

Casimirin ilmiö sähkömagneettiselle kentälle ja metamateriaalit

Pro gradu-tutkielma
Turun yliopisto
Fysiikan ja tähtitieteen laitos
Teoreettinen fysiikka
2016
Antti Ylitepsa
Tarkastajat:
Dos. Tom Kuusela
FT Jarno Järvinen

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -järjestelmällä.

TURUN YLIOPISTO

Fysiikan ja tähtitieteen laitos

YLITEPSA, ANTTI: Casimirin ilmiö sähkömagneettiselle kentälle ja metamateriaalit

Pro gradu-tutkielma, 123 s.

Teoreettinen fysiikka

Toukokuu 2016

Casimirin ilmiö on voima, joka johtuu kenttien kvantittumisesta. Se seuraa tyhjiötilan ja sähkömagneettisesti aktiivisen väliaineen vuorovaikutuksesta toistensa kanssa. Sen suuruus on merkittävä vain mikroskooppisilla etäisyyksillä ja esim. johtavien levyjen välillä se on attraktiivinen. Metamateriaalit taas ovat aineita, joiden pieni yksikkökoko mahdollistaa niiden vasteen mallintamisen keskiarvoina. Metamateriaalien käyttäytyminen voi poiketa merkittävästi tavallista väliaineista. Tässä työssä tarkastellaan Casimirin ilmiötä tasomaisille levyille sekä erilaisten metamateriaalien vaikutusta voiman merkkiin ja suuruuteen. Tällä on merkitystä esim. mikroskooppisten koneiden kitkan pienentämiselle.

Yksi tärkeimpiä kysymyksiä Casimirin ilmiössä ovat sen selitysmallit. Yhtäältä tutkielmassa syvennytään eri selitysmalleihin alan kirjallisuuteen perustuen. Toisaalta käsitellään metamateriaalien teoriaa yleisesti ja esitetään esimerkki ns. vasenkätisestä metamateriaalista. Lopuksi lasketaan, miten sopivat metamateriaalit muuttavat voimaa levyjen tapauksessa.

Tutkielmassa kootaan kaksi teoriaa Casimirin ilmiöstä yhteen ja huomataan, kuinka niillä on sama alkuperä. Sekä Langevin-quantittuminen että systeemin vaikutusintegraaliin pohjautuva kvantittuminen antavat saman tuloksen kuin vanhempi nk. Lifshitzin malli. Mallintamalla ja etsimällä sopiva metamateriaali lasketaan numeerisesti Lifshitzin kaavaan perustuen, vaihtuuko voiman merkki ja mikä on sen suuruusluokka eri etäisyyksillä. Löydetään kaksi tapausta, joissa voima saadaan repulsiiviseksi levyjen välillä.

Asiasanat: Casimirin ilmiö, metamateriaalit, kvantittuminen

Sisältö

Johdanto	5
1 Klassinen elektrodynamiikka	8
1.1 Maxwellin yhtälöt	8
1.2 SM-kentän ratkaisut Greenin funktioiden avulla	11
1.3 Vektoripotentiaali	13
1.4 Elektrodynamiikan yhtälöt Minkowskin avaruudessa	17
2 Casimirin voiman mittaukset	20
3 SM-kenttä väliaineessa	23
3.1 Sähkökenttä väliaineessa	23
3.2 Magneettikenttä väliaineessa	27
3.3 Permittiivisyyden mallit	27
3.4 Johtavuustensori	29
3.5 Energiavuo	31
3.6 SM-aallon eteneminen väliaineessa	33
4 SM-kenttä metamateriaaleissa	35
4.1 Vasenkätisyys	35
4.2 Virtapiirimalli kaksiulotteisille systeemeille	39
4.3 Väliaineiden mallintaminen virtapiirein	40
4.4 Esimerkit metamateriaaleista: SRR, ohuet johtimet ja niiden yhdistelmä	45
5 Kvanttielektrodynamiikka	51
5.1 Vektoripotentiaalin kvantittuminen	52
5.2 Langevin-quantittuminen	59
5.3 Kvantittuminen vaikutusintegraalista laskettuna	74

6 Casimirin ilmiö	84
6.1 Skalaarikenttä ja regularisaatio	85
6.2 Kvanttielektrodynaaminen ratkaisu	89
7 Positiivinen Casimirin voima	96
7.1 Väliaine peilien välissä	96
7.2 Tyhjiö peilien välissä	103
8 Yhteenveto ja avoimet kysymykset	108
A Greenin funktiot	111
A.1 Määritelmät	111
A.2 Helmholtzin yhtälön Greenin tensori	112
A.3 Greenin matriisi kerrosmaiselle materiaalille	116

Johdanto

Kvanttimekaaninen selitys sähkömagneettiselle Casimirin voimalle tyhjiössä on kenttäoperaattorin varianssin odotusarvo, joka on nolasta eroava myös silloin, kun itse kenttäoperaattorin keskiarvo on nolla. Sen etumerkki ja suuruus riippuvat kentästä, väliaineesta ja muodosta. Esimerkiksi sähkömagneettisen kentän (SM-kentän) tapauksessa, kahden täydellisen kohtisuoran peilin välisessä tyhjiössä, Casimirin ilmiö on peilejä kokoon työntävä. Erilaisten väliaineiden ja muotojen avulla voidaan Casimirin voima kuitenkin saada positiiviseksi, esim. SM-säteilyä erikoisesti taittavien metamateriaalien avulla. Tässä rajoitutaan kerrosmaisiiin ja isotrooppisiin lineaarisiin väliaineisiin, joissa ei esiinny avaruudellista dispersiota. Casimirin voima voidaan laskea kvanttielektrodynamiikan, Lifshitzin teorian tai sirontateorian avulla; esityksessä rajoitutaan kahteen ensimmäiseen. Kvanttimekaniikan mukaan tyhjiön energia on ääretön myös absoluuttisessa nollassa. Tätä energiaa ei kuitenkaan koskaan havaita vaan voimme mitata vain sen eroja. Tyhjiön energiatiheyttä voidaan pienentää esim. käyttämällä heijastavia peilejä, jolloin sallittujen moodien määrä vähenee. Yksinkertaisimmassa mallissa Casimirin voima aiheutuu tällaisten energiatiheyserojen synnyttämästä potentiaalista.

Puhdas SM-kenttä kyetään selittämään tyhjentävästi kvanttielektrodynamiikan avulla, mutta todellisissa systeemeissä pitää mallintaa SM-kentän lisäksi väliainetta sekä väliaineen ja kentän välistä vuorovaikutusta. Tähän tarkoitukseen on kehitetty fenomenologinen makroskooppinen kvanttielektrodynamiikka, jossa puhtaasti SM-kentän operaattoreihin lisätään stokastisia Langevinvirtoja kuvaavat häiriötermit, jotta kenttäoperaattoreiden kommutointiehdot ja statistisen fysiikan antamat tulokset niiden odotusarvoille olisivat voimassa. Casimirin voima lasketaan Lorentzin voimana suoraan kvanttielektrodynamiikan operaattorimuotoisesta energiaimpulssitensorista. Casimirin voima on kyetty selittämään myös mikrokooppisella mallilla, jossa tutkitaan väliaineen ja SM-kentän yhdistettyjä systeemiä. Voidaan osoittaa, että molemmat mallit antavat samat tulokset ja että Lifshitzin teoria seuraa näistä lähestymistavoista. Yhdistetty systeemi muodostaa polaritonin, eli pseudobosonin, joka käyttäytyy SM-kenttää kuvaavan fotonin tavoin.

Metamateriaalit ovat keinotekoisia, sähkömagneettisesti aktiivisia materiaaleja, joissa SM-kenttä käyttäytyy hyvin eri tavalla kuin luonnollisissa materiaaleissa. Yleensä nämä materiaalit ovat jaksollisia ja niiden yksikkökopin koko on paljon pienempi kuin tarkasteltavan SM-säteilyn aallonpituus. Niinpä sopivilla taajuusalueilla voidaan sekä permittiivisyyttä että permeabiliteettia approksimoida tehollisilla, makroskooppisilla, ”keskiarvoistetuilla” tensoreilla ε_{eff} ja μ_{eff} [1]. Materiaaleja voidaan mallintaa kaksiporittisina virtapiireinä eli sijaiskytkentöinä, joissa piirin komponenttien ja materiaalin fysikaalisten ominaisuuksien välille voidaan johtaa erilaisia yhtälöitä. Jos materiaalin permittiivisyys ja permeabiliteetti ovat molemmat negatiivisia, on myös taitekerroin negatiivinen. Tällöin puhutaan vasenkätisistä metamateriaaleista.

Sopivilla metamateriaaleilla Casimirin voima vaihtuu negatiivisesta positiiviseksi yhdensuuntaisten levyjen tapauksessa. Tällöin Fresnelin heijastuskerrointen tulo Greenin funktiossa vaihtaa merkkiä, mikä johtaa positiiviseen Casimirin voimaan. Voidaan valita ensimmäinen levy hyvin johtavaksi metalliksi ja toinen magneettisesti aktiiviseksi metamateriaaliksi, jolloin voima vaihtaa etumerkkiä. Toinen tapa on täyttää hyvin heijastavien levyjen väli metamateriaalilla, joka on vasenkätinen tarpeeksi laajalla taajuusalueella. Yleensä voima vaihtaa etumerkkiä vain tietyillä etäisyyksillä, ja nämä etäisyydet asettavat vaatimuksia metamateriaalien yksikkökopin koolle laskelmissa.

Tutkielman kappaleet liittyvät oleellisesti toisiinsa, vaikka niiden otsikkojen perusteella ei siltä aina vaikuttaisikaan. Ensimmäisessä kappaleessa käydään läpi klassinen elektrodynamiikka ja etenkin sen Greenin funktion avulla saatavat ratkaisut. Samat Greenin funktiot toimivat myös kvanttielektrodynamiikan yhtälöjen ratkaisuna (kappale 5). Vektoripotentiaalia tarvitaan tietysti kappaleessa 5.1. Lisäksi käsitellään yleisempi energiaimpulssitensori, jonka kvanttimekaanisen muodon avulla voidaan laskea tilavuuteen V vaikuttava sähkömagneettinen voima kappaleissa 5 ja 6. Kentän klassinen Lagrangen ja Hamiltonin esitys toimii taas kappaleen 5.3 lähtökohtana. Myöhempään analyysiin (Lifshitzin ja Raabe-Welschin kaavat kappaleissa 5-7) tarvitaan sekä kaikki varaukset huomioiva että vain vapaisiin varauksiin perustuvat energiaimpulssitensorit.

Kappaleessa 2 selvitetään Casimirin voiman havaitsemisen rajoitteita, esim. millä etäisyyksillä mittaukset ovat edes mahdollisia nykyteknologian avulla. Nämä rajoitteet

otetaan huomioon tarkasteltaessa potentiaalisia positiivisen Casimirin voiman aikaansaavia väliaineita kappaleessa 7.

Kappaleen 3 ja 4 tarkoitus on käydä läpi niin metamateriaalien kuin luonnollistenkin väliaineiden SM-vaste sekä itse SM-kentän käytös väliaineissa. SM-vasteet tulee tuntea koko niiden analyttisessä muodossa, jotta näitä voidaan myöhemmin hyödyntää kvanttielektrodynamiikan odotusarvojen integroinneissa Cauchyn integraalilauseen mukaisesti (kappale 5). Vasteista lasketut Fresnelin heijastuskertoimet esiintyvät Greenin funktioissa ja määrittävät Casimirin voiman merkin kappaleessa 7. Vasteet esiintyvät myös yhdistettyä systeemiä kuvaavien lasku- ja nosto-operaattoreiden kommutointiehdossa kappaleessa 5, joko suoraan permittiivisyytenä ja permeabiliteettina tai yleisemmin johtavuustensorina (kappale 3.4).

Kappaleen 5 tulokset otetaan käyttöön laskettaessa Casimirin voimaa kappaleessa 6. Operaattoreiden odotusarvojen laskeminen sekä termisessä että tyhjiötilan tapauksessa tarvitaan selittämään voiman suora integraalimuoto ja summamuoto Matsubaran taajuuksineen (kappale 6).

Laskettaessa Casimirin voimaa kappaleessa 6 hyödynnetään sekä Minkowskin että vapaan SM-kentän tensoria. Molempia tarvitaan analysoitaessa mahdollista positiivista Casimirin voimaa seuraavassa kappaleessa 7. Yksinkertaisimman tapauksen ideaalinen tulos (kappale 6.1) toimii rajana hyväksyttävillä tuloksilla.

1 Klassinen elektrodynamiikka

Klassinen elektrodynamiikka pohjautuu Maxwellin osittaisdifferentiaaliyhtälöihin (ODY:hin), joiden ratkaisuina saadaan vektorimuotoinen sähkö- ja magneettikenttä. SM-kenttä voidaan ratkaista etsimällä differentiaalioperaattorin käänteisoperaattorin ydin, eli nk. Greenin funktio. Ratkaisu saadaan integraalina kentän lähteiden ja ytimen tulon ollessa integrandi. Koordinaattien Fourier-muunnoksen avulla päädytään vielä yksinkertaisempiin matriisiyhtälöihin.

Maxwellin yhtälöt ovat invariantit suhteellisuusteorian Lorentzin muunnosten suhteen ja lisäksi SM-kenttä voidaan antaa tyhjentävästi nk. nelipotentialin avulla. Voidaan edelleen osoittaa, kuinka kentän likeyhtälöt saadaan lausuttua melko yksinkertaisen Lagrangen tiheyden avulla, jossa esiintyy vain nelipotentialin alkioita. Siirtymällä Hamiltonin esitykseen ja etsimällä uusien muuttujien likeyhtälöt ratkaistaan energiaimpulssitensori. Se antaa kentän energiatiheyden, liikemäärä- ja energiavuon sekä kaikki voimat jännitystensorin avulla.

1.1 Maxwellin yhtälöt

Maxwellin yhtälöt SI-yksiköissä klassiselle SM-kentälle väliaineessa saadaan neljänä yhtälönä [2]:

$$\nabla \times E = -\partial_t B \quad (1.1)$$

$$\nabla \times H = J_f + \partial_t D \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot D = \rho_f \quad (1.4)$$

E on sähkökenttä, D sähkövuon tiheys, H magneettikenttä, B magneettivuon tiheys ja J_f vapaa virtatiheys. Jokainen näistä kentistä on funktiomuotoa $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^3$, eli ne riippuvat sekä ajasta että paikasta. Vapaa varaustiheys taas on funktio $\rho_f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Vapaa virta- ja varaustiheys eivät siis ota huomioon aineen sähköiseen ja magneettiseen vasteeseen liittyviä varauksia ja virtoja, vaan ne on sisällytetty sähkövuon tiheyteen D

ja magneettikenttään H . Ratkaistaksemme osittaisdifferentiaaliyhtälöt meidän on tunnettava H :n ja D :n riippuvuudet E :stä ja B :stä sekä varaus- ja virtatiheys. Mikäli vapaata varaustiheyttä ja vapaata virtatiheyttä ei tunneta, voidaan yhtälöt silti ratkaista, kunhan tunnetaan muita riippuvuussuhteita suureiden välillä, ja osittaisdifferentiaalioperaattorit ovat Lipschitz-rajoitettuja (eli niillä on kiintopiste ts. ratkaisu). Yleensä yhteys E :n ja D :n sekä H :n ja B :n välillä saadaan yksinkertaisina lineaariyhtälöinä matriisien (tai yleisemmässä tapauksessa ”integraaliydintyyppisten” lineaarioperaattoreiden) ε ja μ avulla:

$$D = \varepsilon \cdot E \quad B = \mu \cdot H \quad (1.5)$$

Näitä matriisifunktioita kutsutaan väliaineen permittiivisyydeksi ja permeabiliteetiksi. Nämä yhtälöt voidaan edelleen muuntaa taajuusmuotoon Fourier-muunnoksella ajan suhteen. Tästä käytetään myös nimitystä aikaharmoninen muoto, tosin tällöin oletetaan jo valmiiksi kenttien separoituvuus avaruudelliseen ja ajasta riippuvaan osaan ($A(r, t) = A(r)e^{i\omega t}$). Fourier-muunnoksessa vektori-/tensorikentät sekä ajan derivaatat muuntuvat seuraavanlaisesti:

$$F : t \rightarrow \omega \quad F(A(r, t))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} A(r, t) dt = A(r, \omega) \quad \partial_t \rightarrow -i\omega \Rightarrow$$

$$\nabla \times E = i\omega \mu \cdot H \quad (1.6)$$

$$\nabla \times H = J_f - i\omega \varepsilon \cdot E \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot (\mu \cdot H) = 0 \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \cdot E) = \rho_f \quad (1.9)$$

Suureiden ε :n ja μ :n muuntuminen selittyy niiden konvoluutiomuodolla (ks. kappale 3). Kenttien aikariippuvuus on nyt korvautunut taajuusriippuvuudella. Sekä permittiivisyys- että permeabiliteettitensorit ovat kääntyviä, joten voidaan kirjoittaa $\mu^{-1} \cdot \nabla \times E = i\omega H$. Ottamalla tästä edelleen roottori päädytään yhtälöön: $\nabla \times \mu^{-1} \cdot \nabla \times E = i\omega \nabla \times H = i\omega J_f + \omega^2 \varepsilon \cdot E \Leftrightarrow$

$$\nabla \times (\mu_r^{-1} \cdot \nabla \times E) - c^{-2} \omega^2 (\varepsilon_r \cdot E) = i\mu_0 \omega J_f = U \quad (1.10)$$

Yhtälössä on huomioitu, että $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ ja $\mu = \mu_0 \mu_r$ sekä $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$. Samoin saadaan yhtälö: $\varepsilon^{-1} \cdot \nabla \times H = \varepsilon^{-1} \cdot J_f - i\omega E \Rightarrow \nabla \times \varepsilon^{-1} \cdot \nabla \times H = \nabla \times (\varepsilon^{-1} \cdot J_f) - i\omega \nabla \times E \Leftrightarrow$

$$\nabla \times (\varepsilon_r^{-1} \cdot \nabla \times H) - c^{-2} \omega^2 (\mu_r \cdot H) = \nabla \times (\varepsilon_r^{-1} \cdot J_f) = V \quad (1.11)$$

Tavanomaisten Maxwellin yhtälöiden lisäksi täytyy huomioida, että sähkövirta aiheutuu varausten liikkeestä. Koska varaus ei häviä, kompaktista tilavuudesta V virtaavan varausmäärän derivaatta ajan suhteen antaa sähkövirran. Sähkövirta taas saadaan virtatiheyden pintaintegraalina kappaleen V suljetulla pinnalla ∂V , joten varauksen säilymislaista seuraa:

$$-\partial_t \int_V d^3r \rho(r, t) = \int_{\partial V} dS J_f(r, t) \cdot n(r) = \int_V d^3r \nabla \cdot J_f(r, t)$$

Kun annetaan V :n lähestyä nollaa saadaan yhtälön differentiaalimuoto eli $-\partial_t \rho_f = \nabla \cdot J_f$, ja tästä edelleen Fourier-muunnoksella

$$i\omega \rho_f = \nabla \cdot J_f \quad (1.12)$$

Puhtaan sähkömagneettisen kentän Maxwellin yhtälöt ovat taas muotoa:

$$\nabla \cdot E = \varepsilon_0^{-1} \rho \quad (1.13)$$

$$\nabla \times E = i\omega B \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1.15)$$

$$\nabla \times B = J/\mu_0 - i\omega \mu_0 \varepsilon_0 E \quad (1.16)$$

Nämä yhtälöt ovat voimassa aina, sillä ne eivät huomioi väliainetta lainkaan - siksi niitä kutsutaan usein mikroskooppisiksi Maxwellin yhtälöiksi. Varaustiheys ja virtati-

heys kuvaavat nyt kaikkia varauksia; ts. polarisoitumavirtatiheys ja magnetoitumavirta sisältyvät termeihin $\rho = \rho_f + \rho_i$ ja $J = J_f + J_i$ väliaineen sisäisinä virtoina ja varauksina J_i ja ρ_i . Yhtälöistä saadaan samaan tapaan kuin makroskooppisista Maxwellin yhtälöistä (1.1) - (1.4) uudet osittaisdifferentiaaliyhtälöt pelkälle sähkökentälle ja magneettivuon tiheydelle.

$$\nabla \times \nabla \times E - c^{-2}\omega^2 E = i\mu_0\omega J = U \quad (1.17)$$

$$\nabla \times \nabla \times B - c^{-2}\omega^2 B = \mu_0\nabla \times J = V \quad (1.18)$$

Kaava on käytännöllinen tyhjiökentän tapauksessa, mutta väliaineen tapauksessa materiaalin SM-vaste pitää huomioida jotenkin termissä J , lineaarisessa tapauksessa tähän voidaan käyttää esim. johtavuustensoria $Q(r, r', \omega)$ (ks. kappale 3.4).

1.2 SM-kentän ratkaisut Greenin funktioiden avulla

U :ta ja V :tä yhtälöissä (1.10) ja (1.11) kutsutaan lähdekentiksi. ODY:t voidaan ratkaista ns. Greenin funktioiden (ks. liite A) avulla, eli etsimällä funktiot GE ja GH , jotka ovat ratkaisun ”ytimiä”, kun integroidaan yli lähdekenttien [3].

$$E(r, \omega) = \int_V d^3s GE(r, s, \omega) \cdot U(s, \omega) \quad (1.19)$$

$$H(r, \omega) = \int_V d^3s GH(r, s, \omega) \cdot V(s, \omega) \quad (1.20)$$

Tästä huomataan, että Greenin funktiot kolmivektorikentille ovat 3x3- matriiseja. Sijoittamalla nämä yhtälöihin (1.10) ja (1.11) sekä huomioimalla, että esim. U arvolla (r, ω) saadaan U :n ja Diracin deltafunktion tulon integraalina yli koko tilavuuden V , päädytään seuraavaan ODY:iin Greenin funktioille:

$$\int_V d^3s (\nabla \times (\mu_r^{-1} \cdot \nabla \times GE) - c^{-2}\omega^2 \epsilon_r \cdot GE) \cdot U = \int_V d^3s U(s, \omega) \delta^3(r - s) \quad (1.21)$$

$$\int_V d^3s (\nabla \times (\varepsilon_r^{-1} \cdot \nabla \times GH) - c^{-2} \omega^2 \mu_r \cdot GH) \cdot V = \int_V d^3s V(s, \omega) \delta^3(r - s) \quad (1.22)$$

Yhtälöissä GE :n ja GH :n muuttujat ovat kuten aiemmissa yhtälöissä (1.19) ja (1.20). Lisäksi Diracin deltafunktiossa on mukana identiteettimatriisi $I = \text{diag}(1, 1, 1)$. Matriisin roottori saadaan soveltamalla ketjusääntöä vektoriin, joka on muotoa matriisi kertaa vektori. Tulokseksi saadaan kaava:

$$\nabla \times M = \begin{bmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = R(r) \cdot M \quad (1.23)$$

Tehdään vielä Fourier-muunnos ”aaltolukuavaruuteen”:

$$F(GE(r, \omega))(k, \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r e^{-ik \cdot r} GE(r, \omega) = gE(k, \omega)$$

Nyt koordinaatit ja derivaatat muuntuvat seuraavasti:

$$r \longrightarrow k \text{ ja } \partial_l \longrightarrow ik_l$$

$$\nabla \times = \begin{bmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -ik_3 & ik_2 \\ ik_3 & 0 & -ik_1 \\ -ik_2 & ik_1 & 0 \end{bmatrix} = iK$$

Aaltolukuavaruudessa alkuperäiset kenttien osittaisdifferentiaaliyhtälöt redusoituvat algebrallisiksi yhtälöiksi, jotka voidaan ratkaista yksikertaisella matriisilaskennalla.

$$-K \cdot \mu_r^{-1} \cdot K \cdot gE + \frac{\omega \varepsilon_r}{c^2} \cdot gE = F(\delta^3(r-s))(k) = I \Rightarrow gE(k, \omega) = -(K \cdot \mu_r^{-1} \cdot K + c^{-2} \omega \varepsilon_r \cdot I) \quad (1.24)$$

$$-K \cdot \varepsilon_r^{-1} \cdot K \cdot gH + \frac{\omega^2 \mu_r}{c^2} \cdot gH = F(\delta^3(r-s))(k) = I \Rightarrow gH(k, \omega) = -(K \cdot \varepsilon_r^{-1} \cdot K + c^{-2} \omega^2 \mu_r \cdot I) \quad (1.25)$$

Permittiivisyyden ja permeabiliteetin muuntuminen selittyy taas niiden konvolutiivisella muodolla (ks. kappale 3 avaruudellinen dispersio). Lopulta saadaan sähkömagneettisten

kenttien ratkaisut:

$$A(r, t) = \int_V d^3s F_{\mathbb{R}}^{-1}(F_{\mathbb{R}^3}^{-1}(gA(k, \omega))(r - s) \cdot L(s, \omega))(t) \quad (1.26)$$

A on haluttu kenttä, gA sen Greenin funktio aaltolukuavaruudessa ja L sen lähdekenttä.

Täsmälleen samalla menetelmällä saataisiin ratkaistua vapaan SM-kentän Maxwellin yhtälöt. Nyt ratkaistavat Greenin osittaisdifferentiaaliyhtälöt ovat muotoa:

$$\int_V d^3s (\nabla \times \nabla \times GE - c^{-2}\omega^2 GE) \cdot U_E = \int_V d^3s U_E(s, \omega) \delta^3(r - s) \quad (1.27)$$

$$\int_V d^3s (\nabla \times \nabla \times GB - c^{-2}\omega^2 GB) \cdot V_B = \int_V d^3s V_B(s, \omega) \delta^3(r - s) \quad (1.28)$$

Lähdekentät U_E ja V_B saadaan nyt yhtälöistä (1.17) ja (1.18), yhtälöt muunnetaan samalla menetelmällä k -avaruuteen ja ratkaistaan matriisilaskennan avulla.

1.3 Vektoripotentiali

Sähkömagneettinen kenttä voidaan ratkaista nk. nelipotentialin (ϕ, A) avulla, jossa ϕ on skalaaripotentiali ja A vektoripotentiali. E ja H saadaan yhtälöistä $E = \partial_t A - \nabla \phi$ ja $H = \kappa \nabla \times A$, eli taajuusmuodossa saadaan:

$$E = i\omega A - \nabla \phi, \quad H = \kappa \nabla \times A \quad (1.29)$$

Sijoittamalla nämä Maxwellin yhtälöihin (1.1) - (1.4) saadaan yhtälö $\nabla \times \kappa_r \nabla \times A - \omega^2/c^2 \epsilon_r A = \mu_0 J_f + i\omega/c^2 \epsilon_r \nabla \phi$. Nelipotentiali ei ole yksikäsitteinen, sillä lisäämällä minkä tahansa jatkuvasti derivoituvan skalaarifunktion $\varphi(\omega, r)$ gradientti vektoripotentialiin A saadaan täsmälleen samat likeyhtälöt. Tällöin skalaari- ja vektoripotentialien välille voidaan valita jokin riippuvuussuhde, tätä valintaa kutsutaan mittaehdoksi. Mittaehdoksi kannattaa valita jokin yhtälöitä yksinkertaistava ehto. Tavallisia elektrodynamiikan mittaehtoja ovat esim. Coulombin mitta $\nabla \cdot A = 0$ tai Lorentzin mitta $\nabla \cdot A - c^{-2} \partial_t^2 \phi = 0$. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi väliaineen olevan ho-

mogeeninen ja isotrooppinen, eli että $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega) \in \mathbb{C}$ ja $\kappa_r = \kappa_r(\omega) \in \mathbb{C}$. Valitaan nyt mittaehto $i\omega\varepsilon_r\mu_r/c^2\phi = \nabla \cdot A$. Sijoittamalla tämä edelliseen yhtälöön saadaan kaava:

$$\nabla \times \nabla \times A - \omega^2/c^2\mu_r\varepsilon_r A = i\omega/c^2\varepsilon_r\mu_r\nabla\phi + \mu J_f \quad (1.30)$$

Koska $\nabla \times \nabla \times A = -\nabla^2 A + \nabla(\nabla \cdot A) = -\nabla^2 A + \nabla(i\omega/c^2\mu_r\varepsilon_r\phi)$, saadaan tulos:

$$\nabla^2 A + \omega^2/c^2\mu_r\varepsilon_r A = -\mu J_f \quad (1.31)$$

Jos DY:n vektorikomponentit ratkaistaisiin Greenin funktion avulla, pitäisi niiden toteuttaa DY:

$$\nabla^2 g(r, r', \omega) + k^2 g(r, r', \omega) = \delta(r - r') \quad (1.32)$$

Tässä on voimassa $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$. Kun huomioidaan, että sähkövuon tiheys aiheutuu vapaasta varaustiheydestä, saadaan lisäksi yhtälö: $\rho_f = \nabla \cdot (\varepsilon E) = \varepsilon i\omega\nabla \times A - \varepsilon\nabla^2\phi$. Koska lähdekenttä ja ratkaistava kenttä ϕ ovat skalaarikenttiä, saadaan samalla tavoin skalaarinen Greenin funktion DY:

$$(\nabla^2 + k^2)g(r, r', \omega) = \delta(r - r') \quad (1.33)$$

Tästä huomataan heti, että funktion tulee olla sama kuin vektoripotentiaalin tapauksessa; ts. skalaarinen Greenin funktio antaa sekä ϕ :n että A :n ratkaisun:

$$A(r, \omega) = \int_V d^3r' g(r, r', \omega) \mu J_f(r', \omega), \quad \phi(r, \omega) = \int_V d^3r' g(r, r', \omega) \rho_f(r', \omega) / \varepsilon$$

Skalaarisiksi Greenin funktioksi saadaan:

$$g_{\pm}(r, r', \omega) = \frac{e^{\pm ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} = \frac{e^{\pm ik_R|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} e^{\mp k_I|r-r'|} \quad (1.34)$$

k voidaan identifioida kappaleen 3.3 avulla yhtälöksi $k^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}$. Koska taitekertoimen imaginaariosan täytyy olla positiivinen fysikaalisille systeemeille, lähestyy Greenin

funktio nolaa etäisyyden lähestyessä ääretöntä.

Sähkökenttä voidaan ratkaista vektoripotentiaalin avulla, joten sijoittamalla A :n ratkaisu Greenin funktion avulla päädytään yhtälöön:

$$E(r, \omega) = (i\omega I + i\omega/k^2 \nabla(\nabla \cdot)) \int_V d^3s g(r, s, \omega) \mu J_f(s, \omega)$$

∇ operoi vain r :stä riippuvaan osaan eli skalaariseen Greenin funktioon. Vektorilaskennan ketjusääntöä soveltamalla saadaan $(\nabla(\nabla \cdot (g(r, s, \omega) J_f(s, \omega)))_i = \partial_{il} g(r, s, \omega) J_{f,l}(s, \omega)$ ja edelleen:

$$E(r, \omega) = \mu \int_V d^3s (I + 1/k^2 \nabla \otimes \nabla) g(r, s, \omega) J_f(s, \omega)$$

Tiedetään, että $(\nabla \otimes \nabla)_{ij} = \partial_{ij}$ ja kaavasta voidaan identifioida Greenin matriisi sähkökentälle:

$$G(r, r', \omega) = \mu_r (I + \frac{1}{k^2} \nabla_r \otimes \nabla_r) g(r, r', \omega) \quad (1.35)$$

$G(r, r', \omega)$ on yhtälön (1.21) $GE(r, r', \omega)$. Maxwellin yhtälöstä saadaan myös H :n Greenin tensori:

$$GH(r, r', \omega) = \frac{-i}{\omega \kappa} \nabla \times G(r, r', \omega) \quad (1.36)$$

Magneettikentän ja sähkökentän sijasta ratkaistavaksi pariiksi voitaisiin valita sähkökenttä ja magneettivuon tiheys. Erona edellisiin vektoripotentiaalin ja skalaaripotentiaalin yhtälöihin on termin κ poisjääminen; ts. väliaineen SM-vastetta ei tarvitse huomioida. Lisäksi vapaa varaustiheys ja virtatiheys korvautuvat kokonaisvaraus- ja kokonaisvirtatiheyksillä ρ ja J . Lähtökohtana olisivat siis yhtälöt $E = i\omega A - \nabla\phi$, $B = \nabla \times A$ ja vapaan SM-kentän Maxwellin yhtälöt (1.13) - (1.16). Näistä saadaan edelleen samalla tekniikalla kuin makroskooppisilla Maxwellin yhtälöillä ODY:t nelikentän komponenteille:

$$\nabla^2 A + \frac{\omega^2}{c^2} A = -\mu_0 J, \quad \nabla^2 \phi + \frac{\omega^2}{c^2} \phi = -\varepsilon_0 \rho$$

Käsittely on analoginen E :n ja H :n kanssa; nyt vain $k = \omega \varepsilon_r \mu_r / c$ korvataan $k_0 = \omega / c$:lla, vapaa varaustiheys kokonaisvaraustiheydellä ja vapaa virtatiheys kokonaisvirtatiheydellä. Yhtälöiden muodot säilyvät samoina.

Kaikki kentät voidaan jakaa kahteen ortogonaaliseen komponenttiin. Tarkastellaan kentän K Fourier-komponenttia $K(k, \omega_k)$. Nyt aaltovektori k antaa kentän etenemissuunnan, joten kenttä voidaan jakaa pitkittäiseen (longitudinaaliseen) ja poikittaiseen (transversaaliseen) osaan $K_l(k, \omega_k)$ ja $K_t(k, \omega_k)$. Koska $K_l(k, \omega_k)$ on aaltovektorin suuntainen, tulee yhtälön $k \times K_l(k, \omega_k) = 0$ päteä. Luonnollisesti pätee myös $k \cdot K_t(k, \omega_k) = 0$. Nämä yhtälöt voidaan muuntaa paikkakoordinaatteihin Fourier-muunnoksen avulla, tällöin operaattori $i\nabla$ korvaa vektorilla k kertomisen ja saadaan tulokset:

$$\nabla \cdot K_t(r, t) = 0, \quad \nabla \times K_l(r, t) = 0 \quad (1.37)$$

Itse asiassa voidaan osoittaa, että tämä jako vastaa Coulombin mitassa ($\nabla \cdot A$) Helmholtzin yhtälön ratkaisun komponentteja. Nyt sähkökentän divergenssi antaisi $\nabla \cdot E = \nabla \cdot (E_t + E_l) = i\omega \nabla \cdot A - \nabla \cdot \nabla \phi = -\nabla \cdot \nabla \phi$, eli E :n pitkittäinen komponentti on $E_l = -\nabla \phi$. Ottamalla sähkökentän roottori saadaan puolestaan: $\nabla \times E = i\omega \nabla \times A - \nabla \times \nabla \phi = i\omega \nabla \times A$. Viimeinen muoto saadaan yhtälöstä $\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = -\varepsilon_{ikj} \partial_k \partial_j \phi$. Poikittainen sähkökentän komponentti on siis $E_t = i\omega A$. Magneettivuon tiheydelle saadaan tietysti yleisestikin vain poikittainen komponentti, sillä se on lähteetön eli $\nabla \cdot B = 0$, ts. $B = \nabla \times A = B_t$.

Kentän pitkittäis- ja poikittaiselementit ovat ortogonaalisia, joten voidaan antaa projektiot, jotka antavat kenttään operoimalla sen komponentit. Koska A_l on vektorin k suuntainen, saadaan pitkittäisprojektiio yksinkertaisesti tulona $P_l = |k|^{-2} |k\rangle \langle k| = |k|^{-2} k \otimes k$. Poikittaisprojektiio olisi nyt projektiio tämän ortogonaalikomplementtiin, sillä $P_l + P_t = I$, t.s. $P_t = I - P_l = I - |k|^{-2} k \otimes k$. Näin saadut projektiio-operaattorit voidaan viedä paikka-avaruuden operaattoreiksi Fourier-muunnoksen avulla. Tavallisten delta-funktioiden tapaan nämä muuntaisivat kentän paikkavaruusesityksen komponenteiksi konvoluutiointegraalin avulla: $A_{t,l}(r) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \delta_{t,l}(r - r') A(r')$. Toisaalta k -avaruudessa projektiio-operaattorit saadaan paikallisesti matriisilla kertomalla, joten esim. $A_t(r)$ saadaan ottamalla käänteinen Fouriermuunnos tästä tulosta:

$$A_t(r) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k (2\pi)^{-3} e^{ikr} P_t(k) A(k) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k (2\pi)^{-3} e^{ikr} P_t(k) \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' A(r')$$

Siirtämällä r' -integrointi P_i :n eteen ja yhdistämällä eksponentit saadaan lopulta esitys poikittaiselle deltafunktiolle paikka-avaruudessa: $\delta_t(r - r') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{ik \cdot (r - r')} (2\pi)^{-3} (I - |k|^{-2} k \otimes k)$. Tästä saadaan suoraan myös esitys pitkittäiselle deltafunktiolle: $\delta_l(r - r') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{ik \cdot (r - r')} (2\pi)^{-3} |k|^{-2} k \otimes k$.

1.4 Elektrodynamiikan yhtälöt Minkowskin avaruudessa

Klassisessa kenttäteoriassa vapaan SM-kentän vaikutusintegraali tyhjiössä olisi muotoa:

$$S_{em} = \int d^4x L = \frac{-1}{4\mu_0} \int d^4x F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int dt \int d^3r [\varepsilon_0 E^2(r, t) - \kappa_0 B^2(r, t)] \quad (1.38)$$

F on kenttätensori $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ ja nelipotentialille A_α pätee $A_\nu = (\phi/c, -A)$, missä A on vektoripotentiali. Indeksien nostot ja laskut suoritetaan systeemin metriikan $g_{\alpha\beta}$ (tai $g^{\alpha\beta}$) avulla; yleensä tämä on $g^{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ eli Minkowskin avaruuden metriikka. Yhtälöissä on käytetty Einsteinin summaussääntöä, joten toistuvat indeksit summataan. Vaikka yhtälöt ovat Lorentz-kovariantteja, on tässä oletettu, että nopeudet (virrankuljettajien nopeus) ovat paljon valonnopeutta pienempiä. Siten Lorentz-tekijä $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1$.

Tämä olisi siis vapaan SM-kentän vaikutusintegraali. SM-kenttä voi kuitenkin vuorovaikuttaa ympäristön kanssa, tämä tapahtuu virran välityksellä. Määrittelemällä nk. nelivirta $J^\nu = (c\rho, J)$ saadaan vuorovaikutusosan vaikutusintegraali muotoon $S_{int} = \int d^4x J^\nu A_\nu$. Systeemin vaikutusintegraali saadaan nyt integroimalla Lagrangen tiheys:

$$S = S_{em} + S_{int} = \int d^4x L = - \int d^4x \left(\frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + J^\alpha A_\alpha \right) = \int dt \int d^3r \left[\frac{\varepsilon_0}{2} E^2(r, t) + \frac{\kappa_0}{2} B^2(r, t) - \rho(r, t)\phi(r, t) + J(r, t) \cdot A(r, t) \right] \quad (1.39)$$

Ratkaistaessa kentän Euler-Lagrangen liikeyhtälöt $\partial_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} \right) - \frac{\partial L}{\partial A_\beta} = 0$ ($\partial_0 = c^{-1}\partial_t$) saadaan:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta, \quad \partial_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\theta} F_{\gamma\theta} = 0 \quad (1.40)$$

Nämä liikeyhtälöt ovat täsmälleen Maxwellin yhtälöt kappaleessa 1.1. Jälkimmäinen yhtälö ei tosin seuraa liikeyhtälöistä, vaan se vastaa Maxwellin yhtälöitä (1.14) ja (1.15).

Jos L_{em} :sta lasketaan kanoninen impulssimomentti $\Pi_\alpha = \frac{\partial L_{em}}{\partial(\partial_0 A^\alpha)}$ ja tehdään Legendren muunnos, saadaan puhtaan SM-kentän Hamiltonin funktionaali:

$$H_{em} = \frac{1}{2} \int dt \int d^3r [\varepsilon_0 E^2(r, t) + \kappa_0 B^2(r, t)] \quad (1.41)$$

Hamiltonin funktionaali antaisi SM-kentän energian. Kanonisen neli-impulssimomentin avaruudellinen osa saataisiin suoraan sähkökentän avulla: $\Pi_k = -\frac{1}{\varepsilon_0} E_k$.

Vuorovaikuttavan systeemin oikean Lagrangen ja Hamiltonin funktionaalin mallintaminen vaatisi tietysti myös varauksenkuljettajat sisältävän väliaineen mallintamista erikseen. Vaikutusintegraalin pitäisi lisätä vuorovaikutustermiä lisäksi väliaineen vaikutusintegraali. Väliainetta arvioitaisiin kahtena harmonisina oskillaattorina, joista toinen vuorovaikuttaisi magneettivuon tiheyden ja toinen sähkökentän kanssa. Niinpä vuorovaikutustermikin saisi uudenlaisen muodon. Tätä vuorovaikutusta kuvaisivat permittivisyys ja permeabiliteetti. Näitä vastaisivat myös erilaiset energiaimpulssitensorit.

Kentälle voidaan laskea $F_{\alpha\beta}$:n avulla myös ns. symmetrinen energiaimpulssitensori, joka saadaan kaavasta $\sigma^{\alpha\beta} = F^{\gamma\alpha} F_{\gamma}^{\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\gamma\theta} F_{\gamma\theta}$. Sijoituksella päädytään yhtälöihin

$$\sigma^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \kappa_0 B^2) & -S^T/c \\ -S/c & T_{EB} \end{bmatrix}$$

$$T_{EB} = -\varepsilon_0 E \otimes E - \kappa_0 B \otimes B + \frac{I}{2}(\kappa_0 B^2 + \varepsilon_0 E^2), \quad S = \kappa_0 E \times B \quad (1.42)$$

σ^{00} :n vastaluku antaisi siis energiatihedyyden. σ^{0i} -komponentit antavat kentän energiavuota kuvaavan nk. Poyntingin vektorin (ks. kappale 3.5). SM-kentän liikemäärävuota taas kuvaavat termit σ^{i0} . Energia saataisiin integroimalla energiatiheys paikka-avaruuden yli ja vuot taas integroimalla vastaavat termit tarkasteltavan kappaleen tilavuuden pinnan yli. Energiaimpulssitensorin avaruudellinen 3×3 -matriisi T_{EB} taas kuvaa klassista jännitustensoria, joka antaa suoraan yhdessä Poyntingin vektorin aikaderivaatan kanssa Lorentzin voimatiheyden. Voimatiheys voidaan yleistää määrittelemällä nk. nelivoima,

jossa nollas komponentti saa muodon: $f^0 = -c^{-1}J \cdot E$. Osoittautuu, että nelivoiman komponentit saadaan energiaimpulssitensorin nelidivergenssinä $f^\alpha = -\partial_\beta \sigma^{\alpha\beta}$:

$$f^0 = \frac{1}{c} \partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{\kappa_0}{2} B^2 \right) + \frac{1}{c} \nabla \cdot S = -\frac{1}{c} J \cdot E, \quad f^k = -\frac{1}{c} \partial_t S_k + \nabla \cdot (T_{EB})_k \quad (1.43)$$

Tässä $(T_{EB})_k$ on avaruudellisen jännitystensorin k :s pystyrivi. Ensimmäinen nelivoiman komponentti antaa siis energian säilymlain: energiatheyden aikaderivaatan ja systeemistä virtaavan energiavuon summan tulee olla systeemin tekemä työ $-J \cdot E$. Avaruudellinen osa antaa taas tutun Lorentzin voimatiheyden:

$$\nabla \cdot T_{EB} - \partial_t(\varepsilon_0 E \times B) = f = \rho E + J \times B \quad (1.44)$$

Jos energiavuon antava Poyntingin vektori $\varepsilon_0 E \times B$ on vakio, saadaan voimatiheys suoraan jännitystensorin divergenssin avulla. Edellisessä voimatiheyden lausekkeessa esiintyvät luonnollisesti kaikki varaukset ja virrat, joten se pätee niin väliaineessa kuin tyhjiössäkin.

Väliaineessa energiaimpulssitensorin valinnasta ei vallitse yksimielisyyttä. Valinta riippuu siitä, miten kentän ja väliaineen osuus erotetaan toisistaan. Eräs tavallisimmista valinnoista on Minkowskin tensori:

$$\sigma_{Minkowski}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(E \cdot D + H \cdot B) & -(E \times H)^T/c \\ -cD \times B & T_{DB} \end{bmatrix}$$

$$T_{DB} = D \otimes E + B \otimes H - \frac{I}{2}(E \cdot D + H \cdot B) \quad (1.45)$$

Minkowskin tensori ei ole enää symmetrinen; energiavuota ja liikemäärävuota kuvaavat eri vektorit ($E \times H$ ja $D \times B$, jos aikamuuttujaksi valitaan t ct :n sijaan). Tästä tensorista voidaan ratkaista SM-voiman yhtälöt samalla tavalla, kuin edellisessä tapauksessa. Nyt nelivoiman nollas komponentti (energian muutos) saa muodon: $f^0 = \frac{1}{2c} \partial_t(E \cdot D + H \cdot B) + \frac{1}{c} \partial_k(E \times H)_k = \frac{1}{c} (\frac{1}{2}(\partial_t(E) \cdot D + \partial_t(D) \cdot E + \partial_t(B) \cdot H + \partial_t(H) \cdot B) + H \cdot \nabla \times E - E \cdot \nabla \times H) =$

$-\frac{1}{c}E \cdot J_f + \frac{1}{2c}(\partial_t(E) \cdot D - \partial_t(D) \cdot E + \partial_t(B) \cdot H - \partial_t(H) \cdot B) = -\frac{1}{c}E \cdot J_f$. Yhtälöissä on hyödynnetty Maxwellin yhtälöä (1.2) ja oletettu, että sekä permittiivisyystensori että permeabiliteettitensori ovat dispersiottomia ja symmetrisiä ($\varepsilon^T = \varepsilon, \partial_t \varepsilon = 0$). Esim. termi $\partial_t(E \cdot D)$ pelkistyisi tällöin muotoon $\partial_t(E_i)\varepsilon_{ij}E_j + E_i\varepsilon_{ij}\partial_t E_j = 2E \cdot \partial_t D$. Saatiin siis tulos:

$$\partial_t u = \partial_t\left(\frac{1}{2}(E \cdot D + H \cdot B)\right) + \nabla \cdot (E \times H) = -J_f \cdot E \quad (1.46)$$

Yhtälöistä $f^k = -\partial_\beta \sigma^{k\beta}$ puolestaan saadaan tuttuun tapaan (tosin melko pitkällisen johtamisen jälkeen) yhtälöt:

$$f_f = \partial_t(D \times B) + \nabla \cdot T_{DB} = \rho_f E + J_f \times B \quad (1.47)$$

Tätä vastaava (vapaa) Lorentzin voimatiheys sisältäisi siis vain vapaan varaus- ja virtatiheyden ρ_f ja J_f . Edelliseen avaruudelliseen jännitystensoriin T_{EB} verrattuna Minkowskin jännitystensoriin tulee lisätä sekä magnetoituman että polarisoituman vaikutus: $T_{DB} = T_{EB} + P \otimes E - M \otimes B + \frac{1}{2}(-P \cdot E + M \cdot B)$.

2 Casimirin voiman mittaukset

Casimirin voiman mittaaminen on hyvin haastavaa, sillä se voidaan mitata tarkasti vain muutaman mikrometrin etäisyydeltä. Tarkkoja mittauksia on saatavilla vasta 1990-luvun lopulta lähtien, aiemmat mittaukset ovat parhaimmillaankin olleet vain suuntaa antavia. Menetelmät vaihtelevat sekä mittauskappaleiden geometrian että mittauksen ”dynaamisuuuden” suhteen. Tavallisimmat geometriat ovat tasolevyt tai tasolevy pallopintaa vastaan. Dynaamisuuudella taas tarkoitetaan, onko kyseessä suoraan voiman mittaaminen vai esim. voiman aikaansaaman värähdysliikkeen taajuuden mittaaminen. Metalleiksi valitaan useimmiten aineita, joilla on suuri konduktiviteetti (esim. jalometalleja, kuparia tai alumiinia). Päälyllystämällä kevyet kappaleet (vaikkapa polystyreenistä tehdyt) ohuella metallipinnalla saadaan gravitaation vaikutus minimoitua.

Kaikissa mittauksissa on lisäksi tuloksia huonontavia tekijöitä. Pienikin jännite kap-

paleiden välillä aiheuttaa helposti kertaluokkaa suuremman sähkömagneettisen voiman F_c :aan verrattuna. Itse asiassa monesti tämä virhe otetaan huomioon jonakin jäännöstekijänä mittaustuloksissa pitkillä etäisyyksillä. Lämpöenergia taas muuntaa tyhjiötilan (levyjen välisen) termiseksi tilaksi, jossa esiintyy nyt muitakin lukumäärätiloja pienillä todennäköisyyksillä. Tätä lämpötilakorjausta voidaan mallintaa teoreettisesti korjaustermeillä.

Toinen suuri virhetekijä tulee materiaalien SM-vasteiden epätarkkuuksista. Yleensä esim. permittiivisyys tunnetaan hyvin vain tietyllä taaajuusalueella, esim. pienillä taajuuksilla SM-vasteet ovat lähinnä approksimaatioita. Kolmanneksi mittausrvirheitä syntyy rosoisista pinnoista, onhan Casimirin voima erittäin herkkä etäisyyden vaihteluille. Tutkimalla pintaa AFM:lla (atomic force microscope) voidaan tämän korjauksen suuruusluokka arvioida keskiarvolla $P_c = \sum_k P_{C,k}(z_k)p_k$. Luvut p_k ovat voimien painoker-toimia. Lisäksi tyhjiön kaltaisissakin olosuhteissa esiintyy pölyhiukkasia, jotka levyjen väliin päästessään huonontavat tuloksia.

Ensimmäisen kerran Casimirin voimaa yritettiin mitata 1950-luvulla [4]. Tällöin käytettiin samansuuntaisia metallilevyjä, mutta valitettavasti mittauksen virhemargi-naali jäi yhtä suureksi kuin itse mittaustuloskin. Levyjen tapauksessa pienikin suun-tausvirhe antaa hyvin suuren virheen.

Seuraava harppaus mittauksissa otettiin 1997 [5]; mittaussväli oli $[0.6\mu m, 6\mu m]$ ja tarkkuus oli jo 5 prosentin luokkaa. Tällä kertaa käytettiin levyä ja palloa. Tällaisen geometrian etuna on se, että nyt ei ole väliä, missä kulmassa pallo on tasoon nähden. Mittauksessa käytetään siis metallilla päällystettyä levymäistä ”keinua”. Levyn keskellä oleva akseli kiinnittää sen sivuiltaan koealustaan. Ensimmäistä päätyä vasten tuodaan pallomainen metallipinta levyn lähelle. Toista päätyä vastaan on taas varattu metallile-vy, jonka varausta (ja siten kapasitanssia) vaihdellaan. Kapasitanssi pidetään sellaisena, että keinu pysyy paikallaan. Vaihtelemalla etäisyyttä levyn ja pallon välillä voidaan nyt mitata suoraan Casimirin voima, kun levyn toisen päädyn kapasitanssi tunnetaan.

Atomista mikroskooppia (AFM) käyttämällä saadaan edellistä koejärjestelyä pa-rempia tuloksia. Mittausetäisyys saadaan nyt alennettua jopa 0,1 mikrometriin. Mik-roskoopin levymäisen päähän kiinnitetään pallopintamainen linssi ja tämä tuodaan le-

vyn läheisyyteen [6]. Etäisyys mitataan laserilla mikroskoopin ”mittauslevyn” kärjestä. Mikroskoopin pään jousivakio voidaan mitata luomalla levyn ja sen välille jännite-ero ja mittaamalla näin saatu taipuminen. Nyt etäisyyden mittaaminen antaa siis suoraan voiman. Sovittamalla mittaustuloksiin kaksi muuta termiä ja vähentämällä nämä tekijät tuloksista (F_m) saadaan Casimirin voima $F_c = F_m - B/z - C \cdot z$. Ensimmäinen korjaustekijä on vähäisen jännite-eron aiheuttama sähköinen voima. Toinen termi on taas mittauksen lasersäteeseen aiheuttama voima. Vakiot B ja C määritellään esim. pienimmän neliösumman menetelmällä mittaustulosten loppuosasta (z on ”suuri”). Atomisen mikroskoopin yksi etu on sen kyky mitata samalla pinnan rosoisuus. Näin pinnan epätasaisuuksista johtuva korjaustermi saadaan mitattua tarkasti.

Toistaiseksi tarkimmat tulokset ovat 2000-luvun alusta [7]. Mittausjärjestely on samankaltainen kuin Lamoreuxella. Nyt levyn molemmissa päissä on kuitenkin jousitus ja sen pyörähdykskulma on hyvin pieni, joten sen sivun korkeusvaihtelu voidaan arvioida kaavalla $\delta z \approx b/2\theta$. Toista päätyä lähestytään metallipäällystetyllä pallolla, jonka etäisyys tasosta mitataan laserilla. Pallon ja levyn välillä on potentiaaliero, joka saa levyn keinumaan jollain taaajuudella. Mittaamalla värähtelytaajuus ja kapasitanssi saadaan taaajuuteen jokin Casimirin voimasta riippuva korjaustermi. Ratkaisemalla liikeyhtälöt taaajuudelle saadaan kaava: $\omega = \omega_0(1 - \frac{b^2}{2I\omega_0^2}\partial_z F_{Casimir})$. Tässä $\omega_0 = \sqrt{\kappa/I}$, I on levyn hitausmomentti, κ jousivakio ja b levyn akselin etäisyys pallosta xy -tasolla. Casimirin voima on laskettu teoreettisesti pallopinnan ja levyn välillä; tuloksen derivaatta z :n suhteen antaa kaavan: $\partial_z F_c = 2\pi R F_{levy}/A_{levy}$, F_{levy} olisi Casimirin voima kahden levyn tapauksessa. Mittaustuloksesta saatu voiman derivaatta kertoo siis suoraan Casimiripaineen kahden levyn tapauksessa, vaikka koejärjestelyn geometria onkin erilainen.

Casimirin voima on kyetty mittaamaan myös He -atomien ja metallilevyjen välillä [8]. Kokeissa pommitetaan kvartsipintaa 3He -suihkuilla ja mitataan sen sironta pinnasta massaspektrometrin avulla. Casimirin ilmiö muuntaa pinnan potentiaalia, mikä voidaan havaita sirontatuloksissa.

3 SM-kenttä väliaineessa

Väliaine vuorovaikuttaa SM-kentän kanssa, ja tästä aiheutuva muutos pitää ottaa huomioon. Tyhjiön tapaukseen verrattuna saadaan kentille lähteitä. Ne voivat olla joko fiktionaalisia sisäisiä virtoja ja varauksia, kuten eristeissä, tai vapaita eli ulkoisia, kuten metalleissa. Sisäisten lähteiden vaikutus voidaan huomioida yksinkertaisimmillaan lineaarisena konvoluutiona, jolloin Fourier-muunnoksella yhtälö pelkistyy kertomiseksi permittiivisyys- tai permeabiliteettimatriisilla. Valon taittuminen eri tavoin eri aallonpituuksilla johtaa automaattisesti myös absorptioon, ja SM-vasteiden reaalisosat ja imaginaariosat saadaan toisistaan integraaleina. Toinen tapa huomioida väliaineen vaikutus on nk. johtavuustensori, jonka avulla virrat saadaan SM-kentän lineaarimuunnoksen avulla.

Sekä permittiivisyyttä että permeabiliteettia voidaan mallintaa yksinkertaisella vaimennetun värähtelijän mallilla. Malli on lineaarinen ja sen erikoistapauksista saadaan useimmat SM-vasteiden perinteisistä muodoista. Tasapainotilassa myös metallin käytös saadaan mallinnettua nk. tehollisella SM-vasteella, kunhan vain virta johtuu lineaarisesti kentästä.

Väliaineen SM-kenttää kuvaava energiaimpulssitensori voidaan valita usealla eri tavalla, sillä kentän erottaminen materiaalista voidaan tehdä eri jaoilla. Väliaineavusteista kenttää kuvaa nykykäsityksen mukaan parhaiten Minkowskin tensori. Väliaineen rajapinnalla kentän jatkuvuudesta seuraavat ehdot määrittelevät Fresnelin kertoimet. Fresnelin kertoimet kuvaavat, mikä osa kustakin kentästä heijastuu tai läpäisee rajapinnan. Kerroksellisissa aineissa kentän kulkua voidaan mallintaa siirtomatriiseilla, jonka komponentit lasketaan Fresnelin kertoimien avulla.

3.1 Sähkökenttä väliaineessa

Yleisesti D ja B väliaineessa eivät määrydy yksinkertaisesti kertomalla ulkoinen SM-kenttä permittiivisyydellä. Esim. sähkövuon tiheyteen vaikuttava polarisoituminen ei tapahdu hetkessä, vaan varausten uudelleen järjestäytyminen väliaineessa vaatii luonnollisesti aikaa. Siksi on tarpeellista huomioida, että sähkövuon tiheys riippuu kaikista

aiemmista sähkökentistä; riippuvuudeksi saadaan kertomisen sijasta konvoluutio [9]:

$$D(t) = \varepsilon_0(E(t) + \int_0^\infty f(u) \cdot E(t-u)du) = \varepsilon_0(E(t) + (E * f)(t)) = \varepsilon_0 E + P \quad (3.1)$$

P on aineen polarisoituma, joka kuvaa varauksen uudelleenjärjestäytymistä väliaineessa. Väliaineeseen syntyy siis dipolimomenttien aiheuttama kenttä, jonka yhteenlaskettu vaikutus olisi P . On hyödyllistä ottaa tästä integraaliyhtälöstä Fourier-muunnos, jolloin yhteys sähkövuon tiheyden ja sähkökentän välillä pelkistyy kertomiseksi permittiivisyydellä. Funktio f määritellään tietysti nolaksi negatiivisilla ajan arvoilla, sillä riippuvuuden tulee olla kausaalinen. Tiedetään, että $F(E * f(t))(\omega) = E(\omega) \cdot f(\omega)$ joten lopulta saadaan yhtälö:

$$D(\omega) = \varepsilon_0(E(\omega) + f(\omega) \cdot E(\omega)) \Rightarrow D(\omega) = \varepsilon(\omega) \cdot E(\omega) \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1 + \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t} f(t)dt) \quad (3.2)$$

Yhtälö kuvaa siis permittiivisyyden riippuvuutta aaltoliikkeen taajuudesta, tämä voitaisiin myös tulkita kuvaukseksi siitä, miten monokromaattinen sähkökenttä $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$ muuntuu väliaineessa. Aaltoliike halutaan monesti antaa kompleksimuodossa (eli todellinen kenttä on reaaliosa tästä muodosta) yhtälöiden yksinkertaistamiseksi, joten permittiivisyyskin kannattaa määritellä kompleksilukuna. Triviaalisti saadaan yhtälö:

$$\varepsilon(\omega)^* = \varepsilon_0(1 + \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} f(t)dt) = \varepsilon(-\omega)$$

Edelleen *sin*- ja *cos*-funktioiden omaisuuksista johtuen saadaan yksinkertaiset riippuvuudet

$$\varepsilon_R(\omega) = \varepsilon_R(-\omega) \quad \varepsilon_I(\omega) = -\varepsilon_I(-\omega) \quad (3.3)$$

Permittiivisyysfunktio voidaan jatkaa funktioksi kompleksitasolta kompleksitasolle sallimalla taajuuden määrittelyjoukko \mathbb{C} :ksi.

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_R(\omega) + i\varepsilon_I(\omega) = \varepsilon(\omega_R + i\omega_I) = \varepsilon_0(1 + \int_0^\infty e^{-\omega_I t + i\omega_R t} f(t)dt) \quad (3.4)$$

Integraali suppenee ylemmässä puolitasossa, sillä tällöin $-\omega_I$ on negatiivinen. Tämä tarkoittaa myös sitä, että $\varepsilon(\omega)$:lla ei voi olla napoja ylemmässä puolitasossa eli se on analyyttinen funktio tässä alueessa. Permittiivisyydelle saadaan myös suoraan ottamalla kompleksikonjugaatti ehto $\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon(-\omega^*)$. Residylauseen mukaan integroitaessa suljettua reittiä C pitkin vastapäivään tässä tasossa pätee $\oint_C \varepsilon(\omega) d\omega = 2\pi i \sum_{\omega_k} \text{Res}(\omega_k)$, jossa ω_k :t ovat integrointialueen sisällä. Permittiivisyysfunktion laajentaminen mahdollistaa sen reaaliosan ja imaginaariosan keskinäisen riippuvuuden laskemisen. Cauchyn integraalilauseen nojalla $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u) du}{z-u}$. Valitaan integrointireitti reaaliakselin intervalliksi $[-R, R]$ ($= C_1$) sekä puoliympyräksi $Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ ($= C_2$). Lisäksi valitaan taajuus ω positiiviselta reaaliakselilta ja ohitetaan tämä piste infinitesimaalisella puoliympyrällä positiivisella kompleksitasolla ($= C_3$). Koska $\varepsilon(\omega)$ on analyyttinen ylemmässä puolitasossa ja ω on integrointireitin ulkopuolella, on uusi funktio $g(z) = \frac{\varepsilon(z)}{z-\omega}$ analyyttinen integrointireitin määräämän alueen sisällä, niinpä Cauchyn integraalilauseen nojalla saadaan integraalin arvoksi nolla (ei residuaaleja alueen sisällä) eli:

$$\oint_C \frac{1}{2\pi i} \frac{\varepsilon(z)}{z-\omega} dz = \oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{1}{2\pi i} \frac{\varepsilon(z)}{z-\omega} dz = I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Kehittämällä I_2 sarjaksi integrointimuuttujan funktiona saadaan:

$$2\pi i I_2 = \oint_{C_2} \frac{\varepsilon(z)}{z-\omega} dz = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon_R(Re^{i\theta}) - \varepsilon_I(Re^{i\theta})}{1 - R^{-1}\omega e^{i\theta}} d\theta.$$

$\varepsilon_I(z)$ lähestyy nollaa, kun R lähestyy ääretöntä ja $\varepsilon_R(z)$ ε_0 :a. Kirjoitettaessa nimittäjä sarjana jää jäljelle vain termi $\pi i \varepsilon_0$. I_1 :stä saadaan tulos

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_R(x)}{x-\omega} dx + \frac{1}{2\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_I(x)}{x-\omega} dx$$

Tässä P tarkoittaa raja-arvotarkastelua, kun lähestytään ω :aa ($\lim_{r \rightarrow 0^+} (\int_{-\infty}^{\omega-r} F(x) dx + \int_{\omega+r}^{\infty} F(x) dx)$). Viimeisestä integraalista saadaan $I_3 = \frac{-1}{2\pi} \int_0^\pi \varepsilon(\omega - r e^{-i\theta}) d\theta = -\frac{1}{2} \text{Res}(g, \omega)$. Viimeinen muoto seuraa funktion g analyyttisyydestä ylemmässä puolitasossa ja siitä, että sen napa pisteessä $z = \omega$ on yksinkertainen. Niinpä integroitaessa puoli kierros-

ta sen ympäri myötäpäivään saadaan tulos Cauchyn integraalilauseesta. Yhdistämällä kaikki termit ja erottelemalla permittiivisyyden reaaliosat imaginaariosista saadaan lopulta ns. Kramers-Kronigin yhtälöt:

$$\varepsilon_R(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{1}{\pi}P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_I(x)}{x - \omega} dx \quad \varepsilon_I(\omega) = -\frac{1}{\pi}P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_R(x)}{x - \omega} dx \quad (3.5)$$

Permittiivisyyden reaaliosat saadaan siis sen imaginaariosien funktiona ja päinvastoin. Yhtälöt eivät kuitenkaan toimi tarkasteltaessa metalleja, sillä niiden permittiivisyyden imaginaariosa kasvaa hyvin nopeasti nolaa lähestyttäessä. Tätä voidaan mallintaa lisäämällä esim. termi, joka riippuu $1/\omega$:sta toisen yhtälön oikealle puolelle. Magneettiselle permeabiliteetille saadaan samankaltaiset riippuvuudet.

Väliaineiden elektromagneettinen vaste voi riippua ajan lisäksi myös paikasta, tällöin puhutaan avaruudellisesta dispersiosta. Samoin kuin ajallisen riippuvuuden tapauksessa saadaan yhtälöt:

$$D(r, \omega) = \varepsilon_0 E(r, \omega) + \int_V d^3s f(r - s, \omega) E(s, \omega) \quad (3.6)$$

Yhtälölle voidaan tehdä edelleen Fourier-muunnos paikka-avaruudesta aaltolukuavaruuteen. Muunnettaessa konvoluutiointegraalia saadaan tulokseksi yksinkertainen matriisilla kertominen:

$$D(k, \omega) = \varepsilon(k, \omega) \cdot E(k, \omega), \quad \varepsilon(k, \omega) = \varepsilon_0 I + f(k, \omega) \quad (3.7)$$

$f(k, \omega)$ on f :n Fourier-muunnettu muoto. Usein avaruudellinen dispersio on hyvin pientä verrattuna ajalliseen dispersioon, jolloin sitä voidaan approksimoida sarjakehitelmänä:

$$\varepsilon(k, \omega) = \varepsilon(0, \omega) + (\nabla \varepsilon(k, \omega))_{k=0} \cdot k + O(|k|^2)$$

3.2 Magneettikenttä väliaineessa

Permeabiliteetti määritellään vastaavasti väliaineen magneettisena vasteena yhtälöllä

$$B(t) = \mu_0(B(t) + \int_0^\infty g(u) \cdot H(t-u)du) = \varepsilon_0(H(t) + (H * g)(t)) = \mu_0 H + M \quad (3.8)$$

Taajuusmuotoinen permeabiliteetti saadaan tämän vastefunktion Fourier-integraalina:

$$\mu(\omega) = \mu_0(1 + \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t} g(t) dt) \quad (3.9)$$

M on aineen magnetoituma eli väliaineen magneettisten dipolien yhteenlaskettu vaikutus. Tekemällä edellisen kappaleen mukainen analyysi permeabiliteetille sille saadaan samat ehdot kuin permittiivisyydelle, esim. ehto $\mu^*(\omega) = \mu(-\omega^*)$ saadaan helposti ottamalla kompleksikonjugaatti permeabiliteetin kompleksiseen taajuusavaruuteen laajennetusta Fourier-muunnoksesta.

3.3 Permittiivisyyden mallit

Permittiivisyyttä voidaan mallintaa erilaisin tavoin, helpoin malli on ns. Lorentzin malli (nimityskäytännöt vaihtelevat; vrt. Druden malli). Lähtökohtana on väliaine, joka ei ole magneettisesti aktiivinen, ja monokromaattinen SM-aalto muotoa $E(r, t) = E_0 e^{i(k \cdot r - \omega_0 t)}$. Väliaineen elektroneja mallinnetaan vaimennetun värähtelijän mallilla eli elektronien liikeyhtälöiksi saadaan:

$$m_e \partial_t^2 r + m_e \gamma \partial_t r + m_e \omega^2 r = -qE \quad (3.10)$$

Ottamalla Fourier-muunnos saadaan differentiaaliyhtälö ratkaistua suoraan kertolaskulla. Polarisoitumakenttä saadaan kaavalla $P(\omega) = Nqr(\omega)$, missä N on vapaiden elektronien määrä. Sähkövuon tiheys saadaan nyt yhtälöstä:

$$D(\omega) = \varepsilon_0 E(\omega) + P(\omega) = (\varepsilon_0 + \frac{Nq^2}{m_e} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - \gamma i \omega}) E(\omega) = \varepsilon(\omega) E(\omega) \quad (3.11)$$

Näin saadaan kohtuullinen arvio permittiivisyydelle. Jos vakio w on nolla, puhutaan ns. Druden mallista. Jos väliaine ei ole metalli eikä magneettisesti aktiivinen on $\mu = \mu_0$. Lisäksi pätee $\mu_0\varepsilon_0 = c^{-2}$, joten yhtälöstä (1.10) Fourier-muunnoksen jälkeen ehto $\nabla^2 E(\omega, r) + \mu_0\omega^2\varepsilon(\omega)E(\omega, r) = J(\omega, r) = 0$. Ensimmäinen termi vas. puolella antaa k^2E , joten aaltovektorille saadaan ehto:

$$k^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{\varepsilon_0c^2} \quad (3.12)$$

Koska Maxwellin yhtälöiden mukaan SM-kentän aaltorintaman nopeus väliaineessa saadaan kaavalla $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}$, voidaan määritellä taitekerroin n . Taitekerroin riippuu yleisesti sekä permeabiliteetistä että permittiivisyydestä; n on aallon ideaalisen nopeuden ja todellisen etenemisnopeuden suhde. Jos aine ei ole magneettisesti aktiivinen, saadaan tulos $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$. Yleisessä tapauksessa saataisiin $n = \pm\sqrt{\varepsilon\mu}/c$, missä joskus joudutaan valitsemaan negatiivinen etumerkki (vasenkätiset materiaalit).

Metallien tapauksessa yhtälöitä pitää hiukan muuntaa, sillä on huomioitava sähkökentän aiheuttama virta J . Virtatiheys J saadaan kertomalla sähkökenttä johtavuustensorilla. Toisaalta sen Fourier-muunnokselle pätee $J(\omega) = -i\omega Nqr(\omega)$, ja sijoittamalla edellä saatu r :n yhtälö (3.10, 3.11) sähkökentän avulla saadaan johtavuudeksi σ lopulta:

$$J(\omega) = \sigma(\omega)E(\omega) = \frac{-i\omega Nq^2}{m_e} \frac{1}{w - \omega^2 - i\omega\gamma} E(\omega) \quad (3.13)$$

Metallien tapauksessa vakio w olisi käytännössä nolla, sillä elektronien olisi kyettävä liikkumaan vapaasti sähkökentän pakottamana. Kun kirjoitetaan Maxwellin yhtälö sähkökentälle metallissa, saadaan yhtälöön (1.6) termi $J = \sigma E$. Lisäksi oletetaan, että aine ei ole magn. aktiivinen eli $\kappa = \kappa_0$, joten saadaan aaltovektorin k neliölle ehto:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{\varepsilon_0c^2}\varepsilon(\omega) + \frac{i\omega}{\varepsilon_0c^2}\sigma(\omega) \quad (3.14)$$

Nyt aaltovektori saa suurehkon imaginaariosan; tämä kuvaa kentän absorptiota metalleissa. Mitä pienempi sähköinen resistiivisyys (suurempi johtavuus) metallilla on, sitä

huonommin SM-kenttä tunkeutuu metalliin.

Toinen suosittu malli ei-magneettiselle väliaineelle on ns. plasmamalli, mikä on itse asiassa Druden mallin erikoistapaus. Oletetaan, että vakio γ on hyvin pieni suhteessa taajuuteen. Permittiivisyyttä voidaan approksimoida yhtälöllä $\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon_0 + \frac{Nq^2}{m} \frac{1}{-\omega^2}$, joka voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \quad (3.15)$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}}$ on ns. plasmataajuus, jonka alapuolella permittiivisyys on negatiivinen. Tämä tarkoittaisi, että syntynyt värähtelevä dipolikenttä enemmän kuin kumoaisi $\varepsilon_0 E$:n kontribuution sähkövuon tiheyteen. Hyvin suurilla taajuuksilla (Röntgentaajuudet, 10^{16} Hz) taas aineesta tulisi läpinäkyvä SM-säteilylle.

3.4 Johtavuustensori

Eräs tapa sisällyttää väliaineen lineaarinen SM-vaste kenttiin on yleistetty Ohmin laki [10]. Nyt sisäinen virta riippuu kentästä lineaarisesti johtavuustensorin välityksellä:

$$J(r, \omega) = \int_V d^3 r' Q(r, r', \omega) E(r', \omega) \quad (3.16)$$

Aikariippuvalta johtavuustensorilta vaaditaan tietysti kausaalisuus, ja samankaltaisella analyysillä kuin kappaleessa (3.1) saadaan sille taajuusmuodossa vaatimus: $Q^*(r, r', \omega) = Q(r, r', -\omega^*)$. Monesti tensorilta vaaditaan myös Onsager-Lorentz ”molemminpuolisuus”, eli $Q^T(r', r, \omega) = Q(r, r', \omega)$.

Johtavuustensori voidaan käsittää lineaarisen johtavuusoperaattorin \hat{Q} ytimeksi, se operoi neliöllisesti integroituviin vektorifunktioihin kaavan $(\hat{Q}\phi)(r) = \int_V d^3 r' q(r, r', \omega) \cdot \phi(r')$ mukaan. Määritellään sisätulo luonnolliseen tapaan kaavalla $\langle \phi | \psi \rangle = \int_V d^3 r \phi^\dagger(r) \cdot \psi(r) = \int_V d^3 r \sum_{k=1}^3 \phi_k^*(r) \psi_k(r)$, jolloin saadaan edellä mainituista funktioista koostuva Hilbertin avaruus. Nyt merkitään sekä operaattorin adjungaattia että transponoitua matriisin kompleksikonjugaattia (mikä tietysti myös on adjungoitu operaattori, jos itse operaattorin esitys on matriisi) samalla symbolilla: \hat{Q}^\dagger ja $Q^\dagger(r, r', \omega) = Q^{T*}(r, r', \omega)$.

Tarkastelemalla sisätuloa $\langle \psi | \hat{Q} \phi \rangle$ saadaan johdettua kaava adjungoidulle operaattorille \hat{Q}^\dagger :

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{Q} \phi \rangle &= \int_V d^3 r' \int_V d^3 r \psi^\dagger(r) Q(r, r') \phi(r') = \int_V d^3 r' \int_V d^3 r (Q^{*T}(r, r') \psi(r))^{*T} \phi(r') = \\ &= \int_V d^3 r' \int_V d^3 r (Q^\dagger(r, r') \psi(r))^\dagger \phi(r') = \langle \hat{Q}^\dagger \psi | \phi \rangle \end{aligned} \quad (3.17)$$

Lopulta saadaan tulos: $(\hat{Q}^\dagger \psi)(r') = \int_V d^3 r Q^\dagger(r, r') \psi(r)$. Tällä tavoin voidaan edelleen määritellä operaattorin ytimen reaali- ja imaginaariosat; $Re[Q(r, r')] = \frac{1}{2}(Q(r, r') + Q^\dagger(r', r))$. Nyt argumenttien tulee vaihtaa paikkaansa johtavuustensorin sisällä, jotta operaattoriydin olisi reaalisen operaattorin $\hat{Q}_R = \frac{1}{2}(\hat{Q} + \hat{Q}^\dagger)$ ydin. Taajuusriippuvuudet on jätetty merkitsemättä yhtälöihin.

Johtavuusoperaattorin reaali-osan tulee tietysti olla positiivinen, ja tälle positiiviselle operaattorille löytyy neliöjuuriesitys \hat{K} , jolle siten pätee: $\hat{Q}_R = \hat{K} \hat{K}^\dagger$ eli toisin ilmaistuna $Re[Q(r, r', \omega)] = \int_V d^3 u K(r, u, \omega) K^\dagger(r', u, \omega)$. Johtavuustensorin reaali-osa esimerkiksi isotrooppiselle sähköiselle väliaineelle olisi $Re[Q(r, r', \omega)] = \sigma(r, \omega) \delta(r - r')$, josta saadaan edelleen neliöjuurimuoto $K(r, r', \omega) = \sqrt{\sigma(r, \omega)} \delta(r - r')$. Nyt operaattori \hat{Q} vastaisi suoraan sen ytimen ei-deltamaisella osalla kertomista; eli johtavuustensori olisi täysin paikallinen.

Jos väliaineessa kuitenkin esiintyy avaruudellista dispersiota, tulee johtavuustensorista monimutkaisempi lauseke. Avaruudellista dispersiota tarkasteltaessa kannattaa siirtyä aaltolukuavaruuteen käänteisellä Fourier-muunnoksella yhtälön

$\sigma(r, r', \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k \sigma(k, \omega) e^{ik \cdot (r - r')}$ mukaan. Johtavuustensorin aaltolukuesitykselle saadaan pitkittäis- ja poikittaiskomponentit samaan tapaan kuin kentille, kun niihin operoidaan pitkittäisellä tai poikittaisella deltafunktiolla. Aaltolukuavaruudessa saadaan tuttu esitys: $\sigma(k, \omega) = \sigma_l(k, \omega) |k|^{-2} k \otimes k + \sigma_t(k, \omega) (I - |k|^{-2} k \otimes k)$. Toinen esitys johtavuustensorin reaali-osalle olisi $\sigma(k, \omega) = \sigma_l(k, \omega) |k|^{-2} I + k \times \gamma(k, \omega) \times k$, missä $\gamma = (\sigma_t - \sigma_l) / |k|^2$. Avaruudellinen esitys saataisiin tämän lausekkeen käänteisenä Fourier-muunnoksena. Jokainen k -vektori voidaan korvata nablaoperaattorilla r -avaruudessa.

Lisäksi k :lla kertominen oikealta voidaan korvata operaattorilla $\times \overleftarrow{\nabla}'$, joka siis voidaan laskea suoraan kertomalla nablän ristitulolla vasemmalta ja derivoimalla kerrottu vektori normaaliin tapaan. Johtavuustensorin reaaliosta saa siten esityksen: $\sigma(r, r', \omega) = \sigma_l(r, r', \omega) - \nabla \times \gamma(r, r', \omega) \times \overleftarrow{\nabla}'$. Koska reaaliosan tulee olla kausaalinen (ts. $\sigma(r, r', t)$:n aikariippuvuus on vain menneisyydessä eikä välity valonnopeutta nopeammin), saadaan johtavuustensorin imaginaariosa reaaliosan integraalina samaan tapaan kuin Kramers-Kronigin yhtälöt 3.5. Niinpä saadaan yhtälö:

$$Q(r, r', \omega) = Q_1(r, r', \omega) - \nabla \times Q_2(r, r', \omega) \times \overleftarrow{\nabla}' \quad (3.18)$$

Mikäli johtavuustensori on puhtaasti paikallinen ja homogeeninen, saadaan esitys paljon yksinkertaisempaan muotoon: kumpikin $Q_n(r, r', \omega)$ korvautuu $Q_n(\omega)\delta(r-r')$:llä. Virtatiheydeksi tulee nyt $J(r, \omega) = Q_1(\omega)E(r, \omega) - Q_2(\omega)\nabla \times \nabla \times E(r, \omega)$, jossa viimeinen muoto saadaan käyttämällä tulon derivoimissääntöä ja yleistettyä Gaussin lausetta. Vertailemalla Maxwellin yhtälöistä saatavia toisen kertaluokan osittaisdifferentiaaliyhtälöitä väliaineen ja vapaan kentän tapaukselle, saadaan ODY:

$$\begin{aligned} [\nabla \times (I - \kappa_r)\nabla \times -\omega^2 c^{-2}(I - \varepsilon_r)]E &= i\mu_0\omega(J_{tot} - J_f) = i\mu_0\omega J_i = \\ &= i\mu_0\omega(Q_1(\omega)E(r, \omega) + Q_2(\omega)\nabla \times \nabla \times E(r, \omega)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Tästä saadaan edelleen identifioitua johtavuustensorin komponentit SM-kentän vastefunktioiden avulla:

$$Q_1(\omega) = i\omega\varepsilon_0(I - \varepsilon_r(\omega)), \quad Q_2(\omega) = \frac{-i}{\mu_0\omega}(I - \kappa_r(\omega)) \quad (3.20)$$

3.5 Energiavuo

Väliaineessa energiavuota kuvaava Poyntingin vektori määritellään sähkökentän ja magneettikentän ristitulona Minkowskin tulkinnassa (ks. kappale 1.4). Oletetaan aluksi yksinkertainen monokromaattinen, separoituva tasoaaltoratkaisu jaksolla T (harmoninen aikariippuvuus). Nyt pitää huomioida Poyntingin vektorin reaalisuus, joten kent-

tien kompleksiesitykset tulee realisoida. Lisäksi on hyödyllistä tarkastella Poyntingin vektorin aikakeskiarvoa yhden jakson pituuden T yli (esim. suureen F keskiarvo olisi $\langle F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt F(t)$), jolloin voidaan lopulta määrittellä kompleksinen Poyntingin vektori:

$$\langle E \times H, T \rangle = \frac{1}{2} \langle E \times H^*, T \rangle, \Rightarrow S = \frac{1}{2} E \times H^* \quad (3.21)$$

Poyntingin vektorin pintaintegraali tilavuuden V pinnan yli antaa systeemin kokonaisenergiavuon. Tästä saadaan Gaussin lauseella ja ketjusäännöllä edelleen tulos:

$$\nabla \cdot S = du/dt = \partial_j(\varepsilon_{jkl} E_k H_l) = H_l \varepsilon_{ljk} \partial_j E_k - E_k \varepsilon_{kjl} \partial_l H_l = H \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times H) \dots$$

$$\nabla \cdot S = -H \cdot \partial_t B - E \cdot \partial_t D \quad (3.22)$$

Jos aineessa ei esiinny dispersiota, saadaan μ ja ε otettua eteen kertoimiksi. Tällöin energiatiheydeksi saadaan $u = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$. Jos (ajallinen) dispersio on huomattavaa, tulee yhtälöstä hieman monimutkaisempi:

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{d(\varepsilon\omega)}{d\omega} E^2 + \frac{d(\mu\omega)}{d\omega} H^2 \right) \quad (3.23)$$

Entropian kasvamisesta saadaan lisäksi ehdot $\frac{d(\varepsilon\omega)}{d\omega}, \frac{d(\mu\omega)}{d\omega} > 0$. Manipuloimalla energiaavuon divergenssiä Maxwellin yhtälöitä hyväksikäyttäen saadaan kaavasta (3.22) edelleen tulos: $\nabla \cdot (E \times H) = -\partial_t U_{EH} - \mu H \cdot \partial_t M - E \cdot (\partial_t P + J)$, missä energiatiheys on dispersiottoman tapauksen energiatiheys. Tätä Poyntingin vektorin muotoa käytettäessä saadaan vastaavasta jännitystensorista ns. Abrahamin voima. Tällä valinnalla saataisiin siis kentän sisäinen energia riippumaan vain sähkö- ja magneettikentästä, kun taas vuorovaikutusermi riippuisi (vapaasta) sähkövirrasta, sidotusta virrasta sekä magneetoitumasta.

Poyntingin vektori ei siis ole yksikäsitteinen, vaan voimme halutessamme pilkkoa systeemin osiin eri tavalla valitsemalla Poyntingin vektoriksi erilaisen esityksen; esim. $S = E \times B$ [11]. Tämä pitäisi vielä skaalata κ_0 :lla, jotta saadaan samat yksiköt kuin

ed. tapauksessa. Tämän vektorin divergenssiksi saadaan:

$$\nabla \cdot (E \times B) = \dots = \mu_0 \partial_t (1/2 \kappa_0 B^2 + 1/2 \varepsilon_0 E^2) - \mu_0 E \cdot (J_P + J_M + J)$$

Sidottu polarisoitumavirta on $J_P = \partial_t P$ ja magnetoitumavirta $J_M = \nabla \times M$. Väliaineen kanssa vuorovaikuttava termi saadaan siis kokonaisvirran avulla, kun energiatiheys on määritelty ensimmäiseksi termiksi. Magnetoituma- ja polarisoitumavirrat tosin ovat fiktionaalisia virtoja, jotka kuvaavat väliaineen vuorovaikutusta kentän kanssa. Tätä valintaa vastaava jännitystensori olisi suoraan Maxwellin jännitystensori, josta saataisiin myös Lorentzin voimatiheys.

Kolmas suosittu valinta olisi Minkowskin jännitystensoria vastaava Poyntingin vektori: $S = D \times B$. Tätä vastaisi energiatiheys $u = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} (\varepsilon_0^{-1} D^2 + \kappa_0 B^2)$ ja sen divergenssiksi tulisi Maxwellin yhtälöitä soveltaen:

$$\nabla \cdot S = -\partial_t u_{DB} - \varepsilon_0^{-1} D \cdot (J_f + J_M) - \varepsilon_0^{-1} \mu_0^{-1} B \cdot (\nabla \times P) \quad (3.24)$$

3.6 SM-aallon eteneminen väliaineessa

Jos sekä permittiivisyys että permeabiliteetti tunnetaan, voidaan SM-aallon kulkua väliaineessa mallintaa monokromaattisella tasoaallolla (ks. kappale 5.1). Monokromaattinen aalto on siis harmoninen SM-kenttä, jonka ainoalla komponentilla on jokin vakioitaajuus ω . Se on muotoa $E(t, r) = E_0 e^{ik \cdot r - i\omega t}$ ja $B(t, r) = B_0 e^{ik \cdot r - i\omega t}$. Tässä E_0, B_0 ovat kompleksisen kentän suuntavektorit, sen reaaliosa kuvaa fysikaalista kenttää. Kentän etenemissuunta k jättää kaksi vapausastetta SM-kentän suunnalle, tätä suuntavektoria $u(E) = \frac{E}{|E|}$ kutsutaan polarisaatioksi. Kun tarkastellaan väliaineen muodostamaa pintaa kohti tulevaa kenttää, voidaan se jakaa kahteen komponenttiin: kenttien suuntavektorit valitaan joko niin, että H on pinnan tason suuntainen tai niin, että E on pinnan suuntainen. Näistä käytetään nimityksiä s - ja p -polarisaatio, \perp ja \parallel , EM- ja TM-moodit ja niitä merkitään alaindeksillä σ . Rajapinnalla saadaan kentille jatkuvuusyhtälöt. Niistä ratkaistaan heijastuneiden ja läpäisevien kenttien amplitudien suhteet alkuperäiseen amplitudiin. Heijastuneen kentän amplitudin suhde alkuperäiseen on

r_σ kullekin polarisaatiolle. Pinnan läpäiselle kentälle taas suhde on t_σ . Merkintöjen yksinkertaistamiseksi jätetään polarisaatio seuraavaksi kuitenkin huomioimatta. r ja t riippuvat tulokulmasta, aineen permeabiliteetista sekä permittiivisyydestä. Yleensä r ja t voidaan lausua pelkän tulokulman ja taitekertoimien avulla. Koska SM-kentän energia on verrannollinen amplitudien neliöihin, voidaan määritellä reflektio- ja transmittanssivakiot (R ja T), jotka kertovat, mikä osuus säteilyn intensiteetistä läpäisee pinnan ja mikä osuus heijastuu. Jos aineessa ei esiinny absorptiota saadaan lisäksi ehto $R + T = 1$.

Säteilyn kulkua väliaineessa voidaan mallintaa tarkastelemalla eri suuntiin eteneviä aaltoja, yksi kohti rajapintaa ja toinen vastakkaiseen suuntaan. Näiden riippuvuuksia kuvaa matriisiyhtälö:

$$(A_2^+, A_2^-) = M \cdot (A_1^+, A_1^-) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (A_1^+, A_1^-) \quad (3.25)$$

M on nk. siirtomatriisi. Se siis kuvaa miten aalto siirtyy rajapinnalla eteenpäin U^+ ja taaksepäin U^- . Useamman systeemin (esim. monikerroksinen aine) tapauksessa saadaan kokonaissiirtomatriisiksi selvästi $M = \prod_{l=1}^N M_l$. Toinen tapa olisi käyttää ns. sirontamatriisia S , jolle

$$(A_2^+, A_1^-) = S \cdot (A_1^+, A_2^-) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \cdot (A_1^+, A_2^-) \quad (3.26)$$

Sirontamatriisin etuna on sen helppolukuisuus, selvästi matriisin alkiot vastaavat Fresnelin yhtälöiden r - ja t -kertoimia; ainoana erotuksena on se, että ne voivat olla erilaisia eri suuntiin. M ja S saadaan laskettua helposti toisistaan.

Jos väliaine oletetaan häviöttömäksi, saadaan amplitudien pituuksille ehdot $|A_1^+|^2 + |A_2^-|^2 = |A_2^+|^2 + |A_1^-|^2$. Jos vielä vaaditaan, että Fresnelin kertoimet ovat samat kum-

mallekin suunnalle, saadaan sironta- ja siirtomatriisit:

$$M = \begin{bmatrix} 1/t^* & r/t \\ r^*/t^* & 1/t \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} t & r \\ r & t \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Kun siirtomatriisi kuvaa kahden aineen rajapintaa, ja molemmat aallot etenevät kohdittuun suuntaan nähden, saadaan $M_{11} = M_{22} = (n_1 + n_2)/(2n_2)$ ja $M_{12} = M_{21} = (n_2 - n_1)/(2n_2)$. Sirontamatriisi ei luonnollisestikaan olisi symmetrinen, sillä pos. aalto saapuu n_1 :sta n_2 :een, ja neg. aalto liikkuu vastakkaiseen suuntaan.

4 SM-kenttä metamateriaaleissa

Metamateriaalit ovat jaksollisista rakenteista koostuvia aineita, joiden vaikutusta SM-kenttään voidaan mallintaa laskemalla vain kenttien keskiarvot makroskooppisten Maxwellin yhtälöiden tapaan. Atomisen hilan tilalle asetetaan yksikkökoppi, jolloin permittiivisyyttä ja permeabiliteettia voidaan mallintaa niiden tehollisilla arvoilla. Valitsemalla väliaine sopivasti saadaan molemmat vasteet negatiivisiksi, jolloin myös itse taitekerroin vaihtaa merkkiään. Esim. tasoaaltoratkaisut muodostavat tällaisessa tapauksessa vasenkätisen systeemin, kun positiiviselle taitekertoimelle ratkaisut ovat aina oikeakätisiä.

Väliaineiden vaikutus kyetään mallintamaan samaan tapaan kuin yksinkertaisen kaksiporttipiirin jännite- ja virtayhtälöitä. Piirin osien impedanssit identifioidaan suoraan SM-vasteiksi. Esimerkkinä mallinnetaan katkaistuista metallisilmukoista ja ohuisista johtimista rakennettua metamateriaalia. Valitsemalla tämän väliaineen parametrit sopivasti saadaan taitekerroin negatiiviseksi tietyllä taajuusvälillä.

4.1 Vasenkätisyys

Mikroskooppisten Maxwellin yhtälöiden ratkaisu väliaineessa ei useinkaan ole käytännöllistä, vaan on hyödyllisempää ratkaista makroskooppiset Maxwellin yhtälöt, joissa väliaineen vaikutus oletetaan lineaariseksi ja usein myös isotrooppiseksi. Niinpä atomien

vuorovaikutusta SM-kentän kanssa arvioidaan vastefunktioilla ε ja μ . Tällöin edellytetään säteilyn aallonpituuden olevan paljon aineen yksikkökopin dimensioita suurempi eli $\lambda \gg a$. Niin kutsutut metamateriaalit koostuvat jaksollisista rakenteista, joiden yksikkökopin dimensio on paljon atomeja suurempi mutta kuitenkin melko pieni suhteessa SM-säteilyn mikroaalto- ja infrapunataajuuksiin. Nyt vaaditaan siis ehtoa $a_{MM} \ll \lambda \sim 100 \mu\text{m}$, eli $\omega \ll 10^{12}\text{Hz}$. Hiljattain on valmistettu jopa optisella alueella toimivia metamateriaaleja [12]. Yksityiskohtaista vuorovaikutusta ei tarvitse ratkaista, vaan se voidaan sisällyttää tehollisiin vasteisiin ε_{eff} ja μ_{eff} .

Yksinkertaisimmissa ratkaisuissa Maxwellin aaltoyhtälöiden kaikki kentät ovat verrannollisia termiin $e^{-i\omega t + ik \cdot r}$. Nämä ratkaisevat selvästi differentiaaliyhtälöt (1.1) - (1.4), kun vaaditaan, että $k^2 = \epsilon\mu\omega^2$. Ratkaisut ovat siis monokromaattisia aaltoja aaltovektorin k suuntaan. Jos valitaan koordinaatisto siten, että k on z -akselin suuntainen, E x -akselin ja B y -akselin suuntainen, saadaan E :lle ja B :lle ratkaisut:

$$E(r, t) = E_0 e_x e^{-i\omega t + ikz}, \quad B(r, t) = \frac{k}{\omega} E_0 e_y e^{-i\omega t + ikz} \quad (4.1)$$

k , E ja B muodostavat siis oikeakätisen systeemin. Oikeille materiaaleille sekä μ että ϵ eivät voi olla puhtaasti dispersiivisiä, vaan niillä täytyy olla pieni (tai suuri kuten metalleilla) imaginaarinen komponentti. Tämä liittyy kentän absorptioon väliaineessa, jota kuvaa imaginaarinen termi aaltovektorissa k . Koska aaltovektorin neliö saadaan väliaineen permittiivisyyden ja permeabiliteetin avulla, voidaan aaltoyhtälöt kirjoittaa uudelleen määrittelemällä $k^2 = \mu\epsilon\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 = k_0^2 n^2$. Tällä tavoin k voidaan korvata $k_0 n$:lla. Poyntingin vektoriksi $S = E \times H$ tulee:

$$S = \frac{1}{2} |E_0|^2 e_z \frac{k_0 n^*}{\mu^* \omega} e^{i(k_0 n - k_0 n^*)} = |E_0|^2 e_z \frac{n^*}{2\mu^* c} e^{-2k_0 z n_I} \quad (4.2)$$

Tämän vektorin reaaliosa antaa fysikaalisen Poyntingin vektorin. Nyt tulee muistaa, että taitekertoimella on kaksi juuriratkaisua, $n = n_{\pm} = \pm n$. Todellinen energiavuo noudattaa yhtälöä:

$$S_R = e_z \frac{|E_0|^2}{2c\mu_0} \text{Re} \left[\frac{\pm n}{\mu_r} \right] e^{-2k_0 z \cdot (\pm n_I)} \quad (4.3)$$

Taitekerroin voidaan antaa kompleksiesityksenä $n = |n|e^{i\theta}$. Edelleen $\mu_r = |\mu_r|e^{i\theta_2}$ ja $\varepsilon_r = |\varepsilon_r|e^{i\theta_1}$; absorptiosta seuraa, että $Im(\varepsilon_r) > 0$ ja $Im(\mu_r) > 0$. Saadaan ehdot $\theta_l \in [0, \pi)$, joista edelleen $\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \in [0, \pi)$. Jos sekä ε_R että μ_R ovat negatiivisia, saadaan ehdot $\theta_l \in]\pi/2, 3\pi/2[$. Yhteensä saadaan kaksi ehtoa taitekertoimen vaiheelle: $\theta \in]0, \pi[\cap]\pi/2, 3\pi/2[$. Ainoa väli, jossa molemmat ehdot toteutuvat, on $\theta \in]\pi/2, \pi[$, joten $n_R = |n|\cos(\theta) < 0$. Juuriratkaisun merkki valitaan negatiiviseksi, kun sekä permittiivisyyden että permeabiliteetin reaaliosat ovat negatiivisia. Muussa tapauksessa taitekertoimen reaaliosa on joko nolla tai positiivinen. Nyt $Re\left[\frac{n_{\pm}}{\mu_r}\right] = \pm \sqrt{\frac{|\varepsilon_r|}{|\mu_r|}} \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)$ on negatiivinen negatiiviselle juuriratkaisulle ja positiivinen positiiviselle, sillä \cos -funktion argumentti on välillä $[0, \pi/2)$. Taitekertoimen imaginaariosa vaihtaa triviaalisti merkkiään valitun etumerkin mukaan. Niinpä valittaessa $n = n_-$ kulkee energia $-e_z$ -akselin suuntaan ja Poyntingin vektorin pituus vähenee $-e_z$ -akselin suuntaan, positiiviselle tapaukselle energiavuo on $+e_z$ -suuntaan, kuten S :n vaimeneminenkin. Puhutaan joko oikea- tai vasenkätisistä väliaineista. Taitekertoimen merkki ja energiavuon suunta määräytyy siten SM-vasteiden reaaliosien ja imaginaariosien etumerkeistä.

Koska aaltovektorin imaginaariosa kuvaa vain absorptiota, saadaan aallon vaihenopeus kaavasta $v_p = Re(\omega/k) = \frac{\omega}{k_0 Re(n)}$. Vaihenopeus voi saada negatiivisia arvoja, kun $Re(n_+) > 0$ tai $Re(n_-) < 0$. Tällöin aallon vaihe liikkuu eri suuntaan kuin sen energia. Normaalisti saadaan siis oikeakätinen systeemi (e_x, e_y, e_z) vektoreista E, H , ja k . Jos taas permeabiliteetti on negatiivinen, on energiavuo vastakkaissuuntainen aallon etenemiselle, eli saadaankin vasenkätinen systeemi [13], [14]. Tämä pätee kuitenkin vain silloin, kun valitaan Minkowskin energiaimpulssitensori. Tällöin sekä energiavuo $S_{DB} = E \times H$ ja liikemäärävuoto $p_{DB} = D \times B$ ovat vastakkaissuuntaisia aallon etenemiselle. Puhtaan SM-kentän tulkinnessa taas (ks. kaava (5.45)) sekä energiavuo $S_{EB} = \kappa_0 E \times B$ että liikemäärävuoto $p_{EB} = \kappa_0 E \times B$ ovat samansuuntaisia aallon etenemisen kanssa.

Jos valitaan d :n paksuinen metamateriaalilevy tyhjiön ympäröimäksi, vaihtuisi vasemmalta etenevän valonsäteen aaltovektorin etumerkki aineen sisällä. Minkowskin tulkin mukainen energiavuo kulkisi samaan suuntaan kuin tyhjiön energiavuo - sama pätee myös liikemäärälle. Sen sijaan vapaan SM-kentän tulkinnessa kentän energiavuo

vaihtaisi merkkiä metamateriaalin sisällä, ja SM-kentän energia kulkisi kohti vasenta pintaa sen molemmilta puolin, aivan kuten liikemääräkin. Pelkän SM-kentän huomiointi johtaisi siis epäfysikaalisiin tuloksiin, niinpä itse väliaineen kuljettama liikemäärä ja energiavuo tulisi huomioida.

Vaihenopeus eli kantoaallon nopeus tulee erottaa ns. ryhmänopeudesta, joka on siis aallon verhoikäyrän (=muodon) nopeus. Se määritellään taajuuden derivaattana aaltovektorin suhteen eli $v_g = \partial_k \omega(k)$. Tätä kutsutaan dispersioyhtälöksi. Kun huomioidaan kaava $n = \frac{ck}{\omega}$ ja derivoidaan yhtälö taajuuden suhteen, saadaan ryhmänopeus lausuttua taitekertoimen avulla:

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \partial_\omega n} \quad (4.4)$$

Jos taitekerroin on negatiivinen ja $\omega \partial_\omega n < n$, voi myös ryhmänopeus olla negatiivinen. Valon vaihenopeus voi olla etenkin resonanssitaajuuksien lähellä suurempi kuin c . Signaalin informaatio on kuitenkin säteilyn verhoikäyrässä eikä kantoaallossa, joten kausaliteetin säilymiseksi riittää, että ryhmänopeus on aina pienempi kuin valon nopeus tyhjiössä.

Yleisesti sähkömagneettisesti aktiiviset väliaineet voidaan jakaa neljään eri pääluokkaan:

1. Eristeet, joille $\varepsilon_{eff}, \mu_{eff} > 0$. Näissä vektorit E, H, k muodostavat oikeakätisen systeemin ja energiavuo S on aaltovektorin suuntainen. SM-säteily etenee melko hyvin näissä väliaineissa.

2. Sähköisesti aktiiviset materiaalit, ns. sähköinen plasma, esim. magneettisesti inertit metallit; nyt $\varepsilon_{eff} < 0$ ja $\mu_{eff} > 0$. Näissä ε_{eff} saa suuren imaginaarisen komponentin, joka aiheuttaa merkittävän absorptiivisen komponentin taitekertoimeen. Tästä johtuen SM-säteily ei juuri etene näissä materiaaleissa lukuun ottamatta suuria taajuuksia (Röntgentaajuuksista tai joskus jo korkeista UV-taajuuksista lähtien, eli kun $\omega > 10^{18}$ Hz tai $\omega > 10^{16}$ Hz).

3. Magneettinen plasma, väliaine, joka on sähköisesti inertti mutta magn. aktiivinen. Samalla tavalla kuin sähköiselle plasmalle SM-säteily vaimentuu nopeasti aineessa. Tällaisia aineita voidaan valmistaa keinotekoisesti metamateriaaleista. Nyt olisi

$\varepsilon_{eff} > 0$ ja $\mu_{eff} < 0$.

4. Vasenkätiset metamateriaalit. Näille olisi $\varepsilon_{eff} < 0$ ja $\mu_{eff} < 0$. Näitä voidaan valmistaa esim. yhdistämällä magn. aktiivinen metamateriaali ja metallinen taustamateriaali.

4.2 Virtapiirimalli kaksiulotteisille systeemeille

Lineaarisia kaksiulotteisia systeemejä voidaan kuvata matriisiyhtälönä kaavalla $V = Z \cdot I$, missä $V, I \in \mathbb{C}^2$ ja $Z \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, jonka komponentit ovat:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & -Z_{12} \\ Z_{21} & -Z_{22} \end{bmatrix}$$

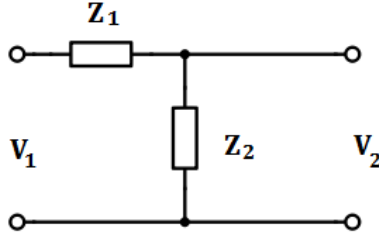
Kun valitaan V jännitteiksi ja I virroiksi saadaan yksinkertaisen kaksiportin piiriyhtälö [15]. Piiriä voidaan kuvata myös ns. B -matriisilla, jos halutaan näyttää toisen systeemin riippuvuus ensimmäisestä kaavalla:

$$(V_2, I_2) = B \cdot (V_1, I_1) = \begin{bmatrix} Z_{22}/Z_{11} & Z_{12} - Z_{22} \\ -1/Z_{12} & Z_{11}/Z_{12} \end{bmatrix} \cdot (V_1, I_1) \quad (4.5)$$

Jos edelleen yksinkertaistetaan piiriä, saadaan kaksikomponenttinen piiri, jossa on impedanssi Z_1 1. virtalähteen ja solmun välillä, sekä impedanssi Z_2 poikittaisjohdossa (ks. kuva 1). B -matriisiksi saadaan nyt:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -Z_1 \\ -1/Z_2 & 1 + Z_1/Z_2 \end{bmatrix}$$

Kun systeemi koostuu suuresta määrästä tällaisia peräkkäisiä elementtejä, saataisiin kokonaissysteemin matriisi B tulona $B = B_{tot} = \prod_i B_i$. Tällä tavoin voidaan mallintaa esim. aaltoliikettä, joka etenee väliaineessa (voi olla ääniaalto, sähkövirta, jne.). Aallon etenemää matkaa väliaineeseen merkitään x :llä ja tarkastellaan mitä tapahtuu, kun etäisyys on infitesimaalinen - eli nyt kokonaissysteemin matriisi koostuisi äärettömästi



Kuva 1: Yksinkertainen kaksiporrtimalli kahdella elementillä

määrästä B_i -matriiseja. Jokainen elementti Z_j kertoo impedanssin pituusyksikköä x kohti ja edelleen saadaan tulokset $V_1 = V(x)$, $V_2 = V(x + dx)$ ja $I_1 = I(x)$, $I_2 = I(x + dx)$, jossa impedanssit antavat vasteen $Z_i dx$. Toisin sanoen $V(x)$ on dx :n paksuisen ainekerroksen tuloaalto ja $V(x + dx)$ sen lähtöaalto toisella puolen. Alunperin tätä tekniikkaa käytettiin sähkökaapeleiden mallintamiseen ja tästä syystä siitä käytetään yhä nimitystä siirtolinjateoria. Yhtälöitä hieman pyörittelemällä ja ottamalla huomioon vain dx -kehityksen ensimmäisen kertaluokan termit saadaan differentiaaliyhtälöt:

$$\partial_x I = \frac{1}{Z_2} V, \quad \partial_x V = -Z_1 I, \quad (\partial_x^2 + \frac{Z_1}{Z_2}) A = 0 \quad (4.6)$$

Nyt A on joko virta tai jännite ja viimeinen yhtälö saadaan derivoimalla virtaa/jännitettä kahdesti.

4.3 Väliaineiden mallintaminen virtapiirein

Edellisten yhtälöiden hyöty paljastuu, kun tarkastelemme Maxwellin yhtälöiden Fouriermuotoisia aaltoratkaisuja. Oletetaan väliaine isotrooppiseksi ja häviöttömäksi. Valittamalla k -vektori kulkemaan x -akselin suuntaan ja sähkökenttä z -akselin suuntaiseksi, saadaan Maxwellin yhtälöstä (1.6) $H - y$ -akselin suuntaiseksi. Toinen Maxwellin yhtälö (1.7) taas antaa E :n riippuvuuden H :n derivaatoista. Yhteensä saadaan riippuvuudet:

$$\partial_x E_3 = -i\omega\mu H_2, \quad \partial_x H_2 = -i\omega\varepsilon E_3 \quad (4.7)$$

Näiden kenttien tulee myös toteuttaa yhtälöt:

$$(\partial_x^2 + \mu\varepsilon\omega^2)E_3 = 0, \quad (\partial_x^2 + \mu\varepsilon\omega^2)H_2 = 0 \quad (4.8)$$

Näistä kaavoista huomataan, että kenttiä voidaan mallintaa valitsemallamme kaksipor-tiipiirillä, eli että $H = I$ ja $E = V$, kunhan väliaine oletetaan täysin häviöttömäksi ja isotrooppiseksi [16]. Materiaalin SM-vasteet saadaan samaistettua suoraan virtapiiriin impedanssien Z_1, Z_2 avulla yhtälöihin:

$$\varepsilon = \frac{i}{Z_2\omega}, \quad \mu = \frac{-iZ_1}{\omega} \quad (4.9)$$

Nyt esim. valitsemalla ensimmäinen elementti käämiksi ja toinen kondensaattoriksi saadaan häviötön systeemi yhtälöillä:

$$\partial_x I = -i\omega CV, \quad \partial_x V = -i\omega LI, \quad (\partial_x^2 + \omega^2 LC)V = 0, \quad (\partial_x^2 + \omega^2 LC)I = 0 \quad (4.10)$$

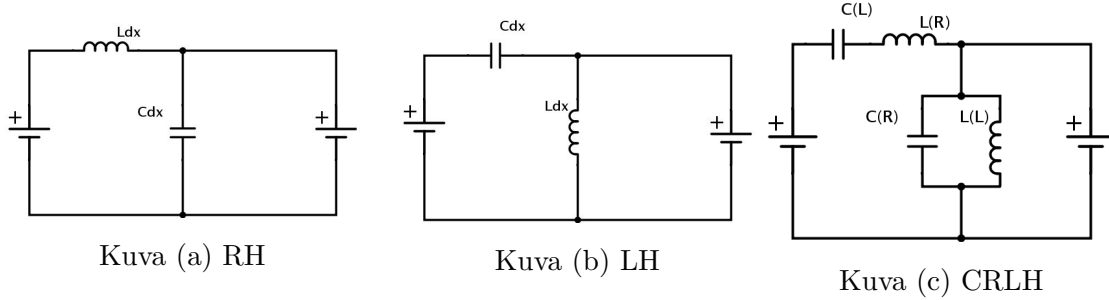
Kyseisten yhtälöiden ratkaisut ovat muotoa $I = I_0 e^{ikx}$, $V = V_0 e^{ikx}$, joista saadaan ehto aaltovektorille k : $k^2 = \omega^2 LC$. Jos valittaisiin toisinpäin, eli Z_1 kondensaattoriksi ja Z_2 käämiksi, saataisiin vastaavasti yhtälöt:

$$\partial_x I = \frac{i}{\omega L}, \quad \partial_x V = \frac{i}{\omega C} I, \quad (\partial_x^2 + \frac{1}{\omega^2 LC})V = 0, \quad (\partial_x^2 + \frac{1}{\omega^2 LC})I = 0 \quad (4.11)$$

Nyt aaltovektori saa ehdon $k^2 = \frac{1}{\omega^2 LC}$. Tulee huomioida, että kaikki impedanssit oletetaan differentiaalisiksi. Jos systeemi koostuisi esim. jaksollisista yksiköistä a :n välein, saataisiin yhden yksikön impedanssiksi $Z_a = Z \cdot a$.

1) Kun $\mu_R, \varepsilon_R > 0$ valitaan 1. piiri, joten $L = \mu$ ja $C = \varepsilon$. Tätä kutsutaan oikeakätiseksi systeemiksi (=RH), sillä kenttien (E, H, k) suuntavektorit muodostavat normaalin oikeakätisen koordinaattisysteemin. Selvästi $v_p = \omega/k = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Ryhmänopeus saadaan kaavalla $v_g = v_p + k\partial_k v_p = v_p + 0 = v_p$.

2) Kun $\mu_R, \varepsilon_R < 0$ valitaan 2. piiri joten $-\frac{1}{\omega^2 L} = \mu$ ja $-\frac{1}{\omega^2 C} = \varepsilon$. Tätä kutsutaan vasenkätiseksi systeemiksi (=LH), sillä kenttien (E, H, k) suuntavektorit muodostavat



Kuva 2: Vasemmalta lähtien virtapiirit mallintavat oikeakätistä, vasenkätistä ja näiden yhdistelmästä koostuvaa materiaalia.

normaalin vasenkätisen koordinaattisysteemin. Aaltovektorin ehdosta saadaan edelleen vaihenopeus $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\omega^2 \sqrt{LC}}$. Ryhmänopeudeksi tulee $v_g = v_p + k \partial_k v_p = v_p - 2v_p = -v_p$. Ryhmänopeus on siis samansuuruinen mutta vastakkaisuuntainen kuin vaihenopeus.

Todellisia materiaaleja voidaan mallintaa paremmin, kun oletetaan niiden koostuvan sekä LH- että RH-muotoisista komponenteista (=CRLH=composite left-/right-handed material, ks. kuva 2c). Niinpä Z_1 koostuu sarjaan kytketystä kondensaattorista (C_L) ja käämistä (L_R). Samoin Z_2 koostuu rinnan kytketystä kondensaattorista C_R ja käämistä (L_L) [17]. Alaindeksit R ja L kuvaavat oikea- ja vasenkätistä käyttäytymistä. Nyt $Z_1 = \frac{-i}{\omega C_L} + i\omega L_R$, $\frac{1}{Z_2} = i\omega C_R - \frac{i}{\omega L_L}$. Differentiaaliyhtälöiksi saadaan pari:

$$\partial_x V = \left(\frac{i}{\omega C_L} - i\omega L_R \right) I, \quad \partial_x I = \left(\frac{i}{\omega L_L} - i\omega C_R \right) I \quad (4.12)$$

Saadaan edelleen kaavat:

$$\varepsilon = C_R - \frac{1}{\omega^2 L_L} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad \mu = L_R - \frac{1}{\omega^2 C_L} = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} \right) \quad (4.13)$$

Sekä permeabiliteetti että permittiivisyys noudattavat nyt yksinkertaista plasmamallia, jossa sähköinen plasmataajuus on $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_L C_R}}$ ja magneettinen plasmataajuus on $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_R C_L}}$ sekä $C_R = \varepsilon_0$ ja $L_R = \mu_0$. Yksinkertaisuuden vuoksi malliin ei ole sisällytetty resistansseja. Tällaiset elementit johtaisivat imaginäärisiin termeihin SM-vasteissa ε, μ

- tässä kuvattu malli on siis häviötön. Dispersioyhtälöksi tulee nyt kaava:

$$k^2 = -\frac{C_R}{C_L} - \frac{L_R}{L_L} + \frac{1}{\omega^2 C_L L_L} + \omega^2 L_R C_R = \varepsilon_o \mu_0 (\omega^2 - \omega_P^2)(\omega^2 - \omega_S^2) \quad (4.14)$$

Miinusmerkkinen vakio estää tietyn taajuisten aaltojen etenemisen, eli ratkaisemalla yhtälön nollakohdat ja huomioimalla, että sen muoto on ylöspäin aukeava, saadaan kielletty väli $[\min(\omega_s, \omega_p), \max(\omega_s, \omega_p)]$. Jotta funktiosta $f(\omega) = k(\omega)$ saataisiin kääntyvä (eli voitaisiin ratkaista taajuus suoraan aaltovektorin funktiona), pitää valita neg. etumerkki otettaessa neliöjuurta pienillä taajuuksilla. Pienillä taajuuksilla ($\frac{1}{\omega^2}$ -termi hallitsee) saadaan siten negatiivinen faasinopeus eli vasenkätinen SM-aalto, kun taas suurilla taajuuksilla k on positiivinen, ja saadaan tavallinen oikeakätinen SM-aalto (ω^2 -termi määräävä).

Näillä kahdella yksinkertaisella sijaiskytkennällä voidaan siis kuvata sekä ideaalisia oikeakätisiä että vasenkätisiä materiaaleja. Todellinen tilanne on kuitenkin monimutkaisempi, sillä mikään aine ei ole täysin häviötön. Siksi piiriin pitäisi lisätä ainakin resistiivisiä elementtejä. Mallia voidaan käyttää myös diskreetisti, kun halutaan kuvata esim. jaksollisia materiaaleja. Jos yhden yksikön pituus on a ja oletetaan ratkaisuiden olevan muotoa $(V_n, I_n) = e^{-ikna}(V_1, I_1)$, saadaan B-matriisille ominisarvoyhtälö $B_n \cdot (V_1, I_1) = e^{-ikna}(V_1, I_1)$, joten:

$$0 = \det(B - e^{-ika}I) = \det(B) - B_{11}e^{-iak} - B_{22}e^{-iak} + e^{-2iak}$$

Tämä sieventyy edelleen muotoon:

$$B_{11} + B_{22} = 2\cos(ak) = \frac{1}{2} - \sin^2(ka/2) \quad (4.15)$$

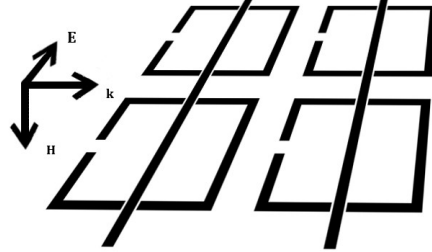
Oletetaan systeemi kolmikomponenttiseksi (systeemin Z -matriisille pätee tällöin $Z_{12} = Z_{21}$), jolloin pätee $\det(B) = 1$. Tämä antaa suoraan systeemin dispersioyhtälön, sillä matriisin B komponentit riippuvat nyt taajuudesta. Nyt permeabiliteettia ja permittiivisyyttä ei välttämättä saada identifioitua niin kuin differentiaalisessa mallissa. Jos edellä oletetut materiaalit mallinnettaisiin tällä tavalla, muuntuisivat k^2 -termit disper-

sioyhtälöissä muotoon $4\sin^2(ka/2)$. Samantapaista analyysiä voidaan käyttää mallintamaan suoraan elektromagneettisia aaltoja jaksollisissa rakenteissa kappaleen 3.6 mukaan. Diskreetit mallit voidaan muuntaa jatkuviksi, kun $a \rightarrow 0$ ja jaetaan impedanssit jaksojen pituuksilla.

Jos sekä magneettinen vaste että sähköinen vaste ovat Druden mallin mukaisia, voidaan näitä mallintaa samankaltaisella differentiaalisella virtapiirillä kuin CRLH:n tapauksessa. Ainoana erona ovat kaksi lisäkomponenttia C ja L , joilla saadaan mallista realistisempi (kuva 2) [18]. Kirjoitettaessa tavanomaiset differentiaaliyhtälöt saadaan kertoimet $Z_1 = Z = i\omega(L_R + \frac{1}{1/L - C_L\omega^2}) = i\omega\mu$ ja $Y = i\omega(C_R + \frac{1}{1/C - L_L\omega^2}) = i\omega\varepsilon$. Permittiivisyyttä ja permeabiliteettia voidaan yksinkertaistaa käyttämällä CRLH:n määritelmiä vakiotaajuuksille $\omega_{1,2}$:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_1^2}\right), \quad \mu(\omega) = \mu_0\left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2 - \omega_2^2}\right) \quad (4.16)$$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{C_L L}}$ ja $\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L C_L}}$ kuvaavat väliaineen resonanssitaajuuksia ja edelleen pätee $C_R = \varepsilon_0$ sekä $L_R = \mu_0$. Tämän ja ns. plasmataajuuden välillä permeabiliteetti tai permittiivisyys (luonnollisesti eri taajuusalueilla) on negatiivinen. Jos nämä taajuusalueet osuvat päällekkäin, saadaan tulokseksi vasenkätinen metamateriaali tällä alueella. Dispersioyhtälöstä tulee rationaalifunktio, joka synnyttää (vakiotaajuuksista riippuen) kiellettyjä taajuusalueita, joissa SM-aalto ei etene. Nämä alueet kuvaavat taajuuksia, joissa permittiivisyys on negatiivinen mutta permeabiliteetti on positiivinen tai päinvastoin. Lisäämällä piireihin sopivat resistiiviset elementit saataisiin lopulta Lorentzin malli, joka olisi siten analyttinen (absorptiivisten termien lisäämisen ansiosta) ylemmässä puolitasossa mahdollistaen esim. Greenin funktioiden integroimisen taajuuden imaginaariakselia pitkin kaavan A.13 mukaan.



Kuva 3: SRR (katkaistu johdinsilmukka) ja ohuet johtimet, materiaalisissa etenee tässä vasenkätinen SM-aalto. Systemin (fysikaalista) kapasitanssia saataisiin suurennettua lisäämällä neliön muotoisten silmukkojen sisään toinen katkaistu silmukka, jonka katkaisukohta olisi ohuen johtimen oikealla puolella.

4.4 Esimerkit metamateriaaleista: SRR, ohuet johtimet ja niiden yhdistelmä

Eräs tunnetuimmista esimerkeistä negatiivisista metamateriaaleista on ohuista johtimista ja ohuista, katkaistuista metallirenkaista (SRR = split ring resonator = resonaattori, joka on katkaistu johderengas) koostuva kuvan 3 mukainen jaksollinen hila [19]. Ohuet johtimet antavat plasmamuotoisen negatiivisen permittiivisyyden ja jaksolliset silmukat (SRR) negatiivisen plasmamuotoisen permeabiliteetin. Tällaisen väliaineen vasenkätisyys pätee yleensä GHz- tai THz-taajuusalueella. Aineen B -matriisi saadaan normaalisti virtapiirimallilla. Seuraavassa käsittelyssä oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi yksiulotteinen aine, jossa silmukkataso on kohtisuoraan magneettikenttää vastaan ja johtimet sähkökentän suuntaisia. Lisäksi silmukoiden välinen keskinäisinduktanssi on jätetty huomioimatta. Seuraavaksi kuvataan ensin katkaistuja johdinsilmukkoja, sitten ohuita johtimia ja lopuksi systeemit yhdistetään vasenkätiseksi metamateriaaliksi.

Jaksolliset magneettiset silmukat sisältävät sekä induktiivisen että kapasitiivisen elementin. Induktiivinen elementti koostuu yhtäältä itseinduktiota kuvaavasta L :sta ja silmukoiden ja ulkoisen magneettikentän keskinäisinduktiota kuvaavasta termistä M' . Kapasitiivinen elementti taas johtuu silmukoiden katkaisusta ja/tai muunlaisista geometrisista ratkaisuista, jotka aiheuttavat varauseroja pintojen välille. Eräs tällainen ma-

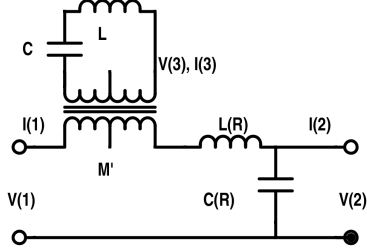
teriaali koostuu kahdesta sisäkkäisestä katkaistusta renkaasta. Katkaisukohtat ovat 180 asteen kulmassa toisiinsa nähden. Niinpä magneettikenttä H (H :n oletetaan olevan koh-tisuorassa silmukkatason) indusoi jaksollisen virran renkaisiin. Renkaiden asettelusta johtuen niiden välille syntyy varauspotentiaali katkaistujen päiden varauserojen lisäksi, joten kokonaiskapasitanssi saadaan melko suureksi. Yhden silmukayksikön kapasiteet-tia ja itseinduktanssia voidaan mallintaa klassisen elektrodynamiikan yhtälöiden avulla.

Jotta saisimme selville silmukan resonanssitaajuuden, mallinnetaan sitä ensin sul-jettuna virtapiirinä. Lisäksi oletetaan häviöttömyys ($R = 0$) ja silmukoiden välisen kes-kinäisinduktanssin puuttuminen ($M_{SRR,SRR} = 0$). Nyt I ja V kuvaavat silmukan oikeita suureita eikä kyseessä ole vain virtapiirimalli. Z_0 koostuu selvästi sarjaan kytketystä käämistä ja kondensaattorista, joten $Z_0 = i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$. Piirin jännite on siten:

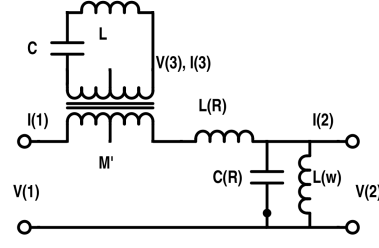
$$V = (i\omega L + \frac{1}{i\omega C})I \quad (4.17)$$

Tämä jännite syntyy Lenzin lain mukaan magneettivuon aiheuttamana induktiona: $V = -i\omega\Phi_B = -i\omega AB$, jossa B on ulkoisen kentän voimakkuuden keskiarvo ja A on silmukan ala. Virta riippuu magneettivuosta kaavan $I = \Phi/L(1 - \omega_0^2/\omega^2)$ mukaan, jossa $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ on resonanssitaajuus. Ympyrän muotoisen silmukan aiheuttama magneet-tinen momentti saadaan kertomalla tämä silmukan alalla. Kaikkien dipolien aiheuttama keskimääräinen yhteiskenttä $M = m/a^3$ (a on kuution muotoisen yksikkökopin sivun pituus) kuvaisi nyt aineen magnetoitumaa. Koska M riippuu lineaarisesti magneetti-vuon tiheydestä B , voitaisiin siitä laskea μ rakenneyhtälön $B = \mu H = \mu_0 H + M$ avulla permeabiliteetti. Virtapiirimallin mukaan magneettikenttä H samaistetaan virtaan I . Koska magneettivuon tiheys B on suoraan verrannollinen SRR-silmukan virtaan I_3 , saadaan sen aiheuttama muutos magneettikenttään lisäämällä suljettu SRR-piiri var-sinaiseen virtapiiriin keskinäisinduktiivisella kytkennällä M' . Virtapiiriä (ks. kuva 4a) analysoimalla saadaan yhtälö SRR:n jännitteelle V_3 :

$$V_3 = -\omega^2 L I_3 - \omega^2 M' I_1 + I_3 / C$$



Kuva (a) SRR



Kuva (b) SRR ja ohuet johtimet

Kuva 4: Metamateriaalien mallintamisessa käytetyt sijaiskytkennät

Asettamalla tämä nolaksi saadaan I_3 lausuttua I_1 :n avulla. Nyt siis muuntajaelementti voidaan lisätä sijaiskytkennän Z_1 :een elementtinä $-i\omega \frac{M'^2/L}{1 - \omega_0^2/\omega}$. Tämän lisäksi siihen kuuluu oikeakätistä materiaalia kuvaava L_R -termi. $1/Z_2 = Y_2$ saadaan identifioitua suoraan virtapiirimallista (ks. kuva 4a). Saadaan siis yhtälöt:

$$Z_1 = i\omega L_R(1 - g^2) \frac{\omega^2 - \omega_g^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad 1/Z_2 = i\omega C_R, \quad g^2 = \frac{M'}{LL_R}, \quad \omega_g^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - g^2}$$

g :n täytyy olla ykköstä pienempi häviöiden takia. B -matriisiksi (B_1) saadaan lopulta:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -i\omega L_R(1 - g^2) \frac{\omega^2 - \omega_g^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ -i\omega C_R & 1 - \omega^2 C_R L_R(1 - g^2) \frac{\omega^2 - \omega_g^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \end{bmatrix}$$

Ottamalla matriisin jälki saadaan dispersioyhtälö tavalliseen tapaan:

$$k^2 = \omega^2 L_R(1 - g^2) \frac{\omega^2 - \omega_g^2}{\omega_R^2(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (4.18)$$

Tällä yhtälöllä on ratkaisuja vain silloin, kun sen oikea puoli on positiivinen. Siten SM-aalto ei voi edetä välillä $[\omega_0, \omega_g]$. Permeabiliteetti saadaan suoraan impedanssista Z_1 ja

permittiivisyys termistä Y_2 :

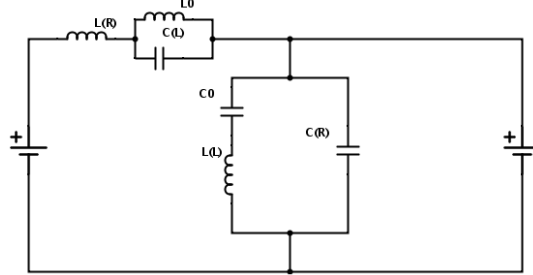
$$\varepsilon(\omega) = C_r = \varepsilon_0, \quad \mu(\omega) = L_r(1 - g^2) \frac{\omega^2 - \omega_g^2}{\omega^2 - \omega_0^2} = \mu_0 \left(1 - \frac{g^2 \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\right). \quad (4.19)$$

SRR:lle ei valitettavasti löydy luotettavaa yksinkertaista yhtälöä, joka kytkisi sen dimensiot magneettisen plasma- ja resonanssitaaajuuteen kuten ohuiden johtimien tapauksessa (joka mallinnetaan seuraavaksi). Karkea arvio taajuudelle voidaan johtaa laskeamalla silmukan kapasitanssi ja induktanssi, josta saadaan lopulta yhtälö $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}} \approx \frac{c\sqrt{d}}{l\sqrt{\varepsilon_0 w}}$. Tässä on oletettu yksinkertainen neliön muotoinen katkaistu rengas, jonka sivun pituus on l , leveys w ja raon paksuus d . Esim. arvoilla $l = 10^{-6}$ m ja $d = w = 10^{-8}$ m saadaan resonanssitaaajuus $\omega_p \approx 3.5 \cdot 10^{14}$ Hz. Alle muutaman sadan nanometrin leveydellä kaava ei ole enää kovin luotettava ainakaan numeeristen simulaatioiden perusteella.

Yksi varhaisimmista metamateriaaleista koostuu ohuista metallilangoista, jotka on järjestetty a -sivuisiksi kuutioiksi. Metallin viemä tilavuus on äärimmäisen pieni osuus yksikkökopista. Yleisesti a :n pituisessa johdinpätkässä jännite saadaan kaavalla $V = IZ$, missä Z koostuu induktiivisesta ja resistiivisestä osasta eli $Z = R + i\omega L$. Toisaalta jännite saadaan kertomalla sähkökenttä pituudella ja sähkövuo koko yksikkökopin alalla aa saadaan jakamalla virta a^2 :lla, joten $J = \frac{Ea}{a^2 Z} = \frac{E}{a(R+i\omega L)} = \sigma(\omega)E$, missä σ on sähkönjohtavuus. Sähköä johtaville materiaaleille saadaan aaltoyhtälö kappaleen 3.3 mukaan $k^2 = \omega^2(\varepsilon(\omega) + i\sigma(\omega)/\omega)$. Jos oletetaan sähkömagneettinen vaste puhtaasi sähköiseksi, saadaan ehto $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{tot}$. Lisäksi tulee muistaa, että metallin osuus tilavuudesta on äärimmäisen pieni, joten voidaan approksimoida $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ ainakin suurilla taajuuksilla. Lopulta päädytään yhtälöön teholliselle permittiivisyydelle:

$$\varepsilon_{tot}(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\tau\omega}\right) \quad (4.20)$$

Suure $\omega_p^2 = \frac{1}{a\varepsilon_0 L}$ on tehollinen plasmataajuus ja $\tau = R/L$ on nk. relaksaatioaika. Suurilla taajuuksilla tämä termi nimittäjässä jää pieneksi ja saadaan suoraan plasmamallin mukainen tehollinen permittiivisyys. Pitää huomioida, että plasmataajuus on negatiivinen,



Kuva 5: Drude-drude -malli

sillä L :n tulee olla miinusmerkkinen langan itseinduktanssille. Tästä saadaan suoraan Druden malli. Laskemalla langan induktanssi klassisen elektrodynamiikan mukaan ja sijoittamalla tulokset yhtälöihin saadaan plasmataajuudeksi lopulta tulos $\omega_p^2 = \frac{2\pi c^2}{a^2 \ln(a/r)}$. r on langan säde ja a yksikkökopin koko, nyt esim. arvoilla $a = 10^{-5}$ m ja $r = 10^{-7}$ m olisi plasmataajuus n. $3.5 \cdot 10^{14}$ Hz.

Ainetta vastaavaa virtapiiriä mallinnettaessa oletetaan johtimen häviöttömyys. Induktiivista johdinta voitaisiin mallintaa lisäämällä ideaalisen oikeakätisten materiaalien virtapiirimalliin lisäelementti L_w kondensaattorin C_R rinnankytkentänä. Näin saadaan uusi impedanssi $Z_1 = i\omega L_R$ ja admittanssi $Y_2 = \frac{-i}{L_w \omega} + i\omega C_R$. Nyt alkuperäiset elementit on valittu vastaamaan tyhjiötä eli $\epsilon_0 = C_R$ ja $\mu_0 = L_R$. Normaaliin tapaan saadaan uusi permittiivisyys $\epsilon = \epsilon_0 - \frac{1/L_w}{\omega^2}$. Tämän systeemin B -matriisi saadaan normaaliin tapaan identifioimalla Z_1 ja Z_2 :

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -i\omega L_R \\ iC_R \omega (1 - \omega_p^2/\omega^2) & 1 - \frac{\omega^2(1 - \omega_p^2/\omega^2)}{\omega_R^2} \end{bmatrix}$$

Tässä pätee $\omega_p = (C_R L_w)^{-1/2}$. Tavalliseen tapaan saadaan dispersioyhtälö $4\sin^2(ak/2) = (\omega^2 - \omega_p^2)/\omega_R^2$. Suureet μ ja ϵ saadaan impedansseista:

$$\epsilon(\omega) = C_R(1 - \omega_p^2/\omega^2) = \epsilon(1 - \omega_p^2/\omega^2), \quad \mu(\omega) = L_R = \mu_0$$

Ohuet johtimet ja katkaistut silmukat yhdistämällä saadaan lopulta negatiivisen

taitekertoimen antava metamateriaali. Sen virtapiiri muistuttaa hyvin paljon SRR-systeemiä kuvaavaa virtapiirimallia sillä erotuksella, että nyt tulee lisätä C_R :n rinnalle ohutta johdinta kuvaava käämielementti L_w (ks. kuva 4b). B -matriisin impedanssi Z_2 saa nyt hiukan erilaisen arvon SRR:iin verrattuna: $1/Z_2 = i\omega C_R(1 - \omega_P^2/\omega^2)$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -i\omega L_R(1 - g^2) \frac{(\omega^2 - \omega_g^2)}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ -i\omega C_R(1 - \omega_P^2/\omega^2) & 1 - i\omega^2 C_R L_R(1 - g^2) \frac{(\omega^2 - \omega_g^2)(\omega^2 - \omega_P^2)}{\omega^2 - \omega_0^2} \end{bmatrix}$$

Ei-diagonaali -elementit ovat merkityksettömiä dispersioyhtälössä, joten tulokseksi saadaan:

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_P^2}{\omega_R^2(\omega^2 - \omega_0^2)} \left(\frac{M^2}{LL_R} \omega^2 - \omega^2 + \omega_0^2 \right) = (1 - g^2) \frac{\omega^2 - \omega_R^2}{\omega_P^2(\omega^2 - \omega_0^2)} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_g^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (4.21)$$

Dispersioyhtälö saa taas kiellettyjä taajuusalueita, kun dispersioyhtälö saa neg. arvoja. Niinpä välillä $(0, \omega_0) \cup (\omega_g, \omega_P)$ ei esiinny SM-aaltoja; tässä on valittu $\omega_P < \omega_g$. Tämä vastaisi SRR:n ja ohuiden johtimien yksittäissysteemien yhteisiä kiellettyjä taajuusalueita. Dispersioyhtälön mukaan näin pitääkin olla, sillä se on SRR:n dispersioyhtälö (oikea puoli) kerrottuna ohuiden johtimien vastaavalla. Permittiivisyys ja permeabiliteetti saadaan myös samoiksi identifioimalla virtapiirimallin impedanssit:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right) \quad \mu(\omega) = \mu_0 \left(1 - g^2 \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \quad (4.22)$$

Tässä on sijoitettu $C_R = \varepsilon_0$ ja $L_R = \mu_0$. Viimeinen muoto permeabiliteetille saadaan suoraan laskemalla kaavasta 4.19. Käsittelystä on jätetty magneettisen SM-vasteen osalta huomioimatta resistiiviset komponentit, jotka fyysikaalisesti vastaisivat tietysti absorptiota. Lisäämällä resistiivinen tekijä saadaan permeabiliteetin nimittäjään termi $+i\gamma_m\omega$, ja nyt yhtälö vastaisi täysin artikkelin [20] kaavaa 7, kun $g^2 = C$. Permittiivisyyden absorptiivinen elementti onkin jo huomioitu aiemmassa käsittelyssä tekijänä $-i\tau\omega$, jossa $R/L = \tau$. Tämä voitaisiin lisätä myös varsinaiseen ohutta johdinta kuvaavaan virtapiiriin elementtinä. Taajuusalue, jossa molemmat SM-vasteet ovat negatiivi-

sia, on välillä $[\omega_0, \omega_g]$, kun tehdään oletus $\omega_P < \omega_g$. Niinpä tämän välin taajuuksilla aine on vasenkätinen sähkömagneettisilta ominaisuuksiltaan.

Koska sekä permittiivisyys että permeabiliteetti riippuvat omista parametreistaan ideaalitulanteessa itsenäisesti, voidaan molempien resonanssi- ja plasmataajuudet muuttaa muuntamalla vain yhden systeemin parametreja. Näin saadaan sopivat dimensiot valitsemalla haluamamme SM-vaste metamateriaalille. Käytännössä tälle asettavat rajoitteensa niin yhtälöiden skaalausrajat, metamateriaalin tukirakenteen (esim. lasi) SM-vaste kuin niiden vuorovaikutus. Esimerkiksi katkaistuista metallirenkaista aiheutuu permittiivisyys, joka pitää lisätä ohuiden johdinten malliin.

5 Kvanttielektrodynamiikka

SM-kentän kvanttuminen tehdään muuntamalla klassiset fysikaaliset suureet operaattorimuotoon ja vaatimalla samankaltaiset ehdot kuin klassisen mekaniikan Poissonin suluille, mutta nyt sulut korvataan nk. kommutaattoreilla. Puhtaan kentän kvanttuminen rajoitetussa avaruudessa perustuu ortogonaalisiin Maxwellin yhtälöiden kenttien ominaisratkaisuihin, jossa jokaista moodia (ratkaisua) merkitään omalla indeksillä ja moodin tilaa omalla tilaoperaattorilla. Kaikki fysikaalisten suureiden odotusarvot saadaan ottamalla suuretta vastaavan operaattorin ja tilaoperaattorin yhdistetyn operaattorin jälki. Äärettömän avaruuden tapaus saadaan ottamalla diskreetin tapauksen raja-arvo, kun lähekkäisten moodien aaltovektoreiden ero lähestyy nollaa.

SM-kentän ja väliaineen yhdistettyä systeemiä ei voida mallintaa ortogonaalisilla SM-kentän ominaisratkaisuilla absorptioita. Makroskooppinen malli perustuu keskiarvoistettuihin SM-vastefunktioihin ja satunnaisuonteisiin häiriövirtaoperaattoreihin, jotka toimivat systeemin ODY:t ratkaisevien Greenin funktioiden lähteinä. Häiriövirtaoperaattorit saadaan lausuttua samantapaisten bosonisten luomis- ja tuhoamisoperaattorien avulla kuin vapaan kentän tapauksessa, vaikka jääkin epäselväksi, mikä on varsinaisen yhdistetyn systeemin tila-avaruus, johon ne liittyvät.

Mikroskooppisesti väliaineen ja SM-kentän yhdistetty systeemi voidaan ratkaista mallintamalla kutakin systeemiä harmonisina värähtelijöinä ja lisäämällä bilineaariset

vuorovaikutusosat kuvaamaan absorptiota ja SM-vastetta. Hamiltonin operaattori saadaan diagonalisoitua kutakin systeemiä kuvaavan luonti- ja tuhoamisoperaattorin lineaariyhdistelmänä. Näin saatu koko systeemiä kuvaava luomis- ja tuhoamisoperaattori operoi nyt yhdistettyyn systeemiin, ja sitä voidaan kuvata polaritonina. Polaritoni on fotonin kaltainen hiukkanen, joka kuvaa yhdistetyn systeemin tilaa. Sille pätevät samat kommutointiehdot ja muutoinkin sen käsittely on samanlaista kuin fotonin tapauksessa. Voidaan osoittaa, että kyseinen bosoninen operaattori on tietyin alkuehdoin sama kuin makroskooppisessa käsittelyssä.

5.1 Vektoripotentialin kvanttuminen

Elektrodynamiikan Maxwellin yhtälöt eivät päde sellaisinaan, sillä mikroskooppiset sähkömagneettiset ilmiöt noudattavat kvanttimekaniikan lakeja, joita klassinen elektrodynamiikka ei huomioi. Huomioimalla kvanttimekaniikka päädytään kenttien ns. kvanttumiseen, jossa jokainen kenttä korvataan vastaavalla kenttäoperaattorilla [21]. Kentän operaattoreissa on klassinen amplitudiosa kertoimena kvanttimekaanisen operaattoriosan edessä. Amplitudiosa on sama kuin Maxwellin yhtälöiden klassiset ratkaisut, kun taas operaattoriosia operoi itse kentän tilaan Hilbertin avaruudessa. Tällöin tilajakauma muuttuu diskreetiksi rajoitetussa avaruudessa. Yhtälöiden muuntuminen seuraa suoraan kommutointiehdoista, joita vaaditaan kentän liikemäärä- ja paikkaoperaattoreille. Kenttien kvanttuminen voidaan johtaa lähtemällä SM-kentän Lagrange-funktionaalista, mutta helpompi tapa on käyttää vektoripotentialia $(\phi(r, t), A(r, t))$ ja Coulombin mitta $\phi = 0, \nabla \cdot A = 0$ kuten kappaleessa 1.3. Klassiset sähkö- ja magneettikentät saadaan lausuttua vektoripotentialin avulla muodossa:

$$E(r, t) = -\partial_t A(r, t) \quad B(r, t) = \nabla \times A(r, t) \quad (5.1)$$

Sijoittamalla nämä Maxwellin yhtälöihin saadaan lopulta:

$$\Delta A = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 A \quad (5.2)$$

Tämä voidaan ratkaista separoimalla ratkaisu aika- ja paikkaratkaisuuksi $A(r, t) = A(r)T(t)$. Oletetaan lisäksi, että ratkaisut voidaan kirjoittaa eri ominaismoodien summana (kun oletetaan jokin äärellinen monisto). Sijoitetaan tämä yrittelmä yhtälöön 5.2, jolloin saadaan osittaisdifferentiaaliyhtälöt

$$\frac{c^2 \Delta A_\mu^k(r)}{A_\mu^k(r)} = \frac{\partial_t^2 T_\mu^k(t)}{T_\mu^k(t)} = -\mu^k \quad k = 1, 2, 3 \quad (5.3)$$

Yhtälön pitää olla vakio, sillä ehdon tulee päteä kaikilla r :n ja t :n arvoilla. Voidaan lisäksi olettaa, että ratkaisun aikaosa on sama kaikilla koordinaateilla, jolloin myös vakiot μ^k ovat samat. Mukavuussyistä voidaan merkitä $\mu = \omega_\mu^2$. Saadaan kaksi ominaisarvoyhtälöä:

$$\Delta A_\mu = -\frac{\omega_\mu^2}{c^2} A \quad \partial_t^2 T = -\omega_\mu^2 T \quad (5.4)$$

Jälkimmäisen ratkaisu on $T_\mu(t) = T_\mu(0)e^{\mp i\omega_\mu^2 t}$ ja samankaltaisella tavalla saadaan A :lle muoto: $A_\mu(r) = A_\mu(0)e^{\pm ik \cdot r}$, missä $k^2 = \omega_\mu^2/c^2$. Coulombin mitassa vaaditaan, että $\nabla A_\mu = 0$, joten $k \perp A_\mu$. Kolmiulotteisessa paikka-avaruudessa tämä jättää kaksi vapausastetta vektoripotentialin A suunnalle. Tätä kutsutaan polarisaatioksi ja sitä merkitään σ :lla. Kun tilavuus lähestyy ääretöntä, voidaan k :n yli summaus A :n kehitemässä korvata integraalilla: $\sum_k \rightarrow \int_V \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$. Polarisaatio taas otetaan huomioon summana $A_\mu \rightarrow \sum_{\sigma=1}^2 A_{\mu\sigma} e_\sigma(k)$, jossa $e_\sigma(k)$ on ns. polarisaatiovektori. Olemme kiinnostuneita ainoastaan fysikaalisista ratkaisuista, joten voimme ottaa suoraan summakehitemän reaaliosan:

$$A(r, t) = \frac{1}{2} \sum_\sigma \int_V \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e_\sigma(k) (b_{k\sigma} e^{ik \cdot r - i\omega t} + b_{k\sigma}^* e^{-ik \cdot r + i\omega t}) \quad (5.5)$$

Tässä A :n ja T :n alkuarvot on sisällytetty b :hen. Koska $E = -\partial_t A$ $B = \nabla \times A$, saadaan lopulta:

$$E(r, t) = \frac{i}{2} \sum_\sigma \int_V \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e_\sigma(k) \omega_k (b_{k\sigma} e^{ik \cdot r - i\omega t} - b_{k\sigma}^* e^{-ik \cdot r + i\omega t}) \quad (5.6)$$

$$B(r, t) = \frac{i}{2} \sum_{\sigma} \int_V \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} (k \times e_{\sigma}(k) \omega_k) (b_{k\sigma} e^{ik \cdot r - i\omega t} - b_{k\sigma}^* e^{-ik \cdot r + i\omega t}) \quad (5.7)$$

Jos avaruuden tilavuus on rajoitettu, pitää meidän korvata integraali $\int_V \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}$ summalla \sum_k . Energiatiheyden lauseke tyhjiössä rajoittamattoman avaruuden tapauksessa on $u = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$, joten sijoittamalla E :n ja B :n yhtälöt tähän sekä integroimalla $u(r, t)$ k :n, k' :n ja r :n yli saadaan:

$$H = 2\varepsilon_0 \sum_{\sigma} \int_V d^3k \omega^2 |b_{k\sigma}|^2 \quad (5.8)$$

$b_{k\sigma}$ voidaan hajottaa reaali- ja imaginaariosiin: $q_{k\sigma} = \sqrt{\varepsilon_0} 2 \operatorname{Re}(b_{k\sigma})$ $p_{k\sigma} = -i\omega \sqrt{\varepsilon_0} 2 \operatorname{Im}(b_{k\sigma})$. Tämä johtaa Hamiltonin lausekkeeseen:

$$H = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \sum_{\sigma} \int_V d^3k (p_{k\sigma}^2 + \omega^2 q_{k\sigma}^2) \quad (5.9)$$

Kaava muistuttaa harmonisen värähtelijän Hamiltonin funktiota, kun (q, p) ovat yleistytyt koordinaatit. Nyt kvanttittuminen voidaan tehdä ”perinteiseen” tapaan korvaamalla Poissonin sulkeet $\{.,.\}$ kommutaattoreilla $[.,.]$ ja vaatimalla samat kommutointiehtot kerrottuna jollain vakiolla. Vaikka tämä menetelmä toimii esim. yksinkertaisella SM-kentälle, olisi oikeampi lähestymistapa ratkaista ensin kvanttimekaaniset liikeyhtälöt ja johtaa niistä klassiset vaatimalla $\hbar \rightarrow 0$. Klassiset koordinaatit noudattavat ehtoja $\{q_{k\sigma}, p_{k'\sigma'}\} = \delta(k - k') \delta_{\sigma\sigma'}$ ja $\{q_{k\sigma}, q_{k'\sigma'}\} = \{p_{k\sigma}, p_{k'\sigma'}\} = 0$ Poissonin sulkeiden avulla lausuttuna.

Käyttämällä suoraan klassisen elektrodynamiikan muuttujaa A vastaavaa kanonista impulssimomenttia $\Pi_A = -\varepsilon_0 E$ (ks. kappale 1.4) voidaan Poissonin sulut kirjoittaa magneettivuon tiheydelle ja sähkökentälle: $\{A(r, t), \Pi_A(r', t)\} = \delta_t(r - r')$. Tästä saadaan edelleen Poissonin sulut sähkökentälle ja magneettivuon tiheydelle:

$$\{E(r, t), B(r', t)\} = \varepsilon_0^{-1} \nabla \times \delta_t(r - r') \quad (5.10)$$

Kvantittumisessa lähdetään yleensä systeemin koordinaateista - systeemin koordinaatit muuntuvat koordinaattioperaattoreiksi ja Poissonin sulkeet kommutaattoreiksi [22]: $p_{k\sigma} \longrightarrow \hat{p}_{k\sigma}$ ja $q_{k\sigma} \longrightarrow \hat{q}_{k\sigma}$ sekä $[\hat{q}_{k\sigma}, \hat{p}_{k'\sigma'}] = i\hbar\delta(k - k')\delta_{\sigma\sigma'}$, jossa \hbar on Planckin vakio. Seuraava luonnollinen askel on korvata koordinaattioperaattorit tuhoamis- ja luomisoperaattoreilla:

$$\hat{a}_\sigma(k) = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q}_{k\sigma} + \frac{i\hat{p}_{k\sigma}}{\omega}\right) \quad \hat{a}_\sigma^\dagger(k) = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q}_{k\sigma} - \frac{i\hat{p}_{k\sigma}}{\omega}\right) \quad (5.11)$$

Nämä operaattorit noudattavat kommutointiehtoja $[\hat{a}_\sigma(k), \hat{a}_{\sigma'}(k')^\dagger] = \delta(k - k')\delta_{\sigma\sigma'}$ ja $[\hat{a}_\sigma(k), \hat{a}_{\sigma'}(k')] = 0 = [\hat{a}_\sigma(k)^\dagger, \hat{a}_{\sigma'}(k')^\dagger]$. Itse kvantittuneille kentille saadaan samat kommutointiehdot kuin klassisessa tapauksessa, mutta skaalattuina:

$$[\hat{E}(r, t), \hat{B}(r', t)] = -i\hbar/\varepsilon_0 \nabla \times \delta_t(r - r'), \quad [\hat{A}(r, t), \hat{\Pi}(r', t)] = -i\hbar\delta_t(r - r') \quad (5.12)$$

Muut yllä olevien operaattoreiden kommutaattorit ovat nollia. Systeemin Hamiltonin funktio muuntuu operaattorimuotoon $\hat{H} = \int_V d^3k \sum_\sigma \hbar\omega_k (\hat{a}_{k\sigma}^\dagger \hat{a}_{k\sigma} + \frac{I}{2})$. Operaattoreiden aikakehitys saadaan Poissonin sulkujen tapaan kommutaattorimuodossa $\partial_t \hat{O} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}]$.

Tämä kvantittuminen voitaisiin tehdä aivan yhtä hyvin rajoitetulle tapaukselle, jossa siis vain tietyt moodit olisivat sallittuja. Reunaehdoista seuraisi, että integroitaessa energiatiheyden yli, kun $\int_V d^3r < \infty$, kokonaisenergian lauseke (5.8) saataisiin hieman eri muodossa:

$$H = 2\varepsilon_0 V \sum_{k\sigma} \omega_k b_{k\sigma} b_{k\sigma}^* \quad (5.13)$$

Kaavan johtamisessa integrointi k, k' -avaruuden yli korvautuu summauksilla ja integroitaessa V :n yli ortogonaaliset ratkaisut $e^{\pm ikr}$ antavat nollostakoavan tuloksen V vain silloin, kun $k = k'$. Jaettaessa kentän $b_{k\sigma}$ komponentit reaaliin ja imaginaarisiin osiin käytetään muunnosta:

$$b_{k\sigma} = \frac{1}{2\omega_k \sqrt{\varepsilon_0 V}} (\omega_k q_{k\sigma} + i p_{k\sigma}) \quad b_{k\sigma}^* = \frac{1}{2\omega_k \sqrt{\varepsilon_0 V}} (\omega_k q_{k\sigma} - i p_{k\sigma}) \quad (5.14)$$

Nämä muuntuvat edelleen lasku- ja nosto-operaattoreiksi ja noudattavat samoja kommutointiehtoja kuten rajoittamattomassa tapauksessakin. Sitä vastoin Hamiltonin operaattori saadaan nyt summaesityksenä:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{k\sigma} (\hat{p}_{k\sigma}^2 + \omega_k^2 \hat{q}_{k\sigma}^2) \quad (5.15)$$

Huomioimalla kommutointiehdot saadaan Hamiltonin operaattoriksi lopulta:

$$\hat{H} = \sum_{k\sigma} \omega_k \hbar (\hat{a}_{k\sigma}^\dagger \hat{a}_{k\sigma} + \frac{I}{2}) = \sum_{k\sigma} \hat{H}_{k\sigma} = \sum_l \hat{H}_l \quad (5.16)$$

Nyt I on identiteettioperaattori, ja operaattorit $\hat{H}_{k\sigma} = \hbar\omega_k (\hat{a}_{k\sigma}^\dagger \hat{a}_{k\sigma} + \frac{I}{2}) = \hat{H}_l$ voitaisiin tulkita yhden moodin $k\sigma = l$ Hamiltonin operaattoriksi. Jokainen moodi (Fourier-komponentti + polarisaatio) on siten riippumaton muista moodeista. Sekä sähkökenttä että magneettikenttä voidaan nyt antaa lasku- ja nosto-operaattorin avulla:

$$\hat{E}(r, t) = \sum_{k\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} e_{k\sigma} (\hat{a}_{k\sigma} e^{i(kr-\omega t)} + \hat{a}_{k\sigma}^\dagger e^{-i(kr-\omega t)}) \quad (5.17)$$

$$\hat{B}(r, t) = \frac{i}{c} \sum_{k\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} u(k) \times e_{k\sigma} (\hat{a}_{k\sigma} e^{i(kr-\omega t)} - \hat{a}_{k\sigma}^\dagger e^{-i(kr-\omega t)}) \quad (5.18)$$

Tässä $u(k)$ on k -vektorin suuntavektori.

Monokromaattisen kentän tapauksessa (yksimoodikenttä) summa/integraali yhtälöiden alussa jäisi pois. Valitaan lähtökohdaksi nyt kuitenkin vain summakehitelmä. Monokromaattiselle kentälle saadaan Hamiltonin operaattori $\hat{H}_l = \hbar\omega_l (\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \frac{I}{2})$. Jokainen operaattori \hat{a}_l operoi johonkin Hilbertin avaruuden tilavektoriin $|\psi_l\rangle \in \mathbb{H}_l$, jossa alaindeksi $l = (k\sigma)$ viittaa moodin aaltovektoriin ja polarisaatioon. Operaattorin \hat{A}_l odotusarvo vektoritilalle $|\psi_l\rangle$ saadaan Hilbertin avaruuden sisätulona $\langle \hat{A}_l \rangle_{\psi_l} = \langle \psi_l | \hat{A}_l | \psi_l \rangle$. Tällainen tila on nk. puhdas tila. Esimerkiksi Hamiltonin operaattorin \hat{H}_l ominaistilat $|n_l\rangle \in \mathbb{H}_l$ ($\hat{H}_l |n_l\rangle = E(n_l) |n_l\rangle$) ovat tällaisia. Ominaistilojen $|n_l\rangle_{n_l \in \mathbb{N}}$ ominaisenergiat ovat $E(n_l) = \hbar\omega_k (\frac{1}{2} + n_l)$. Näitä ominaistiloja kutsutaan

lukumäärätiloiksi, ja operoitaessa niihin lasku(tuhoamis)- ja nosto(luomis)- operaattoreilla saataisiin tulokset: $\hat{a}_l|n_l + 1 \rangle = \sqrt{n_l + 1}|n_l \rangle$ ja $\hat{a}_l^\dagger|n_l \rangle = \sqrt{n_l}|n_l + 1 \rangle$. Alin mahdollinen tila olisi siten nk. tyhjiötila $|0 \rangle$. Tyhjiötilan energia ei kuitenkaan ole nolla, vaan sille saadaan energia $E(0_l) = \frac{\hbar\omega_k}{2}$. Laskuoperaattori antaisi tyhjiötilaan operoitaessa nollan, eli ”tuhoaisi” sen kokonaan. Hamiltonin operaattorin ominaistilojen sulkeuma virittää koko Hilbertin avaruuden, eli jokainen vektoritila $|\psi_l \rangle$ saadaan jonkun lineaarikombinaation $|\psi_l \rangle = \sum_{n_l=0}^{\infty} c_{n_l}|n_l \rangle$ kasautumispisteenä.

Vaikka tyhjiötila kuuluu lukumäärätiloihin, muistuttaa sen luonne enemmän koherentteja tiloja, joihin se myös kuuluu. Tyhjiötila saavutetaan SM-kentälle siinä tapauksessa, että kenttä on lähteetön ja lämpötila absoluuttinen nollopiste. Todellisissa tilanteissa lähteettömän SM-kentän kvanttimekaaninen tila täytyy olettaa nk. termiseksi tilaksi, jossa jokaisella lukumäärätilalla on Stefan-Boltzmann-jakauma $p_{n_l} = \frac{e^{-\hbar\omega_k n_l / (k_b T)}}{1 - e^{-\hbar\omega_k / (k_b T)}}$, jossa k_b on Boltzmannin vakio ja T lämpötila.

Tilan käsite voidaan yleistää siirtymällä tilan operaattoriesitykseen $\hat{\rho}_l = \sum_{n_l=1}^{\infty} p_{n_l}|n_l \rangle \langle n_l| = \sum_{n_l=1}^{\infty} p_{n_l} \hat{P}[|n_l \rangle]$, missä $\hat{P}[|n_l \rangle] = |n_l \rangle \langle n_l|$ on projektio-operaattori. Jokainen tila $\hat{\rho}_l$ saadaan siis operaattoriesityksenä, jossa $\sum_{n_l} p_{n_l} = 1$. Kvanttimekaniikan mukaan operaattorien odotusarvot taas saadaan ottamalla jälki niiden ja tilaoperaattorin yhdistetystä operaattorista:

$$\langle \hat{A}_l \rangle_{\rho_l} = Tr[\hat{A}_l \hat{\rho}_l] = \sum_{n_l=0}^{\infty} \langle n_l | \hat{A}_l \hat{\rho}_l | n_l \rangle \quad (5.19)$$

Siirryttäessä koko (multimoodi-)systeemin Hamiltonin operaattoriin yksittäisten Hamiltonin operaattoreiden summaesityksenä, voidaan systeemin kokonaistila tulkita yksittäisten moodien tilojen tensoritulona:

$$\hat{\rho}_{tot} = \hat{\rho} = \otimes_l \hat{\rho}_l \in \otimes_l \mathbb{H}_l, \quad \hat{\rho}_l \in \mathbb{H}_l$$

Jokainen operaattori saadaan nyt summakehitelmänä $\hat{A} = \sum_l \hat{A}_l$, joista kukin komponentti operoi vain oman moodinsa tilaan. Odotusarvot saadaan taas jälkioperaattoreiden summana: $\langle \hat{A} \rangle = Tr[\hat{A} \hat{\rho}] = \sum_l Tr_l[\hat{A}_l \hat{\rho}_l]$, jossa Tr_l tarkoittaa jälkeä alaindeksin

määrittämän Hilbertin avaruuden yli. Tulkitaan jokainen operaattorin komponentti \hat{A}_l koko systeemin Hilbertin avaruuden operaattoriksi $\hat{A}_l = \hat{I}_1 \otimes \dots \otimes \hat{A}_l \otimes \dots$ (sillä rajoitetun avaruuden tapauksessa jaon moodeihin tulee olla numeroituva). Nyt voidaan myös määrittellä jälki koko systeemin yli:

$$Tr[A] = Tr_1[Tr_2[\dots[\hat{A}]]] = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \langle n_1 | \otimes \langle n_2 | \otimes \dots \hat{A} | n_1 \rangle \otimes | n_2 \rangle \otimes \dots$$

Tila saadaan nyt eri moodien tilojen tensoritulona: $\hat{\rho} = \otimes_l \hat{\rho}_l$. Täten esim. tyhjiötila saadaan vektoriesityksenä $|0\rangle = \otimes_l |0\rangle_l$ tai yhtäläisesti operaattorimuodossa $\hat{P}[|0\rangle] = \otimes_l \hat{P}_l[|0\rangle]$. Tyhjiötilan energia olisi nyt summaesitys $E(0) = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \dots = \sum_l \frac{\hbar\omega_k}{2}$, eli se olisi ääretön. Termisen tilan operaattoriesitys olisi taas $\hat{\rho}_T = \otimes_l \hat{\rho}_l = \otimes_l \sum_{n_l} \frac{e^{-\hbar\omega_k n_l / (k_b T)}}{1 - e^{-\hbar\omega_k / (k_b T)}} \hat{P}_l[|n_l\rangle]$.

Jokaisella SM-kentän operaattorilla on amplitudiosuus ja operaattorimuotoinen osuus, joka koostuu jostain lasku- ja nosto-operaattoreiden funktiosta. Amplitudiosuus antaa kentän fonia kohti ja noudattaa klassisia Maxwellin ODY:ä. Operaattoriosuus taas operoi kvanttimekaaniseen tilaan, ja sitä tarvitaan mm. odotusarvoja laskettaessa. Esim. yksimoodikentän (l) intensiteetin odotusarvolle pitäisi amplitudiosan neliö $|E_l|^2$ kertoa fotonilukumäärän odotusarvolla $Tr_l[\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l \hat{\rho}_l]$, joten kokonaisintensiteetille saataisiin multimoodikentälle tämän summakehitys l :n yli.

Jatkuvassa tapauksessa tällaista jakoa eri moodien välille ei ole mahdollista tehdä, eikä tilaakaan voida siten kirjoittaa eri moodien tensoritulona. Jatkuvan tapauksen integraali saadaan kuitenkin tekemällä k -summakehiteelmä tarpeeksi tiheäksi, ja ottamalla siitä raja-arvo lähimpien moodien eron lähestyessä nollaa. Edelleen voidaan puhua esim. tyhjiötilasta, nyt vain operaattoreiden keskiarvot saadaan integraaleina $\langle \hat{A} \rangle_\rho = \int_V d^3k \sum_\sigma Tr_{k\sigma}[\hat{A}_{k\sigma}(k, \omega) \hat{\rho}_{k\sigma}]$. Esim. termiselle tilalle saadaan integrandiksi lauseke $\sum_{n_{k\sigma}} p_{k\sigma} \langle n_{k\sigma} | \hat{A}_{k\sigma} | n_{k\sigma} \rangle$. Tyhjiötilalle vastaava integrandi olisi luonnollisesti $\sum_\sigma \langle 0_{k\sigma} | \hat{A}_{k\sigma} | 0_{k\sigma} \rangle$. Toisin sanoen integrandi saadaan samaan tapaan kuin summauksen yksittäiset alkiot.

5.2 Langevin-quantittuminen

Väliaineessa SM-kentän kvantittuminen ei vielä yksinään riitä ratkaisuun, vaan itse väliainekin on kyettävä mallintamaan. Väliainetta voidaan kuvata makroskooppisesti SM-vastefunktioiden avulla ja valitsemalla sopivat bosoniset nk. häiriötermeihin liittyvät luomis- ja tuhoamisoperaattorit SM-kentän ja väliaineen yhdistetylle systeemille, joille kommutointiehtot ovat voimassa. Kun käytetään Greenin funktiota, toimivat tällaiset operaattorit kvantittuneiden kenttien lähteinä. Polarisatio sisältyy seuraavassa käsittelyssä klassisesti Greenin tensoriin, ja molempien polarisaatioiden oletetaan antavan yhtä suuren kontribuution kentille. Niitä ei siis ole sisällytetty kvantittumisen määritteleviin Langevin-operaattoreihin.

Voidaan olettaa, että mikroskooppisesti tapahtuva vuorovaikutus väliaineen kanssa saadaan kuvattua suurelle systeemille yksinkertaisilla lineaarisilla makroskooppisilla ”keskiarvoistetuilla” vastefunktiolla. Kun muunnetaan kentät Fourier-muunnoksella taajuusesityksiksi ja oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että ulkoisia virta- ja varauslähteitä ei ole, saadaan yhtälöt:

$$\nabla \times \hat{E}(r, \omega) = i\omega \hat{B}(r, \omega) \quad (5.20)$$

$$\nabla \times \hat{H}(r, \omega) = -i\omega \hat{D}(r, \omega) \quad (5.21)$$

$$\nabla \cdot \hat{D}(r, \omega) = 0 \quad (5.22)$$

$$\nabla \cdot \hat{B}(r, \omega) = 0 \quad (5.23)$$

\hat{D} ja \hat{H} saadaan klassisen elektrodynamiikan tapaan polarisoituma- ja magnetoitumaooperaattoreiden avulla:

$$\hat{D} = \varepsilon_0 \hat{E} + \hat{P}, \quad \hat{H} = \kappa_0 \hat{B} - \hat{M} \quad (5.24)$$

Kenttäoperaattoreiden argumentit on jätetty selvyuden vuoksi pois ja väliaine on oletettu sekä isotrooppiseksi että lineaariseksi. Magnetoituma ja polarisoituma jaetaan lineaariseen komponenttiin, joka saadaan suoraan permittiivisyyden/permeabiliteetin

funktiona sekä häiriöosaan.

$$\hat{D} = \varepsilon \hat{E} + \hat{P}_N, \quad \hat{H} = \mu^{-1} \hat{B} - \hat{M}_N \quad (5.25)$$

Häiriöosat kuvaavat väliaineen ja SM-kentän välistä stokastista vuorovaikutusta kuten absorptiota. Suurille systeemeille on mahdotonta kirjoittaa yksityiskohtaisia vuorovaikutusmekanismeja vastaavia operaattoreita mutta niitä voidaan arvioida tilastollisesti näiden häiriötermien avulla. Nämä häiriöoperaattorit on pakko lisätä kenttiin, sillä muutoin kenttäoperaattorien väliset kommutointiehdot (ks. 5.12) eivät ole voimassa. Tässä sekä ε että μ ovat klassisia tensoreita, jotka yleensä saadaan mittausdatasta tai mallinnetaan jollain yksinkertaisella teorialla (esim. Druden tai Lorentzin teoria). Kun nämä kaavat sijoitetaan Maxwellin operaattorimuotoisiin yhtälöihin, saadaan tulokset:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \hat{E}) = -\nabla \cdot \hat{P}_N = \hat{\rho}_N \quad (5.26)$$

$$\nabla \times (\mu^{-1} \hat{B}) + i\omega \varepsilon \hat{E} = -i\omega \hat{P}_N + \nabla \times \hat{M}_N = \hat{J}_N \quad (5.27)$$

Yhtälöistä saadaan määriteltyä uudet operaattorit; häiriövirran \hat{J}_N ja häiriövaraustihyden operaattorit $\hat{\rho}_N$ [23]. Koska häiriövaraustihyden liike antaa häiriövirtatiheyden, pitää näiden toteuttaa jatkuvuusyhtälö:

$$-i\omega \hat{\rho}_N + \nabla \cdot \hat{J}_N = 0$$

Muut Maxwellin yhtälöt säilyvät samanlaisina.

Operoimalla $\nabla \times (\mu^{-1} \cdot)$:lla (5.20):iin saadaan tulos:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \hat{E}) = i\omega \nabla \times (\mu^{-1} \hat{B}) = -\omega^2 \varepsilon \hat{E} + i\omega \hat{J}_N \quad (5.28)$$

Selvästi sähkökentälle saadaan samanlainen Helmholtzin yhtälö kuin klassisessa tapauksessa; samalla käsittelyllä magneettikentälle saadaan vastaava differentiaaliyhtälö. Koska yhtälöt ovat samanlaiset operaattorimuotoisuutta lukuun ottamatta, saadaan ne ratkaistua samalla Greenin funktiolla kuin klassisenkin tapaus. Nyt kvantittuminen

tapahtuu lähteiden esitysten välityksellä eli häiriövirtaoperaattorin avulla:

$$\hat{E}(r, \omega) = i\omega \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' G(r, r', \omega) \cdot \hat{J}_N(r', \omega), \quad \hat{B}(r, \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \nabla \times G(r, r', \omega) \cdot \hat{J}_N(r', \omega) \quad (5.29)$$

\hat{B} :n lauseke on saatu suoraan (5.20):n avulla. Jos oletettaisiin, ettei kentillä olisi häiriötermejä, ei SM-kentän ODY:n jäisi yhtään lähdetermiä ulkoisten varausten puuttuessa. Niinpä esim. tyhjiössä saataisiin ratkaisuksi triviaalisti nolla molemmille kentille. Nyt kuitenkin kenttien kommutointiehto $[\hat{E}(r, t), \hat{B}(r', t)] = -\frac{i\hbar}{\epsilon_0} I \nabla \times \delta(r - r')$ ei olisi voimassa, vaan kommutaattori antaisi aina nollan. Siispä häiriöosat on pakko lisätä lähteiksi.

Ulkoisten varauslähteiden lisääminen ei muuta tilannetta. Nyt vain Greenin funktio saa eksponentiaalisia vaimennustermejä, jotka seuraavat suoraan permittiivisyyden ja permeabiliteetin dispersiivisyydestä (ks. kappale 1.2). Siten SM-kenttä lähestyy nollaa ajan funktiona, eli saataisiin kommutaattori $[\hat{E}(r, t), \hat{B}(r', t)]$ lähestymään nollaa, mikä ei voi pitää paikkansa. Absorptio siis pakottaa lisäämään yhtälöihin häiriöosat. Nämä häiriöoperaattorit toimivat lisälähteinä Greenin tensorin avulla saatavissa ratkaisuissa ja pitävät kenttäoperaattoreiden kommutointiehdot voimassa. Eräs tapa jakaa virtatiheysoperaattori komponentteihin on lähteä vapaan SM-kentän Maxwellin yhtälöistä ja ottaa SM-kentän lineaarinen vaste huomioon virtatiheydessä johtavuustensorin avulla kuten kappaleessa 3.4. Langevinvirtatiheysoperaattorin kommutointiehdoissa esiintyy johtavuustensorin reaalisosa:

$$[\hat{J}_N(r, \omega), \hat{J}_N^\dagger(r', \omega')] = \frac{\hbar\omega}{\pi} Q_R(r, r, \omega) \delta(\omega - \omega') \quad (5.30)$$

Etsimällä johtavuustensorin neliöjuuriesitys saadaan \hat{J}_N laskettua yksinkertaisemman tuhoamisoperaattorin avulla kaavasta $\hat{J}_N(r, \omega) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\pi}} \int_V d^3r' K(r, r', \omega) \cdot \hat{f}(r', \omega)$. Siijoittamalla aiemmin saatu \hat{Q} -operaattorin (kappaleessa 3.4 oli oletuksena johtavuustensorin paikallisuus) reaalisen ytimen arvon neliöjuuriesitys tähän yhtälöön saadaan

kaava:

$$\begin{aligned}
\hat{J}_N(r, \omega) &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\pi}} \int_V d^3r' (\sigma_l^{1/2}(\omega) \delta(r - r') \hat{f}(r', \omega) \pm \gamma^{1/2}(\omega) \nabla \times \delta(r - r') \times \hat{f}(r', \omega)) = \\
&= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\pi}} (\sqrt{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{I,r}(\omega)} \hat{f}_l(r, \omega) + \sqrt{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{I,r}(\omega)} \hat{f}_t(r, \omega) \pm i \frac{1}{\sqrt{\mu_0\omega}} \sqrt{\kappa_{I,r}(\omega)} \nabla \times \hat{f}_t(r, \omega))
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Viimeinen muoto saadaan sijoittamalla johtavuustensorin arvot yhtälöön ja huomamalla, että roottorilla operoiminen tuhoaisi vektorimuotoisen tuhoamisoperaattorin pitkittäisen osan. Poikittaisen ja pitkittäisen tuhoamisoperaattorin komponentit saadaan samaan tapaan kuin tavanomaisen kentän vastaavat komponentit (ks. kappale 1.3).

Tämä ratkaisu jakaa tuhoamisoperaattori eri komponentteihin ei ole ainoa mahdollinen, vaan se saadaan jaettua osiin myös muuntamalla pitkittäinen osa ja poikittainen osa uusiksi komponenteiksi unitaarisella muunnoksella. Usein käytettävä muoto jakaa tuhoamisoperaattorin sähköiseen ja magneettiseen osaan, niin että kyseiset vuorovaikutukset sisältyvät kokonaan omiin komponentteihinsa [24] seuraavasti:

$$\hat{J}_N = \hat{J}_{Ne} + \hat{J}_{Nm} \quad \hat{J}_{Ne} = i \sqrt{\frac{\hbar\varepsilon_0\varepsilon_{I,r}}{\pi}} \omega \hat{f}_e \quad \hat{J}_{Nm} = \mp i \nabla \times \sqrt{\frac{\hbar\mu_{I,r}}{\pi\mu_0|\mu_r|^2}} \hat{f}_m \tag{5.32}$$

Virtatiheysoperaattorin amplitudiosuus saadaan sisällytettyä johtavuustensorin neliöjuuriesitykseen ja kvanttimekaaninen osuus operaattoreihin $\hat{f}_{\lambda n}(r, \omega)$, jotka noudattavat samantapaisia kommutointiehtoja (tässä käytetään aaltolukuavaruuden operaattoreiden sijasta niiden Fourier-muunnoksia fysikaaliseen avaruuteen, n viittaa vektorimuotoisen operaattorin komponentteihin $n = 1, 2, 3$) kuin tuhoamisoperaattorit (5.11).

$$[\hat{f}_{\lambda n}(r, \omega), \hat{f}_{\lambda' n'}^\dagger(r', \omega')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \delta(\omega - \omega') \delta(r - r') \tag{5.33}$$

$$[\hat{f}_{\lambda n}(r, \omega), \hat{f}_{\lambda' n'}(r', \omega')] = 0 \tag{5.34}$$

Tämä vastaisi vuorovaikutuksen jakamista kahteen toisistaan riippumattoman syste-

min kesken (magneettinen ja sähköinen väliaineen osa). Esim. mikroskooppinen malli, jossa molempia vuorovaikuttavia väliaineen systeemejä kuvataan harmonisilla värähtelijöillä, vastaisi Langevin-virtaoperaattorin erottamista toistensa kanssa kommutoiiviin magneettiseen ja sähköiseen osaan (ks. kappale 5.3).

Sähkökentän Greenin tensori on miltei sama kuin yhtälössä (1.21) - ainoastaan sähkökentän antavassa integraaliesityksessä lähdetermi on korvattu virtatiheysoperaattorilla. Koska kenttäoperaattorit ovat ”vektorimuotoisia” ja Greenin funktiot ovat matriiseja, tulee myös operaattoreiden \hat{f} olla vektorimuotoisia. Niillä on kullakin kolme komponenttia eli ne voitaisiin kirjoittaa muodossa $\hat{f}_\lambda = \hat{f}_{\lambda k} e_k$. Bosoniset moodiope-
raattorit kuvaavat nyt yhdistetyn systeemin (= väliaineen ” λ :s osa” + SM-kenttä) tiloja. Niinpä operaattoreita vastaavat tyhjiötilat $|0\rangle$ kuuluvat nyt kahden Hilbertin avaruuden tensorituloon $\mathbb{H}_{EM} \otimes \mathbb{H}_{mat,\lambda}$. Kyseinen mallinnettu ”hiukkanen” on nyt fotonin sijasta polaritoni, joka perii fotonin bosonimaisen käytöksen. Sen luomis- ja tuhoamisoperaattorit saataisiin alkuperäisen systeemin eri osien operaattorien lineaarikombinaatioina (ks. 5.3). Alkuperäinen systeemi (SM-kenttä + väliaineen magneettinen osa + väliaineen sähköinen osa) voidaan mallintaa kahdella polaritonilla, joista toinen sisältää sähköisen vuorovaikutusosan ja toinen magneettisen vuorovaikutuksen. Vuorovaikutus jakautuu ”tasaisesti” näiden osien kesken, eli molemmilla polaritoneilla on sama tilajakauma. Edelleen polarisoituma- ja magnetoitumaoperaattorit saadaan ilmaistua niiden avulla muodossa:

$$\hat{P}_N = -\sqrt{\frac{\hbar\varepsilon_I}{\pi}} \hat{f}_e \quad \hat{M}_N = \mp i \sqrt{\frac{\hbar\mu_I}{\pi|\mu|^2}} \hat{f}_m \quad (5.35)$$

Näille operaattoreille voitaisiin nyt laskea kommutointiehdot suoraan sijoittamalla lasku- ja nosto-operaattorien vastaavat ehdot yhtälöihin (5.33), nyt eteen saataisiin kertoimiksi SM-vasteiden imaginaariosista riippuvat tekijät.

Näin saadut esitykset voidaan sijoittaa häiriövirtatiheyden lausekkeeseen (5.27),

jolloin sähkökentän ja magneettivuon tiheyden esitykset jakautuvat kahteen osaan:

$$\begin{aligned}\hat{E}(r, \omega) &= \sum_{\lambda=m,e} \int_V d^3r' G_\lambda(r, r', \omega) \hat{f}_\lambda(r', \omega) = \\ &= \frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2} \int_V d^3r' G(r, r', \omega) \hat{P}_N(r', \omega) - i\mu_0 \omega \int_V d^3r' [G(r, r', \omega) \times \nabla'] \hat{M}_N(r', \omega)\end{aligned}\quad (5.36)$$

$$\begin{aligned}\hat{B}(r, \omega) &= \frac{1}{i\omega} \sum_{\lambda=m,e} \int_V d^3r' \nabla \times G_\lambda(r, r', \omega) \hat{f}_\lambda(r', \omega) = \\ &= i\mu_0 \omega \int_V d^3r' [\nabla \times G(r, r', \omega)] \hat{P}_N(r', \omega) - \mu_0 \int_V d^3r' [\nabla \times G(r, r', \omega) \times \nabla'] \hat{M}_N(r', \omega)\end{aligned}\quad (5.37)$$

$$G_e(r, r', \omega) = i\omega^2 \mu_0 \sqrt{\frac{\hbar \varepsilon_I(r, \omega)}{\pi}} G(r, r', \omega) \quad (5.38)$$

$$G_m(r, r', \omega) = i\mu_0 \omega \sqrt{\frac{\hbar \mu_I(r, \omega)}{\pi |\mu(r, \omega)|^2}} \nabla' \times G(r, r', \omega) \quad (5.39)$$

Jälkimmäisen Greenin funktion roottori saadaan käyttämällä tulon derivointisääntöä, yleistettyä Stokesin teoreemaa ja vaatimalla ratkaisun fysikaalisuutta (pintaintegraalitermi häviää, kun $V \rightarrow \infty$). $G(r', r, \omega)$ on taas klassisen tapauksen Greenin funktio. Jos käytettäisiin ei-skaalattuja klassisia Greenin funktioita, jouduttaisiin ottamaan huomioon johtavuustensorin neliöjuuren esitys kaavan (5.35) mukaan kuten artikkelissa [25], jossa tosin ei ole magneettista vastetta. Uusien Greenin funktioiden $G_{e,m}$ avulla voidaan kappaleen A yhtälö (A.18) lausua muodossa:

$$\frac{\hbar \mu_0 \omega^2}{\pi} \text{Im}[G(r, r', \omega)] = \int_V d^3s \sum_{\lambda=e,m} G_\lambda(r, s, \omega) \cdot G_\lambda^{*T}(r', s, \omega) \quad (5.40)$$

Jokainen kvanttielektrodynamiikan operaattori \hat{O} saadaan nyt laskettua häiriöoperaattorien ja Greenin funktioiden avulla suoraan sijoittamalla sähkökentän ja magneetti-

vuon tiheyden operaattorit \hat{O} :n antavaan Maxwellin yhtälöön.

Systemin suureiden operaattoreiden \hat{O} aikakehitykseltä vaaditaan kvanttimekaniikan yhtälöä:

$$\partial_t \hat{O} = i\hbar\omega \hat{O} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}]$$

Vaativalla tämä yhtälö häiriövirtatiheysoperaattorille \hat{J}_N huomataan, että tämän toteuttavan Hamiltonin operaattorin tulee olla muotoa:

$$\hat{H} = \sum_{\lambda} \int_0^{\infty} d\omega \int_V d^3r \hbar\omega \hat{f}_{\lambda}^{\dagger}(r, \omega) \hat{f}_{\lambda}(r, \omega) \quad (5.41)$$

Tämä esitys on sama kuin kvanttimekaanisella lähestymistavalla saatu Hamiltonin operaattori (ks. kappale 5.3), vaikka lähtökohtana ovat makroskooppisen kvanttielektrodynamiikan fenomenologiset yhtälöt, ja varsinainen kvantittuminen on jätetty määrittelemättä. Operaattoreiden kvantittumisen on vain oletettu muistuttavan vektoripotentiaalin kvantittumista, ja sen muoto määräytyy yleisistä kvanttimekaniikan ehdoista; kommutointiehdoista ja operaattorin aikakehityksestä.

Kaikki kenttäoperaattoreiden \hat{A} ajasta riippuvat esitykset saadaan Fourier-muunnoksella:

$$\hat{A}(r, t) = \int_0^{\infty} d\omega \hat{A}(r, \omega) e^{-i\omega t} + \int_0^{\infty} d\omega \hat{A}^{\dagger}(r, \omega) e^{i\omega t} \quad (5.42)$$

Tässä Fourier-muunnoksen integrointi on siis vain jaettu kahteen osaan. Tämä muistuttaa hyvin paljon sähkökentän kvantittumisen yhtälöä (5.17).

Sähkömagneettinen voima voidaan laskea aivan kuten klassisessa elektrodynamiikassa (ks. kappale 1.4), nyt vain kaikki kentät korvautuvat operaattorimuotoisilla esityksillä. Lasketaan ensin kaikkiin virtoihin ja varauksiin perustuva voimatiheysoperaattori, jonka esitys on kaavan (1.44) mukainen:

$$\hat{f}(r, t) = \hat{\rho}_e(r, t) \hat{E}(r, t) + \hat{J}(r, t) \times \hat{B}(r, t) = \nabla \cdot \hat{T}_{EB}(r, r, t) - \partial_t(\epsilon_0 \hat{E}(r, t) \times \hat{B}(r, t)) \quad (5.43)$$

Alaindeksi e on laitettu erottamaan varaustiheyden operaattoriesitys tilaoperaatto-

rista $\hat{\rho}$. Mikäli kenttä on termodynaamisessa tasapainossa, eli se ei vaihda energiaa ympäristön kanssa, pätee $\partial_t(\varepsilon_0\hat{E}(r,t) \times \hat{B}(r,t)) = 0$ ja voima saadaan suoraan jännitystensorioperaattorin avulla. Jännitystensorioperaattori saadaan yleisesti kaavalla:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{EB}(r,r',t) = & \varepsilon_0\hat{E}(r,t) \otimes \hat{E}(r',t) + \mu_0^{-1}\hat{B}(r,t) \otimes \hat{B}(r',t) + \\ & -\frac{I}{2} \cdot Tr[\varepsilon_0\hat{E}(r,t) \otimes \hat{E}(r',t) + \mu_0^{-1}\hat{B}(r,t) \otimes \hat{B}(r',t)] \end{aligned} \quad (5.44)$$

Symboli \otimes ei tietystikään viittaa eri Hilbertin avaruuksien tensorituloon, vaan kyseessä on yksinkertainen tulo $(A \otimes B)_{ij} = A_i B_j$. Tässä jälki tarkoittaa siten 3×3 -matriisien $\varepsilon_0\hat{E}(r,t) \otimes \hat{E}(r',t)$ ja $\mu_0^{-1}\hat{B}(r,t) \otimes \hat{B}(r',t)$ diagonaalelementtien summaa. Puhtaan SM-kentän tulkinnan mukaisen jännitystensorioperaattorin $\hat{T}_{EB}(r,r',t)$ keskiarvo tyhjiössä saadaan kaavalla:

$$T_{EB}(r,r',t) = \langle 0 | \hat{T}_{EB}(r,r',t) | 0 \rangle = S_{EB}(r,r',t) - \frac{I}{2} \cdot Tr[S_{EB}(r,r',t)] \quad (5.45)$$

Tässä $S_{EB}(r,r')$ on määritelty kaavalla:

$$S_{EB}(r,r',t) = \langle 0 | (\varepsilon_0\hat{E}(r,t) \otimes \hat{E}(r',t) + \mu_0^{-1}\hat{B}(r,t) \otimes \hat{B}(r',t)) | 0 \rangle \quad (5.46)$$

Yhtälöissä kenttien operaattori ja niiden adjungoidut operaattorit on otettu eri koordinaattien arvoilla, sillä laskettaessa jännitystensorin arvoja jouduttaisiin muuten usein ottamaan äärettömiä arvoja. Siten raja-arvokäsittely $r' \rightarrow r$ on yleensä välttämätön.

Sijoitettaessa kaavan (5.42) kaltaiset esitykset sähkökenttäoperaattoreiden paikalle kaavassa (5.47) voidaan integrointi taajuuden yli ottaa ulos ja hyödyntää bosonisten kenttäoperaattoreiden kommutointiehtoja. Jokaisen keskiarvon $\langle 0 | (\hat{E}(r,t) \otimes \hat{E}(r',t)) | 0 \rangle$ esitys hajoaa nyt neljäksi termiksi (taajuus- ja paikkariippuvuudet sulku-

jen sisällä on jätetty merkitsemättä):

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{E}(r, t) \otimes \hat{E}(r', t)|0 \rangle = & \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\omega' \langle 0|(\hat{E}^\dagger \otimes \hat{E}'^\dagger e^{-it(-\omega-\omega')} + \\ & \hat{E} \otimes \hat{E}' e^{-it(\omega+\omega')} + \hat{E} \otimes \hat{E}'^\dagger e^{-it(\omega-\omega')} + \hat{E}^\dagger \otimes \hat{E}' e^{-it(-\omega+\omega')})|0 \rangle \end{aligned} \quad (5.47)$$

Termeistä ainoastaan $\langle 0|(\hat{E}(r, \omega) \otimes \hat{E}^\dagger(r', \omega'))|0 \rangle$ (kolmas) eroaa nolasta ja sitä arvioitaessa voidaan hyödyntää liitteen A analyysiä Greenin matriiseille sekä kommutointiehtoja (5.33), jolloin saadaan:

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{E}(r, \omega) \otimes \hat{E}^\dagger(r', \omega')|0 \rangle_{ij} = \\ \sum_{\lambda, \lambda'} \int_V d^3s \int_V d^3s' \langle 0|G_{\lambda, il}(r, s, \omega) \hat{f}_{\lambda, l}(s, \omega) \hat{f}_{\lambda', k}^\dagger(s', \omega') G_{\lambda', kj}^{*T}(r', s', \omega')|0 \rangle \end{aligned} \quad (5.48)$$

Vain moodioperaattorit operoivat tyhjiötilaan $|0 \rangle$, joten voidaan tarkastella suoraan termiä $\langle 0|\hat{f}_{\lambda l}(s, \omega) \hat{f}_{\lambda' k'}^\dagger(s', \omega')|0 \rangle$. Kommutointisääntöjen avulla saadaan tulos

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{f}_{\lambda l}(s, \omega) \hat{f}_{\lambda' k'}^\dagger(s', \omega')|0 \rangle = & \langle 0|[\hat{f}_{\lambda l}(s, \omega), \hat{f}_{\lambda' k'}^\dagger(s', \omega')]|0 \rangle - \\ & \langle 0|\hat{f}_{\lambda l}^\dagger(s, \omega) \hat{f}_{\lambda' k'}(s', \omega')|0 \rangle = \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{kl} \delta(\omega - \omega') \delta(s - s') \end{aligned} \quad (5.49)$$

Sijoitettaessa tämä tulos alkuperäiseen kaavaan saadaan yhtälö:

$$\begin{aligned} \langle 0|(\hat{E}(r, \omega) \otimes \hat{E}^\dagger(r', \omega'))|0 \rangle_{ij} = & \int_V d^3s \sum_\lambda G_{\lambda il}(r, s, \omega) G_{\lambda lj}^{*T}(r', s, \omega) \delta(\omega - \omega') = \\ & \frac{\hbar \mu_0 \omega^2}{\pi} \text{Im}[G_{ij}(r, r', \omega)] \end{aligned} \quad (5.50)$$

Viimeinen muoto saadaan kaavasta (A.18). Fourier-muunnos pakottaa taajuudet ω, ω' samoiksi, ja ainoan jäljelle jäävän termin eksponenttitekijästä $e^{-it(\omega-\omega')}$ tulee yksi. Nyt aikaa ei esiinny yhtälöissä lainkaan; voimatiheysoperaattorin odotusarvo on vakio. Tämä ei ole yllättävää, sillä aiemmin jo oletettiin, ettei SM-kentän ja ympäristön välillä ole (netto)energian vaihtoa. Tämän takia monesti asetetaan aika jo valmiik-

si nolaksi, ja merkitään kaikkia kenttäoperaattoreita tyyliin $\hat{A}(r) = \hat{A}(r, t = 0) = \int_0^\infty d\omega \hat{A}(r, \omega) + \int_0^\infty d\omega \hat{A}^\dagger(r, \omega)$. Jatkossa t :n jättäminen pois muuttujista viittaa tähän tulkintaan.

Termille $\langle 0 | \hat{B}(r, \omega) \otimes \hat{B}^\dagger(r', \omega') | 0 \rangle_{ij}$ saadaan samantapainen esitys. Magneettivuon tiheysoperaattori lasketaan sähkökentän operaattorin Greenin funktion esityksestä otamalla siitä roottori ja jakamalla se $i\omega$:lla. Roottori voidaan esittää matriisimuodossa kappaleen 1.1 kaavan (1.23) mukaan, jolloin saadaan B :n adjungoidulle operaattorille esitys:

$$\begin{aligned} \hat{B}_j^\dagger(r', \omega') &= \frac{1}{i\omega'} \sum_\lambda \int_V d^3 s' (\overrightarrow{R}(r')) \cdot G^*(r', s', \omega')_{jl} \hat{f}_{\lambda'l}^\dagger(s', \omega') = \\ &= \frac{1}{i\omega'} \sum_{\lambda'} G_{\lambda'kl}^{*T}(r', s', \omega') \cdot \overleftarrow{R}_{lj}(r') \hat{f}_{\lambda'l}^\dagger(s', \omega') \end{aligned} \quad (5.51)$$

Kirjoittamalla itse \hat{B} -operaattori samassa muodossa ja hyödyntämällä kommutointiehtoja kuten sähkökentän tapauksessa saadaan tulos:

$$\begin{aligned} &\langle 0 | \hat{B}(r, \omega) \otimes \hat{B}^\dagger(r', \omega') | 0 \rangle_{ij} = \\ &= \frac{-1}{\omega^2} \overrightarrow{R}_{in}(r) \sum_\lambda \int_V d^3 s G_{\lambda nk}(r, s, \omega) G_{\lambda kl}^{*T}(r', s, \omega) \overleftarrow{R}_{lj}(r') \delta(\omega - \omega') \\ &= -\frac{\hbar\mu_0}{\omega^2} (\nabla \times \text{Im}(G(r, r', \omega)) \times \overleftarrow{\nabla}')_{ij} \delta(\omega - \omega') \end{aligned} \quad (5.52)$$

Yhdistämällä tulokset saadaan siis S_{EB} :n odotusarvo ilmaistua pelkän Greenin matriisin avulla.

$$S_{EB}(r, r') = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \left[\frac{\omega^2}{c^2} \text{Im}(G(r, r', \omega)) - \nabla \times \text{Im}(G(r, r', \omega)) \times \overleftarrow{\nabla}' \right] \quad (5.53)$$

$T_{EB}(r, r')$ saadaan sijoittamalla yllä oleva lauseke kaavaan:

$$\begin{aligned}
T_{EB}(r, r') &= S_{EB}(r, r') - \frac{I}{2} Tr[S_{EB}(r, r')] = \\
&\frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \left(\frac{\omega^2}{c^2} Im(G(r, r', \omega)) - \nabla \times Im(G(r, r', \omega)) \times \overleftarrow{\nabla}' - \right. \\
\frac{I}{2} Tr \left[\frac{\omega^2}{c^2} Im(G(r, r', \omega)) - \nabla \times Im(G(r, r', \omega)) \times \overleftarrow{\nabla}' \right] &= \int_0^\infty d\omega \langle 0 | \hat{T}_{EB}(r, r', \omega) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Greenin tensori perii SM-vasteiden kausaalisuudesta johtuvat ominaisuudet $\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon(-\omega^*)$ ja $\mu^*(\omega) = \mu(-\omega^*)$. Aivan kuten SM-vasteet on G :n oltava analyyttinen taaajuuden ylemmässä puolitasossa. Nyt voidaan integroida vastapäivään ensin positiivista reaaliakselia pitkin 0:sta R :iin, sitten neljännesympyrää $Re^{i\theta}$ pitkin väliä $\theta \in [0, \pi/2]$ ja lopulta pos. imaginaariakselia pitkin väliä $[iR, 0]$. Annetaan R :n kasvaa äärettömyyteen, jolloin G :n on lähestyttävä nollaa taaajuuden neliötä nopeammin, eli tämä osa integraalista lähestyy nollaa. G :n analyyttisyydestä (ei napoja integrointipolun sisällä) ja Cauchyn lauseesta seuraten voidaan reaaliakselin integrointi korvata integroinnilla imaginaariakselia pitkin. Lisäksi positiivisella imaginaariakselilla G :n on oltava reaalinen (A.13), joten saadaan tulos:

$$\begin{aligned}
T_{EB}(r, r') &= -\frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \left(\frac{\omega^2}{c^2} G(r, r', i\omega) + \nabla \times G(r, r', i\omega) \times \overleftarrow{\nabla}' - \right. \\
&\left. \frac{I}{2} Tr \left[\frac{\omega^2}{c^2} G(r, r', i\omega) + \nabla \times G(r, r', i\omega) \times \overleftarrow{\nabla}' \right] \right)
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Jos tilana $\hat{\rho}$ on jokin muu kuin tyhjiötila $\hat{\rho} = \hat{P}[|0\rangle]$, joudutaan ottamaan jälki operaattoreiden ja tilan yhdistetyn operaattorin yli kaavan $\langle \hat{A}(r, \omega) \rangle = Tr[\hat{A}(r, \omega)\hat{\rho}_\omega] = \sum_{n_\omega} p_{n_\omega} \langle n_\omega | \hat{A}(r, \omega) | n_\omega \rangle$ mukaan. Nyt pitää laskea useamman termin arvo yhtälössä (5.47). Sekä kolmas että neljäs termi antavat nollostapoikkeavan tuloksen, ja neljättä termiä $\langle \hat{E}^\dagger \otimes \hat{E}' \rangle = Tr[\hat{E}^\dagger(r, \omega) \otimes \hat{E}(r', \omega') \hat{\rho}_\omega]$ laskettaessa käytetään yhdistetyn ope-

raattorin $\hat{f}_\lambda^\dagger(r, \omega)\hat{f}_{\lambda'}(r', \omega')$ odotusarvoa:

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{f}_\lambda^\dagger(s, \omega)\hat{f}_{\lambda'}(s', \omega') \rangle_{\hat{\rho}_\omega} = Tr_\omega[\hat{f}_\lambda^\dagger(s, \omega)\hat{f}_{\lambda'}(s', \omega')\hat{\rho}_\omega] = \\
& \delta_{\lambda, \lambda'} \sum_{n, m} p_n(\omega) \langle m | \hat{f}_\lambda^\dagger(s, \omega)\hat{f}_{\lambda'}(s', \omega') | n \rangle \langle n | m \rangle = \\
& \dots \sum_{n_\omega \geq 1} p_n(\omega) \langle n - 1 | n_\omega | n - 1 \rangle \delta(s - s')\delta(\omega - \omega')\delta_{\lambda, \lambda'} = \\
& \bar{n}_\omega \delta(s - s')\delta(\omega - \omega')\delta_{\lambda, \lambda'} \quad (5.56)
\end{aligned}$$

Samoin kuin kolmannen termin laskemisessa, eksponenttitekijän $e^{-it(-\omega+\omega')}$ yli integroitaessa kommutointiehtojen deltafunktion $\delta(\omega - \omega')$ pakottaa taajuudet samoiksi ja jäljelle jää vain tekijä yksi sekä taajuuden ω yli integrointi. Samaan tapaan kuin odotusarvolle $\langle \hat{E} \otimes \hat{E}'^\dagger \rangle$ saadaan suoralla sijoituksella tulos $Tr[\hat{E}^\dagger(r, \omega) \otimes \hat{E}(r', \omega')\hat{\rho}_\omega] = \frac{\hbar\mu_0\omega^2}{\pi} Im[G(r, r', \omega)]\bar{n}_\omega$. Yhdistämällä kolmas ja neljäs termi saadaan kaava:

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{E}(r, t) \otimes \hat{E}(r', t) \rangle = \int_0^\infty d\omega (\langle \hat{E}(r, \omega) \otimes \hat{E}^\dagger(r', \omega) \rangle + \\
& \langle \hat{E}^\dagger(r, \omega) \otimes \hat{E}(r', \omega) \rangle) = \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\mu_0\omega^2}{\pi} Im[G(r, r', \omega)](2\bar{n}_\omega + 1) \quad (5.57)
\end{aligned}$$

Magneettivuon tiheyden neliön odotusarvot muuntuvat samaan tapaan, taajuusintegrandiin tulee tällöinkin kerroin $2\bar{n}_\omega + 1$, eli saadaan kaava:

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{B}(r, t) \otimes \hat{B}(r', t) \rangle = \int_0^\infty d\omega (\langle \hat{B}(r, \omega) \otimes \hat{B}^\dagger(r', \omega) \rangle + \\
& \langle \hat{B}^\dagger(r, \omega) \otimes \hat{B}(r', \omega) \rangle) = - \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\mu_0}{\pi} \nabla \times Im[G(r, r', \omega)] \times \overleftarrow{\nabla}' (2\bar{n}_\omega + 1) \quad (5.58)
\end{aligned}$$

Kaiken kaikkiaan jännitystensoriin tulee siis vain ylimääräinen kerroin taajuuden integroinnin sisään yleisen tilan tapauksessa; eli tulokset muuntuvat kaavan $\langle \hat{T}_{EB}(r, r') \rangle = \int_0^\infty d\omega \langle 0 | \hat{T}_{EB}(r, r', \omega) | 0 \rangle (2\bar{n}_\omega + 1)$ mukaisesti.

Casimirin voiman tapauksessa riittää tutkia ideaalista tyhjiötilaa $\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|$ ($T = 0K$) ja realistista termisestä tilaa. Tilat on esitetty yhden moodin ω tapauksessa,

oikea tila yleistyy eri moodien tensoritulona ja edelleen raja-arvokäsittelyllä jatkuvana esityksenä; ks. kappale 5.1. Termisen tilan tilaoperaattori on $\hat{\rho}_{T,\omega} = \sum_n p_n(\omega) \hat{P}[|n\rangle]$, jolle $\bar{n}_\omega = \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega/(kT)}}$ on fotonimäärän keskiarvo. Edellisen käsittelyn nojalla saadaan sekä sähkökentän että magneettivuon tiheyden neliön operaattorin (5.47) odotusarvoksi siis tyhjiön odotusarvo niin, että taajuuden integroinnin sisään tulee kerroin $1 + 2\bar{n}_\omega = \coth(\frac{\hbar\omega}{2kT})$, eli otettaessa integraali saadaan integrandi muodossa $\coth(\frac{\hbar\omega}{2kT})$ kertaa Greenin matriisi $G(r, r', \omega)$. Koska Greenin matriisi on analyttinen ylemmässä puolitasossa, mutta funktiolla $\coth(\frac{\hbar\omega}{2kT})$ on navat pisteissä $z_n = 2ikTn\pi/\hbar$, ovat integrandin navat samat pisteet. Siten residylaskentaa hyväksi käyttäen integrointi voidaan korvata summalla näiden ns. Matsubaran taajuuksien yli: $\int_0^\infty d\omega f(\omega) \longrightarrow \frac{\pi 2kT}{\hbar} (\sum_{n=0}^\infty f(z_n) - \frac{1}{2}f(0))$.

Jos lasketaan vain vapaan virtatiheys- ja varaustiheysoperaattorin aiheuttama voimatiheys (1.47), saadaan yhtälö:

$$\hat{f}_f = \partial_t(\hat{D} \times \hat{B}) + \nabla \cdot \hat{T}_{DB} = \hat{\rho}_{e,f} \hat{E} + \hat{J}_f \times \hat{B} \quad (5.59)$$

Aivan kuten kokonaisvoimatiheyden tapauksessa, oletetaan termodynaaminen tasapainotila ($\partial_t(\hat{D} \times \hat{B}) = 0$), jolloin voimatiheys saadaan suoraan jännitystensorin \hat{T}_{DB} avulla. Tämä nk. Minkowskin jännitystensori saadaan kaavalla

$$\begin{aligned} \hat{T}_{DB}(r, r', t) &= \hat{D}(r, t) \otimes \hat{E}(r', t) + \hat{H}(r, t) \otimes \hat{B}(r', t) + \\ &\quad - \frac{I}{2} \cdot \text{Tr}[\hat{D}(r, t) \otimes \hat{E}(r', t) + \hat{H}(r, t) \otimes \hat{B}(r', t)] \end{aligned} \quad (5.60)$$

\hat{T}_{DB} :n odotusarvo tyhjiötilassa saadaan vapaan SM-kentän jännitystensorin tapaan laskettua määrittelemällä ensin $S_{DB}(r, r', t)$ kaavalla:

$$S_{DB}(r, r', t) = \langle 0 | (\hat{D}(r, t) \otimes \hat{E}(r', t) + \hat{H}(r, t) \otimes \hat{B}(r', t)) | 0 \rangle \quad (5.61)$$

Tämän avulla saadaan edelleen laskettua koko jännitystensorin odotusarvo yhtälöstä:

$$T_{DB}(r, r', t) = \langle 0 | \hat{T}_{DB}(r, r', t) | 0 \rangle = S_{DB}(r, r', t) - \frac{I}{2} \cdot \text{Tr}[S_{DB}(r, r', t)] \quad (5.62)$$

Koska systeemi on termodynaamisessa tasapainossa, voidaan riippuvuus ajasta jättää pois argumenteista. Minkowskin jännitystensorille tyhjiössä pitää siis laskea odotusarvot $\langle 0|\hat{E}(r)\otimes\hat{D}(r')|0\rangle$ ja $\langle 0|\hat{B}(r)\otimes\hat{H}(r')|0\rangle$. Kustakin termistä muodostetaan keskiarvot Fourier-muunnoksen vastaavia termejä käyttäen. Analogisesti jännitystensorin \hat{T}_{EB} kanssa saadaan tulos tyhjötilassa vain yhtä termiä käyttäen:

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{E}(r)\otimes\hat{D}(r')|0\rangle &= \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\omega' \langle 0|\hat{E}(r,\omega)\otimes\hat{D}^\dagger(r',\omega')|0\rangle = \\ &= \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\omega' [\varepsilon^*(r',\omega') \langle 0|\hat{E}(r,\omega)\otimes\hat{E}^\dagger(r',\omega')|0\rangle + \langle 0|\hat{E}(r,\omega)\otimes\hat{P}_N^\dagger(r',\omega')|0\rangle] \end{aligned} \quad (5.63)$$

Tensorin sähköinen osa saadaan hyödyntämällä \hat{T}_{EB} :n tulosta edellä ja häiriöpolarisointuman kommutointiehtoja. Nyt saadaan yhtälö:

$\varepsilon^*(r',\omega') \langle 0|\hat{E}(r,\omega)\otimes\hat{E}^\dagger(r',\omega')|0\rangle = \varepsilon^*(r',\omega') \frac{\hbar\mu_0\omega^2}{\pi} \text{Im}[G(r,r',\omega)]$. Lisäksi saadaan tulos $\langle 0|\hat{E}(r,\omega)\otimes\hat{P}_N^\dagger(r',\omega')|0\rangle = \frac{\hbar\omega^2}{\varepsilon_0 c^2 \pi} G(r,r',\omega) \varepsilon_{r,I}(r',\omega) \delta(\omega-\omega')$; tulos seuraa kommutointiehtoista häiriövirtaoperaattorin eri komponentteja vastaavilla luomis- ja tuhoamisoperaattoreille, jolloin pitää laskea vain odotusarvo $\langle 0|\hat{P}_N(r,\omega)\otimes\hat{P}_N(r',\omega')|0\rangle$ ja kertoa tulos Greenin tensorilla. Termien summasta otetaan huomioon vain reaaliosa laskettaessa fysikaalista jännitystensoria, niinpä yhdistämällä tekijät saadaan lauseke:

$$\begin{aligned} \text{Re}[\langle 0|\hat{E}(r)\otimes\hat{D}(r')|0\rangle] &= \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\omega^2}{\varepsilon_0 c^2 \pi} [G_R(r,r',\omega) \varepsilon_{r,I}(r',\omega) + G_I(r,r',\omega) \varepsilon_{r,R}(r',\omega)] = \\ &= \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\omega^2}{\varepsilon_0 c^2 \pi} \text{Im}[\varepsilon_r(r',\omega) G(r,r',\omega)] \end{aligned} \quad (5.64)$$

Termi $\langle 0|\hat{B}(r)\otimes\hat{H}(r')|0\rangle$ saadaan samaan tapaan. Ensimmäinen osa on triviaalisti $\kappa^*(r',\omega') \langle 0|\hat{B}(r,\omega)\otimes\hat{B}^\dagger(r',\omega')|0\rangle = -\frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \nabla \times \text{Im}(G(r,r',\omega)) \times \overleftarrow{\nabla}'$. Toinen osa saadaan kommutointiehtojen avulla:

$$\langle 0|\hat{B}(r,\omega)\otimes\hat{M}_N(r',\omega')|0\rangle = \mu_0 \int_V d^3s [\nabla \times G(r,s,\omega) \times \nabla_s] \langle 0|\hat{M}_N(s,\omega)\otimes\hat{M}_N^\dagger(r',\omega')|0\rangle$$

$$= \mu_0 \frac{\hbar}{\pi} [\nabla \times G(r, r', \omega) \times \nabla'] \kappa_{I,r}(r', \omega) \delta(\omega - \omega')$$

Termi $\langle 0 | \hat{M}_N(s, \omega) \otimes \hat{M}_N^\dagger(r', \omega') | 0 \rangle = \frac{\hbar \mu_{I,r}(r', \omega)}{\pi |\mu_r(r', \omega)|^2} \delta(s - r') \delta(\omega - \omega')$ saadaan kommutointiehdoista. Ottamalla tuloksen reaaliosa pelkistyy summa yhtälöksi:

$$\begin{aligned} \text{Re}[\langle 0 | \hat{B}(r) \otimes \hat{H}(r') | 0 \rangle] &= \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar \mu_0}{\pi} [-\kappa_{R,r}(r', \omega') \text{Im}[\nabla \times G(r, r', \omega) \times \nabla'] \\ - \kappa_{I,r}(r', \omega') \text{Re}[\nabla \times G(r, r', \omega) \times \nabla']] &= - \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar \mu_0}{\pi} \text{Im}[\kappa_r(r', \omega') [\nabla \times G(r, r', \omega) \times \nabla']] \end{aligned} \quad (5.65)$$

Yhdistämällä tulokset saadaan Minkowskin jännitystensorin reaaliosaksi lopulta:

$$\begin{aligned} \text{Re} \langle 0 | \hat{T}_{DB}(r, r') | 0 \rangle &= \text{Re} \langle 0 | \hat{E}(r) \otimes \hat{D}(r') | 0 \rangle + \text{Re} \langle 0 | \hat{B}(r) \otimes \hat{H}(r') | 0 \rangle + \\ &- \frac{I}{2} \text{Tr}[\text{Re} \langle 0 | \hat{E}(r) \otimes \hat{D}(r') | 0 \rangle + \text{Re} \langle 0 | \hat{B}(r) \otimes \hat{H}(r') | 0 \rangle] = \\ &\int_0^\infty d\omega \frac{\hbar \omega^2}{\varepsilon_0 c^2 \pi} \text{Im}[\varepsilon_r(r', \omega) G(r, r', \omega)] - \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar \mu_0}{\pi} \text{Im}[\kappa_r(r', \omega) [\nabla \times G(r, r', \omega) \times \nabla']] + \\ &- \frac{I}{2} \text{Tr}[\int_0^\infty d\omega (\frac{\hbar \omega^2}{\varepsilon_0 c^2 \pi} \text{Im}[\varepsilon_r(r', \omega) G(r, r', \omega)] - \frac{\hbar \mu_0}{\pi} \text{Im}[\kappa_r(r', \omega) [\nabla \times G(r, r', \omega) \times \nabla']])] \end{aligned} \quad (5.66)$$

Nyt voidaan käyttää SM-kentän vastefunktioiden ja Greenin tensorin analyttisyyttä kokonaisvoiman laskennan tapaan vaihtamaan integrointi imaginaariakselille. Koska sekä permittiivisyys että permeabiliteetti ja Greenin tensori ovat reaalisia imaginaa-

riakselilla, pelkistyy tulos muotoon:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}[T_{DB}(r, r')] = & - \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\omega^2}{\varepsilon_0 c^2 \pi} \varepsilon_r(r', i\omega) G(r, r', i\omega) + \\
& - \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\mu_0}{\pi} \kappa_r(r', i\omega) [\nabla \times G(r, r', i\omega) \times \nabla'] + \frac{I}{2} \operatorname{Tr} \left[\int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\omega^2}{\varepsilon_0 c^2 \pi} \varepsilon_r(r', i\omega) G(r, r', i\omega) + \right. \\
& \left. + \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\mu_0}{\pi} \kappa_r(r', i\omega) [\nabla \times G(r, r', i\omega) \times \nabla'] \right]
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Termiselle tilalle saadaan samanlainen esitys sillä erotuksella, että taajuuden yli integrointi korvautuu summalla Matsubaran taajuuksien yli ja tällöin kerroinfunktio $\coth(z_n)(1 - \delta_{0n}/2)$ pitää ottaa huomioon summauksessa. Tulos saataisiin samaan tapaan kuin jännitystensorille T_{EB} .

5.3 Kvantittuminen vaikutusintegraalista laskettuna

SM-kentän ja väliaineen kvantittumisessa ei riitä huolehtia vain koordinaattioperaattorien kommutointiehdoista. Aiemmin mainitut kenttien kommutointiehdot (5.12) tulee myös ottaa huomioon. Tämä voi aiheuttaa ongelmia, mikäli systeemissä esiintyy absorptiota. Tällöin edellä käsitelty kvantittuminen (ks. 5.1) voi tuottaa virheellisen tuloksen. Jos kenttäoperaattoreiden amplitudiosa ratkaistaan dispersiivisessä tapauksessa (jolloin absorptiota täytyy esiintyä Kramers-Kronigin yhtälöiden nojalla), saavat kenttäoperaattoreiden amplitudiosat vaimentavan kertoimen. Tällöin tuhoamisoperaattorit toteuttavat oikeat kommutointiehdot, mutta itse kentät saavat vaimentavia termejä, jolloin niiden kommutointiehdot eivät ole enää voimassa.

Yksi tapa ratkaista ongelma on mallintaa väliainetta mikroskooppisesti harmonisina värähtelijöinä. Lähtökohtana on tällöin monimutkainen vaikutusintegraali, jossa yksittäisten systeemien lisäksi on vaadittavat vuorovaikutusosat. Tekemällä Legendren muunnos ratkaistaan tarvittavat kanoniset muuttujat, jolloin voidaan hakea kullekin systeemille omat luomis- ja tuhoamisoperaattorit. Saatu Hamiltonin funktionaali diagonalisoidaan alkuperäisten operaattorien avulla, ja näin saadaan esitettyä kaikki kentät

samojen koko systeemiä kuvaavien luomis- ja tuhoamisoperaattoreiden lineaariyhdistelminä.

Diagonalisointi tehdään etsimällä jokin alkuperäisten tuhoamisoperaattorien $\{\hat{a}_Z\}_Z$ lineaarikombinaatio. Tämä voidaan tehdä esim. Hopfield- tai Fano-menetelmällä. Diagonalisointi on usein tehtävä jatkuvana tai jatkuvan ja diskreetin yhdistelmänä, jolloin operoidaan jollain lineaarioperaattorilla alkuperäiseen operaattorijoukkoon. Diagonalisoinnilla päästään eroon Hamiltonin operaattorin vuorovaikutuselementeistä ja operaattori pelkistyy yksinkertaiseen diagonaaliseen muotoon:

$$\hat{H} = \sum_{\sigma} \int_V d^3r \int_0^{\infty} d\Omega \hbar \Omega (\hat{f}_{\sigma}^{\dagger}(r, \Omega) \hat{f}_{\sigma}(r, \Omega) + \frac{I}{2})$$

Diagonalisoidun tuhoamisoperaattorin aikakehitys saadaan helposti kommutaattorin avulla muodossa:

$$\partial_t \hat{f}_{\sigma}(r, \Omega) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{f}_{\sigma}(r, \Omega)] = \frac{i}{\hbar} \Omega \hat{f}_{\sigma}(r, \Omega) \quad (5.68)$$

Mikroskooppisesti väliaineen ja SM-kentän muodostamaa yhdistettyä systeemiä voitaisiin mallintaa Lagrangen funktionaalilla, jossa on vapaan SM-kentän L_{em} , väliainetta kuvaavien harmonisten värähtelijöiden L_{mat} ja nämä kytkevä vuorovaikuttava L_{int} . Tämän ongelma ratkaistiin ensin sähköisesti aktiivisille väliaineille [26]. Tässä systeemi koostuu kolmesta osasta: vapaasta SM-kentästä, väliaineen polarisoitumasta ja aineen ”lämpösäiliöstä”. Kahta jälkimmäistä systeemiä mallinnetaan harmonisella värähtelijällä. SM-kenttä vuorovaikuttaa polarisoituman kanssa ja polarisoituma vuorovaikuttaa ympäristön kanssa. SM-kenttä siis vaimentuu polarisoimalla ensin väliaineen ja luovuttamalla tämän energian sitten väliaineelle lämpönä. Klassiset Lagrangen tiheysfunktiot

muunnettuna aaltolukuavaruuteen (Fourier-muunnoksella) ovat muotoa:

$$\begin{aligned}
L_{em} &= \varepsilon_0 |E|^2 - \kappa_0 |B|^2, & L_{mat,e} &= \rho_e (|\partial_t X|^2 - \omega_0 |X|^2) \\
L_{res,e} &= \int_0^\infty d\Omega \rho_e (|\partial_t Y_\Omega|^2 - \Omega^2 |Y_\Omega|^2), & L_{int,e} &= -\alpha (A^* \partial_t X + A \partial_t X^* + ik(\phi^* X - \phi X^*)) \\
& & & - \int_0^\infty d\Omega V(\Omega) (X^* \partial_t Y_\Omega + X \partial_t Y_\Omega^*)
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Lagrangen funktio saadaan integroimalla näiden summa aaltolukuavaruuden yli ($L_{tot} = \int_{V'} L(k)$). Nyt on valittu symmetriasystistä (kentät on oletettu reaalisiksi) integrointialueeksi $V' = \{k \in \mathbb{R}^3 | k_3 \geq 0\}$, jolloin tiheysfunktiot ovat kaksinkertaisia normaaliin tapaukseen verrattuna. Polarisoitumaa kuvataan harmonisena oskillaattorina resonanssitaaajuudella ω_0 ja ρ_e mallintaa väliaineen polarisoituman ”tiheyttä”. Itse materiaalin lämpösäiliö on taas jatkuva harmoninen oskillaattori, jonka jokainen moodi on kytköksissä polarisoitumaan ja Ω on sen vuorovaikutustaaajuus. Vuorovaikutusosan neljä ensimmäistä termiä vastaavat kentän ja väliaineen polarisoituman välistä vuorovaikutusta, kun taas lopputermit kuvaavat vuorovaikutusta polarisoituman ja lämpösäiliön välillä. α on SM-kentän ja polarisoituman vuorovaikutuskerroin ja $V(\Omega)$ kuvaa lämpösäiliön ja polarisoituman vuorovaikutusta. Valitaan Coulombin mitta, jolloin Euler-Lagrangen liikeyhtälöt ottamalla voidaan skalaarikenttä korvata termillä $\frac{i\alpha k X}{\varepsilon_0 |k|^2}$.

Jokainen kenttää kuvaava muuttuja voidaan jakaa pitkittäiseen (suuntaan k) ja poikittaiseen osaan (k :ta vastaan kohtisuorassa), ks. kappale 1.3. Tällöin SM-kenttää ja sen vuorovaikutusta väliaineen kanssa kuvaava osa saadaan lähes kokonaan poikittaiseen Lagrangen tiheyteen, ja pitkittäiseen osaan jää pelkästään termejä polarisoitumaa ja lämpösäiliötä kuvaavasta systeemistä. Vaikka seuraavaksi ratkaistaan vain poikittainen osa, saataisiin pitkittäinen Hamiltonin operaattori muuttujineen samankaltaisella mutta lyhyemmällä käsittelyllä. Poikittainen osa voidaan edelleen jakaa kahteen riippumattomaan polarisaatiomoodiin $\sigma = s, p$, ja ottamalla näin saadusta Lagrangen tiheydestä Legendren muunnos, saadaan systeemin Hamiltonin tiheys. Käsittely on sa-

manlainen kuin kappaleessa 1.4. Jatkossa jätetään poikittaista osaa kuvaava alaindeksi t merkitsemättä. Uudet muuttujat saadaan osittaisderivaattojen $\Pi_{Z,\sigma} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t Z_\sigma^*)}$ avulla:

$$\begin{aligned}\Pi_{A,\sigma} &= \varepsilon_0 \partial_t A_\sigma, & \Pi_{X,\sigma} &= \rho_e \partial_t X_\sigma - \alpha A_\sigma, \\ \Pi_{Y_{\Omega},\sigma} &= \rho_e \partial_t Y_{\Omega,\sigma} - V(\Omega) X_\sigma\end{aligned}\quad (5.70)$$

Uusien muuttujien avulla saadaan seuraava (poikittainen) Hamiltonin tiheys:

$$\begin{aligned}H &= H_{em} + H_{mat} + H_{int} & H_{em} &= \sum_{\sigma} \left(\frac{|\Pi_{A,\sigma}|^2}{\varepsilon_0} + \varepsilon_0 c^2 K^2 |A_\sigma|^2 \right) \\ H_{mat} &= \sum_{\sigma} \left(\frac{|\Pi_{X,\sigma}|^2}{\rho_e} + \rho_e \Omega_0^2 |X_\sigma|^2 + \int_0^\infty d\Omega \left(\frac{|\Pi_{Y_{\Omega},\sigma}|^2}{\rho_e} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \rho_e \Omega^2 |Y_{\Omega,\sigma}|^2 + \frac{V(\Omega)}{\rho_e} (X_\sigma^* \Pi_{Y_{\Omega},\sigma} + X_\sigma \Pi_{Y_{\Omega},\sigma}^*) \right) \right), & H_{int} &= \sum_{\sigma} \frac{\alpha}{\rho_e} (A_\sigma^* \Pi_{X,\sigma} + A_\sigma \Pi_{X,\sigma}^*)\end{aligned}\quad (5.71)$$

Tässä $K = \sqrt{k^2 + \frac{\alpha^2}{\rho_e c^2 \varepsilon_0}}$, eli SM-kentän Hamiltonin tiheys sisältää nyt myös vuorovai-
kutuksen vakiotermin (L_{int} :n 3. ja 4. termi yhtälössä 5.69) polarisoitumaa kuvaavaan
systeemin kanssa. Edelleen määritellään uusi taajuus $\Omega_0^2 = \omega_0^2 + \int_0^\infty d\Omega \frac{V(\Omega)^2}{\rho_e^2}$ polarisoi-
tumakentälle.

Vaativalla Poissonin sulkuja vastaava kommutaattori noudattamaan samankaltai-
sia ehtoja kuin klassisessa mekaniikassa, saadaan systeemi muunnettua kvanttime-
kaaniseksi. Jokainen kenttä Z_σ muuntuu kenttäoperaattoriksi, jolle tulee päteä ehto
[$\hat{Z}_\sigma(k, t), \hat{\Pi}_{Z,\sigma'}^\dagger(k', t) = i\hbar \delta_{\sigma\sigma'} \delta(k - k')$]. Lämpösäiliön muuttujille saadaan ehtoon mu-
kaan vielä termi $\delta(\Omega - \Omega')$, sillä sen moodien tulee olla riippumattomia toisistaan.

Jokaiselle liikemäärä- ja paikkaoperaattorille määritellään lasku- ja nosto-operaattorit
niiden lineaariyhdistelminä:

$$\hat{a}_{Z,\sigma}(k, t) = N_Z(\omega_Z) \left(\hat{Z}_\sigma + \frac{i}{\omega_Z} \hat{\Pi}_{Z,\sigma} \right), \quad \hat{a}_{Z,\sigma}^\dagger(k, t) = N_Z(\omega_Z) \left(\hat{Z}_\sigma - \frac{i}{\omega_Z} \hat{\Pi}_{Z,\sigma} \right) \quad (5.72)$$

Tässä $N_Z(\omega_Z)$ on jokin systeemin karakteristisesta taajuudesta (esim. Ω_0) riippuva vakio. Lämpösäiliön operaattoreille saadaan lisäksi vuorovaikutustaaajuus Ω alaindeksiin. Nämä tuhoamis- ja luomisoperaattorit noudattavat samanlaisia kommutointiehtoja kuin vapaan kentän tapauksessa, ts. $[\hat{a}_{Z,\sigma}(k, t), \hat{a}_{Z,\sigma'}^\dagger(k', t)] = I\delta_{\sigma\sigma'}\delta(k - k')$ ja muut kommutaattorit nollija sekä viimeiselle systeemille tulee kertoimeksi myös $\delta(\Omega - \Omega')$.

Kokonaissysteemi muodostuu kolmen eri Hilbertin avaruuden tensoritulosta $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{em} \otimes \mathbb{H}_e \otimes \mathbb{H}_{res,e} = \mathbb{H}_{em} \otimes \mathbb{H}_{mat,e}$. Jälkimmäisen yhdistetyn Hilbertin avaruuden termi \mathbb{H}_{mat} on pelkän materiaalin Hilbertin avaruus, jonka Hamiltonin operaattori diagonalisoidaan ensiksi. Tarkasti ottaen pitäisi kustakin Hilbertin avaruudesta ottaa vielä numeroituva moodijako tensoritulolla ja tutkia rajatapausta, jossa diskreetti moodijako muuttuu jatkuvaksi.

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{em} &= \int_V d^3k \sum_{\sigma} \hbar K c \hat{a}_{A,\sigma}^\dagger(k) \hat{a}_{A,\sigma}(k), & \hat{H}_{mat} &= \int_V d^3k \sum_{\sigma} (\hbar \Omega_0 \hat{a}_{X,\sigma}^\dagger(k) \hat{a}_{X,\sigma}(k) + \\
& & & + \int_0^\infty d\Omega \hbar \Omega \hat{a}_{Y,\Omega,\sigma}^\dagger(k) \hat{a}_{Y,\Omega,\sigma}(k) + \\
& & & \frac{\hbar}{2} \int_0^\infty d\Omega W(\Omega) (\hat{a}_{X,\sigma}^\dagger(-k) + \hat{a}_{X,\sigma}(k)) (\hat{a}_{Y,\Omega,\sigma}^\dagger(-k) + \hat{a}_{Y,\Omega,\sigma}(k))) \\
\hat{H}_{int} &= \frac{i\hbar}{2} \int_V d^3k \sum_{\sigma} \Lambda(k) (\hat{a}_{A,\sigma}^\dagger(-k) + \hat{a}_{A,\sigma}(k)) (\hat{a}_{X,\sigma}^\dagger(-k) - \hat{a}_{X,\sigma}(k))
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Tässä pätee $W(\Omega) = \frac{V(\Omega)\sqrt{\Omega}}{\rho_e\sqrt{\Omega_0}}$ ja $\Lambda(k) = \sqrt{\frac{\Omega_0 a^2}{\rho_e c \varepsilon_0 K}}$. Tavanomaisesta käsittelystä poiketen vakiotermit $\frac{I}{2}$ integroinnin ja summauksen sisällä jätetään pois Hamiltonin operaattoreista. Materiaalia kuvaavien systeemien vuorovaikutukset on sisällytetty operaattoriin \hat{H}_{mat} ja varsinaisessa vuorovaikutustermissä on jäljellä vain SM-kentän ja polarisoi-tuman välinen vuorovaikutus.

Seuraavaksi diagonalisoidaan materiaalin Hamiltonin operaattori, eli etsitään jokin $\hat{a}_{X,\sigma}$:n ja $\hat{a}_{Y,\Omega,\sigma}$:n lineaarikombinaatio, jolla Hamiltonin operaattori pelkistyy muotoon $\hat{H}_{mat} = \int_V d^3k \sum_{\sigma} \int_0^\infty d\Omega \hbar \Omega \hat{c}_{\sigma,\Omega}^\dagger(k) \hat{c}_{\sigma,\Omega}(k)$. Näille uusille lasku- ja nosto-operaattoreille pätevät kommutointiehdot sekä yksinkertainen aikaderivaatta vapaan SM-kentän ta-

paan:

$$[\hat{c}_{\sigma,\Omega}(k), \hat{c}_{\sigma',\Omega'}^\dagger(k')] = I\delta_{\sigma\sigma'}\delta(k-k')\delta(\Omega-\Omega'), \quad \partial_t \hat{c}_{\sigma,\Omega}(k) = i\Omega \hat{c}_{\sigma,\Omega}(k) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{mat}, \hat{c}_{\sigma,\Omega}(k)]$$

Tällainen operaattori saadaan nyt Fanon tekniikalla, eli etsimällä kertoimet α_i, β_i $i = 1, 2$, joille pätee seuraava yhtälö:

$$\begin{aligned} \hat{c}_\sigma(k, \Omega) &= \alpha_{0,\sigma}(\Omega)\hat{a}_{X,\sigma}(k) + \beta_{0,\sigma}(\Omega)\hat{a}_{X,\sigma}^\dagger(-k) + \\ &+ \int_0^\infty d\Omega' (\alpha_{1,\sigma}(\Omega, \Omega')\hat{a}_{Y,\Omega',\sigma}(k) + \beta_{1,\sigma}(\Omega, \Omega')\hat{a}_{Y,\Omega',\sigma}^\dagger(-k)) \end{aligned} \quad (5.74)$$

Muunnoksen tulee olla myös kääntyvä, joten alkuperäiset operaattorit saadaan nyt uuden operaattorin avulla. Sijoittamalla tulokset koko systeemin Hamiltonin operaattoriin päädytään tulokseen:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_\sigma \int_V d^3k (\hbar K c \hat{a}_\sigma^\dagger(k) \hat{a}_\sigma(k) + \int_0^\infty d\Omega \hbar \Omega \hat{c}_{\sigma,\Omega}^\dagger(k) \hat{c}_{\sigma,\Omega}(k) + \\ &+ \frac{\hbar \Lambda(k)}{2} \int_0^\infty d\Omega (g(\Omega) \hat{c}_{\sigma,\Omega}^\dagger(k) (\hat{a}_\sigma(k) + \hat{a}_\sigma^\dagger(-k)) + g^*(\Omega) \hat{c}_{\sigma,\Omega}(-k) (\hat{a}_\sigma^\dagger(-k) + \hat{a}_\sigma(k))) \end{aligned} \quad (5.75)$$

Tässä on voimassa $g(\Omega) = i\alpha_0(\Omega) + i\beta_0(\Omega)$.

Hamiltonin operaattori saa uusilla muuttujilla samanlaisen muodon kuin materiaalia kuvaava Hamiltonin operaattori \hat{H}_{mat} . Niinpä voidaan soveltaa samaa diagonalisointitekniikkaa kuin edellä, jolloin saadaan uudet operaattorit $\hat{C}_{\sigma,\Omega}(k)$:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{\sigma,\Omega}(k) &= \alpha_{3,\sigma}(\Omega)\hat{a}_{A,\sigma}(k) + \beta_{3,\sigma}(\Omega)\hat{a}_{A,\sigma}^\dagger(-k) + \\ &+ \int_0^\infty d\Omega' (\alpha_{4,\sigma}(\Omega, \Omega')\hat{c}_{\sigma,\Omega'}(k) + \beta_{4,\sigma}(\Omega, \Omega')\hat{c}_{\sigma,\Omega'}^\dagger(-k)) \end{aligned} \quad (5.76)$$

Muunnos yksinkertaistaa Hamiltonin operaattorin muotoon

$$\hat{H} = \int_V d^3k \int_0^\infty d\Omega \hbar \Omega \hat{C}_{\sigma,\Omega}^\dagger(k) \hat{C}_{\sigma,\Omega}(k) \quad (5.77)$$

ja operaattorin aikakehitys saadaan yhtälöstä $\partial_t \hat{C}_{\sigma,\Omega}(k) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{C}_{\sigma,\Omega}(k)] = i\Omega \hat{C}_{\sigma,\Omega}(k)$. Jälkimmäinen yhtälö seuraa suoraan kommutointiehdosta. Tämän ratkaisu on yksinkertainen jaksollinen operaattori $\hat{C}_{\sigma,\Omega}(k, t) = \hat{C}_{\sigma,\Omega}(k, 0) e^{-i\Omega t}$. Operaattorit kuvaavat nyt koko yhdistetyn systeemin tilaa, ja tästä uudesta pseudofotonista käytetään nimitystä polaritoni. Polaritonia kuvaava Hamiltonin operaattori saa samanlaisen muodon kuin multimoodikentän fotonin Hamiltonin operaattori, niinpä se perii myös sen fotonimaisen käytöksen. Polaritonin tyhjiötilaa ei saada nyt yksinkertaisena tensoritulona $|\phi\rangle = |0\rangle_{em} \otimes |0\rangle_X \otimes |0\rangle_Y$, tämä nähdään esim. operoimalla $\hat{C}_{\sigma,\Omega}(k)$:lla kyseiseen tilaan:

$$\hat{C}_{\sigma,\Omega}(k) |\phi\rangle = \beta_3 |1\rangle \otimes |0\rangle_X \otimes |0\rangle_Y + \int_0^\infty d\Omega' \beta_4(\Omega, \Omega') |0\rangle \otimes \hat{c}_{\sigma,\Omega'}^\dagger(-k) (|0\rangle_X \otimes |0\rangle_Y)$$

Kertoimen $\beta_3(\Omega)$ saama tila ei voi hävitä, sillä $\hat{c}_{\sigma,\Omega}^\dagger(-k)$ operoi vain kahdessa jälkimmäisessä Hilbertin avaruudessa. Siten yhtälö $\hat{C}_{\sigma,\Omega}(k) |\phi\rangle = 0$ ei voi olla voimassa, ja polaritonin tyhjiötila on jokin monimutkaisempi tensoritulo. Tämä voidaan tietysti päätellä myös suoraan Hamiltonin operaattorin vuorovaikutustermien olemassaolosta. Tila vastaa vahvasti vaimennetun oskillaattorin tapausta, jota on analysoitu aiemmin [27]. Nyt itse redusoitu SM-kenttää kuvaavan oskillaattorin perustila $\hat{\rho}_{em} = Tr_{mat}[\hat{P}_{em+mat}(|0\rangle)]$ osoittautuu ”venytetyksi” tyhjiötilaksi (squeezed vacuum state).

Jokainen kvanttielektrodynamiikan operaattori voidaan korvata uusien operaattorien $\hat{C}_{\sigma,\Omega}(k), \hat{C}_{\sigma,\Omega}^\dagger(k)$ avulla. Esim. SM-kentän vektoripotentialin operaattori saadaan yhtälönä

$$\begin{aligned} \hat{A}(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_V d^3k \int_0^\infty d\Omega \sum_\sigma e_{\sigma k} \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0}} (K(k, \Omega) \hat{C}_{\sigma,\Omega}(k, 0) e^{i(kr - \Omega t)} + \\ + K^*(k, \Omega) \hat{C}_{\sigma,\Omega}^\dagger(k, 0) e^{-i(kr - \Omega t)}) \end{aligned} \quad (5.78)$$

$K(k, \Omega)$ on operaattorin kerroin, jotka saadaan kertoimien α_i, β_i , $i = 1, 2, 3, 4$ avulla. Artikkelissa [26] on kertoimen arvoksi johdettu $K(k, \Omega) = \frac{\zeta^*(\Omega)}{\Omega^2 \varepsilon(\Omega) - k^2 c^2}$, jossa $\zeta(\omega) = g(\Omega) \sqrt{\Omega_0}$. Termi $\varepsilon(\Omega)$ saadaan monimutkaisena integraaliesityksenä vuorovaikutuskertoimesta $\zeta(\Omega)$ ja voidaan osoittaa, että se noudattaa samanlaisia ehtoja kuin permittiivisyys (esim. Kramers-Kronigin yhtälöt).

Seuraavaksi käsittely laajennettiin koskemaan magneettisesti aktiivisia väliaineita [28], [29]. Nämä yhdistämällä saadaan lopulta malli, joka kattaa kaikki absorboivat väliaineet, joilla on sekä lineaarinen sähköinen että magneettinen vaste. Osoittautuu, että näin saatava koko systeemiä (polaritonia) kuvaava tuhoamisoperaattori on sama kuin makroskooppisen lähestymistavan häiriöoperaattori. Niinpä Langevin-voimiin perustuva teoria voidaan johtaa väliaineen ja SM-kentän mikroskooppisesta teoriasta.

Yleinen kvanttimekaaninen teoria lineaaristen väliaineiden ja SM-kentän yhdistetyille systeemille saadaan, kun valitaan lähtökohdaksi Minkowskin tensori ja vaikutusintegraali seuraavaan muotoon [30],[31]:

$$S(\phi, \hat{A}, \hat{X}_e, \hat{X}_m) = \int_{\mathbb{R}_+ \times V} d^4x \frac{1}{2} (\varepsilon_0 \hat{E}^2 - \kappa_0 \hat{B}^2) + S_X(\hat{X}_e) + S_X(\hat{X}_m) + \int_{\mathbb{R}_+ \times V} d^4x \int_0^\infty d\Omega (\alpha \hat{X}_{e,\Omega} \cdot \hat{E} + \beta \hat{X}_{m,\Omega} \cdot \hat{B}) \quad (5.79)$$

Tässä $S_Z[\hat{Z}] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+ \times V} d^4x \int_0^\infty d\Omega ((\partial_t \hat{Z}_\Omega)^2 - \Omega^2 \hat{Z}_\Omega^2)$, jossa lopulta t :n derivaatta saadaan kentän Fourier-komponenteista kertomalla taajuuksilla ja $Z = X_e, X_m$. Vuorovaikutuskertoimet määräytyvät täysin permeabiliteetin ja permittiivisyyden imaginaariosista:

$$\alpha(r, \Omega) = \sqrt{\frac{2\varepsilon_I(r, \Omega)\Omega}{\pi}}, \quad \beta(r, \Omega) = \sqrt{-\frac{2\mu_I(r, \Omega)\Omega}{\pi}}$$

Nyt harmoninen värähtelijä X_e kuvaa sähkökentän absorptiota ja X_m sen magneettikentän absorptiota väliaineessa; taajuus Ω voidaan käsittää nk. vuorovaikutustaajuuksi. SM-kenttä vuorovaikuttaa kaikkien materiaalia mallintavan harmonisen värähtelijän moodien kanssa, vuorovaikutus määräytyy edellä määriteltyjen kertoimien $\alpha(r, \Omega)$ ja $\beta(r, \Omega)$ avulla. Jos itse SM-kenttä muunnetaan taajuusavaruuteen, kannattaa sen

taajuudelle luonnollisesti käyttää eri merkintää. Tämä muistuttaa hyvin paljon edellä käsiteltyä Lagrangen funktiota muodoltaan. Nyt vain vuorovaikutus on jaettu kahteen systeemiin, magneettiseen ja sähköiseen värähtelijään. Molemmat materiaalia kuvaavat systeemit on jo kuvattu valmiiksi diagonalisoituina systeemeinä, eikä esim. sähköistä vuorovaikutusta ole mallinnettu sekä polarisaation että lämpösäiliön avulla, vaan systeemiä vastaava tuhoamisoperaattori - mikä saataisiin Legendren muunnoksella ja skalaamalla saadut muuttujat - olisi jo muotoa $\hat{c}_{e,\Omega}$.

Ottamalla Lagrangen tiheyden kanoniset impulssimomentit klassiseen tapaan (ks. kappale 1.4) ja diagonalisoimalla saatu Hamiltonin funktionaali kuten artikkelissa [30] päädytään pitkällisten johtamisten jälkeen melko yksinkertaiseen lausekkeeseen energiatheydelle, jossa kaikki termit riippuvat vain bosonisista operaattoreista (samankaltaiset kuin Langevin-quantittumisessa) $\hat{C}_{e,\Omega}, \hat{C}_{m,\Omega}$. Jokainen operaattori saadaan edellä mainituista tuhoamis- ja luomisoperaattoreista jollain lineaarimuunnoksella; esim. sähkökentän operaattori on seuraavaa muotoa:

$$\hat{E}(r, t) = \sum_{\lambda} \int_V d^3r' \int_0^{\infty} d\Omega (f_E(r, r', \Omega) \hat{C}_{\lambda,\Omega}(r') e^{-it\Omega} + f_E^{T*}(r, r', \Omega) \hat{C}_{\lambda,\Omega}^{\dagger}(r') e^{it\Omega})$$

Tensorifunktion f_E muoto saadaan ratkaistua kommutointiehdosta ja diagonaalisuusvaatimuksesta. Edelliseen käsittelyyn verrattuna tässä operaattoreista ei ole otettu Fourier-muunnosta aaltolukuavaruuteen. Verrattuna Langevin-quantittumiseen operaattorit saadaan samalla periaatteella. Kaavasta (5.42) identifioidaan Fourier-muunnoksen jako kahteen osaan ja yhtälöstä (5.36) nähdään kuinka lineaarimuunnos on samaa tensorimuotoa, Langevin-quantittumisessa vain saadaan f_E :n paikalle klassinen Greenin tensori. Vaikka funktiot eivät ole nyt samoja, voidaan osoittaa, kuinka f_E saadaan jollain lineaarisella muunnoksella klassisesta Greenin funktiosta artikkelin [30] kaavojen 78 ja 79 mukaisesti. Siten Langevin-operaattorit $\hat{f}_{\lambda}(r, \Omega)$ ja operaattorit $\hat{C}_{\lambda,\Omega}(r)$ vastaavat toisiaan, ja Langevin-quantittuminen voidaan johtaa suoraan edellä esitetystä Lagrangen funktiosta. Kaikki operaattoreiden odotusarvot lasketaan nyt aivan samoin kuin kappaleessa 5.2.

Nyt esim. energiatheyden odotusarvo tilassa $\hat{P}(|0\rangle)$ saadaan kommutointiehtojen

soveltamisen jälkeen suoraan Greenin matriisiin avulla kaavalla:

$$u(r, r') = \frac{-i\hbar}{2\pi} \int_0^\infty d\omega (c^{-2} \partial_\omega (\omega \varepsilon_r) \text{Tr}[\omega^2 G(r, r', \omega)] + \kappa_r^2 \partial_\omega (\omega \mu_r) \text{Tr}[\nabla \times G(r, r', \omega) \times \overleftarrow{\nabla}']) \quad (5.80)$$

G on taas klassisen tapauksen Greenin tensori. Imaginaariosa integroituisi automaattisesti nollassi symmetriasystistä johtuen, joten se voidaan jättää huomioimatta. Lausekkeen derivaatat SM-vasteista seuraavat kaavasta (3.23). Ensimmäinen termi antaa sähkökentän osuuden ja toinen magneettikentän osuuden energiatiheydestä.

Jännitystensorin \hat{T}_{DB} esitys saataisiin samantapaisella käsittelyllä riippuvaksi vain Greenin tensorista ja SM-vasteiden funktioista ε_r ja μ_r :

$$(T_{DB}(r, r'))_{ij} = \frac{\hbar}{\pi} \text{Im} \left[\int_0^\infty d\omega \left(\frac{\varepsilon_r}{c^2} (\delta_{ij} \text{Tr}[\omega^2 G(r, r', \omega)] - \omega^2 G_{ij}(r, r', \omega)) + \kappa_r (\delta_{ij} \text{Tr}[\nabla \times G(r, r', \omega) \times \overleftarrow{\nabla}'] - [\nabla \times G(r, r', \omega) \times \overleftarrow{\nabla}']_{ij}) \right) \right] \quad (5.81)$$

Artikkelin [30] kaavoista 94 ja 101 poiketen tekijät $\Delta_{ij}^{E,B}$ on kirjoitettu auki Greenin funktion avulla. Jos tapausta yksinkertaistetaan olettamalla väliaine ei-magneettiseksi, saataisiin lausekkeesta suoraan Lifshitzin voimatiheys ottamalla divergenssi. Osoittautuu, että ottamalla divergenssi jännitystensorin alkuperäisestä yhtälöstä annettuna kaikkien kenttien avulla, jää termodynaamisessa tasapainossa jäljelle vain divergenssit permittiivisyydestä ja permeabiliteetista kerrottuna Greenin funktion lausekkeilla:

$$f_f(r, r') = \frac{\hbar}{2\pi} \text{Im} \left[\int_0^\infty d\omega \left(\frac{1}{c^2} \text{Tr}[\omega^2 G(r, r', \omega)] I \cdot \nabla \cdot \varepsilon_r + \text{Tr}[\nabla \times G(r, r', \omega) \times \overleftarrow{\nabla}'] I \cdot \nabla \cdot \kappa_r \right) \right] \quad (5.82)$$

Voimatiheys poikkeaa nollasta vain silloin, kun avaruudessa esiintyy eroja SM-vasteen suhteen eri alueissa. Esimerkiksi kun avaruuteen laitetaan jokin kappale, jolla on eri SM-vaste kuin sitä ympäröivällä avaruudella. Jos SM-vaste muuttuu hyppäksenomaisesti rajapintojen välillä, saadaan sen divergensseistä muodollisesti deltafunktioita kerrottu-

na eron magnitudilla. Niinpä integroitaessa edellä saatu voimatiheyden lauseke jäävät siitä jäljelle ainoastaan rajapinnalla oleva integrandi, eli tulos pelkistyy samanlaiseksi pintaintegraaliksi kuin aikaisemmat voiman yhtälöt.

6 Casimirin ilmiö

Klassisesti Casimirin ilmiö johtuu reunaehtojen aiheuttamista rajoitteista sähkömagneettiselle tai muulle kentälle. Yksinkertaisimmassa tapauksessa tarkastellaan kahta äärettömän levyistä ja ohuista samansuuntaista, täysin heijastavaa tasoa tyhjiössä, joiden välille muodostuu puristava voima. Laskettaessa tämän voiman suuruutta energian summakehitelmän avulla joudutaan monesti turvautumaan ns. regularisaatioon. Regularisaatiossa voimasta tehdään keinotekoisesti äärellinen, jonka jälkeen annetaan regularisaatioparametrin lähestyä sellaista raja-arvoa, joka poistaisi tämän rajoitteen. Esimerkiksi eksponentiaalisen regularisaation tapauksessa oletetaan heijastavuuden riippuvan eksponentiaalisesti taajuudesta, kun taas zeeta-funktioregularisaatiossa tarkastellaan suoraan kokonaisenergian summaesitystä zeeta-funktion raja-arvona jollain kokonaisluvulla. Regularisaatiolähestymistavan ongelma on fysikaalisen tulkinnan puuttuminen analyttisesti jatketuilta energiaesityksiltä (esim. zeeta-funktio). Lisäksi eri regularisaatiotavat eivät ole kaikille geometrioille yksikäsitteisiä eikä niitä voi juurikaan käyttää, jos väliaine ei ole tyhjiö.

Kvanttielektrodynaaminen lähestymistapa selittää Casimirin voiman tyhjiötilassa (lähteetön tapaus) kenttien varianssina, jotka seuraavat energiaimpulssitensorin lausekkeesta. Tyhjiötilassa operaattorin varianssin odotusarvot ovat samat kuin niiden neliöiden odotusarvot. Makroskooppinen, ilmiöpohjainen lähestymistapa selittää varianssin syntymisen nk. häiriötermien avulla. Mikroskooppinen menetelmä taas perustuu koko systeemiä kuvaavan Lagrangen tiheyden kvantittumiseen ja saadun Hamiltonin operaattorin diagonalisointiin uusilla lasku- ja nosto-operaattoreilla. Menetelmät ovat itse asiassa yhteneväiset.

Historiallisesti yksi menestyksekkäimmistä tavoista selittää Casimirin voimat on ns. Lifshitzin teoria ja sen yleistykset. Alun perin teoria johdettiin statistisen fysiikan ja

termodynamiikan avulla, ja sittemmin sille annettiin myös makroskooppinen Langevin-operaattoreihin perustuva esitys. Lifshitzin voima saadaan kuitenkin myös lähtemällä jostain Lagrangen funktiosta ja muuntamalla se kvanttimekaaniseen muotoon, eli sillä todella on kvanttimekaaninen perusta (ks. kappale 5.3).

6.1 Skalaarikenttä ja regularisaatio

Yleisessä klassisessa tapauksessa (=skalaarikenttä) saadaan kenttäyhtälöksi kolmiulotteisessa Minkowskin avaruudessa Klein-Gordonin osittaisdifferentiaaliyhtälö relativistiselle tapaukselle [32]:

$$\hat{L}\varphi(r, t) = \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi(r, t) = 0 \quad (6.1)$$

Asetetaan kenttä massattomaksi (fotoni) ja ratkaistaan tämä ODY kappaleen 5.1 mukaisella separointitekniikalla ($\phi(r, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$) reunaehdot huomioon ottaen, jolloin ominaisarvoratkaisuiksi levyjen välissä saadaan ominaisfunktiot yhtälöstä:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = -|\lambda| \quad (6.2)$$

Rajoitetussa kuutiossa $r \in [0, L]^2 \times [0, d_1]$ kentän tulee olla nolla reunoissa ja voidaan määrittellä sisätulo kaavalla $\langle f|g \rangle = i \int_0^L \int_0^L \int_0^{d_1} d^3r (f^* \partial_{ct} g - \partial_{ct} f^* g)$. Ratkaisuiksi saadaan näin määritellyn sisätuloavaruuden ortonormaalit ominaisfunktiot:

$$\varphi_n^\pm(t, x) = c_{n\pm} e^{\pm i\omega_n t} \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_3\pi z}{d_1}\right) \quad (6.3)$$

Tässä on $\omega_n = \omega_{n_1, n_2, n_3} = \sqrt{\frac{c^2\pi^2 n_1^2}{L^2} + \frac{c^2\pi^2 n_2^2}{L^2} + \frac{c^2\pi^2 n_3^2}{d_1^2}}$. Energiaimpulssitensorin 00-komponentti antaisi kentän klassisen energiatihedden kaavasta:

$$T_{00}(r, t) = \frac{\hbar c}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)^2 + (\partial_x \varphi)^2 + (\partial_y \varphi)^2 + (\partial_z \varphi)^2 \right) \quad (6.4)$$

Siirryttäessä kvanttimekaaniseen tulkintaan muuntuvat kaikki kentät operaattori-muotoon, jossa saadaan siis diskreetti multimoodikenttä kappaleen 5.1 tapaan.

$$\hat{\varphi}(r, t) = \sum_n (\varphi_{n,-}(r, t)\hat{a}_n + \varphi_{n,+}(r, t)\hat{a}_n^\dagger) \quad (6.5)$$

Jokainen $n = (n_1, n_2, n_3)$ viittaa johonkin tiettyyn sallittuun moodiin, niinpä itse kentän tila $\hat{\rho}$ on jokin tensoritulo $\hat{\rho} = \otimes_n \hat{\rho}_{k_n}$. Tässä on käytetty nyt indeksinä n :ää tavallisemman k_n :n sijaan. Tyhjiön tapauksessa tila on tietysti $|0\rangle = \otimes_n |0\rangle_{k_n}$, ja laskettaessa kvanttimekaanisen energiaimpulssitensorin odotusarvoa $\langle 0|\hat{T}_{00}(r, t)|0\rangle$ saadaan tulos:

$$E_0(d_1) = \frac{\hbar}{2} \sum_{n_1, n_2, n_3 = -\infty}^{\infty} \omega_{k_n} \quad (6.6)$$

Tämä klassisen skalaarikentän kvanttimekaaninen muoto vastaa SM-kenttää, sillä valitsemalla koordinaattivektorit kenttien E, B suuntaisiksi (kullekin polarisaatiolle erikseen) saavat nämä vektorimuotoiset funktiot vain yhden komponentin, joka noudattaa tyhjiössä samanlaista ODY:ä kuin tässä analysoitu skalaarikenttäkin (ks. kaavat 6.1 1.31, 1.17 ja 1.18). Summa alkaa miinus äärettömästä, sillä haluamme ottaa huomioon molemmat SM-kentän polarisaatiot. Koska tämä summa on ääretön, pitää sen esitys tehdä fysikaaliseksi regularisoimalla se esim. eksponenttifunktion avulla. Fysikaalisesti tämä vastaa tapausta, jossa heijastuskerroin vähenee eksponentiaalisesti taajuuden funktiona. Oletetaan ensin, että rajoitetulle tapaukselle saadaan sallitut taajuudet $\omega_{k_1, k_2, n_3} = c\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \frac{n_3^2 \pi^2}{d_1^2}}$ ja että $L \gg d_1$, jolloin n_1 :n ja n_2 :n yli summaus voidaan korvata integraalilla. Regularisoitu energia saadaan kaavalla:

$$E(d_1, \delta) = A \frac{\hbar}{2(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} dk_1 dk_2 \sum_{n_3 = -\infty}^{\infty} c \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \frac{n_3^2 \pi^2}{d_1^2}} e^{-\delta c \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \frac{n_3^2 \pi^2}{d_1^2}}} \quad (6.7)$$

Jos heijastavat reunaehdot poistettaisiin, saataisiin vapaalle kentälle ratkaisut

$\varphi_k^\pm(r, t) = \sqrt{\frac{c}{4\pi\omega}} e^{\pm i(\omega t - k \cdot r)}$, jossa $\omega_k = c|k|$. Tätä vastaisi ”jatkuva” kvanttittuminen kappaleen 5.1 lopussa. Energiatiheys vapaalle kentälle saadaan integraalista $E_f(d_1) = d_1 A \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k \omega_k$. Käyttämällä eksponentiaalista regularisaatiofunktiota saadaan regularisoitu vapaa energia:

$$E_f(d_1, \delta) = d_1 A \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k \omega_k e^{-\delta k c} \quad (6.8)$$

Vähentämällä nämä regularisoidut energiat toisistaan saadaan potentiaalienergia. Merkitään $(k_1, k_2) = q$, jolloin potentiaalienergiaksi levyjen eri pintojen välille tulee lauseke:

$$U(d_1, \delta) = A \frac{\hbar}{2(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 q \left(\sum_{n_3=-\infty}^{\infty} \omega(q, n_3) e^{-\delta \omega(q, n_3)} - d_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \omega(q, k_3) e^{-\delta \omega(q, k_3)} \right) \quad (6.9)$$

Summaesitys on symmetrinen 0:tta termiä lukuun ottamatta kuten myös integraali k_3 :n yli. Lisäksi q :n pituuden neliö voidaan jakaa $\frac{\pi}{d_1}$:n neliöllä neliöjuuren sisällä, jolloin tulokseksi tulee:

$$U(d_1, \delta) = \frac{A\hbar\pi}{d_1} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 q \left(\sum_{n_3=0}^{\infty} \sqrt{\frac{q^2 d_1^2}{\pi^2} + n_3^2} e^{-\delta \omega(q, n_3)} - \frac{q d_1}{2\pi} e^{-\delta \omega(q, 0)} - \int_0^{\infty} dx \sqrt{\frac{q^2 d_1^2}{\pi^2} + x^2} e^{-\delta \omega(q, x)} \right) \quad (6.10)$$

Yhtälöä voidaan edelleen muokata käyttämällä Abel-Plana-kaavaa analyttisille funktioille:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} dx f(x) = \frac{1}{2} f(0) + i \int_0^{\infty} dx \frac{f(ix) - f(-ix)}{e^{2\pi x} - 1} \quad (6.11)$$

Kun valitaan $f(n_3) = c \sqrt{\frac{q^2 d_1^2}{\pi^2} + n_3^2} e^{-\delta \omega(q, n_3)}$ ja vaihdetaan q -muuttuja polaarisiin koor-

dinaatteihin $k_1 = y \cos(\theta)$, $k_2 = y \sin(\theta)$, $\frac{qd_1}{\pi} = y$, saadaan tulokseksi:

$$U(d_1, \delta) = 2\pi K \int_0^\infty dx \frac{\pi^2}{d_1^2} \int_0^\infty dy iy \frac{\sqrt{y^2 - x^2} e^{-\delta\omega(y, ix)} + \sqrt{y^2 - x^2} e^{-\delta\omega(y, -ix)}}{e^{2\pi x} - 1}$$

Ottamalla raja-arvo $\delta \rightarrow 0^+$ ja poistamalla meromorfinisuus funktiosta

$g_y(ix) = \pm \sqrt{y^2 + (ix)^2}$ valitsemalla $g(ix) = \sqrt{y^2 - x^2}$ tapauksessa $|x| < |y|$ ja $g(ix) = -\sqrt{y^2 - x^2}$ tapauksessa $|y| < |x|$ saadaan integroinnin tuloksena:

$$U(d_1) = -\frac{c\hbar\pi^2 A}{720d_1^3} \quad \Rightarrow \quad F(d_1) = -\frac{c\hbar\pi^2 A}{240d_1^4} \quad (6.12)$$

Toinen suosittu tapa laskea Casimirin voima levyjen välillä on käyttää zeeta-funktiota. Levyjen välisen skalaarikentän Dirichletin differentiaaliyhtälön $-\Delta\varphi_l = \mu_l\varphi_l$ ominaisfunktiot ovat:

$$\varphi_l(r) = \sqrt{\frac{2}{d_1 R^2}} \sin\left(\frac{\pi n_3 z}{d_1}\right) e^{\frac{i2\pi n_1 x}{R}} e^{\frac{i2\pi n_2 y}{R}} \quad (6.13)$$

Yksinkertaisuuden vuoksi monisto on valittu ympyrän kehäksi x - ja y -suunnissa (eli torus säteillä (R, R)). (6.13):n ratkaisuista näissä suunnissa tulee jaksollisia e -funktioita. Ominaisarvoiksi saadaan $\mu_{n_1, n_2, n_3} = c^2 \left(\left(\frac{2\pi n_1}{R} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{R} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_3}{d_1} \right)^2 \right) = c^2 k_l^2$. Yhteensä levyjen välille saadaan siis energian lauseke:

$$E(s) = \frac{\hbar}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l^{-s} = \frac{\hbar c^{-2s}}{2} \sum_{n_3=1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^2} \left(\left(\frac{2\pi n_1}{R} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{R} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_3}{d_1} \right)^2 \right)^{-s} = \frac{\hbar c^{-2s}}{2} \zeta(s) \quad (6.14)$$

Tulokseksi saadaan zeeta-funktio, jota voidaan edelleen muokata. Kun R :n annetaan lähestyä ääretöntä, saadaan toinen summaus korvattua integraalilla \mathbb{R}^2 :n yli.

$$E(s) \rightarrow \frac{\hbar R^2}{8\pi^2} 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} dt \sum_{n_3=1}^{\infty} t \left(t^2 + \frac{l^2 \pi^2}{d_1^2} \right)^{-s} = \dots = \frac{\hbar c^{-2s} R^2}{4\pi(1-s)} \left(\frac{\pi}{d_1} \right)^{2-2s} \sum_{n_3=1}^{\infty} n_3^{2-2s}$$

Selvästi lausekkeen viimeinen summatermi on Riemannin zeeta-funktio, jolloin raja-arvolla $s \rightarrow \frac{-1}{2}$ saadaan $\zeta_R(-3) = 1/120$. Kun huomioidaan, että $R^2 = A$ (eli levyjen

ala), niin sijoitus kaavaan antaa saman tuloksen kuin eksponentiaalisella regularisatiofunktiolla. Vaikka (x, y) -monisto on valittu torukseksi, vastaa raja-arvon $R \rightarrow \infty$ ottaminen äärettömien levyjen tapausta. On huomioitava, että nämä laskelmat vastaavat ideaalitapausta, ja antavat siten vain ylärajan Casimirin voimalle. Todellisessa tilanteessa tulee ottaa huomioon mm. peilien oikeat heijastuskertoimet (Fresnelin kertoimet), pinnan epätasaisuudet ja lämpötila.

6.2 Kvanttielektrodynaaminen ratkaisu

Kvanttimekaniikan mukaan ei-kommutoivien suureiden varianssien tulo ei voi olla pienempi kuin vakio kertaa suureiden kommutaattorin odotusarvo:

$$\langle (\Delta \hat{V})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{U})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle i[\hat{V}, \hat{U}] \rangle^2 \quad (6.15)$$

Kun suureiksi valitaan sähkökenttä ja magneettivuon tiheys, on niiden kommutaattori $[\hat{E}, \hat{B}]$ aina nollasta poikkeava. Tyhjiötilalle varianssi saadaan suoraan kentän operaattorin neliön odotusarvona, siten Casimirin voiman antavan jännitystensorin neliölliset kenttätermien odotusarvot eivät voi olla nollia. Toisin sanoen myös ulkoisten varausten puuttuessa saadaan absoluuttisessa nollassa kentän varianssi, joka saa aikaan nollassa poikkeavan Lorentzin voiman.

Sähkömagneettinen voima kappaleeseen V riippuu kappaleen varauksesta, varauksen nopeudesta sekä itse SM-kentästä. Kun yleistetään pistemäiseen kappaleeseen vaikuttava sähkömagneettinen voima (1.44) ja kirjoitetaan tarvittavat kentät operaattorimuodossa, saadaan tilavuuteen V vaikuttavan voiman operaattori integroimalla voimatiheyden operaattori $\hat{f}(r)$:

$$\hat{F}_{EB} = \int_V d^3r \hat{f}(r) = \int_V d^3r (\hat{\rho}_e(r) \hat{E}(r) + \hat{J}(r) \times \hat{B}(r)) \quad (6.16)$$

Tässä virtatiheys ja varaustiheys kuvaavat kappaleen ominaisuuksia. Tämä lauseke ottaa huomioon kaikki varaukset. Termodynaamisessa tasapainossa kokonaisvoima voi-

daan antaa myös vapaan SM-kentän jännitystensin \hat{T}_{EB} avulla:

$$\hat{F}_{EB} = \int_V d^3r \nabla \cdot \hat{T}_{EB}(r, t) \quad (6.17)$$

Gaussin lauseella kaava saa nyt muodon:

$$\hat{F} = \int_{\partial V} dA u_N(r) \cdot \hat{T}_{EB}(r) \quad (6.18)$$

Yllä $u_N(r)$ on kappaleen V pinnan normaalivektori. Voimaoperaattori saadaan siis jännitystensin integraalina kappaleen pinnan yli, laskettaessa voimaoperaattorin odotusarvoa tulee ottaa jälki sen ja itse tilaoperaattorin $\hat{\rho}$ yhdistetyn operaattorin yli:

$$\langle \hat{F} \rangle = \int_{\partial V} dA u_N(r) \cdot \text{Tr}[\hat{T}_{EB}(r) \hat{\rho}(r)] \quad (6.19)$$

Tila on yleisimmillään jatkuva multimooditila (ks. kappale 5.1), joten se pitää sijoittaa taajuusriippuvaan operaattorimuotoon, ja integroimalla taajuus saadaan itse (ajasta riippuvan) operaattorin odotusarvo. Aiemman käsittelyn mukaan kappaleessa 5.2 jännitystensori ei lopulta riipu ajasta ollenkaan tasapainotilassa, mikä on jo huomiotu yllä laittamalla näkyviin vain paikkakoordinaatti argumentteihin. Tiedetään myös, että riittää ratkaista operaattorin \hat{T}_{EB} odotusarvo tyhjiössä, josta saadaan myös ratkaisu yleisemmän tilan tapauksessa taajuuden integrandia muuntamalla.

Laskettaessa kokonaisvoiman keskiarvoa tyhjiössä $\langle 0 | \hat{F}_{EB} | 0 \rangle$ sijoitetaan tulos (5.52) $T_{EB}(r, r')$:n lausekkeeseen, jolloin saadaan lopulta kaava:

$$F_{EB}(r, r') = \frac{\hbar}{\pi} \int_{\partial V} dA(r) u_N(r) \cdot \int_0^\infty d\omega \left(\frac{\omega^2}{c^2} \text{Im}(G(r, r', \omega)) - \nabla \times \text{Im}(G(r, r', \omega)) \times \overleftarrow{\nabla}' - \frac{I}{2} \text{Tr} \left[\frac{\omega^2}{c^2} \text{Im}(G(r, r', \omega)) - \nabla \times \text{Im}(G(r, r', \omega)) \times \overleftarrow{\nabla}' \right] \right) \quad (6.20)$$

Ohuen levyn tapauksessa pintaintegraali saisi termin $(T_{EB}(r, r') - T'_{EB}(r, r'))_{33}$, jois-

ta T' olisi levyn ulkopinnalla ja T sen sisäpinnalla vaikuttava osa. T_{EB} :n komponenteista tarvitsee ottaa huomioon vain 33-komponentti symmetriasta johtuen. Komponentti $(T_{EB})_{33}$ saadaan laskemalla sähkö- ja magneettikentän kontribuutiot erikseen. Sähkökentän osa antaa lausekkeen $\frac{\varepsilon_0}{2}(\langle \hat{E}\hat{E}' \rangle_{33} - \langle \hat{E}\hat{E}' \rangle_{11} - \langle \hat{E}\hat{E}' \rangle_{22}) = \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\omega^2}{2\pi c^2} Im[G_{33} - G_{22} - G_{11}] = -\frac{\hbar}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq Im[\frac{q}{\beta}\mu_r \frac{\omega^2 f^E}{c^2}]$ (ks. (5.46)). Tässä on määritelty uusi funktio $f^E(r, r', \omega)$ kaavan 6.22 mukaan. Magneettivuon tiheyden antama osa on $\frac{\mu_0}{2}(\langle \hat{B}\hat{B}' \rangle_{33} - \langle \hat{B}\hat{B}' \rangle_{11} - \langle \hat{B}\hat{B}' \rangle_{22}) = \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar}{2\pi} Im[G_{33}^B - G_{22}^B - G_{11}^B] = -\frac{\hbar}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq Im[\frac{q}{\beta}\mu_r f^B]$, missä $G^B(r, r', \omega) = \nabla \times G(r, r', \omega) \times \nabla'$, kenttien riippuvuudet muuttujista $(r, \omega), (r', \omega)$ on jätetty merkittämättä ja on määritelty uusi funktio $f^B(r, r', \omega)$ kaavan (6.22) mukaan. Sijoittamalla liitteen A Greenin tensorin sirontaosa T_{EB} :n lausekkeeseen (mikä antaisi voiman/ala suoraan T_{EB} :n lausekkeesta) ja tekemällä kaksiulotteinen Fourier-muunnos (x, y) -tasosta (k_1, k_2) -avaruuteen (ks. kappale A.3) saadaan pitkien mutta suoraviivaisten laskujen jälkeen tulokset:

$$(T_{EB}(r, r))_{33} = -\frac{\hbar}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq Re[\frac{q}{\beta}\mu_r(\omega)g(z, z, q, \omega)] \quad (6.21)$$

g on Greenin tensoreista saatu komponentti ja se jakautuu kahteen funktioon:

$$\begin{aligned} g(z, z, q, \omega) &= \frac{\omega^2}{c^2} f^E(z, z, q, \omega) + f^B(z, z, q, \omega) \\ \frac{\omega^2}{c^2} f^E(z, z, q, \omega) &= D_s^{-1}[2(\beta^2 - q^2)n^{-2}e^{2i\beta d}r_s^+r_s^- + (\beta^2 + q^2)(n^{-2}(e^{2i\beta z}r_s^- + e^{2i\beta(d-z)}r_s^+))] + \\ &\quad + D_p^{-1}[2n^{-2}(\beta^2 - q^2)e^{2i\beta d}r_p^+r_p^- + (\beta^2 - q^2)(e^{2i\beta z}r_p^- + e^{2i\beta(d-z)}r_p^+)] \\ f^B(z, z, q, \omega) &= D_s^{-1}[2(\beta^2 - q^2)e^{2i\beta d}r_s^+r_s^- - (\beta^2 + q^2)(e^{2i\beta z}r_s^- + e^{2i\beta(d-z)}r_s^+)] + \\ &\quad + D_p^{-1}[2(\beta^2 + q^2)e^{2i\beta d}r_p^+r_p^- + (\beta^2 - q^2)(e^{2i\beta z}r_p^- + e^{2i\beta(d-z)}r_p^-)] \end{aligned} \quad (6.22)$$

n on luonnollisesti taitekerroin $n = n(\omega)$ ja muut kertoimet on määritelty liitteen A lopussa. Kaava on sama kuin artikkelin [33] kaava 76, nyt vain magneettivuon tiheyden ja sähkökentän antamat osat on erotettu toisistaan funktioiksi f^E ja f^B . Siirtymällä

imaginaarisiin taajuuksiin kaavan β^2 -termit muuntuvat termeiksi $-b^2 = -\frac{\omega^2 n^2(i\omega)}{c^2} - q^2$ ja eksponentit $i\beta$ muuntuvat muotoon $-b$, lisäksi tietysti g :n ensimmäisen termin taajuuden neliökerroin vaihtaa merkkiä. SM-vasteen ja Greenin tensorin analyttisyydestä seuraa, että lauseke saa vain reaalisia arvoja imaginaariakselilla, joten imaginaariosia ja reaaliosia ei tarvitse laskea erikseen. Saadaan yhtälö:

$$(T_{EB}(r, r))_{33} = \frac{\hbar}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq \operatorname{Re} \left[\frac{q}{b} \mu_r(i\omega) g(z, z, q, i\omega) \right] \quad (6.23)$$

Jos levyjen välillä olisi tyhjiö ($n = 1$), pelkistyisi lauseke Lifshitzin kaavaksi:

$$(T_{EB}(r, r))_{33} = \frac{\hbar}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq \sum_{\sigma=s,p} q b e^{-2bd} r_\sigma^+ r_\sigma^- D_\sigma^{-1} \quad (6.24)$$

Yleisemmälle tilalle saadaan yksinkertaisesti tekijä $2\bar{n}_\omega + 1$ kertoimeksi integroinnin sisään. Esim. termiselle tilalle saataisiin kerroin $\coth(\frac{\hbar\omega}{2kT})$, ja siirryttäessä imaginaarisiin taajuuksiin muuntuu integraali residylaskennan mukaan summaksi Matsubaran taajuuksien yli.

Jos lähtökohdaksi otetaan kaikkien virtojen ja varausten sijaan vain vapaiden varauksien antama voimatiheys [25] [34], saadaan yhtälö:

$$\hat{F}_{DB} = \int_V d^3r \hat{f}_f(r) = \int_V d^3r (\hat{\rho}_{e,f}(r) \hat{E}(r) + \hat{J}_f(r) \times \hat{B}(r)) \quad (6.25)$$

Nyt voidaan käyttää Minkowskin jännitystensoria T_{DB} (ks. kappaleet 1.4 ja 5.2). Termien $\langle \hat{E}(r) \otimes \hat{D}(r') \rangle$ ja $\langle \hat{B}(r) \otimes \hat{H}(r') \rangle$ laskemisessa hyödynnetään kappaleen 5.2

tuloksia kyseisille odotusarvoille.

$$\begin{aligned}
Re[F_f] = Re[F_{DB}] = & \frac{\hbar}{\pi} \int_{\partial V} dA(r) u_N(r) \cdot \lim_{r' \rightarrow r} \int_0^\infty d\omega \left(\frac{\omega^2}{c^2} Im(\varepsilon_r(r, \omega) G(r, r', \omega)) + \right. \\
& - Im[\kappa_r(r, \omega) \nabla \times G(r, r', \omega) \times \overleftarrow{\nabla}'] - \frac{I}{2} Tr \left[\frac{\omega^2}{c^2} Im(\varepsilon_r(r, \omega) G(r, r', \omega)) + \right. \\
& \left. \left. - Im[\kappa_r(r, \omega) \nabla \times G(r, r', \omega) \times \overleftarrow{\nabla}'] \right] \right) \quad (6.26)
\end{aligned}$$

Nyt ”sähköinen” osa antaisi lausekkeen $\frac{1}{2}(\langle \hat{E}\hat{D}' \rangle_{33} - \langle \hat{E}\hat{D}' \rangle_{11} - \langle \hat{E}\hat{D}' \rangle_{22}) = \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\omega^2}{2\pi c^2} Im[\varepsilon_r(G_{33} - G_{22} - G_{11})] = -\frac{\hbar}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq Im[\frac{q}{\beta} \mu_r \frac{\varepsilon_r \omega^2}{c^2} f^E]$ (ks. (5.46)). Vastaavasti magneettiselle osalle saadaan $\frac{1}{2}(\langle \hat{B}\hat{H}' \rangle_{33} - \langle \hat{B}\hat{H}' \rangle_{11} - \langle \hat{B}\hat{H}' \rangle_{22}) = \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar}{2\pi} Im[\kappa_r(G_{33}^B - G_{22}^B - G_{11}^B)] = -\frac{\hbar}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq Im[\frac{q}{\beta} \mu_r \kappa_r f^B]$, missä $G^B(r, r', \omega) = \nabla \times G(r, r', \omega) \times \nabla'$. Tulos on siis muutoin sama kuin tensorille T_{EB} , mutta funktion g sähköinen osa saa kertoimekseen ε_r :n ja magneettinen osa κ_r :n. Hyödyntämällä yhtälöä $\kappa_r = \varepsilon_r n^{-2} f^E$:n tapauksessa ja laskemalla osat yhteen saadaan tulos:

$$\begin{aligned}
Re[F_{DB}(r, r)] = & -\frac{A\hbar}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq Im \left[\frac{q}{\beta} \mu_r \left(\frac{\varepsilon_r \omega^2}{c^2} f^E + \kappa_r f^B \right) \right] = \\
& -Im \left[\frac{A\hbar}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq \sum_{\sigma=s,p} q b e^{2i\beta d} r_\sigma^+ r_\sigma^- D_\sigma^{-1} \right] \quad (6.27)
\end{aligned}$$

Tämä on täsmälleen Lifshitzin kaava. Se ei kuitenkaan anna samaa tulosta kuin jos levyjen välillä olisi tyhjiö, sillä Fresnelin kertoimet riippuvat levyjen välisen väliaineen ominaisuuksista.

Puhtaan SM-kentän jännitystensoria on käytetty laskemaan Casimirin voima sellaisessa tapauksessa, jossa levyjen välillä on jokin väliaine, jolla on sekä sähköinen että magneettinen vaste [33]. Voiman laskemiseksi pitää ensin tarkastella hieman monimutkaisempaa tapausta: tehdään materiaalista viisikerroksinen ja merkitään kutakin kerrosta indeksillä $j = 0, 1, 2, 3, 4$. Materiaalit 1 ja 3 ovat samoja kuten myös seinämät 0 ja 4. Keskimmäinen kerros on ohut hyvin heijastava levy. Greenin funktioiksi saadaan samanlaiset esitykset kuin ennenkin (ks. kappale A.3). Jos systeemi on termodynaami-

nessa tasapainossa, voidaan levyyn (= 2) vaikuttava voima laskea suoraan pintaintegraalina $F(r) = \int_{\partial V} dA u_N(r) \cdot T(r)$. Tulokseksi saadaan g_3 :n ja g_1 :n erotus samalla pinnalla. Materiaalien 1 ja 3 funktiot $g_{1,3}$ on määritelty kuten kaavassa (6.22). Levyn pinnat ovat yhdensuuntaisia, joten jos levy on lisäksi äärettömän ohut, saadaan hyvä approksimaatio:

$$F = F_3 = -\frac{A\hbar}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq \frac{q\mu(i\omega)}{b(i\omega, q)} (g_3(0, 0, q, i\omega) - g_1(d_1, d_1, q, i\omega)) \quad (6.28)$$

Sijoittamalla g :n lausekkeet tulee yhtälöstä:

$$F = -\frac{A\hbar}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq \frac{q\mu_r}{b} \sum_{\sigma=s,p} (2(D_{3\sigma}^{-1} - D_{1\sigma}^{-1})(-b^2(1+n^{-2}) + K_\sigma q^2(1-n^{-2})) + K_\sigma(q^2 - b^2)(1-n^{-2}) \left[\frac{r_\sigma^{1/2} + r_\sigma^{3+} e^{-2bd_3}}{D_{3\sigma}} - \frac{r_\sigma^{1/2} + r_\sigma^{1-} e^{-2bd_1}}{D_{1\sigma}} \right]) \quad (6.29)$$

Tässä pätee $K_\sigma = -1$, kun $\sigma = s$ ja $K_\sigma = +1$, kun $\sigma = p$. Lisäksi on oletettu, että Fresnelin kertoimet $r_\sigma^{1+} = r_\sigma^{3-}$, eli että levy heijastaa samoin molempiin suuntiin. Summan viimeistä termiä voidaan arvioida, kun huomataan, että $D_{j\sigma} = 1 - r_\sigma^{1/2} r_\sigma^{j\pm} e^{-2bd_j}$, jolloin

$$\frac{r_\sigma^{3+} e^{-2bd_3}}{D_{3\sigma}} - \frac{r_\sigma^{3+} e^{-2bd_3}}{D_{3\sigma}} \approx \frac{1}{r_\sigma^{1/2}} (D_{3\sigma}^{-1} - D_{1\sigma}^{-1})$$

Lopulta saadaan lauseke:

$$F = -\frac{A\hbar}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq \frac{q\mu_r}{b} \sum_{\sigma=s,p} (D_{3\sigma}^{-1} - D_{1\sigma}^{-1})(-2b^2(1-n^{-2}) + 2K_\sigma q^2(1-n^{-2}) + K_\sigma(q^2 - b^2)(1-n^{-2})[r_\sigma^{1/2} + (r_\sigma^{1/2})^{-1}]) \quad (6.30)$$

Jos vielä oletetaan, että heijastukset ovat melkein täydellisiä, pätee $r_\sigma^{1/2} = K_\sigma = r_\sigma^{1+} = r_\sigma^{3-}$. Yhtälön viimeisen termin viimeinen kerroin saa muodon K_σ . Nyt $K_\sigma^2 = 1$ ja lisäksi

D_σ -termit tulevat riippumattomiksi polarisaatiosta. Tekemällä summaus päädytään tulokseen:

$$F = -\frac{A\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq \frac{q\mu_r}{b} (D_{3\sigma}^{-1} - D_{1\sigma}^{-1})(-b^2 + \frac{1}{2}q^2(1 - n^{-2})) \quad (6.31)$$

Seuraavaksi muunnetaan taajuus uudeksi u -muuttujaksi kaavalla $u = n\omega/c$ ja (q, u) edelleen polaarisiin koordinaatteihin $u = r\cos(\theta)$, $q = r\sin(\theta)$. Integrintialue muuntuu $[0, \pi/2] \times [0, \infty]$:ksi. Tämä muunnos ei helpottaisi laskemista väliaineen ollessa dispersiivinen. Sen sijaan jos oletetaan, että väliaineen SM-vaste on vakio alueissa 1 ja 3, saadaan muunnoksella helpohko integraali:

$$F = -\frac{A\hbar c}{n\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty dr \frac{r\sin(\theta)\mu_r}{b} (D_{3\sigma}^{-1} - D_{1\sigma}^{-1})(-r^2 + \frac{1}{2}r^2\sin^2(\theta)(1 - n^{-2})) \quad (6.32)$$

Theetasta riippuva osa voidaan integroida erikseen, jolloin integrandin sisään jää kerroin $-\frac{2}{3} - \frac{1}{3n^2}$. Ongelmaksi jäävät termit eivät konvergoi mutta muuntamalla D -tekijät kaavalla $D_{j\sigma}^{-1} = (1 - e^{-2d_j r})^{-1} = 1 + (e^{2d_j r} - 1)^{-1}$ saadaan divergoivat termit vähennettyä toisistaan. Lasketaan integraali $\int_0^\infty r^3(e^{2d_j r} - 1)^{-1} = \frac{\pi^4}{240d_j^4}$ ja sijoitetaan se yhtälöön. Kirjoitetaan lisäksi vakiopermeabiliteetti ja -permittiivisyys kaavaan, jolloin saadaan tulos:

$$F = \frac{-A\hbar c\pi^2}{480} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} + \frac{1}{3\varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \right) \left(\frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d_3^4} \right) \quad (6.33)$$

Oletus SM-vasteen vakioarvoista pitää paikkansa esim. siinä tapauksessa, kun etäisyydet seinämistä oletetaan suuriksi. Tällöin d_1 ja d_3 integrandin eksponenttitekijöissä on niin suuri, että tarvitsee huomioida vain hyvin matalat taajuudet, jolloin voidaan approksimoida $\varepsilon_r \approx \varepsilon_r(0)$ ja $\mu_r \approx \mu_r(0)$. Kun annetaan d_3 :n lähestyä ääretöntä päästään eroon toisesta termistä ja saadaan tulos $F = \frac{-A\hbar c\pi^2}{480} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} + \frac{1}{3\varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \right) \frac{1}{d_1^4}$. Minkowskin tensori antaisi taas ei-magneettiselle materiaalille tuloksen $F = \frac{-A\hbar c\pi^2}{240d_1^4 \sqrt{\varepsilon_r}}$. Näin saadut kaavat ovat luonnollisesti vain karkeita approksimaatioita Casimirin voimasta, sillä yhtälöissä ei ole huomioitu dispersiota lainkaan, vaan on oletettu taajuudesta riippumaton SM-vaste. Tyhjiön tapauksessa saataisiin Casimirin johtama kaava. Kaavoista huomataan

valitsemalla $\mu_r = 1$, kuinka Minkowskin tulkinta antaa aina suuremman itseisarvon voimalle vapaan kentän jännitystensorin avulla saatuun nk. Raabe-Welschin voimaan verrattuna [33].

Kysymys oikean tensorin valinnasta perustuu SM-kentän ja väliaineen osuuden oikeanlaiseen erottamiseen toisistaan. Esim. valinnassa (5.45) on kyseessä puhdas SM-kentän tensori, kun taas Minkowskin tensori ottaa huomioon myös väliaineen vasteen. Tensorin valinnasta riippuen saadaan voimaksi joko kokonaisvoimatiheys f tai vapaa voimatiheys f_f (ks. kappale 1.4). Ensimmäinen huomioi kaikki varaukset ja virrat, kun taas jälkimmäiseen sisältyy vain vapaan virran ja varauksen vaikutus.

7 Positiivinen Casimirin voima

Tarkastellun geometrian Casimirin voima voidaan saada positiiviseksi ainakin kahdella eri tavalla: 1. Levyjen välinen avaruus voidaan täyttää väliaineella, jonka SM-vaste suunnitellaan sellaiseksi, että integrandit edellisissä yhtälöissä saavat positiivisia arvoja tarpeeksi laajalla taajuusalueella. 2. Valitsemalla sellaiset väliaineet rajapinnoille, joille (dispersiiviset) Fresnelin kertoimet muuntuvat niin, että integraalit vaihtavat merkkiään, saadaan aikaan positiivinen Casimirin voima.

7.1 Väliaine peilien välissä

Ensimmäisessä tapauksessa ongelmaksi muodostuu oikean jännitystensorin valinta. Kirjallisuudesta löytyy erilaisia käsityksiä siitä, mikä tensori pitäisi valita kuvaamaan SM-kenttää sähkömagneettisesti aktiivisessa väliaineessa [35]. Esim. Rosa, Milonni ja Tomas käyttävät Minkowskin energiaimpulssitensoria, kun taas Raabe, Scheel ja Buhmann pitäytyvät vapaan SM-kentän energiaimpulssitensorissa.

Jos käytetään Lorentzin voimaa, joudutaan ottamaan huomioon kaikki varaustheydet ja virrat. Tätä vastaava jännitystensori sisältää vain vapaan SM-kentän komponentit. Kappaleen 5 ja 1.4 mukaan energiaimpulssitensorin liikemäärävuota kuvaava osa on vapaan SM-kentän tapauksessa $p_{EB} = \kappa_0 E \times B$ ja Minkowskin tensoril-

le $p_{DB} = D \times B = \frac{\varepsilon}{\kappa_0} p_{EB}$. Energiavuot saavat taas esitykset $S_{EB} = \kappa_0 E \times B$ ja $S_{DB} = E \times H = \mu_r p_{EB}$. Energiainpulssitensorien avaruudelliset osat eroavat polari-soituman ja magnetisoituman verran (ks. kaava (5.45)). Negatiivisen metamateriaalin tapauksessa sekä liikemäärävuoto, energiavuoto että jännitystensori vaihtavat etumerkkiä vapaan SM-kentän tulkinnassa. Tämä johtuu aaltovektorin yhtälöstä $k = \frac{n-\omega}{c} e(k)$, jossa E, B, k muodostavat vasenkätisen systeemin. Sekä liikemäärävuoto että energiavuoto vaihtavat etumerkkiä klassisen SM-kentän tulkinnassa vasenkätiselle metamateriaalille, sillä aaltovektorin merkki vaihtuu. Sen sijaan Minkowskin liikemäärä- ja energiavuoto ovat k :n suhteen vastakkaisuuntaiset. Niinpä niille tulee sama suunta kuin oikeakätisillekin materiaaleille. Samalla tavoin Minkowskin jännitystensori säilyttää oikeakätisen orientaation suhteessa kenttiin.

Jos valitaan täydellisesti heijastavat peilit ja väliaineeksi vasenkätinen metamateriaali, säilyttäisi Minkowskin tulkinta Casimirin voiman edelleen negatiivisena. Sen sijaan vapaan SM-kentän tulkinta vaihtaisi sen merkin positiiviseksi.

Minkowkin tensoria käyttämällä saadaan tuttu Lifshitzin kaava voimalle:

$$F = -\frac{A\hbar}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dqqb \sum_{\sigma=s,p} \frac{r_\sigma^+ r_\sigma^- e^{-2bd}}{1 - r_\sigma^+ r_\sigma^- e^{-2bd}} \quad (7.1)$$

b_\pm , D_σ ja Fresnelin kertoimet $r_{\sigma\pm}$ on määritelty liitteen A lopussa (Fresnelin kertoimien taajuusmuuttuja on imaginaarinen). Nyt levyjen välissä ei ole tyhjiö, joten b saa hie-man erilaisen muodon: $b = \sqrt{n^2\omega^2/c^2 + q^2}$. On siis tutkittava, milloin integrandi saa negatiivisia arvoja.

Kun oletetaan väliaineiden SM-vaste puhtaasti sähköiseksi, saadaan ehdoiksi negatiiviselle integrandille: $r_\sigma^+ r_\sigma^- < 0$. Kun valitaan permittiivisyydet epäyhtälön

$$\varepsilon_- < \varepsilon < \varepsilon_+ \quad (7.2)$$

mukaan, saadaan tulos $\varepsilon_r^2 b^2 < \varepsilon_r^2 b_-^2$. Tulos seuraa jakamalla väliaineen suhteellisella permittiivisyydellä ε_r ja identifioimalla yksittäiset termit epäyhtälöstä; $\frac{\varepsilon_r^-}{\varepsilon_r^2} q^2 < q^2$, $\varepsilon_{r-} \frac{\varepsilon_r^- \omega^2}{c^2} < \varepsilon_{r-} \frac{\omega^2}{c^2}$. Siispä $r_p^- < 0$ aina, kun permittiivisyysehto on voimassa. Sa-

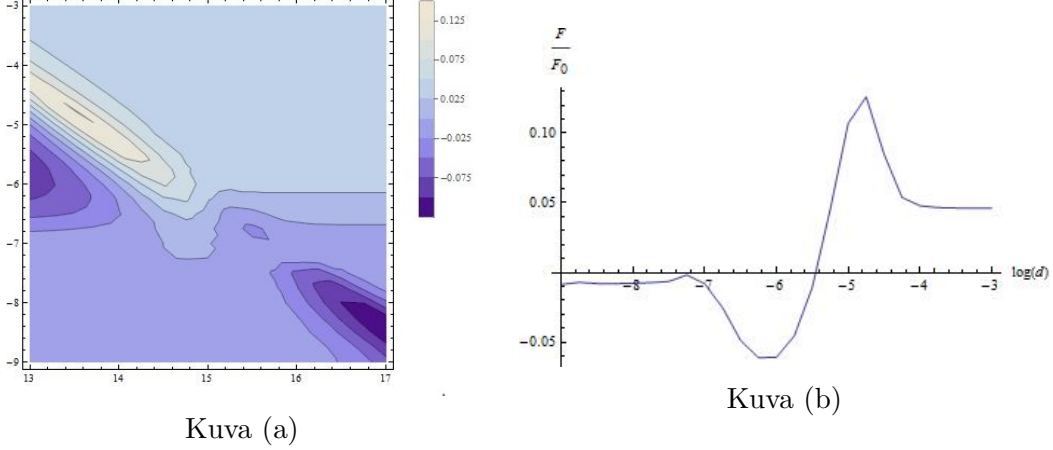
manlaisella analyysillä saadaan tulos toisen seinämän heijastuskertoimella: $r_p^+ > 0$. Ehdosta (7.2) seuraa siten epäyhtälö $r_p^- r_p^+ < 0$. s -polarisaation heijastuskerrointen merkit saadaan vieläkin yksinkertaisemmin. $b^2 - b_-^2 = \varepsilon_r \omega^2 / c^2 + q^2 - \varepsilon_{r-} \omega^2 / c^2 - q^2 > 0$ ja $b^2 - b_+^2 = \varepsilon_r \omega^2 / c^2 + q^2 - \varepsilon_{r+} \omega^2 / c^2 - q^2 < 0$, eli $r_p^- > 0$ ja $r_p^+ > 0$, joten $r_p^+ r_p^- < 0$ ehdon (7.2) oleessa voimassa.

Vaihtamalla seinämien $+$, $-$ paikat saadaan vastaava tulos Fresnelin heijastuskerrointen tulojen merkille, eli ne pysyisivät negatiivisina valittaessa $\varepsilon_+ < \varepsilon < \varepsilon_-$. Kun valitaan sellaiset väliaineet, että ehto täyttyy tarpeeksi laajalla taajuusalueella, vaihtuu Casimirin voima negatiivisesta positiiviseksi. Tällainen aineyhdistelmä voi olla esim. kulta + bromibentseeni + pioksidi [36]. Sekä bromibentseeniä että pioksidia approksimoidaan plasmamallilla, jossa on kaksi termiä: toinen on IR-alueella ja toinen UV-taajuudella. Kullan permittiivisyydeksi taas valitaan Druden malli, jossa on hyvin pieni vaimenemisvakio ja resonanssitaajuus sijaitsee UV-alueella.

Tapaus voidaan yleistää sallimalla levyjen väliselle materiaalille myös magneettinen SM-vaste. Tekemällä samanlainen analyysi Fresnelin kerrointen etumerkeille kuin edellä löydetään ehdot positiiviselle Casimirin voimalle. Esim. p -polarisaation heijastuskerroin vaihtaa merkkiään, kun $\varepsilon_+^2 b^2 < \varepsilon_-^2 b_+^2$ eli $\varepsilon_+^2 (\frac{\varepsilon_r \mu_r \omega^2}{c^2} + q^2) < \varepsilon_-^2 (\frac{\varepsilon_{r,+} \mu_{r,+} \omega^2}{c^2} + q^2)$. Vain hyvin pienet aaltovektorin arvot q tarvitsee ottaa huomioon, joten saadaan ehto $\varepsilon_+ \mu < \varepsilon \mu_+$. Jos taas haluttaisiin toinen p polarisaation Fresnelin heijastuskerroin negatiiviseksi, saadaan samalla menetelmällä ehto $\varepsilon_- \mu < \varepsilon \mu_-$. Jotta Lifshitzin kaavassa esiintyvä tulo $r_p^+ r_p^-$ vaihtaisi merkkiä, pitää tietysti vain toisen kertoimen vaihtaa etumerkkiä. Analyysi voidaan toistaa s -polarisaation heijastuskertoimille, ja tulokset ovat täsmälleen samat kuin p -polarisaation tapauksessa. Yhteensä saadaan siis ehto:

$$\begin{aligned} \varepsilon_+ \mu < \varepsilon \mu_+ \text{ ja } \varepsilon_- \mu > \varepsilon \mu_- \\ \text{tai} \\ \varepsilon_+ \mu > \varepsilon \mu_+ \text{ ja } \varepsilon_- \mu < \varepsilon \mu_- \end{aligned} \tag{7.3}$$

Tätä ehtoja voidaan tutkia määrittelemällä funktiot $f_1 = \varepsilon_+ \mu - \varepsilon \mu_+$ ja $f_2 = \varepsilon_- \mu - \varepsilon \mu_-$. Kun funktiot ovat erimerkkiset tarpeeksi laajalla taajuusalueella, saadaan positiivinen



Kuva 6: a) Drudemainen metalli + metamateriaali + piiksidi eri resonanssitaajuuksien arvoilla. x -akseli antaa kymmenkantaisen logaritmin resonanssitaaajuudesta $\omega_{e,m}$ ja y -akseli etäisyydestä. Voima on skaalattu ideaalisen Casimirin voiman suuruudella. b) Casimirin voima etäisyyden logaritmin funktiona, kun $\omega_e = \omega_m = 10^{13.5}$ Hz.

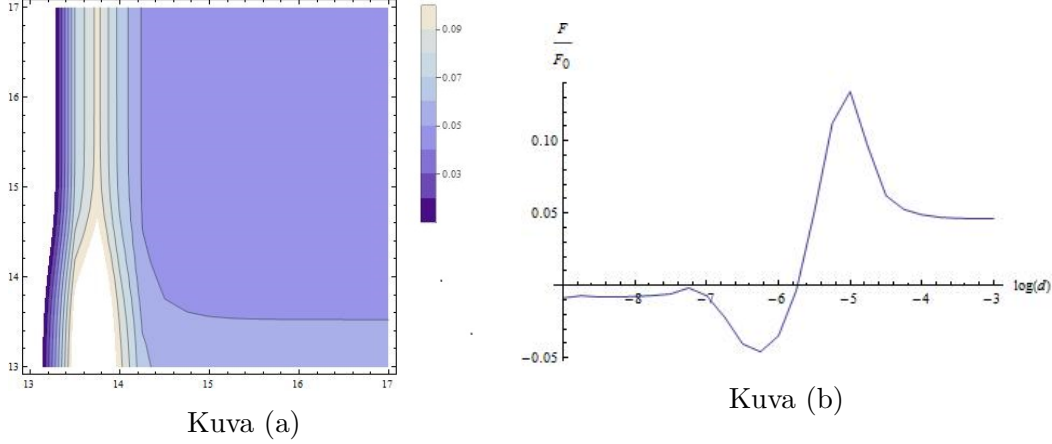
Casimirin voima. Jos valittaisiin ei-magneettiset väliaineet, pelkistyisi ehto Pirozhenkon analysoimaan tapaukseen.

Valitaan metalliksi ($-$) ei-magneettinen Drude-metalli ja toiseksi seinämäksi ($+$) piioksidi. Metallin permittiivisyys (imaginaaritaajuuksilla) saadaan kaavalla $\varepsilon_- = \varepsilon_0(1 + \frac{\omega_-^2}{\omega^2 + \gamma_- \omega})$, jossa $\omega_- = 10^{16}$ Hz ja $\gamma_- = 10^{13}$ Hz (ks. [37]). Piioksidin permittiivisyys saadaan ”kaksinkertaisella” plasmamallilla; $\varepsilon_+ = \varepsilon_0(1 + \frac{C_{IR}^+}{1 + (\omega/\omega_{IR}^+)^2} + \frac{C_{UV}^+}{1 + (\omega/\omega_{UV}^+)^2})$. Nyt $C_{IR}^+ = 0.829$, $C_{UV}^+ = 1.098$, $\omega_{IR}^+ = 0.867 \cdot 10^{14}$ Hz ja $\omega_{UV}^+ = 2.034 \cdot 10^{16}$ Hz; arvot on saatu alan taulukoista. Metamateriaalin permittiivisyys saadaan kaavalla $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 + \omega_e^2 + \gamma_e \omega})$ ja permeabiliteetti yhtälöllä $\mu = \mu_0(1 - \frac{0.25\omega^2}{\omega^2 + \omega_m^2 + \gamma_m \omega})$, eli tämä vasta kappaleen 4.4 tapausta, mihin on lisätty resistiiviset elementit väliainetta mallintaviin virtapiireihin. Parametrit saadaan laskettua resonanssitaaajuudesta ($\omega_m = \omega_e$) seuraavasti: $\Omega_{e,m}/\omega_{e,m} = 10$, $\gamma_{e,m}/\omega_{e,m} = 0.1$ artikkelin [20] tapaan. Annetaan resonanssitaaajuuden vaihdella välillä $[10^{13}$ Hz, 10^{17} Hz] ja etäisyyden välillä yhdestä nanometrillä yhteensä millimetriin ja lasketaan suhteellinen Casimirin voima Mathematicalla taajuuden ja etäisyyden kaikilla eri arvoilla logaritmisesti haarukoiden askelin $\Delta\omega_e = 10^{0.25}\omega_e$ ja $\Delta d = 10^{0.25}d$. Positiiv-

vinen alue muodostaa kapean ja pitkulaisen n. 45 astetta kierretyn ellipsin kuvan 6a vasemmassa yläkulmassa. Voima on maksimissaan 0.126 ideaalisen tapauksen voiman itseisarvon suuruinen parametrien ollessa $\omega_{e,m} = 10^{13.5}\text{Hz}$ ja $d = 10^{-4.75}\text{m}$. Casimirin voima etäisyyden funktiona edellisellä resonanssitaaajuuden arvolla muuttuu positiiviseksi, kun $d > 4 \cdot 10^{-6}$ (ks.kuva 6b). Vaikka Casimirin voima pienillä etäisyyksillä antaa laskennallisesti oikean tuloksen, ei tämä usein ole fysikaalisesti mahdollista, sillä tarvittavan metamateriaalin yksikkökopin koko olisi suurempi kuin levyjen välinen etäisyys.

Kiinnitetään levyjen etäisyys kymmeneen mikrometriin ja lasketaan suhteellinen Casimirin voima eri resonanssitaaajuuksien arvoilla $\omega_m, \omega_e \in [10^{13}\text{Hz}, 10^{17}\text{Hz}]$, kun molemmat taaajuudet vaihtelevat itsenäisesti (ks. kuva 7a). Kaikki SM-vasteet ovat samanmuotoisia funktioita kuin edellä, vain parametrit vaihtelevat. Lasketaan tapaus numeerisesti Mathematicalla, jolloin maksimivoima saavutetaan arvoilla $\omega_e = 10^{13.75}\text{Hz}$ ja $\omega_m = 10^{13}\text{Hz}$. Tällöin suhteellinen voima on 0.134, eli vain hieman suurempi kuin edellisen tapauksen maksimivoima. Laskettaessa Casimirin voima etäisyyden funktiona näillä taaajuusparametreilla saadaan suurimmaksi arvoksi 0.134 ideaalisen voiman suuruudesta ja se saavutetaan kymmenen mikrometrin etäisyydellä (ks. kuva 7b). Casimirin voima vaihtuu positiiviseksi noin kaksi mikrometriä suuremmilla etäisyyksillä.

Hiukan erilaisella lähestymistavalla - muuntamalla väliaineen avaruus konformaalisella kuvauksella, joka vastaisi väliaineen SM-vasteen vaikutusta [38] - on saatu mielenkiintoisia tuloksia. Näiden mukaan täytettäessä tyhjä väli sähköisesti aktiivisella materiaalilla, jonka permittiivisyys noudattaa yksinkertaista Lorentzin mallia, saadaan positiivinen Casimirin voima. Parametrit valitaan sopivasti ja positiivisen γ :n annetaan lähestyä nollaa; sähköisellä vasteella on siten pieni kenttää vahvistava tekijä. Kentän vahvistus kuitenkin aiheuttaisi esim. häiriövirtaoperaattoreiden odotusarvojen kasvamisen rajatta, joten on epäselvää, voidaanko tulosten laskemiseen käyttää suoraan Lifshitzin kaavaa. Leonhardtin käsittelytapa nojaa levyjen väliseen nk. teholliseen leveyteen a' . Tämä riippuu metamateriaalista muodostuvan osan leveydestä b ja imaginaarisesta taaajuudesta ω kaavalla $a'(\omega) = a - b + b/\varepsilon_r(i\omega)$. Kun $a < 2b$ voi a' saada negatiivisia arvoja. Negatiivinen tehollinen leveys a' saavutetaan, kun permittiivisyys on tarpeeksi negatiivinen. Tämän saavuttamiseksi on käytetty käänteistä Lorentzin mallia,



Kuva 7: a) Drudemainen metalli + metamateriaali + piioksidi eri resonanssitaajuuksien arvoilla. x -akseli antaa kymmenkantaisen logaritmin sähköisestä resonanssitaajuudesta ω_e ja y -akseli resonanssitaajuudesta ω_m . Voima on skaalattu ideaalisen Casimirin voiman suuruudella. b) Casimirin voima etäisyyden logaritmin funktiona, kun $\omega_e = \omega_m = 10^{13.5}$ Hz.

jossa siis polarisoitumaosan edessä on eri etumerkki. Tällöin kuitenkin permittiivisyyden imaginaariosa olisi negatiivinen, eli se ei olisi absorptiivinen - malli on siis varsin kyseenalainen. Positiivinen voima saataisiin Leonhardtin mukaan myös absorptiivisella sähköisesti inertillä magn. aktiivisella materiaalilla, kun permeabiliteetiksi valitaan Druden mallin mukainen funktio siten, että imaginaarisilla taajuuksilla olisi $\mu_r > \epsilon_r$ tarpeeksi laajalla taajuusalueella. Leonhardtin artikkelin Casimirin voiman laskennalliset arvot pienillä etäisyyksillä $d < 10^{-6}$ m ovat lähinnä vain teoreettisia, sillä metamateriaalin yksikkökoppi olisi näillä resonanssitaajuuksilla sitä suurempi, joten se ei mahtuisi levyjen väliin.

Lifshitzin kaavan sijasta on esitetty, että väliaineen täyttäessä levyjen välin voitaisiin käyttää nk. Raabe-Welschin kaavaa [33] (kaava 86). Tämä kaava perustuu Lifshitzin käyttämän Minkowskin jännitystensorin sijasta vapaan SM-kentän jännitystensoriin

(5.45).

$$F = \frac{A\hbar}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq \frac{q\mu_r}{b} \sum_{\sigma=s,p} \left(\frac{r_\sigma^- r_\sigma^+ e^{-2db}}{1 - r_\sigma^- r_\sigma^+ e^{-2db}} (-2b^2(1 + n^{-2}) + 2K_\sigma q^2(1 - n^{-2})) \right. \\ \left. + K_\sigma (q^2 - b^2)(1 - n^{-2}) \frac{r_\sigma^+ + r_\sigma^- e^{-2bd}}{1 - r_\sigma^- r_\sigma^+ e^{-2db}} \right) \quad (7.4)$$

Tässä on siis oletettu, että levyn toisella puolella ei ole peiliä. Toisen termin osoittajan r_σ^+ voidaan jättää pois, sillä se kumoutuisi levyn toiselta puolelta tulevilla vastaavansuuruisilla erimerkkisillä termeillä realistisessa systeemissä. Jos oletetaan täydellinen heijastavuus sekä levyille että peilille, saadaan tulos $r_\sigma^\pm = K_\sigma$ ja sijoitus edelliseen kaavaan antaa yhtälön:

$$F = \frac{A\hbar}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq \frac{q\mu_r}{b} \frac{e^{-2db}}{1 - e^{-2db}} (-8b^2 + 4q^2(1 - n^{-2})) \quad (7.5)$$

r_σ^+ -termin poistamisen jälkeenkin kaava on ongelmallinen, sillä se voi antaa ideaalista Casimirin voimaa pienemmän tuloksen ($F_{EB} < -|F_0|$) esim. Drude-Lorentzin mallin mukaiselle metamateriaalille peilien välissä. Vaikkapa arvoilla $\omega_{e,m} = 10^{14}\text{Hz}$ ja $d = 10^{-6}\text{m}$ saadaan Mathematicalla Casimirin voimaksi $F = -2.16 \cdot F_0$. Oikea tulkinta tästä nk. Raabe-Welschin kaavasta lienee, että se kuvaa levyihin vaikuttavien voimien lisäksi väliaineen sisäisiä voimia [39]. Nämä sisäiset voimat voivat saada suuriakin arvoja, mutta ne eivät vaikuta itse levyihin. Siksi tulee pitäytyä Lifshitzin kaavassa.

Lifshitzin kaavan merkki ei vaihdu, vaikka täydellisesti heijastavien peilien väliin laitetaan vasenkätinen metamateriaali. Tämä johtuu kaavan riippuvuudesta puhtaasti taittekoimen neliöstä, joka on aina positiivinen imaginaarisilla taajuuksilla passiivisille materiaaleille. Kaava voitaisiin laskea myös aktiivisille metamateriaaleille ($\varepsilon_I, \mu_I < 0$), jolloin se antaa edelleenkin samanmerkkisen Casimirin voiman, mutta nyt sen suuruus voi saada teoreettista minimiä pienempiä tuloksia. Tämä seuraa suoraan tekijän b käyttäytymisestä. Jos valitaan esim. käänteinen Drude-Lorentzin malli SM-vasteille, eli vaihdetaan plasmataajuuden edessä oleva etumerkki negatiiviseksi ($(\varepsilon_r, \mu_r)(i\omega) =$

$1 - \frac{\Omega_{e,m}^2}{\omega^2 + \omega_{e,m}^2 + \gamma_{e,m}\omega}$)), saadaan sekä ε_r :n että μ_r :n arvot ykköstä pienemmiksi imaginaarisilla taajuuksilla. Siten tekijä b saa pienempiä arvoja kuin tyhjiön tapauksessa, joten integrandin arvot ovat tyhjiön tapausta suuremmat. Tämän lähestymistavan ongelmana on kvantittumisen määrittely vahvistaville systeemeille sekä Greenin tensorin analyyttisyysvaatimuksen täyttyminen. Kun SM-vasteiden imaginaariosat ovat positiivisia, on niillä napoja integrointireitin sisäpuolella eikä Greenin funktion integraalia voida muuntaa imaginaaritaajuuksille ilman niiden huomioon ottamista.

7.2 Tyhjiö peilien välissä

Toinen tapa on enemmän tutkittu, ja tälle tapaukselle on myös arvioitu teoreettiset rajat Casimirin voiman suuruudeksi. Seinien oletetaan jatkuvan äärettömyyksiin kohtisuoraan tyhjästä keskikerroksesta pois päin, joten Fresnelin kertoimissa ei tarvitse ottaa huomioon seinämien leveyttä. Voima saadaan laskettua tutulla Lifshitzin kaavalla:

$$F = -\frac{A\hbar}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dq qb \sum_{\sigma=s,p} \frac{r_\sigma^+ r_\sigma^- e^{-2bd}}{1 - r_\sigma^+ r_\sigma^- e^{-2bd}} \quad (7.6)$$

Symbolit b_\pm , D_σ ja Fresnelin kertoimet r_σ^\pm on määritelty liitteen A lopussa (Fresnelin kertoimien taaajuusmuuttuja on imaginaarinen). Nyt vapaan SM-kentän energiaimpulssitensoriin perustuva nk. Raabe-Welschin voima F_{EB} saa saman lausekkeen kuin Lifshitzin kaavakin. On tutkittava, milloin integrandi saa negatiivisia arvoja. Ehdoksi saadaan siten, että $r_\sigma^+ r_\sigma^- < 0$ tarpeeksi suuressa integrointialueessa.

Tarkastellaan erikoistapausta, jossa toinen seinämä on vain magneettisesti aktiivinen ja toisen vaste on puhtaasti sähköinen; ts. $\mu_{r-} = 1 = \varepsilon_{r+}$. Integrandi muuttuu negatiiviseksi seuraavien ehtojen täytyessä:

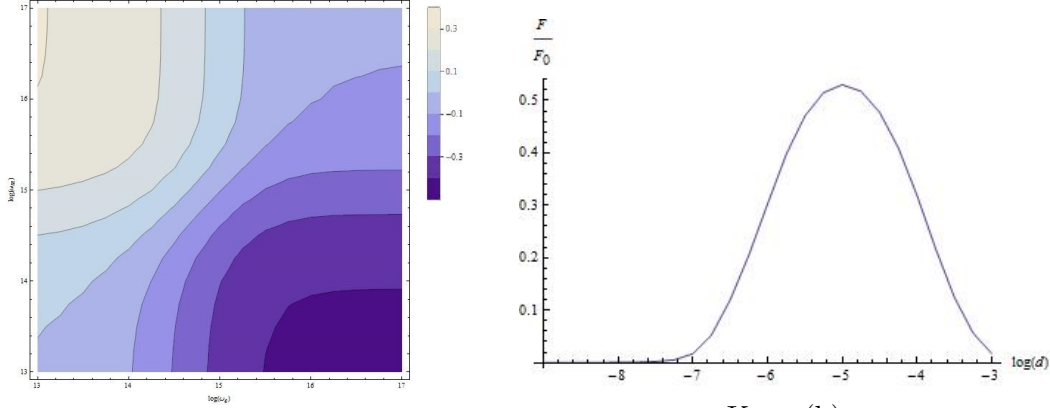
$$\mu_{r+}^2(\omega^2/c^2 + q^2) < \omega^2\mu_{r+}/c^2 + q^2, \quad \varepsilon_{r-}^2(\omega^2/c^2 + q^2) < \omega^2\varepsilon_{r-}/c^2 + q^2$$

Jos molemmat seinämät vielä heijastavat täydellisesti, eli $\mu_{r+}, \varepsilon_{r-} \rightarrow \infty$, saadaan raja ideaaliselle tapaukselle; integrointi antaa tuloksen $F = (-\frac{7}{8})\frac{A\hbar c\pi^2}{240d^4}$ [40].

Oletetaan toinen aine ei-magneettiseksi metalliksi ja toinen seinämä metamateriaaliksi, jolla on sekä tyhjiöstä poikkeava sähköinen että magneettinen vastefunktio. Metallin ($\mu_- = \mu_0$) permittiivisyyttä mallinnetaan Druden kaavalla $\varepsilon_-(\omega) = \varepsilon_0(1 - \frac{\Omega_-^2}{\omega^2 - i\gamma_- \omega})$. Metamateriaali taas saa permeabiliteetin, joka noudattaa yksinkertaista Drude-Lorentzin kaavaa: $\mu_+(\omega) = \mu_0(1 - \frac{\Omega_{m,+}^2}{\omega^2 - \omega_{m,+}^2 + i\gamma_{m,+}\omega})$. Metamateriaalin permittiivisyys saa samanlaisen kaavan: $\varepsilon_+(\omega) = \varepsilon_0(1 - \frac{\Omega_{e,+}^2}{\omega^2 - \omega_{e,+}^2 + i\gamma_{e,+}\omega})$. Parametrit $\gamma_{e,m,\pm}$ kuvaavat absorptiota ja $\omega_{e,m,\pm}$ aineen resonanssitaajuuksia ja jatkossa valitaan $\omega_{e,m}/\Omega_{e,m} = 0.1$ ja $\gamma_{e,m}/\omega_{e,m} = 0.1$.

Integraali vaihtaa merkkiä, kun sekä $r_s^+ r_s^- < 0$ että $r_p^+ r_p^- < 0$ tarpeeksi laajalla taajuusalueella. Ehto $r_s^- < 0$ on voimassa aina, kun $b < b_-$. Koska metallin permittiivisyys on suurempi kuin yksi imaginaarisilla taajuuksilla, pätee tämä ehto aina ($\omega^2/c^2 + q^2 < \varepsilon_r \omega^2/c^2 + q^2 \forall \omega \in \mathbb{R}_+$). Jotta Fresnelin vakioiden tulo olisi negatiivinen, pitää nyt seuraavan ehdon olla voimassa: $r_s^+ > 0 \Leftrightarrow \omega^2/c^2 > \frac{\varepsilon_{+r}}{\mu_{+r}} \omega^2/c^2 + (\mu_{r+}^{-2} - 1)q^2$. Ottamalla huomioon integrandin eksponenttitekijä $e^{-2d\sqrt{\omega^2/c^2 + q^2}}$ huomataan, että suurilla q :n arvoilla integrandi lähenee nopeasti nollaa. Siksi voidaan olettaa aaltovektorin q olevan hyvin pieni ($q \ll \omega/c$) ja jättää se siten huomiotta. Ehdoksi tulee lopulta: $\mu_+ > \varepsilon_+$. Samanlaisella käsittelyllä huomataan toisen Fresnelin kerrointen tulon tapauksessa, kuinka ensinnäkin $r_p^- > 0$, sillä $\varepsilon_{r-}^2 b^2 > \varepsilon_r \omega^2/c^2 + q^2 \forall \omega > 0$. Niinpä tulee vaatia ehtoa $r_p^+ < 0$, eli että $\varepsilon_{r+} b < b$. Tästä saadaan s -polarisaation tapauksen mukaisella analyysillä approksimatiivinen ehto $\mu_{r+} > \varepsilon_{r+}$. Ehto on siis sama molemmilla polarisaatioilla ja se tarkoittaa sitä, että metamateriaalin tulee olla pääasiassa ”magneettinen”. Valitsemallemme SM-vasteen mallille tämä tarkoittaisi ehtoa $\omega_{m+} > \omega_{e+}$.

Valitaan Drudemaisen metallin plasmataajuus IR-alueelta ($\omega_- = 10^{16}$ Hz ja $\gamma_- = 10^{12}$ Hz, mikä vastaa tyypillisiä ei magneettisia metalleja) sekä levyjen välinen etäisyys yhdeksi mikrometriksi ja lasketaan Casimirin voima numeerisesti Mathematicalla eri resonanssitaajuuksien arvoilla (kuva 8a). Metamateriaalin magneettinen ja sähköinen resonanssitaajuus vaihtelee välillä $[10^{13}, 10^{17}]$ Hz. Kuten aiemmin jo oletettiin, Casimirin voiman merkki vaihtuu positiiviseksi, kun magneettinen taajuus on sähköistä suurempi. Maksimissaan saadaan positiivinen Casimirin voima, jonka arvo on lähes 30



Kuva (a)

Kuva (b)

Kuva 8: a) Drudemainen metalli + metamateriaali eri resonanssitaajuuksien arvoilla. x -akseli antaa kymmenkantaisen logaritmin sähköisestä ja y -akseli magneettisesta resonanssitaajuudesta. Voima on skaalattu ideaalisen Casimirin voiman suuruudella. b) Casimirin voima etäisyyden logaritmin funktiona, kun $\omega_e = 10^{13}$ Hz ja $\omega_m = 10^{17}$ Hz.

prosenttia ideaalisen tapauksen (negatiivisen) voiman suuruudesta.

Kun resonanssitaajuudet valitaan oikein, saadaan siis Casimirin voiman merkki vaihdettua (ks. kuva 8a). Tällöin suurin vaikutus integraalin negatiivisuuteen tulee matalalta taajuusalueelta eikä resonanssitaajuuksien läheisyydestä. Tämä johtuu integrandissa olevasta eksponenttikertoimesta, joka lähestyy nollaa suurilla taajuuksilla (ja suurilla aaltovektorin q arvoilla). Koska esim. nykyisten metamateriaalien sallitut taajuusalueet ovat usein melko kapeita, eivät ne muuta integrandin arvoa riittävän laajalla alueella pos. Casimirin voiman aikaansaamiseksi. Resonanssitaajuudet voidaan nyt kiinnittää Casimirin voiman maksimoimiseksi arvoihin $\omega_e = 10^{13}$ Hz ja $\omega_m = 10^{17}$ Hz. Kun lasketaan Mathematicalla Casimirin suhteellinen voima näillä arvoilla, saavuttaa se maksiminsa ($\frac{F(d)}{|F_0(d)|} \approx 0.53$) etäisyyden $d = 10^{-5}$ m arvolla (ks. kuva 8b).

Tällainen malli metamateriaalille on kuitenkin varsin ideaalinen. Siinä missä metalleja voidaan tehokkaasti mallintaa Druden ja Lorentzin kaavoilla, tarvitaan metamateriaalien mallintamiseen erilaisia vastefunktioita. Esim. SRR-metamateriaalin permeabilitetti saa kertoimen $-\omega^2$ osoittajaan (4.19). Resonanssitaajuuden lähellä se käyttäytyy

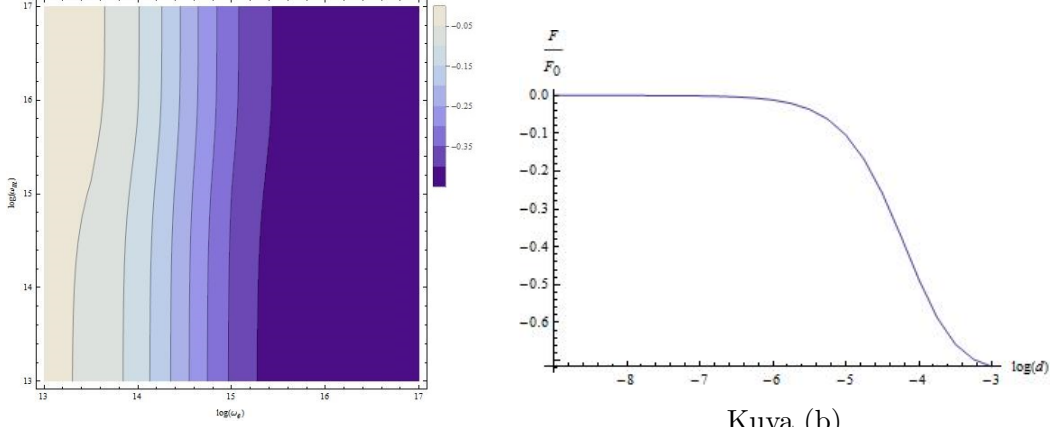
samoin kuin yksinkertaisemman mallin mukaan, mutta suurilla ja pienillä taajuuksilla sen käyttäytyminen poikkeaa merkittävästi Druden ja Lorentzin malleista. Suurien taajuuksien permeabiliteetille ei kuitenkaan ole juuri merkitystä integraalin arvolle integrandin eksponenttitekijän takia. Sen sijaan matalien taajuuksien permeabiliteetti muuttaa merkittävästi tuloksia aiempaan verrattuna; lopputuloksesta tulee huomattavasti pienempi kuin Lorentzin mallilla. Pidetään muut SM-vasteen funktiot ennallaan muodoltaan, mutta muutetaan metamateriaalin permeabiliteetti vastaamaan realistisempaa tapausta [20] $\mu_+ = \mu_0(1 - \frac{0.25\omega^2}{\omega^2 + \omega_m^2 + \gamma_m\omega})$ (ks. kappale 4.4) ja lasketaan Mathematicalla näin Casimirin voima eri resonanssitaaajuuksien arvoilla kuten edellä. Tällä kertaa voima ei muutu positiiviseksi millään resonanssitaaajuuksien arvoilla (ks. kuva 9a). Tämä nähdään tietysti helpommin, kun katsotaan suoraan SM-vasteiden muotoja: suhteellinen permeabiliteetti on aina ykköstä pienempi imaginaarisilla taajuuksilla, kun taas suhteellinen permittiivisyys saa ykköstä suurempia arvoja kaikilla taajuuksilla, ts. $\mu_{r+} < \varepsilon_{r+}$ kaikilla imaginaarisilla taajuuksilla. Kiinnittämällä resonanssitaaajuudet suurimmalle voiman arvolle, voidaan laskea Casimirin voima numeerisesti näillä parametreilla etäisyyden funktiona. Se pysyy negatiivisena välillä $d \in [10^{-9}, 10^{-3}]m$ (ks. kuva 9b).

Metamateriaalin permittiivisyyttä voidaan kuvata vain kaikkein yksinkertaisimmissa tapauksissa Lorentzin mallilla. Todellisuudessa joudutaan turvautumaan komposiitimalliin, jossa Lorentzin mallin lisätermiksi saadaan Drudemainen ”metallinen” termi:

$$\varepsilon(i\omega) = \varepsilon_0(1 - f \frac{\omega_d^2}{\omega^2 + \gamma_d\omega} + (1 - f) \frac{\omega_e^2}{\omega^2 + \omega_e^2 + \gamma_e\omega})$$

Kaavan kerroin f kuvaa Drudemaisen komponentin tehollista osuutta ($f \in [0, 10^{-1}]$). Alaindeksillä d merkityt osat kuvaavat Druden mallin mukaisen metallin parametrejä. Valitettavasti jo hyvin pieni metallinen osuus muuttaa radikaalisti Casimirin voimaa; tuhannesosan ”metallisuus” voi muuttaa positiivisen voiman negatiiviseksi [20].

Rosan käyttämä sirontateoriaan perustuva yhtälö (1) saa erikoistapauksessa Lifshitzin kaavan muodon, sillä valitsemalla seinämien väliaine isotrooppiseksi, pysyvät eri polarisaatioaalot sekoittumattomina. Siispä $2x2$ -heijastusmatriisin R_j ei-diagonaaliset



Kuva (a)

Kuva (b)

Kuva 9: a) Drudemainen metalli + realistinen metamateriaali eri resonanssitaajuuksien arvoilla. x -akseli antaa kymmenkantaisen logaritmin sähköisestä ja y -akseli magneettisesta resonanssitaajuudesta. Voima on skaalattu ideaalisen Casimirin voiman suuruudella. b) Casimirin voima etäisyyden logaritmin funktiona, kun $\omega_e = 10^{13}$ Hz ja $\omega_m = 10^{17}$ Hz.

alkiot $r_j^{sp}(i\omega, q)$, $r_j^{ps}(i\omega, q)$ häviävät, ja sijoittamalla heijastusmatriisit $R_j = \text{diag}(r_j^{ss}, r_j^{pp})$ artikkelin [20] kaavaan (1) saadaan tulos:

$$\begin{aligned}
 & \text{Tr}[R_1 \cdot R_2 e^{-2bd} \cdot (I - R_1 \cdot R_2 e^{-2bd})^{-1}] = \\
 & = \text{Tr}[\text{diag}(r_1^{ss}, r_1^{pp}) \cdot \text{diag}(r_2^{ss}, r_2^{pp}) e^{-2bd} \cdot \text{diag}(1/(1 - r_1^{ss} r_2^{ss} e^{-2bd}), 1/(1 - r_1^{pp} r_2^{pp} e^{-2bd}))] = \\
 & = \sum_{\sigma=s,p} \frac{r_1^{\sigma\sigma} r_2^{\sigma\sigma} e^{-2bd}}{1 - r_1^{\sigma\sigma} r_2^{\sigma\sigma} e^{-2bd}}
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Sijoittamalla tämä lauseke jäljen paikalle saadaan taas tuttu Lifshitzin kaava. Fresnelin kertoimet voidaan yhdistää aiempaan käsittelyyn kappaleessa 7 huomaamalla, että $r_1^{\sigma\sigma} = r_\sigma^-$ ja $r_2^{\sigma\sigma} = r_\sigma^+$.

8 Yhteenveto ja avoimet kysymykset

Casimirin voiman antava Lifshitzin yhtälö on kyetty johtamaan kahdella tavalla kvanttimekaniikan yhtälöistä; joko käyttämällä Langevin-quantittumista tai lähtemällä yhdistetyn systeemin (väliaine ja SM-kenttä, ks. kappale 5) vaikutusintegraalista. Osoittautuu, että kummatkin kvantittumismenetelmät ovat lineaarista muunnosta vaille samat, vaikka ne johdetaan hyvin eri tavalla. Ensimmäisessä nk. häiriötermit on pakko lisätä kenttien kommutointiehtojen vuoksi, ja toisessa etsitään yhdistettyä systeemiä kuvaavat luomis- ja tuhoamisoperaattorit diagonalisoinnin avulla. Kummassakin tapauksessa saadaan systeemin kaikki operaattorit lausuttua lineaarimuunnoksina ”lähdeoperaattoreista”. Kenttien amplitudiosat voidaan ratkaista klassisen elektrodynamiikan Maxwellin yhtälöistä esim. Greenin tensorin avulla. Kvanttimekaniikan mukaan kenttien variaanssi saa aikaan nollasta poikkeavan voiman myös tapauksessa, jossa ulkoisia virtalähteitä ei ole ja lämpötila on absoluuttinen nollapiste.

Eräs suurimmista ongelmista Casimirin ilmiössä on oikean jännitystensorin valinta. Jos levyjen välillä ei ole tyhjiö, antavat T_{EB} ja T_{DB} eri tulokset voimalle - tyhjiön tapauksessa taas molemmat antavat samat tulokset. Minkowskin jännitystensorin T_{DB} valinta takaa energiavuon oikeanlaisen etenemisen väliainekerroksien välillä myös vasenkätisille materiaaleille (ks. kappaleen 4.1 loppupuoli). Lisäksi sen käyttäminen ei johda ideaalista Casimirin voimaa suurempiin tuloksiin, joten on perusteltua pitäytyä Minkowskin energiaimpulssitensorissa ja vain vapaiden varausten ja virtojen avulla saatavassa Lorentzin voimassa.

Sopivilla metamateriaaleilla voidaan vaihtaa normaalisti negatiivinen, kokoon puristava Casimirin voima etumerkiltään positiiviseksi. Tämä saadaan numeeristen laskujen perusteella kahdelle eri tapaukselle. Levyjen välisen etäisyyden annetaan vaihdella yhdestä nanometristä yhteen millimetriin ja SM-vasteiden resonanssitaajuuudet vaihtelevat arvosta 10^{13}Hz (IR) maksimiin 10^{17}Hz (UV).

Väliaineen tapauksessa valitaan yhdeksi levyksi Drudemainen metalli, mutta toinen levy oletetaan lasiksi. Ehdot 7.3 täyttyvät, kun levyjen välisen metamateriaalin 4.4 parametrit valitaan sopivasti. Ensin laitetaan molempien vasteiden resonanssitaajuu-

det samoiksi ja haetaan sellainen etäisyyden ja resonanssitaajuuden yhdistelmä, jossa voima kasvaa mahdollisimman suureksi (ks. kuvat 6a, 6b). Tämän jälkeen kiinnitetään etäisyys maksimin antavaan arvoonsa (10 mikrometriä) ja vaihdellaan magneettisen ja sähköisen vasteen taajuuksia $\omega_{e,m}$ erikseen IR- ja UV-alueen välissä. Näin saatu maksimi ($\omega_{e,m} = 10^{13.5}\text{Hz}$) kiinnitetään aineen SM-vasteiksi ja tarkastellaan suhteellista voimaa etäisyyden funktiona. Voima vaihtaa merkkiään muutamaa mikrometriä suu-remmilla etäisyyksillä (ks. kuva 6b) ja sen suuruus on hieman yli kymmenen prosenttia ideaalisen Casimirin voiman suuruudesta.

Tyhjiön tapauksessa (7.2) vaaditaan ehto Fresnelin heijastuskertoimille. Kiinnitetään etäisyys nyt yhdeksi mikrometriksi. Valitsemalla toinen levy hyvin johtavaksi metalliksi ja toinen metamateriaaliksi, saa Casimirin voima positiivisen etumerkin, kunhan metamateriaalin magneettisen vasteen resonanssitaajuus on sen sähköistä suurempi. Tämä toimii tosin vain yksinkertaiselle Lorentzin mallille (ks. kuva 8a), kun magneettista vastetta mallinnetaan realistisemmin (ks. kappale 4.4 ja kuva 9a), muuttuu materiaalin käytös merkittävästi matalilla taajuuksilla ja Casimirin voiman merkki ei vaihdu. Molempien mallien antamalla maksimiparametreilla lasketaan vielä voiman suuruus etäisyyden funktiona (kuvat 9a, 9b). Lorentzin mallilla Casimirin voima vaihtaa merkkiään, jos magneettinen resonanssitaajuus on mahdollisimman suuri sähköiseen verrattuna, eli $\omega_m = 10^{17}\text{Hz}$ ja $\omega_e = 10^{13}\text{Hz}$. Samat parametrit maksimoivat voiman myös realistisemman metamateriaalivasteen tapauksessa, mutta tällöin voiman merkki ei vaihdu millään etäisyydellä välillä $[10^{-9}, 10^{-3}]\text{m}$. Voima kuitenkin lähestyy nollaa kymmentä mikrometriä pienemmillä etäisyyksillä.

Tulosten valossa näyttää siltä, että positiivinen Casimirin voima mikrometriskaalassa voidaan saavuttaa realistisella metamateriaalilla (SRR + ohuet johtimet) vain sijoittamalla se levyjen väliin. Ainoa rajoitus syntyy yksikkökopin koosta, vasteiden asettaminen sopiviksi ei siten aina onnistu pienillä etäisyyksillä. Tyhjiön tapauksessa taas metamateriaaliksi valittu seinämä ei vaihda voiman etumerkkiä; ainoastaan yksinkertaisempi (ja epärealistisempi) resonanssimalli (Lorentzin malli) antaa positiivisen Casimirin voiman. Tämä johtuu Fresnelin kertoimien käytöksestä matalilla taajuuksilla. Ongelma voidaan ehkä ratkaista bi-isotrooppisilla aineilla, jossa rakenneyhtälöiden D

ja B riippuvat molemmat sekä sähkö- että magneettikentästä lineaarisesti. Tällöin kuitenkin pitää ottaa huomioon polarisaatioiden sekoittuminen ja käyttää sirontateorian mukaista matriisiesitystä kaavan 7.7 mukaisesti. Toinen ratkaisu saattaa olla käyttää useita ohuita kerroksia erilaisia metamateriaaleja toisen levyn päällysteenä, ja koko levyn teholliset Fresnelin kertoimet säädetään valitsemalla materiaalit ja niiden paksuudet sopiviksi.

A Greenin funktiot

A.1 Määritelmät

Greenin funktio on matemaattinen apuneuvo ratkaistaessa differentiaaliyhtälöitä. Se voidaan määrittellä integraaliydyntyyppiseksi operaattoriksi, joka antaa DY:n ratkaisun sen operoidessa lähdefunktioon. Toisin sanoen, jos halutaan löytää ratkaisu u DY:lle (tai ODY:lle) $Lu(r) = f(r)$, missä L on kyseinen (osittais)differentiaalioperaattori ja f on nk. lähdekenttä, saataisiin u operoimalla L :n käänteisoperaattorilla funktioon f . Kirjoitettaessa operaattori L^{-1} integraalimuodossa saadaan

$$L^{-1}f(r) = \int_V ds g(r, s) f(s) = u(r) \quad (\text{A.1})$$

Tämä integraaliydin määritellään Greenin funktioksi. Operoimalla L :llä tähän yhtälöön jää oikealle puolelle $f(r)$ ja saadaan yhtälö $f(r) = \int_V ds Lg(r, s) f(s) = Lu(r) = \int_V ds \delta(r - s) f(s)$. L operoi vain r -koordinaateista riippuviin funktioihin, joten Greenin funktiolle saadaan nyt ehto:

$$Lg(r, s) = \delta(r - s) \quad (\text{A.2})$$

Jos oikea ratkaisu u toteuttaa reunaehdot, tulee samat reunaehdot sisällyttää Greenin funktioon. Jos esimerkiksi ratkaisun tulee olla nolla alueen V pinnalla eli $u(r) = 0 \forall r \in \partial V$, niin Greenin funktiolle tulee päteä ehto $g(r, s) = 0 \forall r \in \partial V$.

Erikoistapauksena oletetaan, että L on muotoa $L = \sum_{i,j} \partial_i A_{ij}(r) \partial_j + C(r)$ ja että sillä on ortonormaaliset ominaisarvofunktiot $\phi_k(r)$. Funktioille pätee siis $L\phi_k = \lambda_k \phi_k$. Oletetaan lisäksi, että ominaisarvofunktiojoukko virittää koko funktioavaruuden (esim. $L^2(V)$), jolloin voidaan operaattori L kirjoittaa projektoiden suorana summana $L = \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k \rangle \langle \phi_k|$. Projektio-operaattori on määritelty tuttuun tapaan integraalina $P_k v(r) = (|\phi_k \rangle \langle \phi_k|) v(r) = \phi_k(r) \int_V ds \phi_k(s) v(s)$, joten saadaan tulos:

$$Lu = \sum_k \lambda_k \phi_k \langle \phi_k | u \rangle = f = \sum_k \phi_k \langle \phi_k | f \rangle \quad (\text{A.3})$$

Identifioimalla kertoimet ja huomaamalla, että nolla ei ole ominaisarvo, saadaan yhtälö $\langle \phi_k | u \rangle = \lambda_k^{-1} \phi_k \langle \phi_k | f \rangle$. Kirjoittamalla u näin saatujen kertoimien avulla päädytään yhtälöön:

$$u(r) = \int_V ds \sum_k \lambda_k^{-1} \phi_k(r) \phi_k(s) f(s) \quad \Rightarrow \quad g(r, s) = \sum_k \lambda_k^{-1} \phi_k(r) \phi_k(s) \quad (\text{A.4})$$

Ts. Greenin funktio saadaan lausuttua ominaisfunktioiden ja -arvojen avulla.

Edellä käsitellyissä tapauksissa ODY on oletettu skalaarimuotoiseksi. Käsiteltäessä vektorimuotoisia (osittais)differentiaaliyhtälöitä $f, u \in L^2(V)^3$ huomataan, että mikäli L :ssä on vektori-/matriisimuotoisia elementtejä (esim. $\nabla \times$), ei Greenin funktio voi olla skalaarimuotoa. Jos se olisi, ei L :llä voitaisi operoida siihen. Jotta tulo $g(r, s) \cdot f(s)$ olisi vektorimuotoa, on Greenin funktion oltava matriisi.

A.2 Helmholtzin yhtälön Greenin tensori

Esimerkiksi Helmholtzin yhtälöissä (1.21) ja (1.22) saadaan Greenin funktiolle yhtälö:

$$\nabla \times (\mu_r^{-1} \cdot \nabla \times GE) - c^{-2} \omega^2 \epsilon_r \cdot GE = I \delta^3(r - s) = \hat{H}(r) GE(r, r') \quad (\text{A.5})$$

I on yksikkömatriisi ja $\hat{H}(r)$ Helmholtzin operaattori. Selvyyden vuoksi taajuusmuuttuja on jätetty pois argumenteista. Tämä yhtälö voitaisiin kirjoittaa integraalimuodossa:

$$\int_V d^3s H(r, s) \cdot G(s, r') = I \delta(r - r') \quad (\text{A.6})$$

Tässä pätee $H(r, s) = \nabla \times \mu_r^{-1}(r) \cdot \nabla \times I \delta(r - s) - c^{-2} \omega^2 \epsilon_r(r) \cdot I \delta(r - s)$. Selvästi H :n ytimelle voidaan vaihtaa r :n ja s :n paikat lopputuloksen säilyessä samana. Ensimmäisessä tapauksessa integroidaan ensin termi $\int_V d^3s I \delta(r - s) \cdot G(s, r') = G(r, r')$ ja operoidaan tähän Helmholtzin operaattorilla $\hat{H}(r)$. Toisessa tapauksessa operoidaan ensin $\hat{H}(s)$:lla $GE(s, r')$:iin ja sitten integroidaan tämä tulos kertaa $I \delta(s - r)$, jolloin s muuttuu r :ksi.

Koska yhtälö $\hat{H}(r)G(r, r')$ on jokin matriisi, voidaan tästä ottaa sen transpoosi [41]. Myös Helmholtzin operaattori voidaan kirjoittaa matriisimuodossa, kun muiste-

taan roottorin matriisimuotoinen esitys kappaleen 1 kaavasta (1.23). Siitä nähdään heti, että $R(r)^T = -R(r)$, joten esim. $(R(r) \cdot G(r, r'))^T = -G^T(r, r') \cdot \overleftarrow{R(r)}$, jossa nuoli kuva derivoinnin suuntaa. Vastaavasti saadaan $(R(r) \cdot \kappa_r(r) \cdot R(r) \cdot G(r, r'))^T = G^T(r, r') \cdot \overleftarrow{R(r)} \cdot \kappa_r(r) \cdot \overleftarrow{R(r)}$ ja $(\varepsilon_r(r) \cdot G(r, r'))^T = G^T(r, r') \cdot \varepsilon_r(r)^T$, jossa $\kappa_r(r) = \mu_r^{-1}(r)$. Termodynaamiset ehdot pakottavat permittiivisyyden ja permeabiliteetin symmetrisiksi transponoinnin suhteen, joten lopulta saadaan yhtälö:

$$G^T(r, r') \cdot [\overleftarrow{R(r)} \cdot \kappa_r(r) \cdot \overleftarrow{R(r)} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r(r)] = [R(r) \cdot \kappa_r(r) \cdot R(r) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r(r)] G(r, r') = I\delta(r - r') \quad (\text{A.7})$$

Kun yhtälö kirjoitetaan integraalimuodossa - eli vaihdetaan $\hat{H}(r)$:n muuttuja esim. s :ksi, kerrotaan $I\delta(r - s)$:lla ja integroidaan s :n suhteen V :n yli - saadaan muodollinen yhtälö: $\int_V d^3s G^T(s, r') H^T(r, s) = I\delta(r - r')$. Koska H :lle voidaan vaihtaa r :n ja s :n paikkaa ja tämän H :n ydin on symmetrinen transponoinnin suhteen (kunhan huomioidaan derivoinnin suunta), saadaan yhtälö:

$$\int_V d^3s G^T(s, r') H(s, r) = I\delta(r - r') \quad (\text{A.8})$$

Yhtälö voidaan edelleen kertoa vasemmalta $G(r, a)$ ja integroida r :n suhteen, jolloin saadaan: $\int d^3s G^T(s, r') \cdot \int d^3r H(s, r) \cdot G(r, a) = G^T(a, r') = G(r', a) \Rightarrow$

$$\int_V d^3s G(r', s) \cdot H(s, r) = I\delta(r - r') \quad (\text{A.9})$$

Kun tämä yhtälö kerrotaan oikealta $G^*(r, a)$ ja integroidaan r :n suhteen, saadaan tulos:

$$\int_V d^3r \int_V d^3s G(r', s) \cdot H(s, r) \cdot G^*(r, a) = \int_V d^3r \delta(r - r') I \cdot G^*(r, a) = G^*(r', a) \quad (\text{A.10})$$

Vaikka taajuus on jätetty selvyiden vuoksi pois argumenteista, huomioidaan se nyt laskettaessa esim. H :n kompleksikonjugaattia, jossa taajuus esiintyy. Vastaavalla tavalla yhtälöstä (A.6) voidaan ottaa ensin kompleksikonjugaatti, kertoa se sitten vasemmalta

$G(r, a)$:lla ja integroida lopuksi r :n suhteen:

$$\int_V d^3s \int_V d^3r G(r, a) \cdot H^*(r, s) \cdot G^*(s, r') = G(r', a) \quad (\text{A.11})$$

Vähentämällä toinen tulos ensimmäisestä ja kirjoittamalla taajuusriippuvuus näkyviin argumentteihin päädytään yhtälöön:

$$-Im[G(r', a, \omega)] = \int_V d^3r \int_V d^3s G(r', s, \omega) \cdot Im[H(s, r, \omega)] \cdot G^*(r, a, \omega) \quad (\text{A.12})$$

Kappaleen 3 nojalla tiedetään, että väliaineen SM-vasteelle tulee päteä analyytisyyden takia ehdot $\kappa^*(r, \omega) = \kappa(r, -\omega^*)$ ja $\varepsilon^*(r, \omega) = \varepsilon(r, -\omega^*)$. Lisäksi pätee $\omega^{*2} = (-\omega^*)^2$. Niinpä saadaan H :n ytimelle kaava $H^*(r, r', \omega) = H(r, r', -\omega^*)$. Tästä seuraa heti kaava:

$$\begin{aligned} \int_V d^3s H^*(r, s, \omega) G^*(s, r', \omega) &= I\delta(r - r') = \int_V d^3s H^*(r, s, -\omega^*) G^*(s, r', \omega) = \\ &\int_V d^3s H^*(r, s, -\omega^*) G(s, r', -\omega^*) \Rightarrow G^*(r, r', \omega) = G(r, r', -\omega^*) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Väliaine oletetaan usein isotrooppiseksi, jolloin sen SM-vaste olisi sama kaikkiin suuntiin ja paikasta riippumaton. Tässä on kuitenkin yleisyyden vuoksi oletettu myös SM-vasteen riippuvuus paikasta (avaruudellinen dispersio). Operaattorin \hat{H} ytimelle $H(r, r', \omega)$ saadaan matriisiesitys kirjoittamalla roottorin komponentit tensorimuodossa:

$$(\nabla \times)_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \partial_k$$

Kun tämä esitys sijoitetaan roottorien paikalle, käytetään Einsteinin summauskäytäntöä sekä vaihdetaan yhden permutaatiotensorin indeksien järjestystä, saadaan yhtälö:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \kappa \nabla \times)_{kn} &= (\nabla \times)_{kl} \kappa (\nabla \times)_{ln} = -\varepsilon_{lki} \varepsilon_{lnj} \partial_i \kappa \partial_j = (\delta_{kj} \delta_{in} - \delta_{nk} \delta_{ij}) \partial_i \kappa \partial_j \\ (\nabla \times \kappa \nabla \times)_{kn} &= \partial_n \kappa \partial_k - \partial_j \kappa \partial_j \delta_{nk} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Kun sijoitetaan tämä tulos $H(r, r', \omega)$:iin saadaan yhtälö:

$$H_{nk}(r, r', \omega) = (\partial_n \kappa(r, \omega) \partial_k - \partial_j \kappa(r, \omega) (\omega \partial_j \delta_{nk} - \omega^2 / c^2 \varepsilon(r, \omega) \delta_{nk})) \delta(r - r') \quad (\text{A.15})$$

Nämä esitykset voidaan edelleen sijoittaa yhtälöön (A.12), jolloin saadaan kaava:

$$\begin{aligned} -2i \text{Im}[G_{ij}(r, r', \omega)] &= I_1 - I_2 = \\ \int_V d^3 s \int_V d^3 s' G_{im}(r, s, \omega) (H_{mn}(s, s', \omega) - H_{mn}^*(s, s', \omega)) G_{nj}^*(s', r', \omega) & \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

I_2 sisältää H :n kompleksikonjugaattitermejä. Jaetaan I_1 edelleen kolmeen osaan, joista ensimmäisessä ja toisessa on permeabiliteetista riippuvia osia ja kolmannessa permittiivisyydestä riippuva osa. Saadaan siis:

$$\begin{aligned} I_{1a} &= \int_V d^3 s \int_V d^3 s' G_{im}(r, s, \omega) \partial_n \kappa(s, \omega) \partial_m \delta(s - s') G_{nj}^*(s', r', \omega) = \\ \int_V d^3 s \partial_n (G_{im}(r, s, \omega) \kappa(s, \omega) \partial_m G_{nj}^*(s, r', \omega)) - \int_V d^3 s \kappa(s, \omega) (\partial_n G_{im}(r, s, \omega)) \partial_m G_{nj}^*(s, r', \omega) \end{aligned}$$

Ensimmäisestä termistä saadaan 0, kun integrointitilavuus lähestyy ääretöntä, sillä Greenin tensorin täytyy hävitä tilavuuden reunoilla kenttien fysikaalisuuden takia. Integraalille I_{1b} saadaan tulos:

$$I_{1b} = \int_V d^3 s \kappa(s, \omega) (\partial_l G_{im}(r, s, \omega)) \partial_l G_{nj}^*(s, r', \omega)$$

Integraalissa I_{1c} on integrandin sisällä vain permittiivisyydellä kertominen. I_2 voidaan ratkaista samoin kuin I_1 , ainoana erotuksena on nyt kompleksikonjugaatin ottaminen

permeabiliteetista ja permittiivisyydestä. Näin saadaan tulos:

$$\begin{aligned} \text{Im}[G_{ij}(r, r', \omega)] = \int_V d^3s [\kappa_I(s, \omega) (\partial_n G_{im}(r, s, \omega)) (\partial_m G_{nj}^*(s, r', \omega) - \partial_n G_{mj}^*(s, r', \omega)) + \\ + \omega^2 / c^2 \varepsilon_I(s, \omega) G_{im}(r, s, \omega) G_{mj}^*(s, r', \omega)] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Kun muistetaan roottorien tensoriesitykset, saadaan yhtälö kirjoitettua luettavammassa muodossa:

$$\begin{aligned} \text{Im}[G(r, r', \omega)] = \int_V d^3s [-\kappa_I(s, \omega) (\nabla_s \times G(s, r, \omega))^T \cdot (\nabla_s \times G^*(s, r', \omega)) + \\ \omega^2 / c^2 \varepsilon_I(s, \omega) G(r, s, \omega) \cdot G^*(s, r', \omega)] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Aineen rajapinnalla sähkö- ja magneettikentän tangentialisten komponenttien tulee olla jatkuvia (jos pintavirtoja ei esiinny). Kun pinnan normaalivektori on $u_N(r)$, saadaan tästä ehdot Greenin matriiseille:

$$u_N \times G^{[1]} = u_N \times G^{[2]}, \quad \kappa_1 u_N \times \nabla \times G^{[1]} = \kappa_2 u_N \times \nabla \times G^{[2]} \quad (\text{A.19})$$

Indeksit viittaavat eri materiaaleihin. Monesti Greenin funktio jaetaan kahteen osaan: vapaan avaruuden Greenin funktioon, jossa SM-kenttä voi edetä esteettä, ja sirontaosaan, joka riippuu systeemin geometriasta: $G^{[a]} = G^{[0,a]} + G^{[S,a]}$. Vapaan (mutta ei välttämättä tyhjän) avaruuden Greenin funktio ratkaisee epähomogeenisen eli lähteellisen osittaisdifferentiaaliyhtälön, kun taas sirontaosa on homogeenisen ODY:n (kaava (A.5) ilman Diracin deltafunktiota) ratkaisu, joka noudattaa materiaalin asettamia reunaehtoja. Heijastus- ja läpäisyehdot saadaan tietysti Fresnelin kertoimien avulla.

A.3 Greenin matriisi kerrosmaiselle materiaalille

Greenin matriisi voidaan laskea eksplisiittisesti vain muutamalle symmetriselle tapaukselle. Näistä yksi on väliaine, joka on symmetrinen xy -tasossa ja vaihtelee z -muuttujan

suhteen [41], [42], [43]. Jaetaan avaruus kolmeen kerrokseen, joissa pätee:

$$\varepsilon = \varepsilon_-(\omega) \quad z < d, \quad = \varepsilon(\omega) \quad 0 < z < d, \quad = \varepsilon_+(\omega) \quad z > d$$

Samanlaiset yhtälöt pätevät myös permeabiliteetille. Symmetriasta johtuen G :n täytyy olla translaatioinvariantti xy -tasossa, joten se voi riippua vain erotuksesta $|(x, y) - (x', y')|$. Jos suoritetaan Fourier-muunnos näille koordinaateille, saadaan yhtälö

$$G(r, r', \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2q e^{iq \cdot (u - u')} G(q, z, z', \omega),$$

missä $u = (x, y)$ ja $q = (k_1, k_2)$. Greenin matriisista tulee ottaa huomioon vain sirontaosaa, tämän komponentit saadaan ottamalla huomioon reunaehdot Fresnelin yhtälöillä ja vähentämällä näin saadusta matriisista sen vapaan avaruuden osa ($G^S = G^{tot} - G^0$). Greenin tensori on ratkaistu aiemmin puhtaasti sähköisen väliaineen tapauksessa [42]. Muuntamalla permittiivisyyttä kertoimella μ_r saadaan ratkaistua G' ”sähköiselle” Helmholtzin ODY:lle, ja kertomalla se edelleen permeabiliteetilla päädytään yleisen ODY:n ($\kappa_r \neq 1$) ratkaisuun. Greenin tensori saadaan siten korvaamalla ε_r $\varepsilon_r \mu_r$:lla sähköisen tapauksen Greenin tensorissa ja kertomalla näin saatu tulos μ_r :lla. Greenin tensori saadaan kirjoitettua kätevästi SM-aaltojen polarisaatiovektoreiden avulla:

$$\begin{aligned} G^S(q, z, z', \omega) = & \\ \frac{i\mu_r(\omega)}{2\pi\beta} \sum_{\sigma} K_{\sigma} [& \frac{1}{D_{\sigma}} r_{\sigma}^+ r_{\sigma}^- (e_{\sigma}^+(q) \otimes e_{\sigma}^-(-q) e^{i\beta(2d+z-z')} + e_{\sigma}^-(q) \otimes e_{\sigma}^+(-q) e^{i\beta(2d-z+z')}) + \\ & + \frac{1}{D_{\sigma}} ((e_{\sigma}^+(q) \otimes e_{\sigma}^+(-q) r_{\sigma}^- e^{i\beta(z-z')} + e_{\sigma}^-(q) \otimes e_{\sigma}^-(-q) r_{\sigma}^+ e^{i\beta(2d-z-z')})] \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Tässä $e_s^{\pm}(q) = e(q) \times e_z$ ja $e_p^{\pm}(q) = \frac{c}{\omega \sqrt{\varepsilon_r(\omega) \mu_r(\omega)}} (q e_z \mp \beta e(q))$ ovat polarisaatiovektoreita kentälle, joka liikkuu $+z$ - tai $-z$ -suuntaan. r -termit ovat Fresnelin kertoimia.

$$r_s^{\pm} = \frac{\mu_{\pm}\beta - \mu\beta_{\pm}}{\mu_{\pm}\beta + \mu\beta_{\pm}}, \quad r_p^{\pm} = \frac{\varepsilon_{\pm}\beta - \varepsilon\beta_{\pm}}{\varepsilon_{\pm}\beta + \varepsilon\beta_{\pm}}$$

Kaavassa pätee $\beta_{\pm} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_{r\pm}(\omega) \mu_{r\pm}(\omega) / c^2 - q^2}$, $\beta = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) / c^2 - q^2}$ ja $D_{\sigma} = 1 - r_{\sigma}^+ r_{\sigma}^- e^{2i\beta d}$. Fresnelin kertoimien merkintä on hiukan erilainen kuin tavallisesti, sillä SM-kentän tulo- ja lähtökulmien termit $\cos(\phi_l)$ on korvattu aaltovektorin k_z -komponentin ja kokonaispituuden suhteilla $k_z/|k_l| = \beta_l(\omega)/\sqrt{\beta_l^2 + q^2}$. Muunnos tehdään sijoittamalla alkuperäiseen Fresnelin yhtälöihin nämä tulokset sekä huomioimalla dispersioyhtälö $k_l = \pm\sqrt{\mu_{r,l}\varepsilon_{r,l}}\omega/c$. Esim. alkuperäisestä Fresnelin kertoimen muodosta $r_s^{\pm} = \frac{Z_{\pm}\cos(\theta_{\pm}) - Z\cos(\theta)}{Z_{\pm}\cos(\theta_{\pm}) + Z\cos(\theta)}$ ($Z = \sqrt{\mu_r/\varepsilon_r}$) saadaan aikaisemmin esitetty muoto.

Laskettaessa SM-kenttää tarvitaan varsinaisen Greenin funktion lisäksi sen ”magneettinen” muoto, ts. $\nabla \times G^1(r, r', \omega) \times \nabla'$. Tämä saadaan huomaamalla, että nablooperaattori voidaan korvata vektorilla $ik_{\pm} = q \pm \beta e_z$ kertomisella (ks. kappale 1.2). Vektorin etumerkki riippuu Greenin matriisin termin eksponenttifunktion etumerkeistä. Esim. termi, joka sisältää matriisin $e_p^+(q) \otimes e_p^-(q)$, muunnetaan kertomalla ristiin oikealta vektorilla $ik_+(q)$ ja ristiin vasemmalta vektorilla $ik_-(-q)$. $ik_+(q)$:n merkki tulee tekijästä $e^{i\beta z}$ ja q -vektorin valinta seuraa funktiosta $e^{iq \cdot u}$; samoin vektorin $k_-(-q)$ merkit valitaan vastaamaan Greenin matriisin termin kerroinfunktiota $e^{-i\beta z'}$ ja $e^{-iq \cdot u'}$. Nyt matriisi $e_p^+(q) \otimes e_p^-(q)$ muuntuu matriisiksi $\frac{\omega^2 n^2}{c^2} e_s^+(q) \otimes e_s^-(q)$. Suoraan laskemalla saadaan, että kaikki Greenin funktion osamatriisit muuntuvat suoraan toisen polarisaation vastaaviksi matriiseiksi kerrottuna tekijällä $\frac{\omega^2 n^2}{c^2}$. Magneettinen Greenin funktio $\nabla \times G^1(r, r', \omega) \times \nabla'$ saa siten muutoin saman muodon kuin alkuperäinen sähkökentän Greenin funktio, mutta nyt polarisaatioindeksit q, p vaihtavat paikkaa keskenään.

Viitteet

- [1] John Brian Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Physical Review Letters*, 85(18):3966, 2000.
- [2] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1999.
- [3] Chen-To Tai. *Dyadic Green functions in electromagnetic theory*. Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), 1994.
- [4] Marcus J Sparnaay. Measurements of attractive forces between flat plates. *Physica*, 24(6-10):751–764, 1958.
- [5] Steve K Lamoreaux. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μ m range. *Physical Review Letters*, 78(1):5, 1997.
- [6] Umar Mohideen and Anushree Roy. Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9 μ m. *Physical Review Letters*, 81(21):4549, 1998.
- [7] RS Decca, D López, E Fischbach, and DE Krause. Measurement of the casimir force between dissimilar metals. *Physical Review Letters*, 91(5):050402, 2003.
- [8] V Druzhinina and M DeKieviet. Experimental observation of quantum reflection far from threshold. *Physical Review Letters*, 91(19):193202, 2003.
- [9] LD Landau, LP Pitaevskii, and EM Lifshitz. *Electrodynamics of Continuous Media: Volume 8 (Course of Theoretical Physics)*. Butterworth-Heinemann, 1984.
- [10] Stefan Yoshi Buhmann, David T Butcher, and Stefan Scheel. Macroscopic quantum electrodynamics in nonlocal and nonreciprocal media. *New Journal of Physics*, 14(8):083034, 2012.
- [11] Paul Kinsler, Alberto Favaro, and Martin W McCall. Four poynting theorems. *European Journal of Physics*, 30(5):983, 2009.

- [12] Jason Valentine, Shuang Zhang, Thomas Zentgraf, Erick Ulin-Avila, Dentcho A Genov, Guy Bartal, and Xiang Zhang. Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index. *Nature*, 455(7211):376–379, 2008.
- [13] Victor Georgievich Veselago. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Physics Uspekhi*, 10(4):509–514, 1968.
- [14] Martin W McCall, Akhlesh Lakhtakia, and Werner S Weiglhofer. The negative index of refraction demystified. *European Journal of Physics*, 23(3):353, 2002.
- [15] Laszlo Solymar and Ekaterina Shamonina. *Waves in metamaterials*. Oxford University Press, 2009.
- [16] George V Eleftheriades and Keith G Balmain. *Negative-refraction metamaterials: fundamental principles and applications*. John Wiley & Sons, 2005.
- [17] Anthony Lai, Tatsuo Itoh, and Cristophe Caloz. Composite right/left-handed transmission line metamaterials. *Microwave Magazine, IEEE*, 5(3):34–50, 2004.
- [18] Michael Zedler. *Systematic Topological Design of Metamaterials: Scalar and Vectorial 3D Metamaterials and Their Realisation*. Shaker Verlag, 2008.
- [19] Juan Domingo Baena, Jordi Bonache, Ferran Martín, R Marqués Sillero, Francisco Falcone, Txema Lopetegui, Miguel AG Laso, Joan Garcia-Garcia, Ignacio Gil, M Flores Portillo, et al. Equivalent-circuit models for split-ring resonators and complementary split-ring resonators coupled to planar transmission lines. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 53(4):1451–1461, 2005.
- [20] FSS Rosa, DAR Dalvit, and PW Milonni. Casimir-lifshitz theory and metamaterials. *Physical Review Letters*, 100(18):183602, 2008.
- [21] Christopher Gerry and Peter Knight. *Introductory quantum optics*. Cambridge University Press, 2005.

- [22] Stefan Scheel and Stefan Buhmann. Macroscopic quantum electrodynamics—concepts and applications. *Acta Physica Slovaca. Reviews and Tutorials*, 58(5):675–809, 2008.
- [23] Christian Raabe and Dirk-Gunnar Welsch. Dispersive forces on bodies and atoms: A unified approach. *Physical Review A*, 73(6):063822, 2006.
- [24] Christian Raabe, Stefan Scheel, and Dirk-Gunnar Welsch. Unified approach to qed in arbitrary linear media. *Physical Review A*, 75(5):053813, 2007.
- [25] Christian Raabe, Ludwig Knöll, and Dirk-Gunnar Welsch. Three-dimensional casimir force between absorbing multilayer dielectrics. *Physical Review A*, 68(3):033810, 2003.
- [26] Bruno Huttner and Stephen M Barnett. Quantization of the electromagnetic field in dielectrics. *Physical Review A*, 46(7):4306, 1992.
- [27] Stephen M Barnett, James D Cresser, and Sarah Croke. Theory of the strongly-damped quantum harmonic oscillator. *ArXiv Preprint ArXiv:1508.02442*, 2015.
- [28] LG Suttorp and AJ van Wonderen. Fano diagonalization of a polariton model for an inhomogeneous absorptive dielectric. *EPL (Europhysics Letters)*, 67(5):766, 2004.
- [29] Fardin Kheirandish and Morteza Soltani. Extension of the huttner-barnett model to a magnetodielectric medium. *Physical Review A*, 78(1):012102, 2008.
- [30] Thomas Gerard Philbin. Canonical quantization of macroscopic electromagnetism. *New Journal of Physics*, 12(12):123008, 2010.
- [31] Thomas Gerard Philbin. Casimir effect from macroscopic quantum electrodynamics. *New Journal of Physics*, 13(6):063026, 2011.
- [32] Michael Bordag, Umar Mohideen, and Vladimir M Mostepanenko. New developments in the casimir effect. *Physics Reports*, 353(1):1–205, 2001.

- [33] Christian Raabe and Dirk-Gunnar Welsch. Casimir force acting on magnetodielectric bodies embedded in media. *Physical Review A*, 71(1):013814, 2005.
- [34] Marin-Slobodan Tomaš. Casimir force between dispersive magnetodielectrics. *Physics Letters A*, 342(5):381–388, 2005.
- [35] Iver Brevik and Simen A Ellingsen. Comment on “casimir force acting on magnetodielectric bodies embedded in media”. *Physical Review A*, 79(2):027801, 2009.
- [36] IG Pirozhenko and Astrid Lambrecht. Casimir repulsion and metamaterials. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(16):164015, 2008.
- [37] MA Ordal, LL Long, RJ Bell, SE Bell, RR Bell, RW Alexander, and CA Ward. Optical properties of the metals al, co, cu, au, fe, pb, ni, pd, pt, ag, ti, and w in the infrared and far infrared. *Applied Optics*, 22(7):1099–1119, 1983.
- [38] Ulf Leonhardt and Thomas G Philbin. Quantum levitation by left-handed metamaterials. *New Journal of Physics*, 9(8):254, 2007.
- [39] Marin-Slobodan Tomaš. Medium-modified casimir forces. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(21):6785, 2006.
- [40] Timothy H Boyer. Van der waals forces and zero-point energy for dielectric and permeable materials. *Physical Review A*, 9(5):2078, 1974.
- [41] Stefan Yoshi Buhmann and Dirk-Gunnar Welsch. Dispersion forces in macroscopic quantum electrodynamics. *Progress in Quantum Electronics*, 31(2):51–130, 2007.
- [42] Marin-Slobodan Tomaš. Casimir force in absorbing multilayers. *Physical Review A*, 66(5):052103, 2002.
- [43] Simen A Ellingsen. Casimir attraction in multilayered plane parallel magnetodielectric systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(9):1951, 2007.