhteen. Divergoiva osa $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{div}}$ voidaan laskea annetulle

metriikalle käyttämällä kaavaa (3.46) ja yhtälön (3.32) mukaan renormalisoitu odotusarvo saadaan tällöin kaavalla

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac,ren}} := \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} - \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{div}}. \quad (3.51)$$

3.2.2 Adiabaattinen regularisointi

Vaikka pisteensiirtoregularisointi onkin yksi tutkituimpia regularisointimenetelmiä ja se toimii millä tahansa metriikalla, johtaa se yleensä pitkiin ja monimutkaisiin laskuihin. Rajoittamalla avaruutta homogeenisiin avaruuksiin, erityisesti FLRW-avaruuteen, adiabaattinen regularisointi antaa usein huomattavasti mukavamman regularisointimenetelmän. Tämä menetelmä perustuu kappaleessa 2.2.1 konstruoi-tuihin adiabaattisiin moodeihin ja niihin liittyvään vakuumiin. Adiabaattinen regu-larisointi kehitettiin alunperin käsittelemään ultravioletti-divergenssejä hiukkasen lu-kumääräoperaattorin odotusarvossa [30]. Myöhemmin L. Parker ja S. Fulling yleis-tivät tämän koskemaan skalaarikentän energiaimpulssitensorin odotusarvon diver-genssejä [20, 31]. Hiljattain adiabaattinen regularisointi on myös onnistuttu yleis-tämään spinorikentille [32, 33]. Seuraavaksi käsitellään adiabaattista regularisointia skalaarikentän kohdalla mielivaltaisella kytkennällä ξ pohjautuen artikkeliin [34].

Sijoittamalla yleinen neliulotteinen FLRW-metriikka

$$ds^2 = C(\eta)[d\eta^2 - h_{ij}dx^i dx^j] \quad (3.52)$$

skalaarikentän energiaimpulssitensorin kaavaan (3.33) ja ottamalla vakuuminodo-tusarvo, saadaan energiaimpulssitensorin komponentin T_{00} odotusarvoksi

$$\langle T_{00} \rangle = \int \frac{d\mu(k)}{4\pi C} \left(|\dot{\chi}_k|^2 + \omega_k^2 |\chi_k|^2 + \left(\xi - \frac{1}{6}\right) [3D(\chi_k \dot{\chi}_k^* + \chi_k^* \dot{\chi}_k) - \frac{3}{2}(D^2 - 4K)|\chi_k|^2] \right), \quad (3.53)$$

missä integroimismitta riippuu parametrin K arvoista:

$$\int d\mu(k) = \begin{cases} \int_0^\infty dk k^2, & K = 0, -1 \\ \sum_{k=1}^\infty k^2, & K = 1. \end{cases} \quad (3.54)$$

Artikkelissaan [35] P. Anderson ja L. Parker ovat kuitenkin perustelleet, että riippu-matta parametrin K arvosta kaikissa tapauksissa tulisi käyttää jatkuvaa integrointi-mittaa. Tämä perustelu pohjautuu siihen, että diskreettiä mittaä käytettäessä niin sanottua *jälkianomaliaa*¹¹ ei synny, mikä on ristiriidassa muiden regularisointitapo-jen antamien tulosten kanssa. He osoittavatkin, että käyttämällä jatkuvaa integroin-

¹¹Katso esimerkiksi [2, 36].

timittaa myös tapauksessa $K = 1$ saadaan jälleen jälkianomalia kuten muillakin regularisointitavoilla. Tämän vuoksi rajoitaudutaan kaikissa kolmessa tapauksessa käyttämään jatkuvaa mittaa

$$\int d\mu(k) = \int_0^\infty dk k^2. \quad (3.55)$$

Adiabaattisessa regularisoinnissa käytetään hyväksi moodien χ_k adiabaattista konstruktia (2.43). Adiabaattinen kertaluku vastaa funktion Ω derivaattojen lukumäärää ja energiaimpulssitensorin divergenssien saamiseksi riittää funktion W_k laajentaminen adiabaattiseen kertalukuun neljä asti [20]. Adiabaattiseen kertalukuun neljä laajennettu funktio W_k sisältää 37 termiä, ja se on annettu liitteessä C.

Määritellään energiaimpulssitensori adiabaattisessa vakuuissa adiabaattisella kertaluvulla A kaavalla

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ad}}^{(A)} := \langle 0^{(A)} | T_{\mu\nu} | 0^{(A)} \rangle. \quad (3.56)$$

Tällöin energiaimpulssitensorin odotusarvon komponentti $\langle T_{00} \rangle$ laajennettuna adiabaattiseen kertalukuun neljä asti on

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{\text{ad}}^{(A)} = & \frac{1}{8\pi^2 C} \int_0^\infty dk k^2 \left\{ 2\omega + \frac{C^2 m^4 D^2}{16\omega^5} \right. \\ & + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \left(-\frac{3}{2\omega} (D^2 - 4K) - \frac{3Cm^2 D^2}{2\omega^3} - \frac{3Cm^2 \dot{D}^2}{8\omega^5} - \frac{15C^2 m^4 D^2 K}{16\omega^7} \right) \\ & \left. + \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 \left(-\frac{1}{16\omega^3} (-72D^2 K + 144K^2) + \frac{108Cm^2 D^2 K}{8\omega^5} \right) + O_{00}^{(4)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

missä termi $O_{00}^{(4)}$ on annettu liitteessä C ja se sisältää adiabaattista kertalukua neljä olevat termit. Energiaimpulssitensorilla, joka saadaan FLRW-metriikasta, on vain kaksi itsenäistä komponenttia T_{00} ja T_{11} ja nämä saadaan toisistaan jäljen T_μ^μ avulla kaavalla [34]

$$T_{11} = \frac{1}{3(1 - Kr^2)} (T_{00} - CT_\mu^\mu). \quad (3.58)$$

Energiaimpulssitensorin odotusarvon $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ toinen itsenäinen komponentti $\langle T_{11} \rangle$ saadaan siis helpoimmin käyttämällä yhtälöä (3.57) ja odotusarvon $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ jälkeä. Adiabaattisessa vakuuissa adiabaattiseen kertalukuun neljä asti kirjoitettuna energiaimpulssitensorin jälki on

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{ad}}^{(A)} &= \frac{1}{4\pi^2 C^2} \int_0^{\infty} dk k^2 \left\{ \frac{Cm^2}{\omega} + \frac{C^2 m^4}{8\omega^5} (\dot{D} + D^2) - \frac{5C^3 m^6 D^2}{32\omega^7} + \left(\xi - \frac{1}{6}\right) \left(-\frac{3\dot{D}}{\omega} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{Cm^2}{\omega^3} (3\dot{D} + \frac{3}{4}D^2 + 3K) + \frac{9C^2 m^4 D^2}{4\omega^5} - \frac{C^2 m^4}{32\omega^7} (60\dot{D}K + 60D^2K) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{420C^3 m^6 D^2 K}{128\omega^9} \right) + \left(\xi - \frac{1}{6}\right) \left(\frac{36\dot{D}K}{4\omega^3} + \frac{Cm^2}{32\omega^5} (864\dot{D}K + 216D^2K + 432K^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{540C^2 m^4 D^2 K}{16\omega^7} \right) + O_{\text{tr}}^{(4)} \right\}, \tag{3.59}
\end{aligned}$$

missä $O_{\text{tr}}^{(4)}$ sisältää adiabaattisen kertaluvun neljä termit annettuna liitteessä C.

Nimestään huolimatta adiabaattinen regularisointi ei ole tapa regularisoida divergoivia integraaleja. Täten yhtälöt (3.57) ja (3.59) ovat formaalisti divergoivia ja ne pitäisi regularisoida esimerkiksi pisteensiirtoregularisoinnilla. Kuitenkin pisteensiirtoregularisointia käyttämällä voidaan osoittaa [37], että massiivisen skalaarikentän kohdalla renormalisoitu energiaimpulssitensorin odotusarvo voidaan muodostaa vähentämällä eksaktista energiaimpulssitensorin odotusarvosta neljänteen adiabaattiseen kertalukuun asti laajennettu odotusarvo $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ad}}^{(A)}$, joka saadaan yhtälöistä (3.57) ja (3.59). Tällöin jäljelle jää äärellinen integraali. Yleisen FLRW-avaruuden kohdalla semiklassisen Einsteinin yhtälön oikealla puolella oleva energiaimpulssitensorin odotusarvo saadaan siis kaavalla

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac,ren}} := \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} - \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ad}}^{(A)}. \tag{3.60}$$

Pisteensiirtoregularisointia, tai muutakaan regularisointia, ei siis tarvitse erikseen suorittaa, sillä sitä tarvitaan vain oikeuttamaan kaava (3.60). Lisäksi T. Bunch on osoittanut [34], että tällöin esiintyvät divergenssit voidaan renormalisoida parametreihin Λ , G , a ja b .

4 Hiukkastuotto laajenevassa universumissa

Edellisissä luvuissa on tutustuttu formalismiin, jota tarvitaan kaarevan avaruuden kvanttikenttäteorian ilmiöiden tutkimisessa. Tässä ja seuraavissa luvuissa sovelletaan näitä tuloksia. Yleisen suhteellisuusteorian mukaan ottaminen tuo kvanttikenttäteoriaan mukaan universumin dynamiikan. Minkowskilaisesta kenttäteoriasta tuttu staattinen avaruus vaihtuu dynaamiseksi universumiksi, joka voi laajentua tai kontraktoitua ajan kuluessa, kun Minkowskilainen metriikka korvataan yleisellä metriikalla. Tällä yksinkertaisella muutoksella on kuitenkin perustavanlaatuisia seurauksia.

Eräs merkittävin näistä seurauksista on 50 vuotta sitten L. Parkerin löytämä ilmiö, jossa universumin laajeneminen tuottaa hiukkaspareja vakuumista. Parkerin tutkimukset [30, 38, 39] keskittyivät hiukkastuottoon homogeenisissa isotrooppisissa FLRW-avaruuksissa. Hiukkastuoton mahdollisuuden lisäksi hän osoitti, että konformaalisesti invarianttien kenttien kohdalla massattomia hiukkaspareja ei synny johtuen siitä, että FLRW-mallit ovat konformaalisesti litteitä. Myöhemmin Y. Zel'dovich ja A. Starobinsky [40] tarkastelivat hiukkastuottoa laajemmin homogeenisissa malleissa ja havaitsivat, että konformaalisesti invariantteja massattomia hiukkasia syntyy, kun anisotrooppisuus rikkoo FLRW-mallien konformaalisen symmetrian. Anisotrooppisissa malleissa tarkasteltu hiukkastuotto johtaa laajenemisen isotrooppisoitumiseen ja tämä voi olla selitys sille miksi universumi nykypäivänä on hyvin isotrooppinen [40, 41].

Ymmärtääksemme miten hiukkastuotto tapahtuu laajenevassa avaruudessa nojaututaan Heisenbergin kuvaan, jossa aikariippuvuus on kentän operaattoreissa tilavektorien pysyessä ajasta riippumattomana. Oletetaan, että ajanhetkellä t vapaan kvantisoidun kentän tilavektori $|0\rangle$ kuvaa tilaa jossa ei ole hiukkasia eli vakuumia. Minkälaista voi kvantisoidun kentän aikaevoluutio olla laajenemisen seurauksena siten, että saman tilavektorin $|0\rangle$ löydetään myöhempanä ajanhetkenä $t' > t$ sisältävän hiukkasia? Tämänlainen evoluutio vaatii ajanhetkellä t määriteltyjen hävitysopeeraattoreiden kehittyvän kentän hävitys- ja luomisoperaattoreiden lineaarikombinaatioksi myöhäisemmällä ajanhetkellä t' , sillä muuten hävitysopeeraattori annihiloi tämän vakuumin. Jotta hiukkastuottoa voisi tapahtua, pitää myöhemmän ajanhetken t' hävitysopeeraattorin $b(\mathbf{k})$ olla lineaarikombinaatio aikaisemman ajanhetken t luomis- ja hävitysopeeraattoreista:

$$b(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}'} [\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} a(\mathbf{k}') + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} a(\mathbf{k}')^\dagger]. \quad (4.1)$$

Tämä lineaarimuunnos on esimerkki Bogoliubovin muunnoksista, joita tarkasteltiin

kappaleessa 1.2.3. Mikäli positiiviset moodit voidaan separoida muodossa

$$u_k(\eta, \mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\chi_k(\eta), \quad (4.2)$$

niin yhtälöistä (1.49), (1.54) ja (1.55) nähdään, että Bogoliubovin kertoimet toteuttavat yhtälöt

$$\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \alpha_k\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \beta_k\delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (4.3)$$

jolloin kentän moodit voidaan ilmaista muodossa

$$u_{\mathbf{k}}^{\text{in}}(x) = \alpha_k u_{\mathbf{k}}^{\text{out}}(x) + \beta_k u_{-\mathbf{k}}^{\text{out}*}(x), \quad (4.4)$$

missä $k = |\mathbf{k}|$, yläindeksi 'in' viittaa moodeihin asymptoottisessa menneisyydessä ja yläindeksi 'out' puolestaan moodeihin asymptoottisessa tulevaisuudessa. Tästä muodosta voidaan lukea Bogoliubovin kerroin β_k , joka määrittää laajenemisen seurauksesta syntyneiden hiukkasparien todennäköisyyden. Mikäli asymptoottisten alueiden positiiviset moodit ovat samat nähdään välittömästi, että Bogoliubovin kerroin β_k on nolla. Tämänlainen tilanne syntyy esimerkiksi kappaleessa 2.2.2 tarkastellun de Sitterin avaruuden ja Bunchin-Daviesin vakuumin kohdalla. Tällöin hiukkastuottoa ei synny avaruuden laajenemisen seurauksena. Bogoliubovin kertoimien määrittämisessä oleellista on, että positiiviset moodit tunnetaan. Näiden moodien määrittäminen on kuitenkin yleisessä kaarevassa avaruudessa erittäin hankalaa.

Eräs tapa tutkia hiukkastuottoa on käsitellä universumimalleja, joissa avaruusaajan dynamiikka häviää asymptoottisessa menneisyydessä ja tulevaisuudessa. Valitsemalla malli siten, että asymptoottisilla alueilla vakuumi ja positiiviset moodit voidaan hyvin määrittää, voidaan tarkastella hiukkastuottoa universumin laajetessa näiden kahden alueen välissä määrittämällä Bogoliubovin kerroin kaavan (4.4) mukaan. Yksinkertaisin malli on universumi, joka on asymptoottisesti Minkowskilainen. Tällöin positiiviset moodit redusoituvat tavallisiin tasoaaltoihin näillä asymptoottisilla alueilla. Mikäli avaruusaika ei ole asymptoottisesti staattinen, voidaan käyttää hyväksi adiabaattisia moodeja ja adiabaattista vakuumia positiivisten moodien määrittämiseen. Koska hiukkastuottoa käsitellään Bogoliubovin muunnosten kautta, ei hiukkasten vaikutusta metriikkaan oteta huomioon.

Seuraavaksi tarkastellaan hiukkastuottoa kahdessa erilaisessa avaruudellisesti litteässä FLRW-mallissa, joista toinen on asymptoottisesti Minkowskilainen ja toinen asymptoottisesti säteilyn dominoima. Koska FLRW-mallit ovat konformaalisesti litteitä, voidaan niiden moodien avaruudelliset ja ajalliset komponentit separoida. Tällöin oleellisessa asemassa onkin ratkaista differentiaaliyhtälö (2.38) funktiolle $\chi_k(\eta)$ annetulla konformaalisella tekijällä $C(\eta)$. Tämä johtaa usein jo yksinkertaisissa mal-leissa monimutkaisiin differentiaaliyhtälöihin ja erikoisfunktioihin.

4.1 Asymptoottisesti Minkowskilainen malli

Tarkastellaan yksinkertaista eksaktisti ratkaistavaa kaksiulotteista mallia, jonka viivelementti on

$$ds^2 = C(\eta)(d\eta^2 - dx^2) \quad (4.5)$$

ja valitaan konformaalisiksi tekijäksi

$$C(\eta) = A + B \tanh(\rho\eta), \quad -\infty < \eta < \infty, \quad (4.6)$$

missä $A, B, \rho \in (0, \infty)$. Tällöin asymptoottisilla alueilla

$$C(\eta) = A \pm B, \quad \eta \rightarrow \pm\infty. \quad (4.7)$$

Tämä malli kuvaa universumia, joka on asymptoottisessa menneisyydessä Minkowskilainen, jonka jälkeen se laajenee päättyen jälleen Minkowskilaiseen avaruuteen asymptoottisessa tulevaisuudessa. Tätä mallia käytti alunperin C. Bernard ja A. Duncan vuonna 1977 tutkiessaan energiaimpulssitensorin regularisointia [42]. Avaruuden ollessa konformaalisesti staattinen, voidaan moodeista separoida avaruudelliset ja paikalliset muuttujat:

$$u_{\mathbf{k}}(\eta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \chi_k(\eta). \quad (4.8)$$

Rajoitetaan mallia vielä valitsemalla konformaalinen kytkentä, joka kahdessa dimensiossa vastaa yhtälön (1.46) nojalla minimaalikytkentää. Sijoittamalla metriikka (4.5) massiivisen skalaarikentän liikeyhtälöön konformaalisella kytkennällä $\xi = 0$ ja konformaalisella tekijällä (4.6) tulee funktion χ_k toteuttaa yhtälö

$$\frac{d^2\chi_k}{d\eta^2} + [k^2 + (A + B \tanh(\rho\eta))m^2]\chi_k = 0. \quad (4.9)$$

Tekemällä muuttujanvaihto

$$u = \frac{1}{2}[(1 + \tanh(\rho\eta))], \quad (4.10)$$

voidaan yhtälö (4.9) kirjoittaa muodossa

$$\frac{d^2\chi_k}{du^2} + \frac{1 - 2u}{u(1 - u)} \frac{d\chi_k}{du} + \frac{1}{4\rho^2 u^2 (1 - u)^2} (k^2 + Am^2 + Bm^2)\chi_k = 0. \quad (4.11)$$

Suorittamalla osamurtokehitelemä kerrointermeihin ja määrittelemällä muuttujat

$$\begin{aligned} \omega_{\text{in}}^2 &= k^2 + m^2(A - B) \\ \omega_{\text{out}}^2 &= k^2 + m^2(A + B) \\ \omega_{\pm} &= \frac{1}{2}(\omega_{\text{out}} \pm \omega_{\text{in}}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

saadaan yhtälö

$$\frac{d^2\chi_k}{du^2} + \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{1-u} \right] \frac{d\chi_k}{du} + \frac{1}{4\rho^2} \left[\frac{\omega_{\text{in}}^2}{u} + \frac{\omega_{\text{out}}^2}{1-u} \right] \frac{\chi_k}{u(1-u)} = 0, \quad (4.13)$$

joka voidaan ratkaista hypergeometristen funktioiden avulla. Tarkastelemalla yhtälöä (4.13) huomataan, että sillä on singulaariset pisteet kohdissa $u = 0$ ja $u = 1$. Nämä pisteet vastaavat juuri asymptoottisia arvoja $\eta \rightarrow -\infty$ ja $\eta \rightarrow \infty$ vastaavasti. Asymptoottisen menneisyyden ratkaisut saadaan siis tarkastelemalla yhtälön (4.13) ratkaisuja pisteen $u = 0$ ympäristössä. Tällöin ratkaisu on muotoa

$$\begin{aligned} \chi_k(u) = & (u-1)^{-\frac{i\omega_{\text{out}}}{2\rho}} u^{-\frac{i\omega_{\text{in}}}{2\rho}} \left\{ C_1 e^{-\frac{\pi\omega_{\text{in}}}{\rho}} u^{\frac{i\omega_{\text{in}}}{\rho}} {}_2F_1\left(1 - \frac{i\omega_-}{\rho}, -\frac{i\omega_-}{\rho}; 1 + \frac{i\omega_{\text{in}}}{\rho}; u\right) \right. \\ & \left. + C_2 (1-u)^{\frac{i\omega_{\text{out}}}{\rho}} {}_2F_1\left(1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{\text{in}}}{\rho}; u\right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

missä C_1 ja C_2 ovat vakioita ja ${}_2F_1$ on hypergeometrinen funktio, joka määritellään sarjana

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1 \quad (4.15)$$

missä

$$(q)_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ q(q+1)\cdots(1+n-1) & n > 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Sijoittamalla muunnos (4.10) takaisin yhtälöön (4.14) saadaan ratkaisuksi

$$\begin{aligned} \chi_k(\eta) = & D_1 e^{i\omega_+\eta + \frac{i\omega_-}{\rho} \ln[2 \cosh(\rho\eta)]} {}_2F_1\left(1 - \frac{i\omega_-}{\rho}, -\frac{i\omega_-}{\rho}; 1 + \frac{i\omega_{\text{in}}}{\rho}; \frac{1}{2}[1 + \tanh(\rho\eta)]\right) \\ & + D_2 e^{-i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln[2 \cosh(\rho\eta)]} {}_2F_1\left(1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{\text{in}}}{\rho}; \frac{1}{2}[1 + \tanh(\rho\eta)]\right), \end{aligned} \quad (4.17)$$

missä D_1 ja D_2 ovat vakioita. Tästä voidaan tunnistaa positiiviset ja negatiiviset moodien ratkaisut. Käyttämällä vielä normointiehtoa (2.42), voidaan positiiviset moodit u_k^{in} asymptoottisessa menneisyydessä kirjoittaa muodossa

$$u_k^{\text{in}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{\text{in}}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln[2 \cosh(\rho\eta)]} {}_2F_1\left(1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{\text{in}}}{\rho}; \frac{1}{2}[1 + \tanh(\rho\eta)]\right). \quad (4.18)$$

Asymptoottisen tulevaisuuden moodit saadaan puolestaan ratkaisuna singulaarisen pisteen $u = 1$ ympäristössä. Tällöin positiiviset ratkaisut u_k^{out} ovat muotoa

$$u_k^{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{\text{out}}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln[2 \cosh(\rho\eta)]} {}_2F_1\left(1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 + \frac{i\omega_{\text{out}}}{\rho}; \frac{1}{2}[1 - \tanh(\rho\eta)]\right) \quad (4.19)$$

Käyttämällä hypergeometristen funktioiden lineaarisia muunnoksia [43]

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, ; c; z) &= (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_2F_1(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-z) \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; a+b-a+1; 1-z) \end{aligned} \quad (4.20)$$

ja

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z) \quad (4.21)$$

voidaan moodit u_k^{in} kirjoittaa moodien u_k^{out} lineaarikombinaationa

$$u_k^{\text{in}} = \left(\frac{\omega_{\text{out}}}{\omega_{\text{in}}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{i\omega_{\text{in}}}{\rho})\Gamma(-\frac{i\omega_{\text{out}}}{\rho})}{\Gamma(-\frac{i\omega_{\pm}}{\rho})\Gamma(1 - \frac{i\omega_{\pm}}{\rho})} u_k^{\text{out}} + \left(\frac{\omega_{\text{out}}}{\omega_{\text{in}}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{i\omega_{\text{in}}}{\rho})\Gamma(\frac{i\omega_{\text{out}}}{\rho})}{\Gamma(\frac{i\omega_{\pm}}{\rho})\Gamma(1 + \frac{i\omega_{\pm}}{\rho})} u_{-k}^{\text{out}*},$$

josta voidaan tunnistaa Bogoliubovin kerroin

$$\beta_k = \left(\frac{\omega_{\text{out}}}{\omega_{\text{in}}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{i\omega_{\text{in}}}{\rho})\Gamma(\frac{i\omega_{\text{out}}}{\rho})}{\Gamma(\frac{i\omega_{\pm}}{\rho})\Gamma(1 + \frac{i\omega_{\pm}}{\rho})}. \quad (4.22)$$

Käyttämällä gammafunktion ominaisuuksia

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \sin(\pi x)} \quad \text{ja} \quad \Gamma(1 \pm x) = \pm x \Gamma(\pm x) \quad (4.23)$$

saadaan

$$|\beta_k|^2 = \frac{\sinh^2(\pi\omega_-/\rho)}{\sinh(\pi\omega_{\text{in}}/\rho) \sinh(\pi\omega_{\text{out}}/\rho)}. \quad (4.24)$$

Koska $|\beta_k|^2$ poikkeaa nolasta, voidaan tämä tulkita hiukkastuottona seurauksena avaruuden laajenemisesta. Tarkastellaan vielä tilannetta, jossa massa $m = 0$. Tällöin yhtälöistä (4.12) nähdään, että $\omega_- = 0$, jolloin myöskin $|\beta_k|^2 = 0$. Tässä tapauksessa hiukkastuottoa ei tapahdu. Tämä on yhdenmukaista Parkerin tulosten kanssa, sillä konformaalisella kytkennällä ja massan ollessa nolla kenttä on invariantti konformaalisissa muunnoksissa.

4.2 Asymptoottisesti säteilyn dominoima malli

Tarkastellaan neliulotteista FLRW-universumia, jonka viivaelementti on

$$ds^2 = C(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2), \quad (4.25)$$

ja konformaalisesti tekijäksi valitaan

$$C(\eta) = a^2 + b^2\eta^2, \quad -\infty < \eta < \infty, \quad (4.26)$$

missä $a, b \in (0, \infty)$. Tämä kuvaa universumia joka ensin kutistuu kohti hetkeä $t = \eta = 0$, jonka jälkeen se laajenee, kun $\eta > 0$. Tätä mallia käytti J. Audretsch ja G. Schäfer tarkastellessaan hiukkastuottoa [44]. Tarkasteltaessa tämän universumin asymptoottisia alueita nähdään skaalatekijän $a(t)$ olevan verrannollinen koordinaattiajan neliöjuureen $a(t) \propto t^{1/2}$, joten universumi lähestyy säteilyn dominoimaa universumia. Vaikka avaruusaika ei olekaan asymptoottisesti staattinen, on se silti hitaasti muuttuva sillä

$$\frac{d^l}{d\eta^l} \left(\frac{\dot{C}}{C} \right) = \frac{d^l}{d\eta^l} \left(\frac{2b^2\eta}{a^2 + b^2\eta^2} \right) \xrightarrow{\eta \rightarrow \pm\infty} 0 \quad (4.27)$$

kaikilla $l \geq 0$. Tällöin yhtälön (2.44) nojalla adiabaattisista approksimaatioista tulee eksakteja, kaikki adiabaattisten kertalukujen ratkaisut antavat saman vastauksen asymptoottisilla alueilla. Sijoittamalla nyt $W_k^{(0)} = \omega_k(\eta) = \sqrt{k^2 + m^2a^2 + m^2b^2\eta^2}$ yhtälöön (2.43) nähdään, että suurilla muuttujan $|\eta|$ arvoilla

$$\chi_k^{(0)}(\eta) \sim \frac{1}{\sqrt{2mb|\eta|}} e^{\mp imb\eta^2/2}, \quad \eta \rightarrow \pm\infty. \quad (4.28)$$

Positiivisten moodien tulee redusoitua asymptoottisilla alueilla näihin moodeihin.

Sijoittamalla metriikka (4.25) konformaalisella tekijällä (4.26) ja konformaalisella kytkennällä skalaarikentän liikeyhtälöön tulee funktion $\chi_k(\eta)$ toteuttaa yhtälö

$$\frac{d^2\chi}{d\eta^2} + (k^2 + m^2a^2 + b^2m^2\eta^2)\chi = 0. \quad (4.29)$$

Tekemällä muuttujanvaihto $z = (i-1)\sqrt{mb}\eta$, voidaan yhtälö (4.29) kirjoittaa muodossa

$$\frac{d^2\chi_k}{dz^2} - \left(\frac{1}{4}z^2 - ip \right) \chi_k = 0, \quad (4.30)$$

missä on määritelty

$$p := \frac{1}{2mb}(k^2 + m^2a^2). \quad (4.31)$$

Yhtälön (4.30) ratkaisut voidaan kirjoittaa parabolisten sylinterifunktioiden $D_c(z)$ avulla muodossa

$$\chi_k(\eta) = C_1 D_{ip-1/2}((i-1)\sqrt{mb}\eta) + C_2 D_{-ip-1/2}((-1-i)\sqrt{mb}\eta), \quad (4.32)$$

missä C_1 ja C_2 ovat vakioita. Käyttämällä parabolisten sylinterifunktioiden asymptoottisia kaavoja [43]

$$D_c(z) \sim e^{-z^2/4} z^c, \quad -\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \quad (4.33)$$

$$D_c(z) \sim e^{z^2/4} z^{-c-1}, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}, \quad (4.34)$$

voidaan tunnistaa positiivisten moodien ajasta riippuvat ratkaisut χ_k^{in} asymptotisessa menneisydessä ja χ_k^{out} asymptotisessa tulevaisuudessa. Käyttämällä normointiehtoa (2.42) saadaan ajasta riippuvien osien normoiduiksi positiivisiksi ratkaisuiksi

$$\chi_k^{\text{in}}(\eta) = (2mb)^{-1/4} e^{-\frac{\pi p}{4}} D_{ip-1/2}((i-1)\sqrt{mb}\eta), \quad (4.35)$$

$$\chi_k^{\text{out}}(\eta) = (2mb)^{-1/4} e^{-\frac{\pi p}{4}} D_{-ip-1/2}((i+1)\sqrt{mb}\eta). \quad (4.36)$$

Bogoliubovin kertoimien löytämiseksi käytetään parabolisten sylinterifunktioiden lineaarisuutta [43]

$$D_c(z) = e^{\pi ci} D_c(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-c)} e^{\frac{i\pi}{2}(c+1)} D_{-c-1}(-iz), \quad (4.37)$$

ja kirjoitetaan asymptotisen menneisyyden positiiviset moodit u_k^{in} asymptotisen tulevaisuuden moodien avulla muodossa

$$u_k^{\text{in}} = \frac{\sqrt{2\pi} e^{\frac{\pi i}{2}(ip+1/2)}}{\Gamma(\frac{1}{2}(1-ip))} u_k^{\text{out}} - i e^{-\pi p} u_k^{\text{out}*}, \quad (4.38)$$

josta voidaan tunnistaa Bogoliubovin kerroin $\beta_k = -i \exp(-\pi p)$, jolloin

$$|\beta_k|^2 = e^{-\pi(\frac{k^2+m^2 a^2}{mb})}. \quad (4.39)$$

Bogoliubovin kertoimen poiketessa nolasta, universumin laajenemisen seurauksena syntyy hiukkastuottoa. Tarkastelemalla massattoman hiukkasen tapausta nähdään, että

$$\lim_{m \rightarrow 0^+} e^{-\pi(\frac{k^2+m^2 a^2}{mb})} = 0. \quad (4.40)$$

Jälleen havaitaan, että hiukkastuottoa ei tapahdu massattomassa tapauksessa.

5 Mustan aukon hiukkastuotto

Mustat aukot ovat eräitä yleisen suhteellisuusteorian mielenkiintoisimmista objekteista. Ne ovat eksoottisia, mutta syntyvät luonnollisella tavalla gravitaatiovuorovaikutuksesta. Koska gravitaatio vaikuttaa avaruusajan geometriaan, voi materiajakauman aiheuttama gravitaatiokenttä tulla niin voimakkaaksi, että se muuttaa itse avaruusajan kausaalista rakennetta. Se voi tulla jopa niin voimakkaaksi, että edes valo ei pysty karkaamaan tästä gravitaatiokentästä. Koska mikään ei pysty karkaamaan mustasta aukosta, se näyttäisi olevan vähiten lupaava paikka minkäänlaisen hiukkastuoton etsimiseen. On kuitenkin olemassa klassinen ilmiö nimeltään *superradianssi* [45, 46], jossa pyörivään mustaan aukkoon sopivassa moodissa saapuva aalto siroaa mustasta aukosta alkuperäistä suuremmalla amplitudilla. Y. Zel'dovich esitti artikkelissaan [45] hypoteesin, että tälle klassiselle ilmiölle olisi analoginen kvanttimekaaninen vastine. Tämä vastaisi spontaania parinmuodostusta Kerrin metriikassa, jossa musta aukko absorboisi toisen hiukkasen toisen karatessa äärettömyyteen vieden mukanaan osan mustan aukon pyörimisenergiasta ja pyörimismäärästä. Tämän ovat vahvistaneet A. Starobinsky [47] ja W. Unruh [48].

Kerrin mustan aukon kohdalla hiukkastuoton laskut tehtiin oletuksella, että avaruusaikaa kuvasi stationaarinen mustan aukon ratkaisu. Unruhin tekemän analyysin kohdalla ei kuitenkaan ollut ollenkaan selvää oliko kentän alkutilaksi valittu vakuumi fysikaalinen [48]. Hieman myöhemmin S. Hawking käsitteli fysikaalisesti relevantimpaa tapausta, jossa musta aukko syntyy gravitaatioluhistuman seurauksena. Näissä tutkimuksissa [49, 50] Hawking löysi, että hiukkastuoton tulokset muuttuvat merkittävästi, kun ei enää tarkastella stationaarista mustaa aukkoa. Hawking löysi, että jopa Schwarzschildin mustan aukon kohdalla hiukkastuottoa tapahtuu myöhäisillä ajanhetkillä ja näiden äärettömyyteen emittoituneiden hiukkasten spektri vastasi mustan kappaleen säteilyä lämpötilalla $T = \kappa/(2\pi)$, missä κ on mustan aukon pintagravitaatio¹².

Hawkingin tuloksella oli valtavat seuraukset. Muutamaa vuotta aikaisemmin J. Bekenstein tutkiessaan mustan aukon entropiaa ehdotti mustan aukon lämpötilan olevan verrannollinen sen pintagravitaatioon [51]. Hawking tuloksellaan näin vahvisti tämän ehdotuksen sitoen yhteen mustien aukkojen fysiikan ja tavallisen termodynamiikan. Seuraavaksi käydään läpi Hawkingin säteilyn johto seuraten Hawkingin alkuperäispaperia [50].

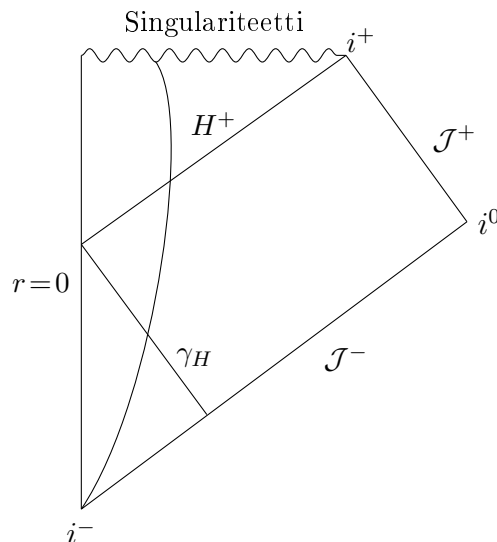
¹²Staattisen Killingin horisontin pintagravitaatio κ on kiihtyvyyys, joka tarvitaan pitämään objekti horisontilla.

5.1 Hawkingin säteily

Tarkastellaan tilannetta jossa pallosymmetrinen massajakauma, esimerkiksi tähti, luhistuu muodostaen mustan aukon. Tämän prosessin Penrosen diagrammi on annettu kuvassa 5.1. Kaikkein yksinkertaisin tilanne syntyy tähden luhistuessa staattiseksi varauksettomaksi mustaksi aukoksi. Tämänlaisen mustan aukon lopullista stationaarista tilaa kuvaa Schwarzschildin ratkaisu metriikalla

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (5.1)$$

missä M on mustan aukon massa ja (r, θ, φ) tavalliset pallokoordinaatiston koordinaatit. Tällä metriikalla on singulariteetti pisteessä $r = 0$, sekä koordinaattisingulariteetti pisteessä $r = 2M$.



Kuva 5.1. Penrosen diagrammi, jossa luhistuva tähti muodostaa mustan aukon. Pisteet i^+ ja i^- ovat vastaavasti tulevaisuuden ja menneisyyden ajanluonteisia äärettömyyksiä ja piste i^0 puolestaan paikanluonteinen äärettömyys. Alueet \mathcal{J}^+ ja \mathcal{J}^- ovat tulevaisuuden ja menneisyyden valonluonteisten äärettömyyksen pinnat.

Tarkastellaan massatonta skalaarikenttää, jonka Kleinin-Gordonin yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\square\phi = g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] = 0. \quad (5.2)$$

Koska Riccin skalaari R on Schwarzschildin metriikalla nolla, ei kytkentätermiä ξR tule mukaan. Kenttäoperaattori ϕ voidaan esittää nyt muodossa

$$\phi = \sum_i [a_i f_i + a_i^\dagger f_i^*], \quad (5.3)$$

missä joukko $\{f_i\}$ muodostaa täydellisen joukon positiivisia moodeja toteuttaen ortogonaalisuusehdon (1.49), kun Cauchyn pinnaksi valitaan menneisyyden valonluonteisen äärettömyyden pinta \mathcal{J}^- . Näiden moodien avulla voidaan määrittää vakuumi asymptoottissa menneisyydessä. Kentän kvantisointiin asymptoottissa tulevaisuudessa tulevaisuuden valonluonteisen äärettömyyden pinta \mathcal{J}^+ ei yksistään riitä, sillä se ei ole Cauchyn pinta. Esimerkiksi kausaaliset käyrät, jotka päätyvät singulariteettiin eivät koskaan saavu tälle pinnalle. Ottamalla mukaan tulevaisuuden Cauchyn horisontti H^+ muodostaa pinta $H^+ \cup \mathcal{J}^+$ Cauchyn pinnan, joten kenttä voidaan tällöin esittää muodossa

$$\phi = \sum_i [b_i p_i + b_i^\dagger p_i^* + c_i q_i + c_i^\dagger q_i^*], \quad (5.4)$$

missä joukko $\{p_i\}$ muodostaa täydellisen joukon positiivisia moodeja pinnalla \mathcal{J}^+ jotka ovat puhtaasti horisontin suhteen poismeneviä, toisin sanoen ne ovat nolla horisontilla H^+ . Joukko $\{q_i\}$ puolestaan muodostaa täydellisen joukon¹³ pinnalla H^+ . Näiden väliset relaatiot saadaan jälleen Bogoliubovin muunnosten avulla:

$$p_i = \sum_j [\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*], \quad (5.5)$$

$$q_i = \sum_j [\gamma_{ij} f_j + \eta_{ij} f_j^*]. \quad (5.6)$$

Positiiviset moodit saadaan ratkaisemalla Kleinin-Gordonin yhtälö annetulla metriikalla. Sijoittamalla nyt metriikka (5.1) yhtälöön (5.2) saadaan

$$\frac{1}{h} \partial_t^2 \phi - \frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 h \partial_r \phi] - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta \partial_\theta \phi] - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \phi = 0, \quad (5.7)$$

missä $h = 1 - 2M/r$. Yllä olevan yhtälön (5.7) kaksi jälkimmäistä termiä ovat saman muotoisia kuin litteän avaruuden Laplacen yhtälön kulmaosat, jonka ratkaisut voidaan antaa palloharmonisten funktioiden Y_ℓ^m avulla. Tällöin yhtälön (5.7) separoituva ratkaisu on muotoa

$$\phi = \psi(r, t) Y_\ell^m(\theta, \varphi). \quad (5.8)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (5.7) saadaan

$$\partial_t^2 \psi - \frac{h}{r^2} \partial_r [r^2 h \partial_r \psi] = h \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \psi. \quad (5.9)$$

¹³Horisontilla H^+ ei ole ajanluonteista Killingin vektoria, joten on epäselvää tulisiko näihin moodeihin asettaa jonkinlainen positiivisuusehto. Näiden valinta ei kuitenkaan vaikuta itse laskuun.

Määritellään uusi radiaalikoordinaatti r^* kaavalla

$$\frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{h}, \quad (5.10)$$

joka integroituna antaa niin sanotun *kilpikonnakoordinaatin*

$$r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|. \quad (5.11)$$

Horisontilla $r = 2M$ radiaalikoordinaatti r^* ei ole määritelty. Määrittelemällä vielä uusi muuttuja $\psi = v/r$ voidaan yhtälö (5.9) kirjoittaa koordinaatin r^* avulla muodossa

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v(t, r^*) - \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} v(t, r^*) + h \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] v(t, r^*) = 0, \quad (5.12)$$

missä r saadaan implisiittisesti kaavasta (5.11). Koska etsitään positiivisia ratkaisuja, voidaan olettaa harmoninen aikariippuvuus $v(t, r^*) = R_{\ell\omega}(r^*)e^{-i\omega t}$. Tällöin saadaan tavallinen differentiaaliyhtälö

$$(\partial_{r^*}^2 + \omega^2 - V_\ell(r))R_{\ell\omega}(r^*) = 0, \quad (5.13)$$

missä

$$V_\ell(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \quad (5.14)$$

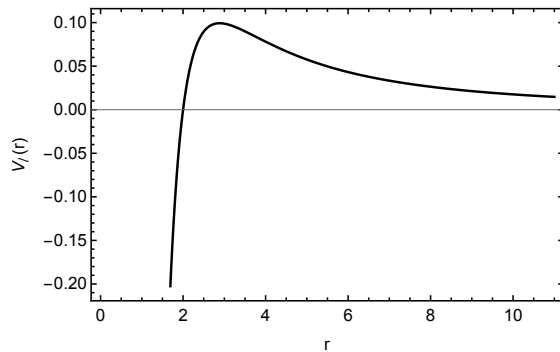
on nimeltään *Reggen-Wheelerin potentiaalitermi* [52]. Kleinin-Gordonin yhtälön (5.2) separoituva ratkaisu positiivisille moodeille on siis muotoa

$$u_{\omega\ell m}(t, r^*) = \frac{1}{r} R_{\ell\omega}(r^*) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (5.15)$$

missä funktio $R_{\ell\omega}$ toteuttaa radiaaliyhtälön, joka on auki kirjoitettuna

$$\frac{d^2 R_{\ell\omega}}{dr^{*2}} + \left\{ \omega^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \right\} R_{\ell\omega} = 0. \quad (5.16)$$

Tälle yhtälölle on erittäin hankalaa löytää ratkaisuja, mutta tutkimalla tarkemmin potentiaalitermiä (5.14) voidaan tarkastella moodien käyttäytymistä. Lähellä alueita \mathcal{J}^\pm , sekä horisontilla H^+ potentiaalitermi (5.14) häviää muodostaen näin potentiaalivallin. Reggen-Wheelerin potentiaalitermi radiaalikoordinaatin r funktiona on annettu kuvassa 5.2.



Kuva 5.2. Regge-Wheelerin potentiaalitermi esitettyinä muuttujan r funktiona, kun $\ell = 1$ ja $2M = 1$.

Kuvasta 5.2 nähdään, että potentiaalitermi (5.14) muodostaa potentiaalivallin. Jos siis ajatellaan jotain radiaaliyhtälön (5.16) ratkaisua joka saapuu asymptoottisilta alueilta \mathcal{J}^\pm , niin osa siitä heijastuu takaisin potentiaalivallista ja osa menee läpi. Positiiviset moodit asymptoottisilla alueilla voidaan kuitenkin laskea, sillä näillä alueilla Regge-Wheelerin potentiaalitermi häviää. Yhtälön (5.16) ratkaisut ovat tällöin muotoa $e^{\pm i\omega r^*}$, joten positiiviset ratkaisut asymptoottisilla alueilla ovat muotoa

$$u_{\omega\ell m}(t, r^*) \sim \frac{C_1}{r} e^{-i\omega v} Y_\ell^m(\theta, \varphi) + \frac{C_2}{r} e^{-i\omega u} Y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad (5.17)$$

missä C_1 ja C_2 ovat vakioita ja u ja v ovat *Kruskalin nollakoordinaatit*

$$\begin{cases} u = t - r^* \\ v = t + r^*, \end{cases} \quad (5.18)$$

jotka kuvaavat horisontin suhteen ulospäin meneviä (u) ja sisäänpäin tulevia (v) aaltoja. Koska pääasiassa ollaan kiinnostuneita alueella \mathcal{J}^- sisäänpäin tulevista ja alueella \mathcal{J}^+ ulospäin menevistä aalloista, niin määritellään vastaavasti normoidut positiiviset moodit

$$f_{\omega'\ell m} \sim \frac{1}{4\pi r \sqrt{\omega'}} e^{-i\omega' v} Y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad (5.19)$$

$$p_{\omega\ell m} \sim \frac{1}{4\pi r \sqrt{\omega}} e^{-i\omega u} Y_\ell^m(\theta, \varphi). \quad (5.20)$$

Jatkossa jätetään indeksit ℓ ja m kirjoittamatta notaation helpottamiseksi.

Bogoliubovin kertoimien määrittäminen mustan aukon hiukkastuoton kohdalla on erittäin vaikeaa, sillä aaltoyhtälöllä ei ole Schwarzschildin metriikalla analyyttistä ratkaisua. Mikäli eksaktit ratkaisut voitaisiin löytää, olisi mahdollista etsiä Bogoliubovin kertoimet analogiseen tapaan kuin kappaleen 4 hiukkastuoton kohdalla.

Hawkingin mukaan Bogoliubovin kertoimet voidaan kuitenkin määrittää seuraavalla tavalla. Tutkitaan asymptoottisen tulevaisuuden moodia p_ω , joka kulkee ajassa *taaksepäin*. Määrittämällä tämän moodin muoto alueella \mathcal{J}^- , voidaan Bogoliubovin kertoimet laskea kaavoista

$$\alpha_{\omega\omega'} = \langle p_\omega | f_{\omega'} \rangle = -i \int_{\mathcal{J}^-} dv r^2 d\Omega (p_\omega \partial_v f_{\omega'}^* - f_{\omega'}^* \partial_v p_\omega) \quad (5.21)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = -\langle p_\omega | f_{\omega'} \rangle = i \int_{\mathcal{J}^-} dv r^2 d\Omega (p_\omega \partial_v f_{\omega'} - f_{\omega'} \partial_v p_\omega), \quad (5.22)$$

missä $d\Omega$ on pallonpinnan kulmaosien tilavuusmitta ja yleisyyttä loukkaamatta Cauchyn pinnaksi on valittu \mathcal{J}^- . Tarkasteltaessa hiukkastuottoa törmätään myös toisenlaiseen ongelmaan. Alueella \mathcal{J}^+ kokonaishiukasmäärän odotusarvo

$$\langle 0 | N_\omega | 0 \rangle := \langle N_\omega \rangle = \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2, \quad (5.23)$$

missä $|0\rangle$ on alueen \mathcal{J}^- vakuumitila, osoittautuu nimittäin äärettömäksi. Jokainen alueen \mathcal{J}^+ moodi sisältää äärettömän määrän hiukkasia. Luhistuva tähti tuottaa tasaisen säteilyvuon kohti aluetta \mathcal{J}^+ , jonka vuoksi kokonaisvuo on ääretön. Suurempi mielenkiinto kohdistuukin emittoituneeseen hiukkaslukumäärään aikayksikössä. Tämä voidaan löytää lokalisoimalla moodit esimerkiksi käyttäen aaltopaketteja.

Kuvitellaan aaltopakettia, joka on keskittynyt taajuuden ω ympärille alueella \mathcal{J}^+ . Aaltopaketin edetessä taaksepäin alueelta \mathcal{J}^+ kohti horisonttia osa siitä, $1 - \Gamma_\omega$, heijastuu potentiaalitermin (5.14) johdosta saavuttaen alueen \mathcal{J}^- oleellisesti ilman muutosta taajuuteen ω . Toinen osa, Γ_ω , puolestaan päättyy luhistuvan kappaleen sisälle, jossa muuttuvan gravitaatiokentän johdosta aaltopaketti päättyy alueelle \mathcal{J}^- positiivisten ja negatiivisten moodien superpositiona. Aaltopaketti p_ω voidaan siis kirjoittaa muodossa $p_\omega = p_\omega^{(1)} + p_\omega^{(2)}$, missä yläindeksi (1) viittaa heijastuneeseen osaan ja yläindeksi (2) läpi menneeseen osaan. Sironnan seurauksena Wronskin ehto

$$\int_0^\infty d\omega' (|\alpha_{\omega\omega'}^{(2)}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}^{(2)}|^2) = 1 \quad (5.24)$$

ei enää päde, vaan sen oikea puoli on korvattava sirontakertoimella Γ_ω . Tällöin voidaan kirjoittaa [50]

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega\omega'} &= \alpha_{\omega\omega'}^{(1)} \delta(\omega' - \omega) + \alpha_{\omega\omega'}^{(2)} \\ \beta_{\omega\omega'} &= \beta_{\omega\omega'}^{(2)} \\ \Gamma_\omega &= \int_0^\infty d\omega' (|\alpha_{\omega\omega'}^{(2)}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}^{(2)}|^2), \end{aligned} \quad (5.25)$$

γ_H alkaa pisteestä $v = v_0$ ja on viimeinen valonluonteinen geodeesi, joka pääsee alueelle \mathcal{J}^+ . Myöhempanä ajanhetkenä $v > v_0$ lähteneet geodeesit päätyvät mustaan aukkoon eivätkä koskaan rekisteröidy alueella \mathcal{J}^+ . Olkoon n^μ tapahtumahorisonttia H^+ vastaan tulevan valonluonteisen geodeesin tangenttivektori joka on normalisoitu siten, että $n^\mu l_\mu = 1$, missä l^μ on horisontin tangenttivektori. Geodeesi γ on tällöin yhdistetty horisonttiin H^+ sekä pisteeseen $v = v_0$ poikkeamavektorilla $-\varepsilon n^\mu$, missä $\varepsilon > 0$. Jotta löydetään aaltopakettien $p_\omega^{(2)}$ muoto alueella \mathcal{J}^- , tulee tutkia sitä miten geodeesien γ ja γ_H välinen affiini etäisyys muuttuu vektoria n^μ pitkin kunnes saavutaan alueelle \mathcal{J}^- .

Olkoon $x^\mu(\lambda)$ valonluonteinen geodeesi, joka tulee kohti horisonttia ja olkoon p^μ sen tangenttivektori. Koska vektori p^μ on yhdensuuntainen vektorin n^μ kanssa, niin

$$p^\mu = Dn^\mu, \quad (5.27)$$

missä D on vakio. Seuraavaksi tarvitaan tavallisia *Kruskalin koordinaatteja*

$$\begin{cases} U = -Ce^{-\kappa u} \\ V = Ce^{\kappa v}, \end{cases} \quad (5.28)$$

missä on merkitty $C = 4M$ ja κ on pintagravitaatio, joka on Schwarzschildin mustalle aukolle $\kappa = (4M)^{-1}$. Lähellä horisonttia Kruskalin koordinaatit (5.28) ovat affiineja parametreja [53], joten affiini parametri λ on koordinaatin u avulla lausuttuna

$$\lambda = -Ce^{-\kappa u}. \quad (5.29)$$

Horisontilla H^+ affiini parametri saa arvon $\lambda = 0$. Toisin kuin Kruskalin nollakoordinaatti u , affiini parametri λ on hyvä koordinaatti lähellä horisonttia H^+ , joten poikkeamavektori yhdistää valonluonteiset geodeesit γ_H ja γ . Horisontin pisteessä $\lambda = 0$ ja geodeesin γ pisteessä λ , missä $\lambda < 0$. Kruskalin koordinaatit (5.28) muodostavat horisontin lähellä eräänlaisen normaalikoordinaatiston [53], joten konnektiotermit häviävät ja geodeesiyhtälö on yksinkertaisesti

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0, \quad (5.30)$$

joten

$$\lambda p^\mu = x^\mu(\lambda) - x^\mu(0) = -\varepsilon n^\mu. \quad (5.31)$$

Yhtälöiden (5.27) ja (5.31) avulla saadaan relaatio

$$\varepsilon = -D\lambda. \quad (5.32)$$

Seuraavaksi jäljitetään geodeesi γ koko matka takaisin alueelle \mathcal{J}^- . Koska tämä alue on melkein Minkowskilainen, saadaan geodeesien v_0 ja v väliseksi erotukseksi yhtälöitä (5.29) ja (5.32) käyttämällä

$$v_0 - v = \varepsilon = -D\lambda = -CD e^{-\kappa u}. \quad (5.33)$$

Kääntämällä tämä relaatio saadaan

$$u = -\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{v_0 - v}{CD}\right), \quad (5.34)$$

mikä antaa koordinaatin u muodon alueella \mathcal{J}^- . Asymptoottisen tulevaisuuden \mathcal{J}^+ ulospäin menevän moodin p_ω muoto alueella \mathcal{J}^- on siis

$$p_\omega^{(2)} = \frac{1}{4\pi r \sqrt{\omega}} e^{i\frac{\omega}{\kappa} \ln\left(\frac{v_0 - v}{CD}\right)} Y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad (5.35)$$

Arvoilla $v > v_0$ ratkaisu $p_\omega^{(2)}$ häviää, sillä tässä tapauksessa sen olisi pitänyt tulla horisontin läpi päästäkseen alueelle \mathcal{J}^+ .

Bogoliubovien kertoimet voidaan nyt laskea yhtälöiden (5.21) mukaan kaavoista

$$\alpha_{\omega\omega'}^{(2)} = \langle p_\omega^{(2)} | f_{\omega'} \rangle = -i \int_{\mathcal{J}^-} dv r^2 d\Omega (p_\omega^{(2)} \partial_v f_{\omega'}^* - f_{\omega'}^* \partial_v p_\omega^{(2)}), \quad (5.36)$$

$$\beta_{\omega\omega'}^{(2)} = -\langle p_\omega^{(2)} | f_{\omega'} \rangle = i \int_{\mathcal{J}^-} dv r^2 d\Omega (p_\omega^{(2)} \partial_v f_{\omega'} - f_{\omega'} \partial_v p_\omega^{(2)}). \quad (5.37)$$

Koska moodit $p_\omega^{(2)}$ häviävät rajoilla $v = \infty$ ja $v = -\infty$, niin tekemällä ylläoleviin yhtälöihin osittaisintegroinnit saadaan

$$\alpha_{\omega\omega'}^{(2)} = -2i \int_{\mathcal{J}^-} dv r^2 d\Omega p_\omega^{(2)} \partial_v f_{\omega'}^*, \quad (5.38)$$

$$\beta_{\omega\omega'}^{(2)} = 2i \int_{\mathcal{J}^-} dv r^2 d\Omega p_\omega^{(2)} \partial_v f_{\omega'}. \quad (5.39)$$

Sijoittamalla nyt ratkaisut (5.19) ja (5.35) yhtälöihin (5.38) ja (5.39) sekä suorittamalla kulmaintegroinnit saadaan

$$\alpha_{\omega\omega'}^{(2)} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^{v_0} dv e^{i\frac{\omega}{\kappa} \ln\left(\frac{v_0 - v}{CD}\right) + i\omega'v}, \quad (5.40)$$

$$\beta_{\omega\omega'}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^{v_0} dv e^{i\frac{\omega}{\kappa} \ln\left(\frac{v_0 - v}{CD}\right) - i\omega'v}. \quad (5.41)$$

Tekemällä muuttujanvaihto $x = v_0 - v$ voidaan nämä kirjoittaa muodossa

$$\alpha_{\omega\omega'}^{(2)} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} (CD)^{i\omega/\kappa} e^{i\omega'v_0} \int_0^\infty dx x^{i\omega/\kappa} e^{-i\omega'x}, \quad (5.42)$$

$$\beta_{\omega\omega'}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} (CD)^{i\omega/\kappa} e^{-i\omega'v_0} \int_0^\infty dx x^{i\omega/\kappa} e^{i\omega'x}. \quad (5.43)$$

Yhtälön (5.42) integraali ei kuitenkaan suppene itseisesti. Integraalin eksponenttiin voidaan kuitenkin asettaa infinitesimaalinen negatiivinen reaaliosa $-\varepsilon$, jolloin integraali suppenee. Käyttäen nyt kaavaa

$$\int_0^\infty dx x^a e^{-bx} = b^{-1-a} \Gamma(1+a), \quad (5.44)$$

saadaan Bogoliubovin kertoimiksi

$$\alpha_{\omega\omega'}^{(2)} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} (CD)^{i\omega/\kappa} e^{i\omega'v_0} (i\omega' + \varepsilon)^{-1-i\omega/\kappa} \Gamma(1+i\omega/\kappa), \quad (5.45)$$

$$\beta_{\omega\omega'}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} (CD)^{i\omega/\kappa} e^{-i\omega'v_0} (-i\omega' + \varepsilon)^{-1-i\omega/\kappa} \Gamma(1+i\omega/\kappa). \quad (5.46)$$

Tästä huomataan myös, että $\beta_{\omega\omega'}^{(2)} = -i\alpha_{\omega(-\omega')}^{(2)}$. Käyttämällä vielä kaavaa

$$\ln(-\omega' - i\varepsilon) = -i\pi + \ln \omega' \quad (5.47)$$

nähdään, että

$$\alpha_{\omega\omega'}^{(2)} = -e^{\pi\omega/\kappa} e^{2i\omega'v_0} \beta_{\omega\omega'}^{(2)}, \quad (5.48)$$

jolloin

$$|\alpha_{\omega\omega'}^{(2)}| = e^{\pi\omega/\kappa} |\beta_{\omega\omega'}^{(2)}|. \quad (5.49)$$

Hiukkastuoton laskemiseksi todetaan, että yhtälön (5.49) nojalla sirontakerroin Γ_ω voidaan kirjoittaa muodossa

$$\Gamma_\omega = \int_0^\infty d\omega' (|\alpha_{\omega\omega'}^{(2)}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}^{(2)}|^2) = \int_0^\infty d\omega' (e^{2\pi\omega/\kappa} - 1) |\beta_{\omega\omega'}^{(2)}|^2. \quad (5.50)$$

Keskimääräinen hiukkasten tuotto aikayksikköä kohti alueella \mathcal{J}^+ on siis

$$\langle N_\omega \rangle = \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega\omega'}^{(2)}|^2 = \frac{\Gamma_\omega}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1}. \quad (5.51)$$

Tämä vastaa mustan kappaleen säteilyä, jonka lämpötila on

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (5.52)$$

Yhtälössä (5.51) esiintyvä taajuudesta riippuva sirontakerroin Γ_ω otettiin mukaan aaltopakettien yhteydessä. Tarkkaan ottaen yhtälön (5.51) jakauma ei ole tällöin Planckin jakauma. Sitä voidaan kuitenkin pitää termaalisena ajateltaessa sitä seuraavalla tavalla. Mikäli musta aukko olisi ympäristössä, jonka lämpötilan antaa yhtälö (5.52), niin sama osa $1 - \Gamma_\omega$ sisäänpäin menevästä säteilystä heijastuu takaisin kuin mitä poistuu ulospäin menevästä säteilystä. Täten musta aukko absorboi

vain osan Γ_ω sisäänpäin tulevasta säteilystä. Tästä seuraa, että emissio ja absorptio moodia kohtaan on riippumaton kertoimesta Γ_ω ja identtinen mustalle kappaleelle.

Hawking käsitteli paperissaan myös fermioneja, joille pätee antikommutaatiorelaatiot. Tällöin sirontakerroin on

$$\Gamma_\omega = \int_0^\infty d\omega' (|\alpha_{\omega\omega'}^{(2)}|^2 + |\beta_{\omega\omega'}^{(2)}|^2). \quad (5.53)$$

Itse laskut voidaan suorittaa analogiseen tapaan, jolloin massattomien fermionien kohdalla keskimääräiseksi hiukkastuotoksi yksikkötaajuutta kohti saadaan

$$\langle N_\omega \rangle = \frac{\Gamma_\omega}{e^{2\pi\omega/\kappa} + 1}. \quad (5.54)$$

Tämä tulos on juuri se, mikä oli odotettavissa hiukkasilta jotka noudattavat Fermi-statistiikkaa. Mikäli luhistuva kappale olisi pyörivässä liikkeessä ja varattu, ei lopullista stationaarista tilaa kuvaisi enää Schwarzschildin ratkaisu, vaan Kerrin-Newmanin ratkaisu, jota kuvaa massa M , kiertoimpulssi J sekä varaus Q . Suorittamalla laskut tällä metriikalla saadaan hiukkastuotoksi [50]

$$\langle N_\omega \rangle = \frac{\Gamma_\omega}{e^{2\pi(\omega-m\Omega)/\kappa} \pm 1}, \quad (5.55)$$

missä Ω on horisontin kulmanopeus, m on hiukkasten pyörimismäärän kvanttiluku ja \pm vastaa fermionisia/bosonisia hiukkasia vastaavasti. Tämän seurauksena positiivisen pyörimismäärän m omaavien hiukkasten emissionopeus on suurempi kuin saman kvanttiluvun ℓ ja taajuuden ω omaavien hiukkasten, joilla on negatiivinen pyörimismäärä $-m$. Hiukkastuoton seurauksena mustan aukon pyörimisnopeus siis vähenee.

6 Hiukkastuotto varhaisessa maailmankaikkeudessa

Universumimme täydellinen evoluutio on vieläkin suuri mysteeri ja kenties eräs kosmologian mielenkiintoisimmista aiheista. Standardikosmologian mukaan universumimme sai alkunsa alkuräjähdyksestä noin 13,8 miljardia vuotta sitten. Hyvin nopeasti tämän jälkeen universumi koki todennäköisesti erittäin nopean kiihtyvän vaiheen nimeltään *inflaatio* [54, 55]. Inflaation jälkeen universumi oli jonkin aikaa säteilyn dominoima, kunnes säteilyn ja materian energiatheydet saavuttivat tasapainon ja universumi siirtyi materian dominoimaan aikakauteen. Nykyisten havaintojen perusteella universumimme laajenee tällä hetkellä myös kiihtyvään tahtiin [56]. Tämä on tavanomainen esitys. On kuitenkin olemassa eräs toinen mahdollisuus, jota ei yleensä tavanomaisessa esityksessä käsitellä, mutta joka on lähiaikoina saavuttanut suurta mielenkiintoa. Tämä mahdollisuus on *jäykän materian*¹⁴ *dominoima aikakausi*, joka asettuu ennen säteilyn dominoimaa aikakautta aivan universumimme alkuhetkille [57, 58].

Varhaisen maailmankaikkeuden jäykän materian aikakausi esiintyi ensimmäistä kertaa Y. Zel'dovichin kosmologisessa mallissa, jossa varhaisen universumin oletetaan koostuvan kylmästä baryonikaasusta [59]. Zel'dovichin tavoitteena oli tutkia mitä kosmologisia implikaatioita oli tilanyhtälöllä, jolle äänen nopeus vastaa valon nopeutta. Ideaalifluidin tilanyhtälö jäykälle materiaalille on muotoa $p = \rho$, missä p on fluidin paine ja ρ sen energiatiheys. Tämänlaisen fluidin skaalatekijä on verrannollinen koordinaattiajan kuutiojuureen $a(t) \propto t^{1/3}$ ja Friedmannin yhtälö puolestaan implikoi, että sen energiatiheys ρ on verrannollinen skaalatekijään kuten $\rho \propto a(t)^{-6}$.

Jäykkä materia esiintyy myös relativististen skalaarikenttien kohdalla sillä skalaarikenttä käyttäytyy kuten jäykkä fluidi, kun sen kineettinen energia dominoi sen potentiaalienergiaa. Kirjallisuudessa esiintyykin useita ehdotuksia missä kosminen inflaatio loppuu inflatonkentän siirtyessä jaksoon, jossa sen kineettinen energia dominoi [60, 61]. Tässä luvussa tutkitaan hiukkastuottoa jäykän materian dominoimassa universumissa.

6.1 Hiukkastuotto jäykän materian dominoimassa universumissa

Tarkastellaan neliulotteista FLRW-universumia, jonka viivaelementti on

$$ds^2 = C(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2). \quad (6.1)$$

¹⁴Englanniksi "stiff matter".

Valitaan konformaaliseksi tekijäksi

$$C(\eta) = b^2\eta, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad (6.2)$$

missä b on positiivinen vakio, joka kontrolloi universumin laajenemisnopeutta. Kun konformaalinen tekijä $C(\eta)$ kirjoitetaan muodossa

$$C(\eta) = \frac{\eta}{\eta_c}, \quad (6.3)$$

missä η_c on mallin *karakteristinen aika*, saadaan relaatio $\eta_c = 1/b^2$. Konformaalisella tekijällä (6.2) skaalatekijä $a(t)$ on verrannollinen koordinaattiajan kuutiojuureen $a(t) \propto t^{1/3}$, joten malli vastaa jäykän materian dominoimaa universumia. Asymptoottisessa tulevaisuudessa $\eta \rightarrow \infty$ avaruusaika on hitaasti muuttuva sillä

$$\frac{d^l}{d\eta^l} \left(\frac{\dot{C}}{C} \right) = \frac{d^l}{d\eta^l} \frac{1}{\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0 \quad (6.4)$$

kaikilla $l \geq 0$. Adiabaattiset approksimaatiot ovat jälleen eksakteja. Sijoittamalla nyt $W_k^{(0)} = \omega_k(\eta) = \sqrt{k^2 + m^2 b^2 \eta}$ yhtälöön (2.43) nähdään, että suurilla muuttujan η arvoilla

$$\chi_k^{(0)}(\eta) \sim \frac{1}{\sqrt{2bm} \eta^{1/4}} e^{-\frac{2}{3} b m \eta^{3/2}}. \quad (6.5)$$

Asymptoottisen tulevaisuuden positiiviset moodit voidaan tunnistaa moodeina, jotka redusoituvat näiksi moodeiksi. Metriikka (6.1) sijoitettuna skalaarikentän liikeyhtälöön konformaalisella tekijällä (6.2) ja konformaalisella kytkennällä antaa yhtälön

$$\frac{d^2 \chi_k}{d\eta^2} + (k^2 + b^2 m^2 \eta) \chi_k = 0. \quad (6.6)$$

Yhtälö (6.6) redusoituu Airyn differentiaaliyhtälöksi, jonka ratkaisuna saadaan

$$\chi_k(\eta) = C_1 \text{Ai} \left(\frac{-k^2 - b^2 m^2 \eta}{(-b^2 m^2)^{2/3}} \right) + C_2 \text{Bi} \left(\frac{-k^2 - b^2 m^2 \eta}{(-b^2 m^2)^{2/3}} \right), \quad (6.7)$$

missä C_1 ja C_2 ovat vakioita, jotka määritetään Wronskin determinantin (2.42) avulla, ja Airyn funktiot Ai ja Bi määritellään kaavoilla¹⁵

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt \cos \left(\frac{t^3}{3} + xt \right), \\ \text{Bi}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt \left[\exp \left(-\frac{t^3}{3} + xt \right) \sin \left(\frac{t^3}{3} + xt \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

¹⁵Airyn funktioista ja niiden ominaisuuksista löytyy enemmän esimerkiksi teoksesta [62].

Käyttämällä Airyn funktioiden asymptoottisia kaavoja

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} x^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}, \quad |\arg x| < \pi, \quad (6.9)$$

$$\text{Bi}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} x^{1/4}} e^{\frac{2}{3}x^{3/2}}, \quad |\arg x| < \pi/3, \quad (6.10)$$

voidaan asymptoottisen tulevaisuuden normalisoitu positiivinen moodi tunnistaa:

$$\chi_k^{\text{out}}(\eta) = \frac{e^{\frac{i\pi}{12}} \sqrt{\pi}}{(bm)^{1/3}} \text{Ai}\left(\frac{-k^2 - b^2 m^2 \eta}{(-b^2 m^2)^{2/3}}\right). \quad (6.11)$$

Tarkastelemalla yhtälön (6.6) ratkaisuja lähellä pistettä $\eta = 0$ saadaan puolestaan alkuhetken positiivisiksi normalisoiduiksi moodeiksi

$$\chi_k^{\text{in}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}. \quad (6.12)$$

Bogoliubovin muunnosten avulla voidaan asymptoottisen tulevaisuuden moodi χ_k^{out} ilmaista alkuhetken moodien χ_k^{in} avulla muodossa

$$\chi_k^{\text{out}} = \alpha_k \chi_k^{\text{in}} + \beta_k \chi_k^{\text{in}*}. \quad (6.13)$$

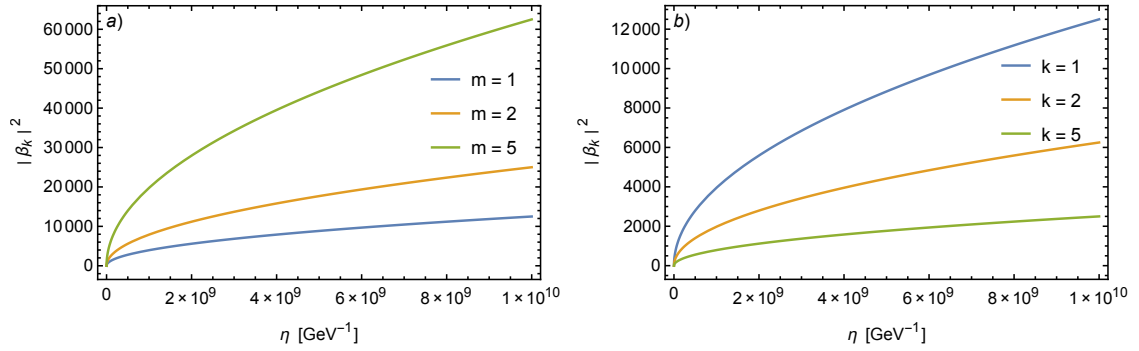
Pitämällä kertoimia α_k ja β_k vakiona ja derivoimalla yhtälöä (6.13) konformaalisen ajan suhteen, voidaan syntyvästä yhtälöparista ratkaista kertoimet α_k ja β_k . Tällöin saadaan Bogoliubovin β_k kertoimen itseisarvon neliöksi

$$|\beta_k|^2 = \frac{\pi}{8kz^{2/3}} \left\{ -\frac{2kz^{2/3}}{\pi} + k^2 \left[\text{Ai}\left(\frac{-k^2 - z^2 \eta}{z^{4/3}}\right)^2 + \text{Bi}\left(\frac{-k^2 - z^2 \eta}{z^{4/3}}\right)^2 \right] + z^{4/3} \left[\text{Ai}'\left(\frac{-k^2 - z^2 \eta}{z^{4/3}}\right)^2 + \text{Bi}'\left(\frac{-k^2 - z^2 \eta}{z^{4/3}}\right)^2 \right] \right\}, \quad (6.14)$$

missä Ai' ja Bi' ovat Airyn funktioiden derivaatat ja missä on merkitty $z = bm$. Yhtälö (6.14) antaa moodissa k syntyneiden hiukkasten todennäköisyyden hetkeen η asti. Hetkellinen hiukkastuotto saadaan puolestaan derivoimalla yhtälö (6.14), jolloin

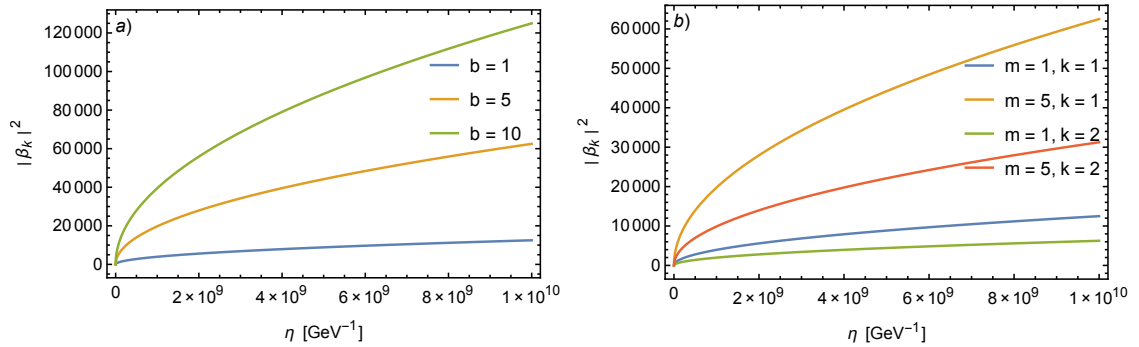
$$\frac{d|\beta_k|^2}{d\eta} = \frac{\pi z^2 \eta}{4k} \left[\text{Ai}\left(\frac{-k^2 - z^2 \eta}{z^{4/3}}\right) \text{Ai}'\left(\frac{-k^2 - z^2 \eta}{z^{4/3}}\right) + \text{Bi}\left(\frac{-k^2 - z^2 \eta}{z^{4/3}}\right) \text{Bi}'\left(\frac{-k^2 - z^2 \eta}{z^{4/3}}\right) \right]. \quad (6.15)$$

Hiukkastuottoa voidaan tarkastella tutkimalla funktion (6.14) kuvaajaa eri parametrien arvoilla ajan kasvaessa. Tämä on tehty kuvassa 6.1.



Kuva 6.1. Hiukkastuotto parametrin b ollessa $b = 1 \sqrt{\text{GeV}}$, kun a) massa saa eri arvoja liikemäärän ollessa $k = 1 \text{ GeV}$ ja b) massan ollessa $m = 1 \text{ GeV}$ liikemäärä saa eri arvoja.

Tarkastelemalla kuvaajia 6.1 a) ja b) huomataan, että hiukkastuotto kasvaa voimakkaasti massan kasvaessa tai liikemäärän k pienentyessä. Tarkastellaan vielä parametrin b vaikutusta hiukkastuottoon sekä itse hiukkastuottoa, kun samaan kuvaajaan piirretään sekä massa että liikemäärä. Tämä on tehty kuvassa 6.2.



Kuva 6.2. Hiukkastuotto a) parametrin b saadessa eri arvoja, kun massa ja liikemäärä saa arvon yksi ja b) eri massan ja liikemäärän arvoilla parametrin b saadessa arvon $b = 1 \sqrt{\text{GeV}}$.

Kuvan 6.2 a) mukaan parametrin b kasvaessa myös hiukkastuotto kasvaa. Kuvan 6.2 b) perusteella voidaan puolestaan tehdä havainto, että jäykän materian dominoimassa universumissa laajenemisen seurauksena hiukkastuotto on voimakkainta suuren massan omaavalla kentällä liikemäärän ollessa pieni. Syntyneiden hiukkasten energiatiheys ρ_{cp} voidaan puolestaan laskea alkuhetkestä η_0 hetkeen η asti kaavalla

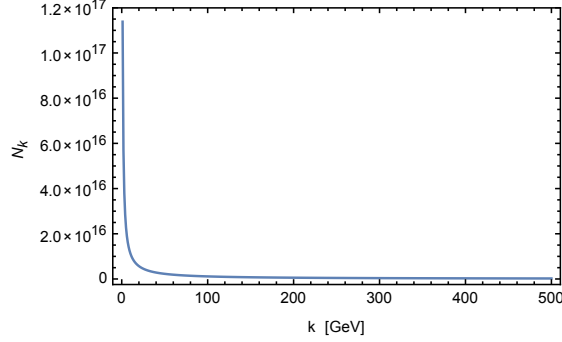
$$\rho_{cp}(\eta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} \int_0^{\infty} dk k^2 \omega_k(\tilde{\eta}) \left(\frac{C(\eta_0)}{C(\tilde{\eta})} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{d|\beta_k|^2}{d\tilde{\eta}}, \quad (6.16)$$

missä $\omega_k(\tilde{\eta}) = \sqrt{k^2 + z^2 \tilde{\eta}}$ ja tekijä $(C(\eta_0)/C(\tilde{\eta}))^{3/2}$ kuvaa syntyneiden, tässä tapauksessa epärelativististen, hiukkasten dilutaatiota avaruuden laajenemisen seurauksena. Koska hiukkastuotto on keskittynyt pääasiassa erittäin massiivisille ja pienen

liikemäärän omaaville hiukkasille, voidaan approksimoida $\omega_k(\tilde{\eta}) \approx z\sqrt{\tilde{\eta}}$. Tämän approksimaation paikkaansapitävyyttä voidaan tarkastella katsomalla hiukkastuottoa

$$N_k = \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} \left(\frac{C(\eta_0)}{C(\tilde{\eta})} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{d|\beta_k|^2}{d\tilde{\eta}}, \quad (6.17)$$

jossa on huomioitu myös dilutaatio. Tämä on tehty alla olevassa kuvassa 6.3.



Kuva 6.3. Hiukkastuotto N_k moodia k kohti, kun $m = 100 \text{ GeV}$, $b = 10^{26} \sqrt{\text{GeV}}$, $\eta_0 = 10^{-20} \text{ GeV}^{-1}$ ja $\eta = 10^{-7} \text{ GeV}^{-1}$.

Tällöin kuvasta 6.3 nähdään hiukkastuoton keskittyvän liikemäärälle k , jotka ovat massaa pienempiä. Tällä approksimaatiolla integraali (6.16) voidaan suorittaa sijoittamalla siihen hetkellinen hiukkastuotto (6.15). Syntyneiden hiukkasten energiatiheydeksi saadaan

$$\begin{aligned} \rho_{\text{cp}}(\eta) = & \frac{z^{11/3}\eta_0^{3/2}}{32\pi} \left[-z^{2/3}\eta_0 \text{Ai}(-z^{2/3}\eta_0)^2 + z^{2/3}\eta \text{Ai}(-z^{2/3}\eta)^2 - \text{Ai}'(-z^{2/3}\eta_0)^2 \right. \\ & + \text{Ai}'(-z^{2/3}\eta)^2 - z^{2/3}\eta_0 \text{Bi}(-z^{2/3}\eta_0)^2 + z^{2/3}\eta \text{Bi}(-z^{2/3}\eta)^2 - \text{Bi}'(-z^{2/3}\eta_0)^2 \\ & \left. + \text{Bi}'(-z^{2/3}\eta)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Ottamalla yhtälöstä (6.18) raja-arvo $\eta \rightarrow \infty$ nähdään, että syntyneiden hiukkasten energiatiheys kasvaa rajatta. Avaruuden laajenemisen seurauksena syntyneiden hiukkasten syntymisnopeus näin ollen ylittää laajenemisesta seuraavan dilutaation.

6.2 Energiatiheys ja lämpötila

Syntyvien hiukkasten energiatiheys siis kasvaa, joten niiden energiatiheys jossain vaiheessa ylittää taustalla olevan jäykän materian energiatiheyden, joka puolestaan vähenee avaruuden laajentuessa. Seuraavaksi tarkastellaan ajanhetkeä, jolloin nämä kaksi energiatiheyttä ovat yhtäsuuria. Universumin kokonaisenergiatiheyden ja

Einsteinin yhtälön 00-komponentin välillä on yhteys¹⁶

$$R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} = -8\pi G_N(\rho_{\text{stiff}} + \rho_{\text{cp}}), \quad (6.19)$$

missä ρ_{stiff} on taustalla olevan jäykän materian energiatiheys ja ρ_{cp} on syntyneiden hiukkasten energiatiheys. Aivan alkuhetkillä hiukkastuotto on pientä, jolloin jäykän materian energiatiheden voidaan olettaa dominoivan. Tällöin yhtälöstä (6.19) voidaan syntyneiden hiukkasten energiatiheys ρ_{cp} unohtaa ja jäykän materian energiatiheys voidaan laskea yhtälöstä

$$R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} = -8\pi G_N \rho_{\text{stiff}}. \quad (6.20)$$

Litteän FLRW-metriikan kohdalla yhtälö (6.20) johtaa *Friedmannin yhtälöön*

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} = \frac{8\pi G_N}{3} \rho_{\text{stiff}}(t), \quad (6.21)$$

joka voidaan ketjusääntöä käyttämällä antaa konformaalisen ajan avulla muodossa

$$\frac{\dot{a}(\eta)^2}{a(\eta)^4} = \frac{8\pi G_N}{3} \rho_{\text{stiff}}(\eta). \quad (6.22)$$

Sijoittamalla skaalatekijä $a(\eta) = b\sqrt{\eta}$ yhtälöön (6.22), saadaan jäykän materian energiatihedeksi konformaalisen ajan suhteen annettuna

$$\rho_{\text{stiff}}(\eta) = \frac{3}{32\pi G_N b^2 \eta^3}. \quad (6.23)$$

Intuitiivisemmän käsityksen saamiseksi ilmaistaan energiatiheddet koordinaattiajan suhteen. Koordinaattiaika saadaan konformaalisen tekijän avulla integraalina

$$t = \int_0^\eta \sqrt{C(\tilde{\eta})} d\tilde{\eta}, \quad (6.24)$$

joten sijoittamalla tähän konformaalinen tekijä $C(\eta) = b^2\eta$ saadaan koordinaattiajan ja konformaalisen ajan välille yhteys

$$t = \frac{2}{3}b\eta^{3/2}. \quad (6.25)$$

Näin ollen yhtälöt (6.18) ja (6.23) voidaan lausua koordinaattiajan avulla:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{stiff}}(t) &= \frac{3}{72\pi G_N t^2} \\ \rho_{\text{cp}}(t) &= \frac{3m^{11/3}b^{8/3}t_0}{64\pi} \left[-\left(\frac{3mt_0}{2}\right)^{2/3} \text{Ai}\left(-\left(\frac{3mt_0}{2}\right)^{2/3}\right)^2 + \left(\frac{3mt}{2}\right)^{2/3} \text{Ai}\left(-\left(\frac{3mt}{2}\right)^{2/3}\right)^2 \right. \\ &\quad - \text{Ai}'\left(-\left(\frac{3mt_0}{2}\right)^{2/3}\right)^2 + \text{Ai}'\left(-\left(\frac{3mt}{2}\right)^{2/3}\right)^2 - \left(\frac{3mt_0}{2}\right)^{2/3} \text{Bi}\left(-\left(\frac{3mt_0}{2}\right)^{2/3}\right)^2 \\ &\quad \left. + \left(\frac{3mt}{2}\right)^{2/3} \text{Bi}\left(-\left(\frac{3mt}{2}\right)^{2/3}\right)^2 - \text{Bi}'\left(-\left(\frac{3mt_0}{2}\right)^{2/3}\right)^2 + \text{Bi}'\left(-\left(\frac{3mt}{2}\right)^{2/3}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$(6.27)$$

¹⁶Tässä alaluvussa kirjoitetaan gravitaatiovakio G_N eksplisiittisesti näkyviin.

Oletetaan seuraavaksi, että skalaarikenttä kytkeytyy standardimallin hiukkasiin. Olettaen lisäksi, että syntyneet hiukkaset hajoavat ja termalisoituvat erittäin nopeasti¹⁷ saavuttaen termisen tasapainon hetkellä t_{eq} , voidaan energiatiheydet (6.27) ja (6.26) asettaa yhtäsuuriksi ja laskea lämpötila kyseisellä hetkellä. Hiukkaset hajoavat relativistisiksi hiukkasiksi, joiden energiatiheys on muotoa [63]

$$\rho = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4, \quad (6.28)$$

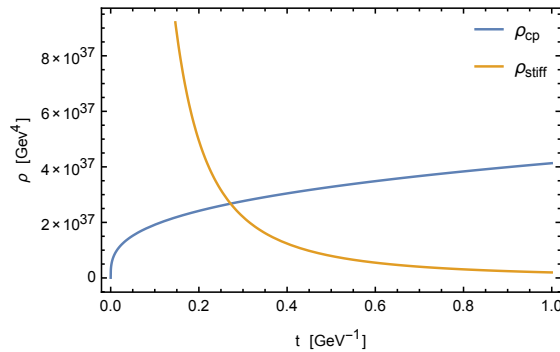
missä $g_* = \frac{7}{8}g_F + g_B$ on efektiivinen vapausaste, joka koostuu bosonien ja fermionien vapausasteista g_B ja g_F . Tämän avulla saadaan karkeasti arvioitua termisessä tasapainossa olevien hiukkasten lämpötilalle yläraja, joka on noin

$$T \approx \rho^{1/4}. \quad (6.29)$$

Johtuen syntyneiden hiukkasten energiatiheyden kaavassa (6.27) esiintyvistä Airyn funktioista, aikaa t ei voida eksplisiittisesti ratkaista asettamalla yhtälöitä (6.27) ja (6.26) yhtäsuuriksi. Aika t voidaan kuitenkin laskea numeerisesti. Tällöin joudutaan kiinnittämään alkuarvot kolmelle eri parametrille: massalle m , parametrille b , sekä alkuhetkelle t_0 . Alkuhetkeksi on luonnollista valita Planckin aika t_{pl} , sillä tätä pienempinä ajanhetkinä gravitaation kvanttivaikutuksia ei voida enää sivuuttaa. Planckin aika määritellään kaavana

$$t_{pl} := \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^5}}. \quad (6.30)$$

Kiinnittämällä alkuhetki hetkeen $t_0 = t_{pl} \approx 5,39 \times 10^{-44}$ s, voidaan energiatiheyksien leikkauspiste laskea antamalla massalle ja parametrille b eri arvoja. Alla olevassa kuvassa 6.4 on esitetty energiatiheydet $\rho_{stiff}(t)$ ja $\rho_{cp}(t)$.



Kuva 6.4. Energiatiheydet ρ_{stiff} ja ρ_{cp} , kun $m = 10^8$ GeV ja $b = 10^{10} \sqrt{\text{GeV}}$.

¹⁷Tässä ei oteta huomioon hajoamisnopeuksia.

Käyttäen *Mathematica*-ohjelmaa voidaan laskea aika t_{eq} , jolloin energiatiheddet (6.26) ja (6.27) ovat yhtäsuuret. Taulukoissa 6.1, 6.2 ja 6.3 on laskettu aika t_{eq} eri massan ja parametrin b arvoilla, sekä annettu sitä vastaava karakteristinen aika t_c . Lisäksi on taulukoitu tällä hetkellä oleva energiatihedden arvo $\rho(t_{eq})$, sekä lämpötila T_{eq} .

Taulukko 6.1. Energiatiheys ja lämpötila hetkellä t_{eq} , kun $b = 1 \sqrt{\text{GeV}}$ ja karakteristinen aika $t_c = 6,58 \times 10^{-25}$ s.

m [GeV]	t_{eq} [s]	$\rho(t_{eq})$ [GeV ⁴]	T_{eq} [GeV]
$1,00 \times 10^2$	$9,26 \times 10^{-4}$	$9,98 \times 10^{-7}$	$3,16 \times 10^{-2}$
$1,00 \times 10^4$	$3,45 \times 10^{-7}$	$7,19 \times 10^0$	$1,64 \times 10^0$
$1,00 \times 10^6$	$1,29 \times 10^{-10}$	$5,17 \times 10^7$	$8,48 \times 10^1$
$1,00 \times 10^8$	$4,80 \times 10^{-14}$	$3,72 \times 10^{14}$	$4,39 \times 10^3$
$1,00 \times 10^{10}$	$1,79 \times 10^{-17}$	$2,68 \times 10^{21}$	$2,27 \times 10^5$
$1,00 \times 10^{12}$	$6,66 \times 10^{-21}$	$1,93 \times 10^{28}$	$1,18 \times 10^7$

Taulukko 6.2. Energiatiheys ja lämpötila hetkellä t_{eq} , kun $b = 10^{10} \sqrt{\text{GeV}}$ ja karakteristinen aika $t_c = 6,58 \times 10^{-45}$ s.

m [GeV]	t_{eq} [s]	$\rho(t_{eq})$ [GeV ⁴]	T_{eq} [GeV]
$1,00 \times 10^2$	$3,45 \times 10^{-15}$	$1,03 \times 10^{17}$	$1,79 \times 10^4$
$1,00 \times 10^4$	$1,29 \times 10^{-18}$	$5,45 \times 10^{23}$	$8,48 \times 10^5$
$1,00 \times 10^6$	$4,80 \times 10^{-22}$	$3,72 \times 10^{30}$	$4,39 \times 10^7$
$1,00 \times 10^8$	$1,79 \times 10^{-25}$	$2,68 \times 10^{37}$	$2,27 \times 10^9$
$1,00 \times 10^{10}$	$6,67 \times 10^{-29}$	$1,92 \times 10^{44}$	$1,18 \times 10^{11}$
$1,00 \times 10^{12}$	$2,50 \times 10^{-32}$	$1,37 \times 10^{51}$	$6,09 \times 10^{12}$

Taulukko 6.3. Energiatiheys ja lämpötila hetkellä t_{eq} , kun $b = 10^{26} \sqrt{\text{GeV}}$ ja karakteristinen aika $t_c = 6,58 \times 10^{-77}$ s.

m [GeV]	t_{eq} [s]	$\rho(t_{eq})$ [GeV ⁴]	T_{eq} [GeV]
$1,00 \times 10^2$	$1,23 \times 10^{-32}$	$5,68 \times 10^{51}$	$8,68 \times 10^{12}$
$1,00 \times 10^4$	$6,90 \times 10^{-36}$	$1,80 \times 10^{58}$	$3,66 \times 10^{14}$
$1,00 \times 10^6$	$3,88 \times 10^{-39}$	$5,68 \times 10^{64}$	$1,54 \times 10^{16}$
$1,00 \times 10^8$	$2,25 \times 10^{-42}$	$1,68 \times 10^{71}$	$6,41 \times 10^{17}$
$1,00 \times 10^{10}$	$5,39 \times 10^{-44}$	$2,94 \times 10^{74}$	$4,14 \times 10^{18}$
$1,00 \times 10^{12}$	$5,39 \times 10^{-44}$	$2,94 \times 10^{74}$	$4,14 \times 10^{18}$

Näistä tuloksista havaitaan, että parametria b kontrolloimalla voidaan lämpötilaa ja energiatiheyttä nostaa siirtäen samalla aikaa t_{eq} lähemmäksi alkupistettä t_{pl} . Malli ei ole kuitenkaan erityisen herkkä pienille parametrin b arvojen vaihteluille sillä sen pienet muutokset eivät radikaalisti muuta energiatiheyttä. Toisaalta nostamalla tätä parametria tarpeeksi suureksi saavuttavat varsinkin raskaat hiukkaset tasapainon lähes välittömästi syntymänsä jälkeen. Tämän ilmiön huomaa esimerkiksi taulukosta 6.3. Lämpötilaa tarkasteltaessa huomataan puolestaan, että pienillä parametrin b arvoilla kevyemmät hiukkaset eivät saavuta edes sähköheikon faasitransitionin vaatimaa lämpötilaa, joka on noin 100 GeV. Mielellään lämpötila saisi olla tätäkin suurempi, vähintäänkin suuruusluokkaa 1 TeV. Parametrin b ollessa pieni, näihin lämpötiloihin pääsee vain kaikkein massiivisimmat hiukkaset.

Nämä ovat luonnollisia tuloksia, sillä avaruuden laajenemisesta johtuva dilutaatio pienentää energiatiheyttä, ja tämän myötä lämpötilaa, ajan kuluessa. Mitä vähemmän aikaa on kulunut sitä vähemmälle jää tämä dilutaation merkitys. Koska hiukkastuotto on erittäin voimakasta massiivisten hiukkasten kohdalla, on myöskin luonnollista odottaa niiden energiatiheyden olevan huomattavasti suurempi ja näin ollen saavuttavan tasapainon kevyempiä hiukkasia nopeammin.

7 Loppupäätelmät

Tämän tutkielman päätavoitteena on ollut avaruuden laajenemisesta seuraava hiukkastuotto. Luvussa 1 aloitettiin kenttien kvantisoinnilla Minkowskin avaruudessa, jonka jälkeen siirryttiin kaarevaan avaruuteen. Hiukkasen ja vakuumin määrittämisen problematiikkaan paneuduttiin luvussa 2 ja energiaimpulssitensorin renormalisointiin luvussa 3. Itse hiukkastuottoon päästiin luvussa 4 ja Hawkingin säteilyä ja mustan aukon hiukkastuottoa tarkasteltiin luvussa 5. Luvussa 6 tutkittiin hiukkastuottoa esittelemällä malli, joka kuvaa jäykän materian dominoimaa universumia.

Hiukkasen määrittämisen ongelmaan on esitetty vastauksena hiukkasdetektoreita. Hiukkanen on jotain, jonka detektori havaitsee. Yleensä hiukkasdetektoreita tarkastellessa käytetään lineaarista kytkentää detektorin ja kentän välillä. Tämä ei kuitenkaan ole ainoa mahdollinen vaihtoehto sillä myöskin epälineaarisia kytkentöjä voidaan käyttää. Tällöin saattaa tulla esiin uusia regularisointiongelmia. Ehkä suurimpana käsitteellisenä haasteena detektorimalleissa on hiukkanen itse. Kaarevan avaruuden kvanttikenttäteorian merkittävin piirre on hiukkastuotto laajenevassa avaruudessa, jossa hiukkanen syntyy muuttuvan gravitaatiokentän seurauksena. Hiukkasdetektorien kohdalla voidaankin kysyä onko detektorin havaitsema hiukkanen samantyyppinen kuin itse gravitaatiokentästä syntyvä hiukkanen? Tähän erittäin syvälliseen kysymykseen on hankala löytää vastausta.

Kaarevassa avaruudessa positiivisten moodien yksikäsitteisyyden puuttuminen johtaa vakuumin yksikäsitteisyyden menettämiseen. Vakuumin määrittämisen kohdalla oleellisinta on pystyä tunnistamaan positiiviset moodit. Tämä voidaan helposti tehdä, mikäli avaruusaika on jossain vaiheessa tai alueessa staattinen. Tällöin positiiviset moodit vastaavat Minkowskin moodeja. Muussa tapauksessa voidaan FLRW-universumien kohdalla esittää ratkaisuna tähän ongelmaan adiabaattista vakuumia, jossa positiiviset moodit määritellään WKB-approksimaation kautta. Vakuumin määrittäminen on hiukkastuoton tutkimisen kannalta oleellista, jotta voidaan vertailla vakuumitiloja ennen ja jälkeen avaruuden laajenemisen.

Juuri vakuumitilan hämäryys johtaa kaarevassa avaruudessa hiukkastuottoon ja vakuumin valinnan vaikeuden takia joudutaan usein hiukkastuottoa tutkittaessa käyttämään erittäin idealisoituja malleja, ehkä jopa hieman epäfysikaalisiakin. Kun vakuumin valinnassa käytetään WKB-approksimaatiota, vaaditaan avaruusajan olevan hitaasti muuttuva. Tämän vuoksi joudutaan usein täydentämään avaruus sen 'peiliavaruudella' läpi singulariteetin. Oman lisänsä tuo vielä positiivisen moodin aikakomponentin differentiaaliyhtälön ratkaisu, jolle ei välttämättä löydy montaakaan eksaktia ratkaisua. Tästä syystä hiukkastuoton mallit ovat harvassa.

Oman tutkimuksen osiossa tutkittiin hiukkastuottoa jäykän materian dominoimassa universumissa. Havaittiin, että tällöin avaruuden laajenemisen seurauksena hiukkastuotto on voimakkainta suuren massan omaavalla kentällä liikemäärän ollessa pieni. Laskemalla jäykän materian ja syntyneiden hiukkasten energiatiheydet sekä asettamalla ne yhtäsuuriksi, pystyttiin myös laskemaan aika jolloin nämä energiatiheydet olivat yhtäsuuria, sekä lämpötila kyseisellä hetkellä. Lämpötilan laskemisessa ei otettu huomioon hiukkasten hajoamisnopeutta, joten saatu lämpötila antaa vain ylärajan. Tämä asia huomioon ottaen todellinen lämpötila saattaa olla hieman tai jopa paljon alhaisempi, kuin laskettu lämpötila. Annetut suureet on laskettu numeerisesti, jolloin tavallisesti esiintyy virheitä annetuissa arvoissa. Nämä virheet kohdistuvat kuitenkin suureiden suuruusluokkien kertoimiin, eivätkä näin ollen oleellisesti muuta annettujen arvojen suuruusluokkia.

Parametrin b vaikutus energiatiheyteen ja lämpötilaan on huomattava, vaikka malli ei kuitenkaan ole erityisen herkkä sen pienille vaihteluille. Tulosten perusteella voidaan todeta, että liian pieni parametrin b arvo ei tuota tarpeeksi korkeita esimerkiksi sähköheikon faasitransition vaatimia lämpötiloja. Varsinkaan, kun puhutaan kevyemmistä hiukkasista. Parametrin b avulla saadaan myös laskettua systeemin karakteristinen aika t_c , joka kuvaa jossain mielessä aikaväliä, jossa voidaan havaita systeemin kokemia muutoksia. Tulosten mukaan arvoa $b = 10^9 \sqrt{\text{GeV}}$ vastaava karakteristinen aika t_c vastaisi noin Planckin aikaa t_{pl} . Tämän perusteella voisi tulla mieleen antaa parametrille b arvolle jonkinlainen yläraja. Fysiikkaa Planckin aikaan tai sitä pienemmällä ajanhetkillä ei kuitenkaan tunneta. Erilaisia teorioita, kuten säieteoria, on esitetty kuvaamaan tätä erittäin pienen skaalan fysiikkaa. Karakteristinen aika voi näin ollen olla myös huomattavasti pienempi kuin Planckin aika.

Uskoisin luvussa 6 esitetyn mallin soveltuvan myös inflaation jälkeiseen universumin uudelleenlämpeämisen tutkimiseen, missä inflatonkentän kineettinen energia dominoi ja materia syntyy gravitaatiokentän muutoksesta. Tällöin tulee ottaa huomioon myös hiukkasten hajoamisnopeudet lämpötilaa laskettaessa. Ongelman mallin soveltamisesta tähän tilanteeseen luo energiatiheyden alkupisteen kiinnittäminen, joka tulisi asettaa inflaation loppumishetkeen. Tätä hetkeä ei toistaiseksi kuitenkaan tarkkaan tiedetä.

Viitteet

- [1] G. B. Folland, *Quantum Field Theory - A Tourist Guide for Mathematicians* (American Mathematical Society, 2008).
- [2] N. Birrell ja P. Davies, *Quantum Field Theory in Curved Space* (Cambridge University Press, 1982).
- [3] S. Hawking ja G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, 1973).
- [4] T. Bunch, P. Panangaden ja L. Parker, *J. Phys. A* **13**, 901 (1980).
- [5] S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* **7**, 2850 (1973).
- [6] H. Urbantke, *Nuovo Cimento B* **63**, 203 (1969).
- [7] B. S. DeWitt, kirjassa *General Relativity: an Einstein Centenary Survey*, toimittanut S. Hawking ja W. Israel (Cambridge University Press, 1979).
- [8] B. S. DeWitt, *Phys. Rept.* **19**, 295 (1975).
- [9] W. Unruh, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- [10] G. W. Gibbons ja S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15**, 2738 (1977).
- [11] L. Sriramkumar, *Mod. Phys. Lett. A* **17**, 1059 (2002).
- [12] S. Schlicht, *Class. Quant. Grav.* **21**, 4647 (2004).
- [13] B. F. Svaiter ja N. F. Svaiter, *Phys. Rev. D* **46**, 5267 (1992).
- [14] J. R. Letaw, *Phys. Rev. D* **23**, 1709 (1981).
- [15] C. Misner, K. Thorne ja J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, 1973).
- [16] S. Takagi, *Prog. Theor. Phys.* **88**, 1 (1986).
- [17] J. Louko ja A. Satz, *Class. Quant. Grav.* **23**, 6321 (2006).
- [18] A. Satz, *Class. Quant. Grav.* **24**, 1719 (2007).
- [19] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge University Press, 1989).
- [20] L. Parker ja S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* **9**, 341 (1974).

- [21] M. Bander ja C. Itzykson, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 346 (1966).
- [22] S. Winitzki, *Phys. Rev. D* **72**, 104011 (2005).
- [23] T. S. Bunch ja P. C. W. Davies, *Proc. R. Soc. A* **360**, 117 (1978).
- [24] J. S. Dowker ja R. Critchley, *Phys. Rev. D* **13**, 3224 (1976).
- [25] L. S. Brown, *Phys. Rev. D* **15**, 1469 (1977).
- [26] S. M. Christensen, *Phys. Rev. D* **14**, 2490 (1976).
- [27] B. S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields* (Gordon and Breach, 1965).
- [28] T. Sakai, *Tohoku Math. J. (2)* **23**, 589 (1971).
- [29] S. M. Christensen, *Phys. Rev. D* **17**, 946 (1978).
- [30] L. Parker, väitöskirja, Harvard University, 1993, julkaisematon.
- [31] S. Fulling ja L. Parker, *Ann. Phys.* **87**, 176 (1974).
- [32] A. Landete, J. Navarro-Salas ja F. Torrentí, *Phys. Rev. D* **88**, 061501 (2013).
- [33] A. Landete, J. Navarro-Salas ja F. Torrentí, *Phys. Rev. D* **89**, 044030 (2014).
- [34] T. Bunch, *J. Phys. A* **13**, 1297 (1980).
- [35] P. R. Anderson ja L. Parker, *Phys. Rev. D* **36**, 2963 (1987).
- [36] L. Parker ja D. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime* (Cambridge University Press, 2009).
- [37] T. S. Bunch, S. M. Christensen ja S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* **18**, 4435 (1978).
- [38] L. Parker, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 562 (1968).
- [39] L. Parker, *Phys. Rev.* **183**, 1057 (1969).
- [40] Y. B. Zel'dovich ja A. Starobinsky, *Sov. Phys. JETP* **34**, 1159 (1972).
- [41] V. Lukash ja A. Starobinsky, *Sov. Phys. JETP* **39**, 742 (1974).
- [42] C. Bernard ja A. Duncan, *Ann. Phys.* **107**, 201 (1977).

- [43] I. Gradshteyn ja I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products, 8th edition* (Elsevier, 2016).
- [44] J. Audretsch ja G. Schäfer, *Phys. Lett. A* **66**, 459 (1978).
- [45] Y. B. Zel'dovich, *Sov. Phys. JETP Lett.* **14**, 180 (1971).
- [46] Y. B. Zel'dovich, *Sov. Phys. JETP Lett.* **35**, 1085 (1972).
- [47] A. Starobinsky, *Sov. Phys. JETP* **37**, 28 (1973).
- [48] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **10**, 3194 (1974).
- [49] S. Hawking, *Nature* **248**, 30 (1974).
- [50] S. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [51] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
- [52] T. Regge ja J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **108**, 1063 (1957).
- [53] A. Fabbri ja J. Navarro-Salas, *Modeling Black Hole Evaporation* (Imperial College Press, 2005).
- [54] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
- [55] A. Linde, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982).
- [56] A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [57] P.-H. Chavanis, *Phys. Rev. D* **92**, 103004 (2015).
- [58] G. Oliveira-Neto *et al.*, *Int. J. Mod. Phys. Conference Series* **03**, 254 (2011).
- [59] Y. B. Zel'dovich, *Mon. Not. R. Astr. Soc* **160**, 1P (1972).
- [60] B. Spokoiny, *Phys. Lett. B* **315**, 40 (1993).
- [61] P. J. E. Peebles ja A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **59**, 063505 (1999).
- [62] M. Abramowitz ja I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, 8th edition* (Dover Publications, 1972).
- [63] A. Liddle ja D. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, 2000).

- [64] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley & Sons, 1972).
- [65] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [66] T. S. Bunch ja L. Parker, Phys. Rev. D **20**, 2499 (1979).

A Tetradiformalismi

Tetradiformalismia tarvitaan spinorikenttien kvantisoinnissa kaarevassa avaruudessa. Tässä liitteessä käydään läpi formalismin perusteet, sekä johdetaan muutamia tuloksia. Perusteellisempi katsaus löytyy esimerkiksi teoksesta [64]. Seuraavassa rajoitutaan neljään dimensioon.

Ekvivalenssiperiaatteen mukaan jokaiseen moniston (M, g) pisteeseen X voidaan konstruoida lokaalinen inertiaalikoordinaatisto ξ_X^α . Metrisen tensorin muuntumisäännön mukaan yleinen metriikka $g_{\mu\nu}$ on

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \frac{\partial \xi_X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi_X^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \\ &= V^\alpha{}_\mu(x) V^\beta{}_\nu(x) \eta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

missä

$$V^\alpha{}_\mu(X) := \left(\frac{\partial \xi_X^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \right)_{x=X}. \quad (\text{A.2})$$

Tässä indeksi α viittaa lokaaliseen inertiaalikoordinaatistoon ja indeksi μ puolestaan yleisiin koordinaatteihin x^μ . Jatkossa kreikkalaisten aakkosten alkupäänkirjaimet viittaavat ensimmäiseen ja loppupään puolestaan jälkimmäiseen. Inertiaalikoordinaatiston ollessa kiinnitetty voidaan vaihtaa mielivaltaisesta koordinaatistosta x^μ koordinaatistoon x'^μ . Tällöin osittaisderivaatat $V^\alpha{}_\mu$ muuntuvat kuten kovariantti vektori

$$V^\alpha{}_\mu \rightarrow V'^\alpha{}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V^\alpha{}_\nu. \quad (\text{A.3})$$

Osittaisderivaatat $V^\alpha{}_\mu$ muuntuvat siis kuten neljä kovarianttia vektorikenttää. Näitä neljää vektoria kutsutaan *tetradeiksi* tai *vierbeineiksi*. Tetradin avulla voidaan annetun kontravariantin vektorin $A^\mu(x)$ komponentit esittää koordinaatistossa ξ_x^α , joka on inertiaalinen kyseisessä pisteessä. Tämä saadaan kontraktiolla

$$A^\alpha \equiv V^\alpha{}_\mu A^\mu. \quad (\text{A.4})$$

Kontraktio muuttaa tyypin (k, l) -tensorin tyypin $(k-1, l-1)$ -tensoriksi, joten ylläoleva tyypin $(1, 0)$ -tensori muuttuu tyypin $(0, 0)$ -tensoriksi, eli skalaariksi. Sama voidaan tehdä myös yleisillä tensorikentillä. Esimerkiksi tyypin $(1, 1)$ -tensorikenttä voidaan kontraktoida skalaariksi:

$$B^\alpha{}_\beta \equiv V^\alpha{}_\mu V^\nu{}_\beta B^\mu{}_\nu. \quad (\text{A.5})$$

Tässä tetradi V_{β}^{ν} saadaan laskemalla indeksi β Minkowskin tensorilla ja nostamalla indeksi ν metrisellä tensorilla

$$V_{\beta}^{\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} V_{\mu}^{\alpha}. \quad (\text{A.6})$$

Yhtälön (A.1) mukaan tämä on vain tetradin käänteistetradi, nimittäin

$$V_{\beta}^{\mu} V_{\nu}^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} g^{\gamma\mu} V_{\gamma}^{\alpha} V_{\nu}^{\beta} = g^{\gamma\mu} g_{\gamma\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (\text{A.7})$$

ja vastaavasti myös

$$V_{\mu}^{\alpha} V_{\beta}^{\mu} = \delta^{\alpha}_{\beta}. \quad (\text{A.8})$$

Metrisen tensorin skalaarikomponentit ovat tällöin

$$g_{\alpha\beta} = V_{\alpha}^{\mu} V_{\beta}^{\nu} g_{\mu\nu} = V_{\alpha}^{\mu} V_{\beta}^{\nu} V_{\mu}^{\gamma} V_{\nu}^{\delta} \eta_{\gamma\delta} = \delta^{\gamma}_{\alpha} \delta^{\delta}_{\beta} \eta_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.9})$$

Tetradiformalismien avulla voidaan siis jokainen tensorikenttä muuttaa joukoksi skalaareita ja Lagrangen tiheys voidaan muodostaa käyttämällä näitä skalaareita. Näin myös spinorikenttää voidaan kaarevassa avaruudessa käsitellä ilman ongelmia.

Jokainen fysikaalisesti järkevä vaikutus sisältää fysikaalisten suureiden derivaattoja [64]. Täten tetrad-kenttää tarvitaan vaikutuksessa pitämään se sekä koordinaatti että Lorentz-skalaarina. Jotta vaikutus olisi koordinaattiskalaari, tulee siihen lisätä tetrad-kenttä ja derivaatat muodossa

$$V_{\alpha}^{\mu} \partial_{\mu}. \quad (\text{A.10})$$

Vaikutuksen pitää olla myös Lorentz-invariantti, joten operoimalla generiseen kenttään ψ paikasta riippuvalla Lorentzin muunnoksella, koordinaattiskalaari (A.10) derivaatta muuntuu kuten

$$V_{\alpha}^{\mu}(x) \partial_{\mu} \psi(x) \rightarrow \Lambda_{\alpha}^{\beta}(x) V_{\beta}^{\mu}(x) \partial_{\mu} [D(\Lambda(x)) \psi(x)] \quad (\text{A.11})$$

$$= \Lambda_{\alpha}^{\beta}(x) V_{\beta}^{\mu}(x) [D(\Lambda(x)) \partial_{\mu} \psi(x) + \partial_{\mu} D(\Lambda(x)) \psi(x)], \quad (\text{A.12})$$

missä $\Lambda(x)$ on Lorentzin matriisi ja $D(\Lambda)$ Lorentzin ryhmän matriisiesitys. Huomataan siis, ettei derivaatta (A.10) ole Lorentz-skalaari sillä yhtälössä on ylimääräinen termi. Jotta vaikutus pysyisi Lorentz-invarianttina, pitäisi derivaatan muuntua paikasta riippuvassa Lorentz muunnoksessa seuraavanlaisesti:

$$\nabla_{\alpha} \psi(x) \rightarrow \Lambda_{\alpha}^{\beta}(x) D(\Lambda(x)) \nabla_{\beta} \psi(x). \quad (\text{A.13})$$

Tarkastelemalla yhtälöä (A.11) nähdään, että koordinaatti- ja Lorentz-skalaari derivaatta voidaan konstruoida muodossa

$$\nabla_\alpha \equiv V_\alpha^\mu [\partial_\mu + \Gamma_\mu], \quad (\text{A.14})$$

missä matriisi Γ_μ muuntuu Lorentzin muunnoksissa

$$\Gamma_\mu(x) \rightarrow D(\Lambda(x))\Gamma_\mu(x)D^{-1}(\Lambda(x)) - [\partial_\mu D(\Lambda(x))]D^{-1}(\Lambda(x)). \quad (\text{A.15})$$

Jälkimmäinen termi kumooa yhtälön (A.11) ylimääräisen termin. Tällöin derivaatta ∇_α on koordinaatti- ja Lorentz-skalaari. Kun ajatellaan infinitesimaalisia Lorentzin muunnoksia, on esityksen matriisi

$$D(\Lambda(x)) = 1 + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(x)\sigma_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.16})$$

Tällöin yhtälön (A.15) mukaan matriisi $\Gamma_\mu(x)$ muuntuu infinitesimaalisessa muunnoksessa

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(x) &\rightarrow \Gamma_\mu(x) + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(x)\sigma_{\alpha\beta}\Gamma_\mu(x) - \Gamma_\mu(x)\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(x)\sigma_{\alpha\beta} \\ &\quad - \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(x)\sigma_{\alpha\beta}\Gamma_\mu(x)\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(x)\sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\partial_\mu\omega^{\alpha\beta}(x)\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\partial_\mu\omega^{\alpha\beta}(x)\sigma_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(x)\sigma_{\alpha\beta} \\ &\rightarrow \Gamma_\mu(x) + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(x)[\sigma_{\alpha\beta}, \Gamma_\mu(x)] - \frac{1}{2}\partial_\mu\omega^{\alpha\beta}(x)\sigma_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

pitäen mukana vain lineaariset termit. Tetradi $V^\alpha{}_\nu$ muuttuu puolestaan kuten

$$V^\alpha{}_\nu(x) \rightarrow V^\alpha{}_\nu(x) + \omega^\alpha{}_\beta(x)V^\beta{}_\nu(x). \quad (\text{A.18})$$

Tällöin

$$\begin{aligned} V_\beta{}^\nu(x)\partial_\mu V_{\alpha\nu}(x) &\rightarrow [V_\beta{}^\nu(x) + \omega_\gamma{}^\nu(x)V_\beta{}^\gamma]\partial_\mu [V_{\alpha\nu}(x) + \omega_\alpha{}^\gamma(x)V_{\gamma\nu}] \\ &= V_\beta{}^\nu(x)\partial_\mu V_{\alpha\nu}(x) + V_\beta{}^\nu\partial_\mu(\omega_{\alpha\gamma}(x)V_{\gamma\nu}(x)) + \omega_\gamma{}^\nu(x)V_\beta{}^\gamma\partial_\mu V_{\alpha\nu}(x) \\ &\quad + \omega_\gamma{}^\nu V_\beta{}^\gamma\partial_\mu(\omega_\alpha{}^\gamma(x)V_{\gamma\nu}(x)) \\ &= V_\beta{}^\nu(x)\partial_\mu V_{\alpha\nu}(x) + \partial_\mu\omega_{\alpha\beta}(x) + V_\beta{}^\nu(x)\omega_\alpha{}^\gamma(x)\partial_\mu V_{\gamma\nu}(x) \\ &\quad + \omega_\gamma{}^\nu(x)V_\beta{}^\gamma(x)\partial_\mu V_{\alpha\nu}(x), \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

missä on käytetty yhtälöä (A.8) ja pitämällä taas mukana vain lineaariset termit. Kertomalla tämä generaattorilla $\sigma_{\alpha\beta}$ ja käyttämällä generaattorien kommutaatiorelaatioita

$$[\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\gamma\delta}] = \eta_{\gamma\beta}\sigma_{\alpha\delta} - \eta_{\gamma\alpha}\sigma_{\beta\delta} + \eta_{\delta\beta}\sigma_{\gamma\alpha} - \eta_{\delta\alpha}\sigma_{\gamma\beta} \quad (\text{A.20})$$

saadaan lopulta ehdon (A.17) toteuttava matriisi Γ , niin sanottu *spin-konnektio*

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{2}\sigma^{\alpha\beta}V_\alpha^\nu(x)\partial_\mu V_{\beta\nu}. \quad (\text{A.21})$$

Kaarevan avaruuden vaikutus joka on invariantti yleisessä koordinaattimuunnoksessa saadaan siis korvaamalla osittaisderivaatat ∂_μ kovariantilla derivaatalla

$$\nabla_\alpha \equiv V_\alpha^\mu\partial_\mu + \frac{1}{2}\sigma^{\beta\gamma}V_\beta^\nu V_\alpha^\mu\partial_\mu V_{\gamma\nu}. \quad (\text{A.22})$$

B Schwingerin-DeWittin kehitelmä

Tässä liitteessä johdetaan Schwingerin-DeWittin kehitelmä, jonka johti alunperin B. DeWitt [8, 27] käyttäen menetelmää, joka pohjautui J. Schwingerin [65] kehittämään formalismiin. Tässä seurataan kuitenkin T. Bunchin ja L. Parkerin artikkelia [66], jossa he johtivat adiabaattisen kehitelmän Feynmanin propagaattorille käyttäen lokaalia impulssiavaruusesitystä. Tämä esitys johtaa ekvivalentisti Schwingerin-DeWittin kehitelmään.

Lokaali impulssiavaruusesitys käyttää hyväkseen Riemannin normaalikoordinaatteja, joten on hyvä käydä niiden konstruktio läpi lyhyesti. Olkoon origo pisteessä q , jolloin tämän pisteen suhteen Riemannin normaalikoordinaatit konstruoidaan seuraavasti [36]. Oletetaan, että pisteellä q on ympäristö B siten, että on olemassa yksikäsitteinen geodeesi joka yhdistää minkä tahansa ympäristön B pisteen pisteeseen q . Tämänlaista ympäristöä sanotaan pisteen q *normaaliksi ympäristöksi*. Pisteen $p \in B$ Riemannin koordinaatit y^μ ovat

$$y^\mu = \lambda \xi^\mu, \quad (\text{B.1})$$

missä λ on pisteiden p ja q välisen geodeesin affiini parametri valittuna siten, että origossa $\lambda(q) = 0$. Lisäksi ξ^μ on pisteessä q geodeesin tangenttivektori

$$\xi^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (\text{B.2})$$

Mille tahansa pisteen q kautta kulkevalle geodeesille tangenttivektori ξ^μ on vakio. Tällöin normaalikoordinaateissa

$$\frac{d^2 y^\alpha}{d\lambda^2} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Yhdessä geodeesiyhtälön

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \quad (\text{B.4})$$

myötä, missä $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ on toisen lajin Christoffelin symboli, tämä implikoi että Riemannin normaalikoordinaateissa

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(y) \frac{dy^\beta}{d\lambda} \frac{dy^\gamma}{d\lambda} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(y) \xi^\beta(y) \xi^\gamma(y) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Kertomalla tämä termillä λ^2 saadaan

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(y) y^\beta y^\gamma = 0. \quad (\text{B.6})$$

Pisteessä q puolestaan $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(q)\xi^\beta\xi^\gamma = 0$ mille tahansa pisteen q läpi kulkevan geodeesin tangenttivektorille ξ^μ , joten näissä koordinaateissa

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(q) = 0. \quad (\text{B.7})$$

Metriikka voidaan skaalata ja diagonalisoida pisteessä q , joten

$$g_{\mu\nu}(q) = \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{B.8})$$

Näin konstruoituja koordinaatteja sanotaan *Riemannin normaalikoordinaateiksi*.

Feynmanin propagaattori n -ulotteisessa kaarevassa avaruudessa toteuttaa yhtälön

$$(\square + m^2 + \xi R)G_F(x, x') = -[-g]^{-1/2}\delta^n(x, x'). \quad (\text{B.9})$$

Lokaali impulssiavaruusesitys pohjautuu pisteeseen x konstruoituihin Riemannin normaalikoordinaatteihin y^μ . Kiinnitetään origo pisteeseen¹⁸ x' , jolloin metriikka $g_{\mu\nu}$ voidaan laajentaa muodossa

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(y) = & \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta}(0)y^\alpha y^\beta - \frac{1}{6}\nabla_\gamma R_{\mu\alpha\nu\beta}(0)y^\alpha y^\beta y^\gamma \\ & + \left[\frac{1}{20}\nabla_\gamma \nabla_\delta R_{\mu\alpha\nu\beta}(0) + \frac{2}{45}R_{\alpha\mu\beta\lambda}R^\lambda_{\gamma\nu\delta}(0) \right] y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

missä $R^\mu_{\alpha\nu\beta}$ on Riemannin tensori. Määritellään seuraavaksi funktio

$$\overline{G}_F(x, x') := [-g]^{1/4}(x)G_F(x, x') \quad (\text{B.11})$$

ja sen Fourier'n muunnos

$$\overline{G}_F(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k e^{-iky} \overline{G}_F(k), \quad (\text{B.12})$$

missä $ky = \eta^{\alpha\beta}k_\alpha y_\beta$. Tällöin voidaan työskennellä eräänlaisessa lokaalissa impulssiavaruudessa. Laajentamalla nyt yhtälön (B.9) metriikka normaalikoordinaateissa ja siirtymällä k -avaruuteen voidaan $\overline{G}_F(k)$ ratkaista iteroimalla. Tällöin ratkaisu, joka sisältää neljä derivaattaa metriikasta on

$$\begin{aligned} \overline{G}_F(k) \sim & (k^2 - m^2)^{-1} - \left(\frac{1}{6} - \xi\right)R(k^2 - m^2)^{-2} + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{6} - \xi\right)\nabla_\alpha R \partial^\alpha (k^2 - m^2)^{-2} \\ & - \frac{1}{3}a_{\alpha\beta}\partial^\alpha \partial^\beta (k^2 - m^2)^{-2} + \left[\left(\frac{1}{6} - \xi\right)^2 R^2 + \frac{2}{3}a^\lambda \lambda\right] (k^2 - m^2)^{-3}, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

¹⁸Origo voidaan tietysti kiinnittää minne tahansa pisteet x ja x' sisältävään normaaliin ympäristöön, mutta tällöin laskut pitäisi tehdä pisteiden x ja x' erotuksen suhteen.

missä $\partial_\alpha = \partial/\partial k^\alpha$ ja

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \nabla_\alpha \nabla_\beta R + \frac{1}{120} \nabla_\alpha \nabla_\beta R - \frac{1}{40} \square R_{\alpha\beta} - \frac{1}{30} R_\alpha{}^\lambda R_{\lambda\beta} \\ & + \frac{1}{60} R^{\kappa\lambda}{}_{\alpha\beta} R_{\kappa\lambda} + \frac{1}{60} R^{\lambda\mu\kappa}{}_\alpha R_{\lambda\mu\kappa\beta}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Kaikki kertoimet on laskettu origossa eli tässä tapauksessa pisteessä x' . Sijoittamalla kehitelmä (B.13) yhtälöön (B.12) saadaan

$$\overline{G}(x, x') \sim \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{d^n k e^{-iky}}{k^2 - m^2} \left[a_0(x, x') + a_1(x, x') \left(-\frac{\partial}{\partial m^2} \right) + a_2(x, x') \left(\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^2 \right], \quad (\text{B.15})$$

missä

$$\begin{aligned} a_0(x, x') & \equiv 1 \\ a_1(x, x') & = \left(\frac{1}{6} - \xi \right) R(x') - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi \right) \nabla_\alpha R(x') y^\alpha - \frac{1}{3} a_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta \\ a_2(x, x') & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi \right)^2 R^2(x') + \frac{1}{3} a^\lambda{}_\lambda. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Yhtälöstä (B.12) saadaan Feynmanin propagaattori korvauksella $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$. Käyttämällä nyt integraalikaavaa

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = -i \int_0^\infty ds e^{is(k^2 - m^2 + i\varepsilon)}, \quad (\text{B.17})$$

voidaan yhtälö (B.15) kirjoittaa muodossa

$$\overline{G}(x, x') = -i \int_{-\infty}^\infty \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \int_0^\infty ds e^{is(k^2 - m^2 + i\varepsilon) - iky} F(x, x'; is), \quad (\text{B.18})$$

missä on määritelty funktio $F(x, x'; is)$, jolla on asymptoottinen kehitelmä

$$F(x, x'; is) \sim a_0(x, x') + a_1(x, x') is + a_2(x, x') (is)^2 + \dots \quad (\text{B.19})$$

Vaihtamalla yhtälössä (B.18) integroimisjärjestystä väliin jää Gaussinen integraali, joka voidaan laskea eksplisiittisesti. Tällöin saadaan (pudottamalla termi $i\varepsilon$)

$$\overline{G}(x, x') = -\frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty ds (is)^{-n/2} \exp[-im^2 s + \sigma/(2is)] F(x, x'; is), \quad (\text{B.20})$$

missä funktio σ määritellään kaavalla

$$\sigma := \sigma(x, x') = \frac{1}{2} y_\alpha y^\alpha. \quad (\text{B.21})$$

Sijoittamalla yhtälö (B.20) Greenin funktion määrittelevään yhtälöön (B.11) saadaan lopulta

$$G_F^{SD}(x, x') = -i\Delta^{1/2}(x, x') \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty ds (is)^{-n/2} \exp[-im^2s + \sigma/(2is)] F(x, x'; is), \quad (\text{B.22})$$

missä Δ on Van Vleckin determinantti

$$\Delta(x, x') = -\det[\partial_\mu \partial_\nu \sigma(x, x')][g(x)g(x')]^{-1/2}. \quad (\text{B.23})$$

Feynmanin propagaattorin integraaliesitystä (B.22) sanotaan *Schwingerin-DeWittin kehitelmäksi*. Vaihtamalla summaus ja integroimisjärjestystä, voidaan integraali suorittaa toisen lajin Hankelin funktion avulla. Tällöin saadaan

$$G_F^{SD}(x, x') \sim \frac{-i\pi\Delta^{1/2}(x, x')}{(4\pi i)^{n/2}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, x') \left(-\frac{\partial}{\partial m^2}\right)^j \times \left[\left(\frac{2m^2}{-\sigma}\right)^{(n-2)/4} H_{(n-2)/2}^{(2)}(\sqrt{2m^2\sigma}) \right]. \quad (\text{B.24})$$

C Adiabaattisen regularisoinnin termejä

Tässä liitteessä annetaan kappaleessa 3.2.2 esiintyviä adiabaattisen regularisoinnin termejä. Nämä on ensimmäisenä johtanut T. Bunch artikkelissaan [34]

$$\begin{aligned}
W_k \sim & \omega + \frac{\xi - \frac{1}{6}}{4\omega} (6\dot{D} + 3D^2 + 12K) - \frac{Cm^2}{8\omega^3} (\dot{D} + D^2) + \frac{5C^2m^4D^2}{32\omega^5} \\
& + \frac{Cm^2}{32\omega^5} (\ddot{D} + 4\ddot{D}D + 3\dot{D}^2 + 6\dot{D}D^2 + D^4) \\
& - \frac{C^2m^4}{128\omega^7} (28\ddot{D}D + 19\dot{D}^2 + 122\dot{D}^2 + 47D^4) + \frac{221C^3m^6}{256\omega^9} (\dot{D}D^2 + D^4) \\
& - \frac{1105C^4m^8D^4}{2048\omega^{11}} - \frac{\xi - \frac{1}{6}}{8\omega^3} (3\ddot{D} + 3\ddot{D}D + 3\dot{D}^2) \\
& + (\xi - \frac{1}{6}) \frac{Cm^2}{32\omega^5} (30\ddot{D}D + 12\dot{D}^2 + 57\dot{D}D^2 + 9D^4 + 36\dot{D}K + 36D^2K) \\
& - (\xi - \frac{1}{6}) \frac{75C^2m^4}{128\omega^7} (2\dot{D}D^2 + D^4 + 4D^2K) \\
& - \frac{(\xi - \frac{1}{6})^2}{32\omega^3} (36\dot{D}^2 + 36\dot{D}D^2 + 9D^4 + 144\dot{D}K + 72D^2K + 144K^2). \quad (C.1)
\end{aligned}$$

Odotusarvossa $\langle T_{00} \rangle_{\text{ad}}$ esiintyvä neljännen kertaluvun adiabaattinen termi on

$$\begin{aligned}
O_{00}^{(4)} = & -\frac{C^2m^4}{64\omega^7} (2\ddot{D}D - \dot{D}^2 + 4\dot{D}D^2 + D^4) + \frac{7C^3m^6}{64\omega^9} (\dot{D}D^2 + D^4) \\
& + (\xi - \frac{1}{6}) \left(\frac{Cm^2}{8\omega^5} (6\ddot{D}D + d\dot{D}D^2) - \frac{C^2m^4}{64\omega^7} (120\dot{D}D^2 + 105D^4) + \frac{105C^3m^6D^4}{64\omega^9} \right) \\
& + (\xi - \frac{1}{6})^2 \left(-\frac{1}{16\omega^3} (73\ddot{D}D - 36\dot{D}^2 - 27D^4) + \frac{Cm^2}{8\omega^5} (54\dot{D}D^2 + 27D^4) \right). \quad (C.2)
\end{aligned}$$

Odotusarvossa $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{ad}}$ neljännen kertaluvun termi on puolestaan

$$\begin{aligned}
O_{\text{tr}}^{(4)} = & -\frac{C^2m^4}{32\omega^7} (\ddot{D} + 4\ddot{D}D + 3\dot{D}^2 + 6\dot{D}D^2 + D^4) + \frac{C^3m^6}{128\omega^9} (28\ddot{D}D + 21\dot{D}^2 + 126\dot{D}D^2 \\
& + 49D^4) - \frac{231C^4m^8}{256\omega^{11}} (\dot{D}D^2 + D^4) + \frac{1155C^5m^{10}D^4}{2048\omega^{13}} + (\xi - \frac{1}{6}) \left(\frac{Cm^2}{4\omega^5} (3\ddot{D} \right. \\
& + 6\ddot{D}D + \frac{9}{2}\dot{D}^2 + 3\dot{D}D^2) - \frac{C^2m^4}{32\omega^7} (120\ddot{D}D + 90\dot{D}^2 + 390\dot{D}D^2 + 105D^4) \\
& + \frac{C^3m^6}{128\omega^9} (1680\dot{D}D^2 + 1365D^4) - \frac{945C^4m^8D^4}{128\omega^{11}} \left. \right) \\
& + (\xi - \frac{1}{6})^2 \left(-\frac{1}{4\omega^3} (18\ddot{D} - 27\dot{D}D^2) + \frac{Cm^2}{32\omega^5} (432\ddot{D}D + 324\dot{D}^2 + 648\dot{D}D^2 \right. \\
& + 27D^4) - \frac{C^2m^4}{16\omega^7} (270\dot{D}D^2 + 135D^4) \left. \right) \Big]. \quad (C.3)
\end{aligned}$$