

Yleistetyn todennäköisyysteorian tomografia

Pro gradu -tutkielma
Turun yliopisto
Fysiikan ja tähtitieteen laitos
Teoreettinen fysiikka
Lokakuu 2019
LuK Daria Anttila
Tarkastajat:
dos. Tom Kuusela
dos. Teiko Heinosaari

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -järjestelmällä.

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan ja tähtitieteen laitos

ANTTILA, DARIA: Yleistetyn todennäköisyysteorian tomografia

Pro gradu -tutkielma, 73 s., 5 liites.
Teoreettinen fysiikka
Lokakuu 2019

Kvanttifysiikassa on olemassa selittämättömiä ilmiöitä ja monia tutkimattomia aihepiirejä. Jotta kvanttiteknologinen läpimurto olisi mahdollinen, pitää ymmärtää kvanttimekaniikka syvällisesti aina matemaattisesta perustasta alkaen kokeellisiin toteutuksiin asti. Yleistetty todennäköisyysteoria (GPT) on hyvä työkalu kvanttimekaniikkaa toisesta näkökulmasta tarkastelemiseen. Sen lisäksi yleistetty todennäköisyysteoria on kokeellisesti implementoitavissa, ja siksi on mahdollista nähdä kvanttimekaniikan kokeita uudessa valossa.

Tässä työssä esitetään yleistetyn todennäköisyysteorian teoreettinen pohja ja tomografia verraten niitä hyvin tuttuun kvanttiteoriaan. GPT:n tomografian lähtökohtana on täysi tietämättömyys testattavasta tilasta ja siitä, mikä fysikaalinen teoria voi sitä kuvailla. Tästä johtuen tomografia tapahtuu, kun testattavalle tilalle tehdään suuri määrä preparointeja ja mittauksia, joiden vaikutuksesta ei oleteta mitään. Kvanttimekaniikan tomografia on työkalu testattavan systeemin tilan kuvailemiseen käyttäen kvanttimekaniikan matemaattista kieltä, kun taas GPT:n tomografian tarkoituksena on selvittää, mikä fysikaalinen teoria kuvailee testattavan systeemin tilaa parhaiten. Tällaiseen lopputulokseen päästään, kun saadaan GPT:n tomografiasta selville testattavan systeemin tilan tila- ja efektiiviaruuden dimensio ja muoto.

Keskeisenä tarkoituksena on esittää yhden kubitin GPT:n tomografia, sen tulosten analysointi ja lopputulokset sekä kriittisesti tarkastella nykyistä GPT:n tomografiaa ja sen matemaattisen analysoinnin menetelmää. Koska GPT:n tomografia ei ole entistään paljon tutkittu aihepiiri, tämä mahdollistaa monien uusien kysymysten asettamista ja tutkimusaiheiden löytämistä. Sen lisäksi tässä työssä esitetään kahden kubitin GPT:n tomografian ensimmäinen koe ja sen tuloksia, joiden avulla pyritään ymmärtämään paremmin, miten GPT:n tomografia toimii ja miksi tämä koe ei tuottanut toivottuja tuloksia.

Asiasanat: yleistetty todennäköisyysteoria, GPT:n tomografia, kvanttiteoria, kvanttiteorian tomografia

Sisältö

Johdanto	1
1 Teoreettinen tausta	5
1.1 Konveksisuus	6
1.2 Tilat	7
1.2.1 Tensoritulo	8
1.3 Efektit	10
1.4 Fysikaaliset suureet	12
2 Tomografia	14
2.1 Kvanttiteorian tomografia	14
2.1.1 Tilan karakterisointi	15
2.1.2 n-kubittisysteemien tomografia	19
2.1.3 Kvanttiteorian tomografian suoritus	22
2.2 GPT:n tomografia	22
2.2.1 Tilan karakterisointi	23
2.2.2 GPT:n tomografian perusteet	25
3 Yhden kubitin GPT:n tomografian koejärjestely	37
3.1 Fotoniparin luominen	37
3.2 Fotonin preparointi ja mittaus	41
4 Yhden kubitin GPT:n tomografia	46
4.1 Informaatiokriteerien arvojen laskeminen ja tulokset	46
4.2 Informaatiokriteerien antamien tulosten analysointi	55
5 Kahden kubitin GPT:n tomografian esitarkastus	59
6 Johtopäätökset	66

Viitteet

71

A Liitekappale

A-1

Johdanto

Monien vuosikymmenien aikana kvanttiteoria on tukenut kokeellista tutkimusta antaen sille matemaattisia työkaluja. Mittaukset kvanttiteorian viitekehyksessä ovat kehittyneet hyvin tarkaksi ja rutiinimaisiksi. Kuitenkin lähivuosina on noussut kysymykseksi sellaisten yleiskattavimpien teorioiden löytäminen, jotka sisältäisivät ja selittäisivät sekä klassisen fysiikan että kvanttifysiikan teorioita. Lisäksi tällaisten teorioiden odotetaan sisältävän muitakin teorioita, kuten esimerkiksi kvanttiprozessien teorian ja klassisen todennäköisysteorian, sekä mahdollistavan mittauksia omassa viitekehksessään.

On olemassa useampia syitä, miksi yleistetyt teoriat tulivat tarpeellisiksi. Ensimmäisenä syynä on kvantti-informaatioteorian menestyminen. Yhä enemmän hyötyä löydetään kvantti-informaatioteoriasta verrattuna klassiseen informaatioteoriaan, esimerkiksi kvantti-informaatioteorian varmemmat kommunikaatioprotokollat. Jotta kvantti-informaatioteoriaa sekä sen sovelluksia olisi mahdollista kehittää, on tärkeää informaation ja informaatiokäsittelyn peruskäsitteiden syvällisempi ymmärtäminen. Syvällisempi ymmärtäminen vaatii siirtymistä abstraktisemmalle tasolle, jolloin juuri yleistetyistä teorioista löytyy työkalut siihen.

Toisena syynä on kvanttiteorian perustan selittäminen: miksi kvanttiteorian rakenne on sellainen mitä se on. Kvanttiteoria syntyi, kun matemaattisille työkaluille annettiin fysikaalisia merkityksiä, mutta fysikaalisesti tarkka motivaatio annetuille merkityksille on edelleen ymmärtämättä, esim. mihin tarkasti ottaen perustuu kvanttimekaanisten korrelaatioiden, jotka rikkovat Bellin epäyhtälöä, maksimiarvo (englanniksi Tsirelson's bound). Yleistetyt teoriat tarjoaisivat uuden näkökulman kvanttiteorian perusilmiöihin ja edistäisivät näihin kysymyksiin vastaamista. Samalla tavalla klassisuus on perustavanlaatuinen käsite, joka vaatii uutta tarkempaa määrittystä. Yleistetyissä teorioissa pyritään selvittämään, missä menee raja klassisten ja kvanttisten tapahtumien välillä. Toisaalta yleistettyjen teorioiden avulla

haetaan myös vastauksia kysymykseen, onko kvanttiteoria todellakin vain erikoistapaus laajemmassa teorialuokassa ja säilyvätkö kvantti-ilmiöiden ominaisuudet myös eri teorioissa, jolloin pystyisimme ymmärtämään eri ominaisuuksien luonnetta ja fysikaalista motivaatiota.

Kolmantena ja ilmiselvänä syynä yleistettyjen teorioiden haulle on yritys löytää yleispätevää teoriaa, johon sisältyisi kaikki mahdolliset maailmankaikkeuden osia kuvaavat teorat. Jos joskus löytyisi uusi teoria, niin se luontevasti olisi kuvattavissa jollain jo olemassa olevalla yleistetyllä teoriolla. Tämä tarkoittaisi myös sitä, että yleistettyjen teorioiden viitekehys olisi yhtenäinen kaikille teorioille eli riittäisi kuvailla kaikki määritelmät ja todistaa kaikki lauseet vain kerran eikä sitä prosessia tarvitsisi enää toistaa, kun joku uusi teoria tulisi vastaan.

Yleistetty todennäköisyysteoria (englanniksi *generalized probabilistic theory*, lyh. *GPT*) täyttää monia odotuksia yleiskattavasta teoriasta. Toisin kuin kvanttiteoria, GPT perustuu operationaaliseen lähestymistapaan. Operationaalisuudella tarkoitetaan, että alussa on fysikaalinen motivaatio ja vasta sen jälkeen etsitään matemaattisia työkaluja täyttämään sen. Näin ollen kvanttiteoriassa kaikki pohjautuu Hilbertin avaruuden operaattoreihin ja positiivioperaattorimittaan, kun taas GPT:n pohjana on vain konveksinen tila-avaruus ja siinä määritellyt mittaukset ja preparoinnit.

Tämä teoria tuli ensimmäisen kerran esille 1960-luvulla, kun sitä käytettiin kvanttiteorian perustojen tutkimuksessa. Yleistettyä todennäköisyysteoriaa tai siihen aikaan ”konveksi joukko lähestymistapaa” ovat kehittäneet Ludwig [1, 2], Guron [3], Mielnik [4, 5], Davies ja Lewis [6] ja Gudder [7].

Vastaavasti kuin kvanttiteoriassa GPT:ssa on mahdollista suorittaa mittauksia, joista pystytään määrittämään systeemin tila. Tällaisia mittauksia kutsutaan *tomografiaksi*. GPT:n tomografian tapauksessa tehdään vähemmän oletuksia kuin kvanttitomografiassa ja GPT:hen sopiva mittauksien analysointimetodi poikkeaa kvanttitomografiasta. Tässä työssä tutkitaan GPT:n viitekehyksessä suoritettavaa tomo-

grafiaa. Työ perustuu mittaussarjaan, joka suoritettiin yhdelle fotonille tutkien vain sen polarisaatiovapaustetta ja polarisaation määrämää kvantttilaa. Mittaustekniikka ja analysointimenetelmä ovat vastaavia kuin viitteissä [8, 9]. Poiketen kvanttitomografiasta GPT:n tomografiassa suoritettiin suuren määrän toisistaan riippumattomia mittauksia satunnaisella tavalla preparoidulle tilalle. Saadusta datasta arvioitiin alkuperäisen tilan tila- ja efektiavaruuden dimensiota ja päätettiin, mikä GPT:n sisältämä teoria kuvaa kyseistä tilaa parhaiten. GPT:n tomografian avulla pystyttiin katsomaan mittaustuloksia yleisemmältä tasolta kuin kvanttitomografian tapauksessa.

Toisena mittaussarjana suoritettiin ensimmäinen kahden fotonin tilan GPT:n tomografia, jolle ei löydy vastaavuuksia kirjallisuudesta. Tällainen koe antoi uuden näkökulman itse GPT:n tomografiaan, koska saadusta datasta laskettu alkuperäisen tilan tila- ja efektiavaruuden dimensio ei antanut odotettua tulosta. Kokonaisuudessaan GPT:n tomografian tutkiminen antoi meille erilaisen näkökulman kvanttikokeisiin ja mahdollisti uuden kysymyksen asettamista: onko GPT:llä parempia työkaluja kvanttikokeita varten vai onko monia vuosikymmeniä kehitetty kvanttiteorian viitekehys kuitenkin paras mahdollinen?

Tässä työssä verrataan kvanttiteoriaa ja GPT:ta. Tällainen vertaus helpottaa GPT:n ymmärtämistä ja esittää hyvin kahden teorian välisiä eroja. Luvussa 1 esitetään teoreettinen pohja GPT:lle, jossa selitetään käsitteet ”tila”, ”efekti” ja ”fysikaalinen suure” ja määritellään tila- ja efektiavaruus sekä fysikaalinen suure. Kaikki määritelmät ovat esitetty myös kvanttiteorialle.

Luvussa 2 esitetään kvanttiteorian ja GPT:n tomografiat matemaattisesta näkökulmasta. Jotta GPT:n tomografiaa olisi helpompi ymmärtää, aloitetaan ”klassisesta” kvanttiteorian tomografiasta. Tämän luvun tavoitteena on näyttää, miten GPT:n tomografian tavoitteet, ja siksi myös tulokset ja suoritus, poikkeavat kvanttiteorian tomografiasta.

Luvun 3 tarkoituksena on siirtää lukijat matemaattisesta tomografioiden kuvaamisesta laboratorioon. Tässä esitetään GPT:n ja lyhyesti kvanttimekaniikan tomografian kokeissa käytetty koejärjestely. Tässä luvussa luodaan myös linkki matemaattisesti esitettyjen preparoinnin ja mittauksen ja koejärjestelyssä käytettyjen optisten komponenttien välillä.

Luvussa 4 kuvataan yhden kubitin GPT:n tomografiasta saadun datan analysointia ja tuloksia. Luvussa 5 kuvataan kahden kubitin GPT:n tomografiaa ja keskittään saatujen lopputulosten selittämiseen. Molemmissa luvuissa pohditaan GPT:n tomografian toimivuutta ja käytännöllisyyttä.

1 Teoreettinen tausta

Kvanttiteorian ja GPT:n viitekehyksessä suoritettavat tomografiat eroavat sekä mitaus- että analyysimenetelmässä. Tällainen ero tomografioissa syntyy teoreettisten taustojen eroavaisuudesta. Tärkeä käsite, johon GPT perustuu, on tilojen operationaalinen sekoittuminen. Tästä johtuen GPT:n tila-avaruus on konvekksi (fysikaalisten tilojen sekoitus on myös fysikaalinen), siksi myös yleistettyä todennäköisyysteoriaa kutsutaan konveksiseksi operationaaliseksi teoriaksi. Tässä luvussa avataan konveksisuuden ja operationaalisen lähestymistavan käsitteitä sekä selvitetään kvanttiteorian ja GPT:n matemaattisten viitekehysten välisiä eroja.

Kvanttiteorian kehittäminen pohjautui pitkälti tarpeelle selittää ilmiöitä, joita klassinen teoria ei pystynyt selittämään. Tällöin fysikaalisia selityksiä kiinnitettiin matemaattiseen teoriaan, joka oli luotu jo aikaisemmin. Pyrkimyksenä on siis löytää fysikaalinen selitys mittaustuloksille. Tällöin kvanttiteorian pohjana on Hilbertin tila-avaruus, sen operaattorit ja muunnokset. GPT taas pohjautuu ajatukseen, että etsitään teoriaa, jolla olisi alusta lähtien fysikaalinen merkitys. Toisin kuin kvanttiteoriassa GPT:n formalismi syntyy ajatuksesta, että GPT ennustaa havaittavissa olevaa mittausstatistiikkaa, ja juuri mittausstatistiikka määrittää formalismin. Tämä on *operationaalisuuden* ydin. Tässä tapauksessa päädytäänkin konveksiseen tila-avaruuteen eikä siihen sisältyvään erikoistapaukseen - Hilbertin tila-avaruuteen. Konveksisuus tarkoittaa sitä, että voi tapahtua preparointien sekoitusta ja silti päädytään fysikaalisesti järkevään tilaan. Konveksisuus on siis todellisten tilojen ominaisuus ja siksi luonnollinen oletus. Se on sekä GPT:n että kvanttiteorian tilojen ominaisuus; kvanttiteoriahan sisältyy GPT:hen.

On olemassa eri variaatiota GPT:n lähtökohtaisista oletuksista, mutta kuitenkin kaikissa tapauksissa päädytään samaan formalismiin. Esimerkiksi lähteessä [10] tehdään oletus, että jokaisella sekoitetulla tilalla on olemassa puhtaan tilan vastine. Toisena esimerkkinä voidaan mainita GPT ilman ei-rajoituksia hypoteesia (no-

restriction hypothesis), jolloin ei oleteta, että yhdelle joukolle tiloja kaikki mahdolliset mittaustulokset, jotka antavat arvoiksi todennäköisyyksiä, ovat fysikaalisesti toteutettavissa [11]. Ei-rajoituksia hypoteesin pois jättäminen on mahdollista, koska se ei ole fysikaalisesti motivoitu operationaalisessa lähestymistavassa. Meidän käyttämät oletukset ja aksiomatiikka ovat yleisimpiä nykyisessä GPT:n tutkimuksessa, esim. [12–16]. Tässä kappaleessa esitettyjen käsitteiden ja oletuksien syvällisemmät ja perusteellisemmat selitykset sekä tarpeelliset todistukset löytyvät lähteistä [12, 14, 17–19].

1.1 Konveksisuus

Tarkastellaan kahta tilannetta: ensimmäisessä tapauksessa preparoinnin tuloksena ovat fysikaaliset tilat ϱ_1 ja ϱ_2 , joille tehdään sama mittaus, toisessa tilanteessa preparointi on sellainen, että tilat esiintyvät siinä mittauksessa satunnaisesti todennäköisyyksillä $\lambda_1 = \lambda$ ja $\lambda_2 = 1 - \lambda$ vastaavasti, $\lambda \in [0, 1]$. Lopputuloksena on tilojen *sekoitus*:

$$\lambda\varrho_1 + (1 - \lambda)\varrho_2.$$

Syntynyttä sekoitusta voidaan ajatella myös uutena preparointina, jossa kahdesta tilasta tulee niiden kombinaationa kolmas tila. Mittaustulos, joka saadaan, kun mittaus suoritetaan sekoitukselle, on sama kuin sekoitus erillisistä mittauksista tiloille ϱ_1 ja ϱ_2 . Todennäköisyydet λ_1 ja λ_2 eli tilojen *painokertoimet* summautuvat ykköseksi, koska sataprosenttisella todennäköisyydellä mittaus suoritetaan jommallekummalle tilalle. Tämä takaa systeemin fysikaalisen järkevyyden ja pätee myös sekoitustiloille, joissa on useampi kuin kaksi tilaa.

Yllä esitetty sekoitus on määritelmän mukaan *konveksikombinaatio*, sillä ϱ_1 , ϱ_2 ja $\lambda\varrho_1 + (1 - \lambda)\varrho_2$ ovat kaikki tiloja sekä $\sum_{i=1,2} \lambda_i = 1$, jossa $\lambda_i \in [0, 1]$ [19].

1.2 Tilat

Fysikaalinen systeemi muodostuu tilasta, tilan preparoinnista, joka voidaan suorittaa eri laitteilla ja eri mekanismeilla, sekä mittauksesta. Preparointien ekvivalenssiluokka on *tila*. Eli preparoinnit, jotka johtavat samaan mittaustulokseen, ovat samassa ekvivalenssiluokassa ja näin vastaavat samaa tilaa. Kaikki mahdolliset preparoinnit voidaan jakaa ekvivalenssiluokkiin, jolloin saadaan joukko tiloja. GPT:ssa fysikaalisen systeemin tilat muodostavat Hausdorffin vektoriavaruuden kompaktin konveksin osajoukon.

Tässä työssä oletuksena käytetään Hausdorffin topologiaa, mikä sopii luontevasti GPT:n viitekehukseen. Topologista avaruutta kutsutaan Hausdorffin avaruudeksi, jos sen jokaisten erillisten pisteiden ympäristöt ovat myös erillisiä. Tällöin jokainen suppeneva tilojen jono suppenee kohti yksikäsitteisesti määriteltyä tilaa [12]. Lisäksi oletuksena oleva kompaktisuus on nyt määritelty Hausdorffin topologian mukaisesti.

GPT:n tilajoukon määritelmä edellyttää vielä vektoriavaruuden reaalisuuden ja äärellisulotteisuuden, ja näin saadaan seuraava määritelmä:

Määritelmä 1.1. GPT:n *tilajoukko* $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ on reaalisen ja äärellisulotteisen Hausdorffin vektoriavaruuden \mathcal{V} kompakti konvekssi osajoukko.

Jotta kvanttiteoria erottuisi muista teorioista GPT:ssa, pitää kiinnittää tilajoukko johonkin avaruuteen ja myös joukon osittainen järjestys. Siksi kvanttiteorian tilajoukko ei ole niin yleinen kuin GPT:ssa, vaan se saa muitakin taustaoletuksia. Kvanttiteoriassa operoidaan Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} . Useimmiten tarkasteluja suoritetaan äärellisulotteisessa Hilbertin avaruudessa. Tässä työssä oletetaan, että kvanttiteoria on äärellisulotteinen.

Määritellään, että $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ on joukko lineaarioperaattoreita $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, ja sen osajoukko on $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ - itseadjungoitujen lineaarioperaattoreiden joukko. $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ muodostaa reaalisen äärellisulotteisen vektoriavaruuden. Operaattori $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on positiivinen eli $A \geq O$ jos ja vain jos $\langle \psi | A \psi \rangle \geq 0$ kaikilla $\psi \in \mathcal{H}$. Kaikki positiiviset

operaattorit ovat itseadjungoituja.

Jälkiluokka $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ on vektoriavaruus, joka muodotuu jälkiluokkaoperaattoreista $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. $T \rightarrow \text{tr}[|T|] := \|T\|_1$ on jälkinormi jälkiluokassa ja siksi myös $\mathcal{L}(\mathcal{H})$:ssa ja operaattorin itseisarvo $|T| \geq O$ on $|T| = \sqrt{T^*T}$.

Nyt meillä on työkalut määrittelemään äärellisulotteisen kvanttiteorian tilajoukko $\mathcal{S}(\mathcal{H})$.

Määritelmä 1.2. Äärellisulotteisen kvanttiteorian tilajoukko $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ on

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{\varrho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid \varrho \geq O, \text{tr}[\varrho] = 1\},$$

jossa tila ϱ on positiivinen jälkiluokkaoperaattori, jonka jälki on 1.

Tästä seuraa, että tilat kuuluvat joukkoon $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$. Tiloja kuvaavia operaattoreita ϱ kutsutaan kvanttiteoriassa *tiheysmatriiseiksi*.

GPT todellakin antaa viitekehyksen kvanttiteorian tilajoukon käsittelyyn. $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ on reaalinen ja äärellisulotteinen vektoriavaruus. Tämä vektoriavaruus on Hausdorffin vektoriavaruus ja tilajoukko on kompakti ja konveksi (perustelut löytyvät lähteestä [12]). Nyt $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ on reaalisen ja äärellisulotteisen Hausdorffin vektoriavaruuden $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ kompakti konveksi osajoukko ja näin määritelmän 1.2. mukaan on GPT:n tilajoukko.

1.2.1 Tensoritulo

Erilaisia yksittäisiä fysikaalisia systeemejä kuvaavat tilat, jotka sisältyvät yhteen tavalliseen äärellisulotteiseen Hausdorffin vektoriavaruuteen \mathcal{V} , eivät ole niin mielenkiintoisia teorian tai laboratoriokokeiden kannalta. Mielenkiintoisimpia ovat yhdistettyjen systeemien tilat, jotka sisältyvät yhdistettyyn avaruuteen $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, jossa \mathcal{U} ja \mathcal{V} ovat äärellisulotteisia Hausdorffin vektoriavaruuksia. Yhdistetty avaruus $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ on niin sanottu avaruuksien \mathcal{U} ja \mathcal{V} *tensoritulo* ja se on myös Hausdorffin vektoriavaruus. Tällä tavalla tensoritulo on tärkeä työkalu yhdistettyjen fysikaalisten sys-

teemien kuvaamiseen ja uusien fysikaalisten avaruuksien muodostamiseen. Yhdistettyjen systeemien matemaattinen määritelmä antaa mahdollisuuden käsitellä tiloja, jotka kuvaavat kahden systeemin vuorovaikutusta. Kokeellisessa fysiikassa tuskin mikään systeemi on niin hyvin eristetty, ettei se vuorovaikuta ympäristöönsä kanssa, jolloin tutkittava systeemi ja ympäristö muodostavat yhdistetyn kokonaissysteemin. Toinen tärkeä esimerkki on n -kubitien kokonaissysteemit, joissa n kubitia vuorovaikuttavat keskenään ja näin kokonaissysteemit ovat n :stä systeemistä yhdistettyjä.

Jos $\{u_i\}$ on vektoriavaruuden \mathcal{U} ortonormaali kanta ja $\{v_i\}$ on vastaavasti \mathcal{V} :n ortonormaali kanta, niin yhdistetyn avaruuden kanta on $\{u_i \otimes v_j\}$. Kanoninen kuvaus $f(u, v) = u \otimes v : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ on *tensoritulokuvaus*, ja niin yhdistetyn avaruuden kanta on *tensoritulo*. Yhdistetyn avaruuden dimensio on $\dim(\mathcal{U}) \cdot \dim(\mathcal{V})$. Lisäksi, jokainen tensoriavaruuden termi w voidaan ilmaista muodossa $w = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{i,j} u_i \otimes v_j$, jossa $\lambda_{i,j}$ on joku perhe $\{\lambda_{i,j}\} \subset \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Systeemin $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ tensoritulolle pätevät seuraavat:

$$\begin{aligned}\lambda(u \otimes v) &= (\lambda u) \otimes v = u \otimes (\lambda v) \\ (u_1 + u_2) \otimes v &= u_1 \otimes v + u_2 \otimes v \\ u \otimes (v_1 + v_2) &= u \otimes v_1 + u \otimes v_2,\end{aligned}$$

jossa $\lambda \in \mathbb{R}$, $u, u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ ja $v, v_1, v_2 \in \mathcal{V}$.

Tensoritulon määritelmä luontevasti yleistyy kolmelle, neljälle, jne. vektoriavaruudelle. Vastaavasti tensoritulon ominaisuudet voidaan yleistää.

Olkoon $S^{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ ja $S^{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$ kahden eri systeemin tila-avaruudet. Silloin niistä yhdistetyn systeemin tila-avaruus on $S^{\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}} \subset \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Olkoon tila $u \in S^{\mathcal{U}}$ ja $v \in S^{\mathcal{V}}$, silloin yhdistetyn systeemin tila on $u \otimes v \in S^{\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}}$.

Edellä esitetty on yleinen kuvaus tensoritulolle, joka pätee GPT:ssa ja myös kvanttimekaniikassa. Kuitenkin kvanttimekaniikka on suppeampi teoria kuin GPT, ja seuraavaksi esitetään tensoritulo ja joitakin sen ominaisuuksia kvanttimekaniikassa.

kan viitekehyksessä. Pääsääntönä on se, että Hausdorffin vektoriavaruuksien sijasta operoidaan Hilbertin avaruudessa.

Kvanttimekaniikassa jokainen yhdistetty systeemi $A + B$ kuuluu vektoriavaruuteen $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, ja sisätulo on määritelty seuraavasti:

$$\langle \psi_A \otimes \psi_B | \varphi_A \otimes \varphi_B \rangle = \langle \psi_A | \varphi_A \rangle \langle \psi_B | \varphi_B \rangle,$$

jossa $\psi_{A/B} \in \mathcal{H}_{A/B}$, $\varphi_{A/B} \in \mathcal{H}_{A/B}$, $\psi_A \otimes \psi_B \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ja $\varphi_A \otimes \varphi_B \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Äärellisulotteisessa tapauksessa $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ on äärellisulotteinen ja myös Hilbertin avaruus, silloin yhdistetyn systeemin tila-avaruus on $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$. Lisäksi, olkoon operaattorit $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ ja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ sekä $\psi \in \mathcal{H}_A$ ja $\varphi \in \mathcal{H}_B$, nyt operaattori $S \otimes T$ tensorituloavaruudessa $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ operoi tilaan $\psi \otimes \varphi$ seuraavasti:

$$(S \otimes T)\psi \otimes \varphi = (S\psi) \otimes (T\varphi).$$

1.3 Efektit

Efektillä ja fysikaalisella suurella on erittäin tärkeä rooli operationaalisuuden kannalta. Systeemin tila itsessään ei ole niin kiinnostava kuin polku tilasta mittaustulokseen: miten tilasta tulee tietty lopputulos. Eli tutkimuksen kannalta kiinnostavampi on efekti kuin tila. Tämä määrää myös kokeellisen osuuden, ja mittauksia voidaan verrata enemmänkin kanavien tomografiaan kuin tilan tomografiaan.

Efekti on tietyn mittaustuloksen esiintyminen eli mittaushavaintojen ekvivalenssiluokka. Fysikaalisessa kokeessa mittaustuloksena saadaan todennäköisyysjakauma, joka riippuu tilasta ja observaabelista eli fysikaalisesta suureesta, jota mitataan. Jakauman arvot vastaavat todennäköisyyttä, että tietyn observaabelin mittaus annetussa tilassa antaa tietyn arvon. Kaikki samaa mittaustulosta vastaavat mittaushavainnot muodostavat efektin. Näin pätee, että efekti on kuvaus $\varrho \rightarrow E(\varrho)$ tilajoukosta reaaliseen väliin $[0,1]$, jossa $E(\varrho)$ on todennäköisyys sille, että efekti on havaittu suoritettulle mittaukselle.

Efektit ovat affineja kuvauksia, eli kuvauksia, joissa tilojen konveksisuus säilyy. Tämä on luonnollinen oletus efektien määritelmän ja fysikaalisuuden kannalta. Jos meillä on tilat ρ_1 ja ρ_2 sekä todennäköisyydet $\lambda_1 = \lambda$ ja $\lambda_2 = 1 - \lambda$, $0 \leq \lambda \leq 1$, niin

$$E(\lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2) = \lambda E(\rho_1) + (1 - \lambda)E(\rho_2).$$

Lisäksi tarvitaan kaksi efektiä, jotka ovat olennaisia yleistetyyn todennäköisyysteorian efektin määritelmän kannalta: identiteettiefekti I ja nollaefekti O . Identiteettiefekti on kuvaus, joka antaa todennäköisyydeksi aina 1 kaikille tiloille eli $I(\rho) = 1 \forall \rho$. Nollaefekti on kuvaus, joka antaa todennäköisyydeksi aina 0 kaikille tiloille eli $O(\rho) = 0 \forall \rho$.

Määritelmä 1.3. Yleistetyssä todennäköisyysteoriassa efektiavaruus $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ on

$$\mathcal{E}(\mathcal{S}) = \{e \in \mathcal{F}(\mathcal{S}) \mid O \leq e \leq I\},$$

jossa e ovat affiinit funktionaalit $e : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$, $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ on kaikkien affiinien funktionaalien joukko ja \mathcal{S} on tila-avaruus.

Tässä työssä oletetaan, että käytetään reaaliarvoisia affineja kuvauksia $e \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$, ja osittainen järjestys määritellään seuraavasti: $e \leq f$ jos ja vain jos $e(s) \leq f(s) \forall s \in \mathcal{S}$. Lisäksi huomataan, että $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ on reaalinen vektoriavaruus ja efektiavaruus $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ on affiinien funktionaalien konvekssi osajoukko.

Kvanttimekaniikassa efektit ovat samanlaiset kuin GPT:ssä, mutta kvanttimekaaniset efektit ovat GPT:n efektien osajoukko, eli kvanttimekaniikassa on enemmän oletuksia. Efektit ovat edelleen affiinit funktionaalit tilajoukosta joukkoon $[0, 1]$, mutta tilajoukko $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ on määritelty kvanttimekaniikan teoriassa määritelmän 1.4. mukaan. Efektejä esitetään Hilbertin avaruuden operaattoreiden avulla. Haettu affiini funktionaali on kuvaus $\rho \rightarrow \text{tr}[\rho E]$, jossa $\text{tr}[\rho E]$ on efektin E todennäköisyys tilassa ρ ja $0 \leq \text{tr}[\rho E] \leq 1$ kaikille $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Näin ollen kvanttimekaniikan efektiavaruus on

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{E \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H}) \mid O \leq E \leq I\},$$

jossa E on positiivinen rajoitettu operaattori, $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ on itseadjungoitujen lineaario-
 peraattoreiden joukko Hilbertin avaruudessa, $E \geq O$ on määritelty niin kuin ennen,
 $E \geq O \Leftrightarrow \langle \psi | E \psi \rangle \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, ja I on identiteettioperaattori \mathcal{H} :ssa. Lisäksi
 $\mathcal{E}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$.

Tämän lisäksi voidaan tarkastella yhdistettyjen systeemien tapausta, jossa efek-
 tiavaruus voidaan kirjoittaa tensoritulon avulla sekä GPT:n että kvanttimekaniikan
 teorian viitekehyksissä. Yleisesti ottaen yhdistetyn systeemin $A+B$ efektiavaruus on
 $\mathcal{E}(\mathcal{S}^{A \otimes B})$, johon kuuluvat efektit $e \otimes f$, jossa GPT:ssa $e \in \mathcal{E}(\mathcal{S}_A)$ ja $f \in \mathcal{E}(\mathcal{S}_B)$ sekä
 kvanttimekaniikassa $e \in \mathcal{E}(\mathcal{H}_A)$ ja $f \in \mathcal{E}(\mathcal{H}_B)$. Jos yleistetyn todennäköisyysteorian
 yhdistetyn systeemin efekti on $e \otimes f \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^{A \otimes B})$ tai vastaavasti kvanttimekaniikassa
 $e \otimes f \in \mathcal{E}(\mathcal{H}^{A \otimes B})$ ja tila on $\psi \otimes \varphi \in \mathcal{S}^{A \otimes B}$, jonka määritelmä riippuu teoriasta, niin
 voidaan kirjoittaa $(e \otimes f)(\psi \otimes \varphi) = e(\psi)f(\varphi)$.

1.4 Fysikaaliset suureet

Mittauksien ekvivalenssiluokka on *fysikaalinen suure* tai *observaabeli*. Fysikaalinen
 suure saadaan, kun suoritetaan äärellinen määrä mittauksia. Kaikki mittaukset, jot-
 ka tuottavat saman tuloksen, muodostavat ekvivalenssiluokan ja niin ne määräävät
 saman suureen.

Määritelmiensä mukaan efekti ja suure liittyvät toisiinsa, sillä molemmat syn-
 tyvät mittauksesta. Kun suoritetaan mittausta ja saadaan tietty mittaustulos, se vas-
 taa efektia E . Kaikki mahdolliset mittaustulokset eli kaikki efektit muodostavat ob-
 servaabelin. Silloin todennäköisyys, että missä tahansa tilassa ϱ yksi efekteista toteu-
 tuu, on aina 1, eli kaikkien mahdollisten efektien toteutumistodennäköisyyksien sum-
 maksi saadaan 1. Tämä näkyy myös observaabelin matemaattisessa määritelmässä.

Tämän työn yleistetyn todennäköisyysteorian matemaattisessa tarkastelussa on
 otettu huomioon vain fysikaaliset suureet, joiden mittaustulosten määrä on äärellinen.
 Myös todellisissa kokeissa mittaustulosten määrä on äärellinen, sillä käytännössä mit-

taustuloksia on aina äärellinen määrä, vaikka kuinka paljon mittauksia olisi suoritettu.

Määritelmä 1.4. GPT:n fysikaalinen suure eli observaabeli, jonka mittaustulosten määrä on äärellinen, on sellainen kuvaus $E : \Omega \ni X \rightarrow E_X \in \mathcal{E}(\mathcal{S})$ tulosten äärellisestä joukosta Ω efektiivaruuteen $\mathcal{E}(\mathcal{S})$, että $\sum_{X \in \Omega} E_X = I$. Tämä on ekvivalentti seuraavan vaatimuksen kanssa: $\sum_{X \in \Omega} E_X(\rho) = 1 \forall \rho \in \mathcal{S}$.

Kvanttiteoriassa observaabelia vastaa *positiivinen operaattoriarvoinen mitta* eli *POVM*, jota kutsutaan myös *semispektraalimitaksi*.

Määritelmä 1.5. POVM kvanttiteoriassa on kuvaus $A : \Sigma \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{H})$, jossa Σ on epätyhjän tulosten joukon Ω σ -algebra ja $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ on kvanttiteorian efektiivaruus, jolle pätevät seuraavat:

- 1) $A_\emptyset = O$
- 2) $A_\Omega = I$, jossa I on kvanttiteorian identiteettioperaattori
- 3) $A_{\cup_i X_i} = \sum_i A_{X_i}$, kaikille erillisille jonoille $\{X_i\} \subset \Sigma$.

Kvanttiteoriassa nämä ehdot ovat ekvivalentteja seuraavien ehtojen kanssa ja pätevät kaikille $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$:

- 1) $\text{tr}[\rho A_\emptyset] = 0$
- 2) $\text{tr}[\rho A_\Omega] = 1$
- 3) $\text{tr}[\rho A_{\cup_i X_i}] = \sum_i \text{tr}[\rho A_{X_i}]$, kaikille erillisille jonoille $\{X_i\} \subset \Sigma$.

Jos kvanttiteorian observaabelilla on numeroituva määrä tuloksia, niin joukko Ω on numeroituva ja Σ on kaikista Ω :n alijoukoista koostuva joukko eli $\Sigma = 2^\Omega$. Tämä on vain erikoistapaus määritelmän 1.7. yleisestä observaabelista.

Määritelmä 1.6. Kvanttimekaniikan diskretti observaabeli, jonka tulosten avaruus 2^Ω on numeroituva, on kuvaus $A : \Sigma \ni x_j \rightarrow A_{x_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$, jos löytyy numeroituva joukko $\Omega_0 \in \Sigma$, jolle $\sum_{x_j \in \Omega_0} A_{x_j} = A_{\Omega_0} = I$.

Tarkempi matemaattinen pohja löytyy lähteestä [19].

2 Tomografia

Kun puhutaan tomografiasta, esimerkiksi lääketieteessä tarkoitetaan viipalekuvausta, jossa tutkimuksen kohteesta kuvataan poikkileikkauksia käyttäen kohdetta läpäiseviä aaltoja. Sen jälkeen poikkileikkaukset yhdistetään ja näin rakennetaan kolmiulotteinen kuva kohteesta.

Kvanttifysiikassa tomografialla tarkoitetaan kvanttisysteemin tilan mittauksia, joista pystytään määrittämään kyseessä oleva tila ennen mittauksia. Tarkoituksena on siis saada selville tilan tiheysmatriisi. Jos tila (sitä kuvaavaa tiheysmatriisia) voidaan määrittää yksikäsitteisesti, niin suoritettu mittaus on *täydellinen*.

GPT:ssa tomografia poikkeaa niin menetelmien kuin tavoitteidenkin osalta kvanttiteoriasta, joten emme voi käyttää kvanttimekaniikan tomografian analysointitapoja. GPT:n tomografialla tarkoitetaan systeemin tilan mittauksia, joista pystytään määrittämään kyseessä olevan tilan tila- ja efektiavaruus ja niiden dimensio. Molempien tomografioiden tapauksessa hyvän lopputuloksen saamisessa on omat hankaluutensa. GPT:n tomografian hankaluutena on mm. parhaan analysointitavan löytäminen sekä vähäisistä oletuksista aiheutuva suuren mittausmäärän vaatimus.

Tässä luvussa kuvaillaan ja annetaan matemaattiset työkalut kvanttiteorian ja GPT:n tomografian suorittamiseen. Lisäksi kerrotaan miten näissä teorioissa karakterisoidaan systeemien tilat. Koko luvun tarkoituksena on luoda selkeä kuva siitä, miten kvanttiteorian ja GPT:n tomografia poikkeavat toisistaan.

2.1 Kvanttiteorian tomografia

Käytännössä tomografia kvanttimekaniikassa toteutetaan siten, että tehdään sarja mittauksia identtisesti preparoiduille tiloille. Koska mittauksen jälkeen alkuperäinen

tila voi muuttua, seuraavaa mittausta ei voi tehdä samalle tilalle, vaan on valmistettava samalla tavalla preparoitujen tilojen joukko, ja jokainen mittausta on tehtävä uudelle tilalle. Tilamittauksia voidaan tehdä erilaisille systeemeille, joista yksinkertaisimmat ovat yksittäiset hiukkaset, kuten fotonit, ja vetyatomit. Esimerkiksi fotonien tapauksessa mittauksia suoritetaan niin, että sama mittausta tehdään joukolle fotoneja, näin saadaan *fotonistatistiikka* mittaustuloksista. Sen jälkeen siirrytään seuraavaan mittaukseen, joka tehdään taas joukolle fotoneja.

Samaa esimerkkiä jatkaen tarkastellaan tilannetta, jossa tomografiaa suoritetaan fotoneille ja siinä määritellään fotonin polarisaation tila. Koska fotonilla on kaksi polariaasiotilaa eli se on *2-tila systeemi*, ja tällaista systeemiä ei voi kuvailla klassisella bitillä, niin sanotaan, että fotonit on *1-kubitti* polarisaatiotilan kannalta. Seuraavaksi tarkastellaan siis 2-tila systeemiä, joten fotonin polarisaatiotilan tomografian sijasta vastaavanlainen tarkastelu olisi myös mille vain kvanttiselle 2-tila systeemin tomografialle. Fotonin polariaasiotilan tapauksessa, kun käytetään tiettyä mittauskantaa, 1-kubitin mittausta antaa informaatiota esimerkiksi siitä, onko fotonit horisontaalisesti vai vertikaalisesti polarisoitunut. Jos fotonin polarisaatiotila on horisontaalinen, se merkitään vektoritilalla $|H\rangle$, vertikaalinen polarisaatiotila on vastaavasti $|V\rangle$. Kaksiulotteisessa vektoriesityksessä

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ja } |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1 Tilan karakterisointi

Kvanttiteorian tilajoukko oli esitetty määritelmässä 1.4. Yleinen *puhdas* 1-kubitti tila $|\psi\rangle$ voidaan kirjoittaa muotoon $|\psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$, jossa α ja β ovat kompleksilukuja ja $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, jotta tila olisi fysikaalinen. Tämä tila on siis *superpositiotila*. Superpositio on kvanttitilojen ilmiö, joka esiintyy puhtaissa tiloissa. Kahden puhtaan tilan superpositio on sama ilmiö kuin kahden aaltoja kuvaavien vektoreiden lineaarikombinaatio.

Puhdas tila on vain yksi esimerkki, ja niin nousee kysymys siitä, miten eriluonteiset tilat voidaan erottaa toisistaan. Kvanttimekaniikan tomografian tulosten avulla tiheysmatriisista pystytään erottamaan puhtaat tilat tilojen sekoituksesta eli *sekoitetuista tiloista* ja näkemään, onko tila *kietoutunut* vai *tulotila*. Näin tomografian tulokset karakterisoivat tilaa täysin ja voidaan nähdä, onko kyseessä kvanttimekaaninen tila vai klassinen tila. Meidän esimerkissämme fotonin polarisaatiotilalle pitää suorittaa projektiivinen mittausta kolmessa eri kannassa. Näiden mittausten perusteella pitää laskea tilan tiheysmatriisi, josta voi päätellä, onko kyseessä puhdas vai sekoitettu tila.

Sekoitettua 1-kubitti tilaa ei voida esittää superpositiona kuten puhtaan tilan kohdalla, vaan tarvitaan yleisempi esitystapa - *tiheysmatriisi*. Tiheysmatriisin avulla esitetään kaikki 1-kubitti tilat seuraavasti:

$$\varrho = \sum_{i,j=0,1} P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_j| = \begin{pmatrix} A|H\rangle\langle H| & Ce^{i\phi}|H\rangle\langle V| \\ -Ce^{i\phi}|V\rangle\langle H| & B|V\rangle\langle V| \end{pmatrix},$$

jossa $|\psi_0\rangle = |H\rangle$, $|\psi_1\rangle = |V\rangle$ ja P_i ovat painokertoimia, jotka kertovat, kuinka todennäköisesti tila $|\psi_i\rangle$ esiintyy systeemissä, $\sum_i P_i = 1$. Luvut A , B ja C ovat reaalisia ja ei-negatiivisia ja lisäksi $A + B = 1$ ja $C \leq \sqrt{AB}$. [20]

Samalla logiikalla tiheysmatriisi voidaan kirjoittaa kaikille n -kubitti tiloille, $n = 1, 2, 3, \dots$. Yleinen puhdas n -kubitti tila voidaan kirjoittaa muotoon

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_n=0,1} \alpha_{i_1, \dots, i_n} |\psi_{i_1}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{i_n}\rangle,$$

jossa \otimes on tensoritulo, $|\psi_0\rangle = |H\rangle$, $|\psi_1\rangle = |V\rangle$ ja α_{i_1, \dots, i_n} ovat kompleksilukuja, joille $\sum_{i_1, \dots, i_n=0,1} |\alpha_{i_1, \dots, i_n}|^2 = 1$. Nyt n -kubitin tiheysmatriisi on niin kuin aikaisemmin $\varrho = \sum_{i,j=0,1} P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_j|$.

Tiheysmatriisin koko riippuu systeemin dimensiosta. Mitä suurempi systeemin dimensio on, sitä enemmän termejä on tensoritulossa ja sitä suuremmaksi tiheysmatriisi tulee. Jos mitattava systeemi koostuu yhdestä kubitista, tiheysmatriisi ϱ

on 2×2 matriisi, jos mitataan kahden kubitin tilaa, ρ on 4×4 matriisi, jne. Suurien tiheysmatriisien kanssa matemaattinen operoiminen on hankalaa. Sen lisäksi sellaisia tiheysmatriiseja vastaavien systeemien rakentaminen laboratoriossa on haastava. Kuitenkin monidimensioiset systeemit ovat tutkimuksen kannalta mielenkiintoisimmat. Tämän työn matemaattinen tarkastelu ja laboratoriossa kokeiden toteuttaminen rajoittuu 2-kubititiloihin, vaikka tulevaisuudessa GPT:n tarkastelussa olevan tilan dimension kasvattaminen voi tuoda uusia näkökulmia yleistettyyn todennäköisyysteoriaan. [18, 21]

Merkitään tuntematon tila niin kuin kappaleessa 1.2. ρ :lla. Nyt tilan puhtaus voidaan päätellä laskemalla $\text{tr}[\rho^2]$: jos $0 \leq \text{tr}[\rho^2] < 1$, kyseessä on sekoitettu tila, jos taas $\text{tr}[\rho^2] = 1$, tila ρ on puhdas. Puhdas tila on siis sellainen, jota ei voida ilmaista muiden tilojen sekoituksen avulla. Puhtaalle tilalle pätee, että $\rho = \lambda \rho_1 + (1 - \lambda) \rho_2$, jossa $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, jos ja vain jos $\rho = \rho_1 = \rho_2$ kaikille $0 \leq \lambda \leq 1$. Eli kaikki tila-avaruuden tilat, jotka eivät ole puhtaita, ovat sekoitettuja.

Esimerkiksi puhtaan superpositiotilan $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$ tiheysmatriisi on

$$\rho = \frac{1}{2} (|H\rangle\langle H| + |H\rangle\langle V| + |V\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Koska tila on puhdas, nähdään, että jälki $\text{tr}[\rho^2]=1$. Vastakohtana voidaan mainita sekoitettu tila, jonka tiheysmatriisi eroaa vain hiukan edellä mainitusta:

$$\rho = \frac{1}{2} (|H\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kuitenkin nähdään, että tällaisen tilan tiheysmatriisin neliön jälki ei ole enää 1, nyt $\text{tr}[\rho^2] = \frac{1}{2}$.

Kietoutunut tila voi syntyä vain yhdistetyssä systeemissä, joka voi olla kahden tai kolmen tai useamman alisysteemin kokonaisuus. Esimerkiksi kahden alisysteemin kietoutunut tila on sellainen tila Hilbertin avaruudessa $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, jota ei voi esittää *separoituvana tilana* eli *tulotilana* $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ millekään $\psi \in \mathcal{H}_A$ ja $\varphi \in \mathcal{H}_B$. Eli

jos yhdistetyn systeemin kokonaistilasta ei voida erottaa tilat, jotka kuuluvat alisysteemeihin \mathcal{H}_A ja \mathcal{H}_B , kokonaistila on kietoutunut. Tunnetuimmat kietoutuneen tilan esimerkit ovat kahden fotonin kokonaissysteemin Bellin tilat:

$$\begin{aligned} |\Phi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_1 \otimes |H\rangle_2 + |V\rangle_1 \otimes |V\rangle_2) \\ |\Phi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_1 \otimes |H\rangle_2 - |V\rangle_1 \otimes |V\rangle_2) \\ |\Psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_1 \otimes |V\rangle_2 + |V\rangle_1 \otimes |H\rangle_2) \\ |\Psi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_1 \otimes |V\rangle_2 - |V\rangle_1 \otimes |H\rangle_2), \end{aligned}$$

jossa 1 viittaa ensimmäisen alisysteemin Hilbertin avaruuteen \mathcal{H}_1 ja 2 - \mathcal{H}_2 :een. Tulotilat ovat puhtaita tiloja. Kietoutuneet tilat voivat olla puhtaita, niin kuin kaikki Bellin tilat, tai sekoitettuja.

Tuntemattoman tilan ρ kietoutuneisuus T ja konkurrenssi C voidaan määrittää laskemalla R -matriisin ominaisarvot. Tässä $R = \rho \Sigma \rho^T \Sigma$, T viittaa matriisin transponointiin ja Σ on niin sanottu *spin flip -matriisi*. 2-kubitti tapauksessa spin flip -matriisi on [20]:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

R -matriisin ominaisarvoja on neljä. Merkitään ominaisarvot r_1, r_2, r_3 ja r_4 sekä asetetaan ominaisarvot laskevaan järjestykseen: $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq r_4$. Nyt 2-kubittisysteemin tilan konkurrenssi on $C = \text{Max}\{0, \sqrt{r_1}, \sqrt{r_1}, \sqrt{r_1}\}$. Lopuksi voidaan laskea tilan kietoutuneisuus $T = C^2$. Jos kietoutuneisuus ja konkurrenssi saavat arvokseen 0, niin tarkasteltavan 2-kubittisysteemin tila on tulotila tai yleisimmin tulotilojen sekoitus, jos arvoksi tulee 1, niin systeemin tila vastaa yhtä Bellin tiloista.

2.1.2 n-kubittisysteemien tomografia

Jos tilat voidaan esittää tiheysmatriisien avulla, pitää vielä selvittää, miten mitausdatasta saadaan laskettu mitattavan tilan tiheysmatriisi. Tähän tarvitaan neljää askelta. Olkoon meillä kyseessä sellainen systeemi, jonka tilan tiheysmatriisi on ρ .

1) Useimmiten ensimmäisenä askeleena on se, että tiedetään jo ennen mittauksia, mikä on mitattavan systeemin tilan dimensio, toisin sanoen tiedetään tiheysmatriisin ρ dimensio. Näin ei ole aina, sillä monissakin mittauksissa ei tiedetä systeemistä etukäteen mitään (mm. GPT:n tomografiassa). Kvanttiteorian tomografiassa tiheysmatriisin dimension tietäminen on tärkeää, sillä eri dimensioiset tiheysmatriisit syntyvät laadultaan erilaisista vektorituloista: yhden kubitin (yhden dimension) tapauksessa tiheysmatriisi syntyy tavallisesta vektoreiden ulkotulosta, kahden tai useamman dimension tapauksessa ulkotulon vektorit muodostuvat yksidimensionaisten tilojen tensorituloista (2-kubittitapauksessa tensoritulossa on kaksi tilaa, 3-kubittitapauksessa - kolme jne.).

2) Tiheysmatriisi kirjoitetaan hajotelmana Paulin matriisien ja parametrien avulla. Mielivaltainen ρ voidaan esittää tällaisena hajotelmana riippumatta sen dimensiosta. Kahden ja useamman dimension tapauksessa hajotelmassa Paulin matriisien sijasta käytetään niiden tensorituloa. Tarkastellaan tässä 1-kubitin tiheysmatriisin hajotelmaa:

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 S_i \sigma_i,$$

jossa S_i ovat parametreja, joita 1-kubitti tapauksessa kutsutaan Stokesin parametreiksi, ja σ_i ovat Paulin matriisit. Stokesin parametrit kuvaavat klassisessa fysiikassa sähkömagneettisen säteilyn polarisaatiotilaa. Niin myös kvanttimitauksissa 1-kubitin tapauksessa Stokesin parametrit kuvaavat fotonipolarisaatiota ja vastaavat mittauksia *D/A*, *R/L* ja *H/V kannoissa*. *D/A* kanta on sellainen, jossa kaikki fotonin polarisaatiotilat voidaan esittää *diagonaalisen ja antidiagonaalisen* polarisaatiotilan avulla. Vastaavasti *R/L* tarkoittaa *oikeakätisen ja vasenkätisen ym-*

pyröpolarisatiotilojen (englanniksi right and left circular polarization) muodostamaa kantaa, ja H/V on jo tuttu horisontaalisen ja vertikaalisen polarisatiotilojen muodostama kanta. Tästä tulee ilmi myös se, että fotonin voi olla lineaarisesti polarisoitunut ja ympyräpolarisoitunut.

Tiheysmatriisin hajotelma voidaan muodostaa myös parametreista, jotka vastaavat mittauksia muissakin kuin edellä esitetyissä kannoissa. Silloin pitää myös Paulin matriisit korvata jollain muilla kannoille sopivilla matriiseilla. Pääasia on, että valitaan ortonormaalit kannat. 1-kubitin tiheysmatriisin hajotelman kirjoittamiseen riittää 3 ortonormaalia kantaa ja niissä tehdyt mittaukset. Kun kubittien määrä, ja myös systeemin dimensio, kasvaa, kasvaa myös mittausten määrä ja käytettävien kantojen määrä. Esimerkiksi 2-kubittitapauksessa mittaukset edellyttävät yhdeksän ortonormaalia kantaa.

3) Stokesin parametrien arvoja voidaan laskea, kun tiedetään ϱ , kaavalla $S_i = \text{tr}[\sigma_i \varrho]$. Tomografiassa taas pitää mittaustietojen avulla saada selville Stokesin parametrit ja niistä laskea tiheysmatriisi. Tätä varten Stokesin parametrit kirjoitetaan seuraavaan muotoon:

$$\begin{aligned} S_0 &= P_{|H\rangle} + P_{|V\rangle} \\ S_1 &= P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle+|V\rangle)} - P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle-|V\rangle)} \\ S_2 &= P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle+i|V\rangle)} - P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle-i|V\rangle)} \\ S_3 &= P_{|H\rangle} - P_{|V\rangle}, \end{aligned}$$

jossa $P_{|\psi\rangle}$ on todennäköisyys saada mittaustuloksena tila $|\psi\rangle$.

4) Viimeisenä askeleena on mittausten ja Stokesin parametrien välille yhteyden luominen. Todennäköisyydet $P_{|\psi\rangle}$ vastaavat kolmessa eri ortonormaalissa kannassa suoritettujen projektiivisten mittausten lopputuloksia. Kantoina käytetään edelleen H/V, D/A ja R/L, joten H/V kannassa tehdyt mittaukset kertovat onko tila horisontaalisesti vai vertikaalisesti polarisoitunut, D/A kannan mittauksista

voidaan päätellä, onko mitattava tila diagonaalisesti vai antidiagonaalisesti polarisoitunut, ja R/L kannan mittauksista - onko tila oikeakätisesti vai vasenkätisesti ympäripolarisoitunut. Lisäksi polarisaatiotilat $|D\rangle$, $|A\rangle$, $|R\rangle$ ja $|L\rangle$ voidaan kirjoittaa tilojen $|H\rangle$ ja $|V\rangle$ avulla:

$$\begin{aligned} |D\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) \\ |A\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle) \\ |R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + i|V\rangle) \\ |L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - i|V\rangle). \end{aligned}$$

Nyt nähdään, että saadaksemme ensimmäisen ja viimeisen Stokesin parametrien S_0 ja S_3 arvot, pitää suorittaa joukko mittauksia kannassa H/V ja laskea todennäköisyydet saada mittaustuloksena tila $|H\rangle$ ja $|V\rangle$. Koska tilat $|H\rangle$ ja $|V\rangle$ ovat toistensa ortogonaaliset komplementit, $P_{|H\rangle} + P_{|V\rangle} = 1$ ja niin on aina $S_0 = 1$. Toisen Stokesin parametrin S_1 arvo saadaan tekemällä mittauksia D/A kannassa ja laskeamalla todennäköisyydet mittaustuloksille $|D\rangle$ ja $|A\rangle$ ja vastaavasti S_2 : arvo tulee R/L kannan mittauksista ja niistä saaduista todennäköisyyksistä.

Myös kahden tai useamman kubitin tapauksessa on mahdollista kirjoittaa S -parametrit todennäköisyyksien avulla. Silloin tilat ja myös kantojen tilat ovat tensorituloja, jolloin tiheysmatriisin hajotelmassa on aina yhä enemmän termejä ja yhä enemmän S -parametreja laskettavana.

Yllä esitetty kantojen valinta ei ole ainoa oikea. Kantoja $|\phi_i\rangle$ voidaan valita vasti, kunhan niiden matriisit $|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ ja identiteettimatriisi ovat keskenään lineaarisesti riippumattomia. Silloin pitää käyttää Pauli matriisien σ_1 , σ_2 ja σ_3 sijasta matriiseja $\tau_i = |\phi_i\rangle\langle\phi_i| - |\phi_i^\perp\rangle\langle\phi_i^\perp|$, $i=1,2,3$, jossa $|\phi_i^\perp\rangle$ on kantatilan $|\phi_i\rangle$ ortogonaalinen komplementti. Vastaavasti 1-kubitille uudet S' -parametrit lasketaan sitten kaavasta $S'_i = \text{tr}[\tau_i \varrho]$, kun tunnetaan tilan tiheysmatriisi. Jos ϱ :ta ei tunneta, niin S' -parametrit saadaan Stokesin parametreista muunnosmatriisilla.

2.1.3 Kvanttiteorian tomografian suoritus

Tomografinen tilan määrittäminen on edellä mainittujen neljän askeleen ketju käänteisessä järjestyksessä eli viimeisestä kohdasta alkaen. Kuitenkin ensimmäisenä otetaan käyttöön ensimmäinen kohta: luodaan sellainen tila, jonka dimensio on tunnettu. Sen perusteella voidaan arvioida, millaisia mittauksia pitää tehdä ja kuinka monta. Nyt siirrytään neljänteen vaiheeseen ja suoritetaan tarpeellisia mittauksia joukolle samalla tavalla preparatoituja tiloja. Tässä kohdassa sovitaan, että ainoat preparoinnit tapahtuvat siinä vaiheessa, kun tiloja tehdään. Sitten, kun tällä tavalla identtisesti preparoidut tilat ovat jo olemassa, niille ei tehdä mitään preparointeja lisää, vaan tiloille heti suoritetaan mittauksia eri kannoissa. Jokaisen mittauksen yhteydessä lasketaan fotonien lukumäärä detektoreiden avulla, ja fotonistatistiikasta saadaan laskettu todennäköisyydet $P_{|\psi\rangle}$. Niistä lasketaan edelleen Stokesin parametrit ja niiden avulla lopulta ratkaistaan mitattavan tilan tiheysmatriisi.

2.2 GPT:n tomografia

GPT eroaa teorian tasolla kvanttimekaniikasta, ja niin GPT:n tomografia on kaikin puolin erilainen kuin kvanttiteorian tomografia. Ensimmäinen ero ilmenee heti jo itse tomografian toteutuksessa. GPT:n tomografiassa ei oleteta mitään mitattavan systeemin tilan dimensiosta eikä mitään itse mittausmenetelmästä [9]. Ainoa, mitä tiedetään, on se, että preparointien ja mittausten aikana tila ei muutu. Tästä johtuen GPT:n tomografia on verrattavissa *kvanttikanavamittaukseen* tai toisin sanottuna *prosessitomografiaan*, esim. [22]. GPT:ssa oletuksina ovat mittausten ja preparointien riippumattomuus, jolloin preparointeja voidaan muuttaa riippumattomasti mittauksista ja toisinpäin. Oletuksena on myös toistettavuus, eli voidaan aina tehdä samoja preparointeja ja mittauksia systeemille ja lopputulos pysyy virherajoissaan muuttumattomana. Tällä tavalla samoin kuin kvanttiteorian tomografiassa voidaan suorittaa preparointeja ja mittauksia joukolle fotoneja. Kvanttikanavatomografiassa

tarkoituksena on selvittää, miten kvanttikanava muuttaa kvanttitalan toiseksi kvanttitalaksi toistuvien mittausten mittausstatistiikan perusteella. GPT:n tomografiassa voidaan ajatella tuntematon tila kvanttikanavana. Silloin preparoinnit ovat sisään menevät tilat ja mittauksen jälkeen saadaan mittausstatistiikka. Tämä vertaus on kuitenkin vain ajatuksen leikkiä, sillä prosessitomografiassa me tiedämme tilat, jotka menevät kvanttikanavaan, mutta GPT:n tomografiassa emme tiedä alustavasti preparoinneista eikä mittauksista mitään, koska ne valitaan täysin satunnaisesti. Lopputuloksen kannalta etukäteen tieto preparoinneista ja mittauksista on tarpeetonta.

2.2.1 Tilan karakterisointi

Tutkittavat systeemit ja niiden tilat eivät riipu mitenkään teorian valinnasta. Kvanttiteorian yhteydessä esitetyt eri tilojen karakterisointimenetelmät ovat hyvin tutkittuja ja ymmärrettyjä. Vaikka yleistetyssä todennäköisyysteoriassa ei voida käyttää samoja menetelmiä, on hyvää ymmärtää, mitkä tilat ovat mahdollisia ja palata kvanttiteorian näkökulmaan aina tarvittaessa. Koska tässä työssä verrataan kvanttiteorian ja yleistetyn todennäköisyysteorian tomografioita, on hyvää pitää mielessä ajatus, että tilat ovat samat kuin kappaleessa 2.1.1. esitetyt, mutta systeemeja karakterisoidaan teoriasta riippuen eri tavalla.

GPT:n tomografiassa lukuisilla preparoinneilla ja mittauksilla on pyrkimyksenä saada selville mitattavan systeemin tilan tila-avaruus ja efekti-avaruus [9]. Näin statistisista mittaustuloksista pystytään päättämään, mihin teoriaan GPT:n sisällä mitattava systeemi kuuluu, esimerkiksi voiko kvanttiteoria vai Spekkensin leluteoria (Spekkens toy theory, [23]) luoda saadut mittaustulokset. Tämä pohjautuu siihen, että kaikki fysikaaliset teoriat GPT:n sisällä voidaan erottaa toisistaan niiden tila- ja efektiavaruuden muotojen perusteella. Tila- ja efektiavaruuden dimension perusteella voidaan päätellä myös kyseisessä teoriassa mitattavan systeemin tilan

dimensio. Toisin sanoen, jokaisella teorialla GPT:n sisällä on tietty joukko kaikkia mahdollisia tila- ja efektivektoreita. Niinpä tekemällä tällainen analyysi voidaan tutkia, pitävätkö paikkansa kvanttiteorian ennustukset vai esiintyykö poikkeamia, jolloin joku muu teoria kuin kvanttiteoria olisi ehkä parempi. Tämä myös auttaa näkemään kvanttiteorian ja klassisen teorian välistä rajaa selkeämmin.

Näin ollen GPT:n tomografian tavoitteena on systeemin kuvaaminen, niin kuin kvanttiteorian tomografiassa, kuitenkin karakterisointi ei tapahdu antamalla systeemin tilalle tarkkaa kuvausta vaan enemmänkin lokeroimalla tila. Esimerkkinä voidaan tarkastella taas 1-kubitisysteemi. Se on tunnetusti kvanttisysteemi, jossa kaikkia mahdollisia preparointeja kuvaa tilajoukko $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ ja kaikkia mahdollisia efektejä kuvaa efektiavaruus $\mathcal{E}(\mathcal{H})$, jossa Hilbertin avaruus \mathcal{H} on kaksiulotteinen. Näitä voidaan esittää myös käyttäen neliulotteisia vektoreita. Preparointia vastaa tila ϱ , jota voidaan kirjoittaa muodossa $\varrho = \frac{1}{2}(I + \bar{R} \cdot \bar{\sigma})$, jossa $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$ on Paulin vektori. Vektori \bar{R} on kolmiulotteinen *Blochin vektori*, jolle pätee $\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2} \leq 1$. Jokaiselle tilalle on olemassa omat uniikit parametrit R_1, R_2 ja R_3 , ja niin kaikki mahdolliset preparoinnit, vastaavasti tilat, voidaan esittää geometrisesti pallona, jota kutsutaan *Blochin palloksi*. Sen säde on 1. Blochin pallon pinnalla on kaikki mahdolliset kubitin puhtaat tilat ja sisällä sekoitetut tilat niin, että maksimaalisesti sekoitettu tila on pallon keskipisteessä. Vastaavasti kubitin efektia kuvaa operaattori E , joka voidaan kirjoittaa muodossa $E = \bar{e} \cdot (I, \bar{\sigma})^T$. Tässä $\bar{\sigma}$ on edelleen Paulin vektori ja \bar{e} on jokaista kubitin efektia yksikäsitteisesti kuvaava neliulotteinen vektori, joka vastaa tilojen kuvauksessa Blochin vektoria. \bar{e} :lle pätee, että $0 \leq e_0 \leq 1$, $\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2} \leq e_0$ ja myös $\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2} \leq 1 - e_0$. Geometrisesti kaikki yhden kubitin efektit voidaan esittää niin sanottuna *Blochin timanttina* (englanniksi *Bloch diamond*), kun tehdään projektio $e \rightarrow (e_0, e_1, e_2)$. [9, 24]

Kun suoritetaan jollekin systeemin tilalle GPT tomografia, ja lopputuloksena saadaan tila-avaruudeksi Blochin pallo ja efektiavaruudeksi Blochin timantti, niin

tiedetään, että mitattava systeemi vastaa yleistetyn todennäköisyysteoriaan sisältyvää kvanttimekaniikan teoriaa. Sen lisäksi voidaan päätellä tila-avaruuden ja efektiiviaruuden dimensiosta, että kyseessä on 1-kubittisysteemi. Tällä tavalla tila on ”lokeroitu”, ja GPT tomografia todellakin antaa tietoja mitattavan systeemin tilasta siten, kuin oli odotettu.

On tärkeätä muistaa, että tämä tila-avaruuden ja efektiiviaruuden esitysvalinta ei ole ainoa mahdollinen. Tila-avaruus ja efektiiviaruus voivat olla täysin erinäköisiä riippuen käytetystä operaattorivektorikannasta. Blochin pallo ja timantti ovat yleisin esitysmuoto yhden kubitin tila- ja vektoriavaruudelle. Silloin kantavalintana on identiteettioperaattori ja Paulin operaattorit: $\{\frac{1}{2}I, \frac{1}{2}\sigma_1, \frac{1}{2}\sigma_2, \frac{1}{2}\sigma_3\}$.

2.2.2 GPT:n tomografian perusteet

GPT:n tomografia voidaan myös jakaa neljään tarpeelliseen askeleeseen. Samalla esitetään tomografian ja laskujen kannalta tarpeelliset käsitteet ja periaatteet. GPT:n tomografian tavoite on kvanttiteoriasta poikkeava, kuten edellä on mainittu, ja niin nämä neljä askelta johtavat eri lopputulokseen kuin kvanttiteorian tomografiassa.

1) Toisin kuin kvanttiteoriassa GPT:ssä ei oleteta mittattavasta systeemistä eikä itse mittauksesta mitään. Ensimmäinen askel perustuu siihen, ettei voida tietää etukäteen, mikä teoria on riittävä kuvaamaan systeemin tilaa, siksi myös mitattavan systeemin tilasta ei voida olettaa mitään. Tavallisessa tomografiassa selvitetävänä on tilan ominaisuudet, jotka ovat samoja jokaiselle identtisesti preparoidulle tilalle. Nyt GPT:ssä jokaiselle samalla tavalla preparoidulle tilalle on tarpeellista tehdä lisää preparointeja. Nämä preparoinnit eivät ole ennalta määrättyjä niin kuin tilojen valmistuksessa, vaan niiden pitää olla mahdollisimman satunnaisia ja määrällisesti niitä pitää olla mahdollisimman paljon. Tämä taas palautuu ajatukseen kvanttikanavatomografiasta. Mitattavan systeemin tilaa (jokaista samalla ennalta määrättyllä tavalla preparoitua tilaa) voidaan ajatella kanavana. Normaalisti kanavaan syötetään eri-

laisia tiloja ja katsotaan, miten kanava muuttaa niitä. Myös tässä tehdään erilaisia preparointeja ”kanavalle” ja katsotaan mittauksen jälkeen, mitä saadaan lopputulokseksi. Näin voidaan nähdä, miten ”kanavamme” toimii eri preparoinneissa. Jotta ymmärtäisimme paremmin, miten ”kanava” toimii, preparointeja pitää olla erilaisia ja paljon. Siihen on olemassa myös matemaattisesti parempi syy: GPT:n tomografian lopputuloksena halutaan ymmärtää, mikä teoria selittää systeemin tilaa, siksi halutaan saada geometrisesti mahdollisimman tarkka tila-avaruus (ja efektiivisyys). Jos kyseessä on taas kerran 1-kubittisysteemi, ja preparointeja ei valita riittävän hyvin, niin lopputuloksena voi olla tila-avaruus, joka ei muistuta palloa, vaan esimerkiksi pallon puolikasta tai palloa, jonka säde on paljon pienempi kuin 1.

Prosessitomografian ja GPT tomografian erona on se, että prosessitomografiassa tilat, jotka syötetään kanavaan, ovat tunnettuja ja myös mittaukset. GPT:n tomografiassa ei oleteta mitään tilasta eikä mitään preparoinneista, jolloin lopputulosten analysoijan ei tarvitse tietää lainkaan, mitä preparointeja suoritettiin kokeen aikana.

2) Toinen askel tulee siitä, ettei oleteta mitään mittauksesta. Ei voi myöskään tietää etukäteen, millaiset mittaukset ovat riittäviä systeemin tilan selvittämiseksi, jolloin on yritettävä tehdä mittauksia, niin kuin preparointeja, mahdollisimman monipuolisesti pitäen mielessä, että halutaan selvittää myös efektiivisyyden muoto. Kvanttiteorian tomografiassa 1-kubittitilalle suoritetaan tarpeelliset mittaukset vain kolmessa eri kannassa, nyt nämä mittaukset eivät riitä, koska ei voi olettaa systeemin dimensiosta tai ylipäättäänkään tilasta mitään, vaikka mitattava tila olisikin 1-kubittitila. Näin ollen, koska mittauksista ei voida olettaa mitään, niin ei voida olettaa, missä kannassa mittaukset pitäisi tehdä. Lisäksi, jälkikäteen ei tarvitse tietää mitä mittauksia käytettiin, mikä on myös ero GPT:n tomografian ja prosessitomografian välillä. Pyrkimyksenä on saada vain todennäköisyydet preparointimittausparien lopputuloksille. Oletuksien puutteesta johtuen pitää suorittaa mittauksia myös mahdollisimman paljon. Koska mittaukset eivät riipu mitenkään pre-

paroinneista, suoritetaan aina jokaisen preparoinnin kohdalla sama joukko mittauksia. Tämän askeleen päätteeksi kaikki preparoinnit ja mittaukset ovat suoritettu, jolloin ei tarvitse enää tehdä kokeellisesti mitään, vaan voidaan siirtyä matemaattisiin askeliin.

3) Tämän askeleen tavoitteena on saada mitatusta datasta, eli mitatusta *todennäköisyysmatriisista*, sellainen matriisi, joka kuvaisi parhaiten mitattavaa tilaa. Todennäköisyysmatriisi on verrattavissa tiheysmatriisiin, koska myös todennäköisyysmatriisi sisältää tietoja mitattavan systeemin tilasta. Tiheysmatriisi muodostuu, kun lasketaan ulkotulo tilaa kuvaavan tilavektorin ja sen transpoosin kanssa. Todennäköisyysmatriisi muodostuu eri tavalla ja sisältää eri tietoja tilasta kuin tiheysmatriisi. Sen lisäksi se sisältää tietoja efektiivaruudesta, mitä tiheysmatriisi ei sisällä itsessään. Voidaan sanoa, että todennäköisyysmatriisi kuvaa systeemia laajemmin, mutta ei sisällä niin tarkkoja tietoja itse tilasta kuin tiheysmatriisi.

Kahden ensimmäisen askeleen jälkeen saadaan ideaalisessa tapauksessa tomografian lopputuloksena matriisi D , jossa jokainen matriisin alkio on todennäköisyys saada tietty lopputulos, kun systeemin tilalle tehtiin preparointi P ja mittaus M . Jos esimerkiksi halutaan saada todennäköisyyksiä, jotka kuvaavat lopputuloksena horisontaalisesti polarisoituneen tilan H saamista, sellaista todennäköisyyttä merkitään $p(H|P, M)$. Yhdessä kannassa suoritettu mittaus M voi antaa vain kaksi mahdollista tulosta: H/V kannassa suoritettu mittaus antaa tulokseksi vain horisontaalisesti ja vertikaalisesti polarisoituneiden fotonien määrän. Niin kuin kvanttiteorian tomografiassa, GPT:n tomografiassa suoritetaan aina preparointi-mittauspari useammalle lähtökohtaisesti samalla tavalla preparoidulle fotonille, juuri tästä tulee mukaan fotonistatistiikka, eli edellisen esimerkin eri määrät horisontaalisesti ja vertikaalisesti polarisoituneita fotoneja, merkitään ne vastaavasti N_0 ja N_1 . Kun fotonistatistiikka on valmis, lasketaan horisontaalisesti polarisoituneen tilan saamisen todennäköisyys: $p(H|P, M) = \frac{N_0}{N_0+N_1}$. Kuitenkin, niin kuin todettiin kappalees-

sa 2.2.1 tila- ja efektiivaruuden esitysmuodoista, todennäköisyysmatriisi voi koostua vastaavasti todennäköisyyksistä $p(V|P, M)$, $p(R|P, M)$ tai vaikka $p(D|P, M)$, tai voidaan valita mielivaltainen kanta ja laskea todennäköisyydet siinä kannassa. Todennäköisyysmatriisi D on kooltaan $m \times n$, jolloin yhdessä pystyryivissä on todennäköisyydet, kun systeemille tehtiin m erilaista preparointia, mutta mittaus oli aina sama, ja yhdessä vaakarivissä todennäköisyydet vastaavat tilannetta, jossa preparointi oli aina sama, mutta mittauksia suoritettiin n erilaista.

$$D = \begin{pmatrix} p(H|P_1, M_1) & p(H|P_1, M_2) & \dots & p(H|P_1, M_n) \\ p(H|P_2, M_1) & p(H|P_2, M_2) & \dots & p(H|P_2, M_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(H|P_m, M_1) & p(H|P_m, M_2) & \dots & p(H|P_m, M_n) \end{pmatrix}$$

Kuitenkin mittauksia ei ole välttämättä riittävästi kuvaamaan alkuperäistä tilaa, ja suurella todennäköisyydellä GPT:n tomografia ei siten ole täydellinen. Silti oletetaan, että suoritettu tomografia on riittävän täydellinen, sillä preparointeja ja mittauksia tehdään paljon ja monipuolisesti, ja näin myös mittaustulosten analysointi on voimassa [9]. GPT:n tomografian riittävä täydellisyys voidaan varmistaa valitsemalla preparoinnit ja mittaukset niin, että ne kattaisivat esimerkiksi kubitin tapauksessa koko Blochin pallo eikä vain osan siitä. Kuitenkaan ei päästä täydelliseen mittaukseen samalla tavalla kuin kvanttiteorian tomografiassa, koska se vaatisi äärettömän määrän preparointeja ja mittauksia.

Koska todennäköisyysmatriisi D on teoreettinen, sen alkiot ovat todellisten mitausten idealisoituja tuloksia. Todellisuudessa mittaustuloksena saadaan matriisi F , jonka alkiot fotonistatistiikasta ja eriluonteisista virheistä johtuen ovat siten epätarkkoja. Tästä syystä matriisi F on täysiasteinen, päinvastoin kuin matriisi D yleensä. F :n asteen pitäisi antaa tietoja siitä, mikä teoria voi selittää mitattavan systeemin. Nimittäin, matriisin aste vastaa tilaa kuvaavan teorian tomografisesti täydellisen mitausten (tai preparointien) joukon dimensiota. Kuitenkin kokeessa

preparointeja ja mittauksia tehdään niin paljon, että F :n aste on aina liian suuri. Nyt tehtävänä on selvittää matriisin F avulla parhaiten mitatun systeemin tilaa kuvaava matriisi \tilde{D} . Tällöin tavoitteena on saada todennäköisyysmatriisi \tilde{D} , jonka aste k vastaisi mitatun tilan tomografisesti täydellisen mittausten joukon dimensioita, ja siksi vastaisi parhaiten matriisia F . Mitatulle F määritellään parhaiten sopiva k -asteinen \tilde{D} niin, että *residuaali* χ^2 saisi minimiarvon (ensimmäinen minimointiehto):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{F_{ij} - \tilde{D}_{ij}}{\Delta F_{ij}} \right)^2,$$

jossa ΔF_{ij} on mitatun todennäköisyysmatriisin F alkion mittauserätarkkuus, joka voidaan laskea, esimerkiksi, olettamalla Poissonin virhejakauma fotonistatistiikassa. Vastaavasti voi olettaa virhejakauma gaussiseksi tai muuksi sopivaksi, jolloin ΔF_{ij} määritettäisiin eri tavalla. Minimointiehdon periaate on se, että lasketaan jokaiselle k :n arvolle residuaalin χ^2 arvo ja sitten verrataan residuaalin arvoja keskenään. Tällainen minimointiehto on käytännössä *painotettu alemman asteen approksimointiongelma* (*low-rank approximation*).

Sen lisäksi on tarpeellista käyttää *Akaike informaatiokriteeria* (toinen minimointiehto), *AIC*. Tässä käytetään

$$AIC = \chi(k)^2 + 2n(k),$$

jossa $\chi(k)^2$ on residuaalin arvo asteen k tapauksessa ja $n(k)$ on monotonisesti vähenevälle $\chi(k)^2$:lle k :sta riippuva korjaustermi, joka mahdollistaa jollain k :n arvolla informaatiokriteerin minimin saavuttamisen [25]. Koska residuaali vähenee monotonisesti, kun $\text{rank}(\tilde{D})$ menee kohti arvoa k , sitä voidaan ajatella asteen k alarajan mittana. Näin ollen jonkun informaatiokriteerin käyttö on tarpeellista, koska pitää selvittää, mikä k :n arvo on kuitenkin riittävä. Koska Akaike informaatiokriteeri saavuttaa jollain tomografisesti täydellisen preparointien joukon dimension arvolla (k :n arvolla) miniminsä, jonka jälkeen informaatiokriteerin arvot jälleen kasvavat, *AIC*:n

minimi vastaa riittävää k :n arvoa eli ylärajaa. On tärkeätä tietää, että Akaike informaatiokriteeri ei ole ainoa mahdollinen, siksi tässä työssä myös pohditaan, kuinka hyvä Akaike informaatiokriteeri on juuri GPT:n tomografiassa.

Tilaa kuvaavan teorian tomografisesti täydellisen mittausten joukon dimension k selvittäminen on GPT:n tomografian yksi tärkeimmistä tuloksista, koska se myös määrittää omalla tavalla sopivan teorian efektiivisuuden (ja myös tila-avaruuden) muodon. Käyttämällä molempia minimointiehtoja toivotaan saavan niistä tulokseksi samanlaiset sopivat k :n arvot. Esimerkiksi niin, että ensimmäinen ehto kertoo, että tila-avaruuden oikea aste ei voi olla pienempi kuin $k = 3$ ja toisen ehdon minimi osuu arvolle $k = 3$, ja siksi voidaan päättää, että $k = 3$ kuvaa parhaiten mitattavan systeemin tila-avaruutta ja näin määrää sen, että kvanttiteoria on paras selittämään tuloksia. Kyse on joka tapauksessa todennäköisyysmatriiseista, ja pitää muistaa, että todennäköisyysmatriisi \tilde{D} on mitattavan systeemin tilaa parempi kuvaava todennäköisyysmatriisin F versio, siksi \tilde{D} :n pitää täyttää minimointiehtojen lisäksi seuraavat ehdot:

$$\begin{aligned} \tilde{D} &\in M_{mn} \\ \text{rank}(\tilde{D}) &\leq k \\ 0 &\leq \tilde{D}_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j \end{aligned} \quad ,$$

jossa M_{mn} on kaikkien $m \times n$ reaalmatriisien avaruus.

Jotta todennäköisyysmatriisille \tilde{D} löytyisi paras ehdokas, pitää laskea erilaisille asteen k arvoille residuaali χ^2 , Akaike informaationkriteeri AIC ja itse \tilde{D} . Lähtökohta jokaiselle laskulle on mitattu todennäköisyysmatriisi F ja alemman asteen approksimointialgoritmi, joka on otettu viitteestä [26]. Seuraavaksi esitetään meidän käyttämämme matemaattiset menettelyt:

- i) Valitaan ensimmäisenä k :n arvo, jolle kaikki seuraavat laskut suoritetaan.
- ii) Mitattuun todennäköisyysmatriisiin F lisätään ensimmäiseksi riviksi ykkösten rivi, joka vastaa horisontaalisesti polarisoituneen tilan mittaamisen sataprosenttista

todennäköisyyttä. Tällöin uusi todennäköisyysmatriisi on muotoa

$$F = \begin{pmatrix} 1 & p(H|P_1, M_2) & p(H|P_1, M_3) & \dots & p(H|P_1, M_n) \\ 1 & p(H|P_2, M_2) & p(H|P_2, M_3) & \dots & p(H|P_2, M_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & p(H|P_m, M_2) & p(H|P_m, M_3) & \dots & p(H|P_m, M_n) \end{pmatrix}.$$

iii) Matriisille F tehdään *pääakselihajotelma* (englanniksi singular value decomposition). Silloin $m \times n$ matriisi F esitetään kolmen yksinkertaisemman matriisin tulona:

$$F = USV^T,$$

jossa U on $m \times m$ ortogonaali matriisi, V^T on $n \times n$ ortogonaali matriisi ja S on $m \times n$ diagonaalimatriisi. Diagonaalimatriisin jokainen alkio on ei-negatiivinen ja vastaa matriisin F ominaisarvoa. Sen lisäksi ominaisarvot ovat diagonaalissa suuruusjärjestyksessä, jolloin arvoltaan suurin ominaisarvo on vasemmalla yläkulmassa ja pienin oikealla alakulmassa. Matriisin U pystyvektorit vastaavat matriisin F vasemmanpuoleisia ominaisvektoreita ja matriisin V^T vaakavektorit oikeanpuoleisia ominaisvektoreita. Jokainen matriisi voidaan hajottaa pääakselihajotelmalla. Tässä hajotelmassa matriisi S on aina sama, mutta matriisit U ja V voivat vaihdella riippuen käytetystä laskentaohjelmasta ja sen numeerisesta menetelmästä.

iv) Seuraavaksi alkuperäiselle matriisille F halutaan tehdä alemman asteen approksimointi. Pyrkimyksenä on löytää matriisi \tilde{D} , jonka aste on aikaisemmin valittu k , joten alkuperäisen matriisin aste pudotetaan siis k :hon. Pääakselihajotelmassa U :n pystyriivit ja V :n vaakarivit ovat matriisin sisältämän tiedon ”tärkeysjärjestyksessä”, koska ominaisarvomatriisissa alkiot ovat suuruusjärjestyksessä. Juuri tätä ominaisuutta käytetään alemman asteen approksimoinnissa, jolloin heitetään ei niin informatiiviset rivit pois. Näin ollen, matriisista U jätetään vain k ensimmäistä pystyriiviä, matriisista V^T vain k ensimmäistä (vasemmanpuoleisinta) vaakariviä sekä

matriisiin S diagonaalista k suurinta ominaisarvoa, muut matriisien alkiot korvataan nolilla. Approksimaation jälkeen matriisissa U muuttumattomana jäävät termit ovat kokoa $m \times k$, ja uutta matriisia merkitään U_k . Vastaavasti matriisissa V^T alkuperäisistä matriisista jäävät $k \times n$ termit, ja uutta matriisia merkitään V_k^T . Approksimoinnista saatua uutta S matriisia merkitään S_k :ksi.

v) k -asteinen matriisi \tilde{D} saadaan kertomalla approksimoitua hajotelman matriisit:

$$\tilde{D}(k) = U_k S_k V_k^T,$$

Tässä alaindeksi k viittaa aina approksimointiasteeseen.

vi) Viimeisenä lasketaan $\tilde{D}(k)$:lle χ^2 arvo. Residuaalin kaavassa esiintyvät virheet ΔF_{ij} , jotka ovat samoja kaikille asteille k , joten lasketaan ensimmäisenä ΔF_{ij} :t. Ensimmäistä pystyriiviä lukuun ottamatta matriisi F syntyy fotonistatistiikan tuloksesta, joten sen alkoiden mittausepä-tarkkuutta pitää laskea myös fotonistatistiikasta. Oletetaan fotonistatistiikan jokaisen preparointi-mittausparin suureiden N_0 ja N_1 olevan Poissonin jakauman mukaisia, mikä on yleinen oletus kvanttioptiikan kokeissa [9, 27]. Nyt $(\Delta F_{ij})^2$ ovat yksinkertaisesti todennäköisyyksien $p(H|P, M) = \frac{N_0}{N_0 + N_1}$ varianssit eli $(\Delta F_{ij})^2 = \sigma^2$. Todennäköisyyttä $p(H|P, M)$ voidaan merkitä kahden riippumattoman muuttujan funktioksi $f(N_0, N_1)$. Lisäksi muuttujien N_0 ja N_1 virheitä aiheuttavaa kohinaa oletetaan vaikuttavan muuttujiin riippumattomasti. Koska Poissonin jakauman odotusarvo on yhtä suuri kuin varianssi σ^2 , ja N_0 :n ja N_1 :n odotusarvot ovat fotonistatistiikasta saadut arvot, niin voidaan kirjoittaa $\sigma_0^2 = \Delta N_0^2 = N_0$ ja $\sigma_1^2 = \Delta N_1^2 = N_1$. Nyt σ^2 voidaan laskea *absoluuttisen virheen* kaavalla:

$$\begin{aligned} (\Delta f(x_1, x_2))^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right)^2 \\ f(N_0, N_1) &= \frac{N_0}{N_0 + N_1} \\ \sigma^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial N_0} \right)^2 N_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial N_1} \right)^2 N_1 \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{(N_0 + N_1) - N_0}{(N_0 + N_1)^2} \right)^2 N_0 + \left(\frac{-N_0}{(N_0 + N_1)^2} \right)^2 N_1$$

$$(\Delta F_{ij})^2 = \sigma^2 = \frac{N_0 N_1 (N_0 + N_1)}{(N_0 + N_1)^4} = \frac{N_0 N_1}{(N_0 + N_1)^3}.$$

Matriisin F ensimmäinen pystyriivi ei pohjaudu mittaustuloksiin, siksi jokaiselle sen alkiolle asetetaan $(\Delta F_{1j})^2 = \infty$ [9]. Tällainen arvo on otettu käyttöön, koska $(\Delta F_{ij})^2$ on nimittäjässä, ja siksi ”keinotekoinen” ensimmäinen pystyriivi ei tuo residuaalissa olevaan summaan mitään. Nyt matriisin F jokaiselle alkiolle voidaan laskea ΔF_{ij}^2 , ja näin saadaan käyttöön kaikki arvot χ^2 laskemiseen.

vii) Nyt approksimoidulle matriisille $\tilde{D}(k)$:lle lasketaan Akaike informaatiokriteeri $AIC(k)$, joka riippuu asteesta k . Tässä työssä käytämme $AIC(k)$:n kahta eri versioita:

$$AIC(k) = \chi(k)^2 + 2r_k$$

$$AICc(k) = \chi(k)^2 + 2r_k + \frac{2r_k^2 + 2r_k}{mn - k - 1},$$

jossa $r_k = k(n+m-k)$ on k -asteisen $m \times n$ kokoisen matriisin $\tilde{D}(k)$ reaaliparametrien (vapausasteiden) määrä [9, 25, 28]. Yleisessä Akaike informaatiokriteerin kaavassa esiintyy termi $n(k)$ ja useimmiten riittää, että $n(k) = r_k$. Kuitenkin tiedetään, että pienen datan tapauksessa on tarpeellista käyttää myös korjaustermiä $\frac{2r_k^2 + 2r_k}{mn - k - 1}$, koska tavallinen Akaike kriteeri saattaa asettaa minimiksi liian suuren k :n arvon. Näin olleen $AICc(k) = AIC(k) + \frac{2r_k^2 + 2r_k}{mn - k - 1}$ on Akaike kriteeri, joka sisältää korjauksen pienelle $\tilde{D}(k)$:n termien määrälle.

viii) Nyt valitaan seuraava k :n arvo ja toistetaan kaikki askeleet i)-vii). Ensimmäisessä kokeessa tarkastellaan asteen arvoja $k = 2, \dots, 10$.

ix) Lopuksi verrataan eri k :lle lasketut residuaalin ja informaatiokriteerien arvot. Lisäksi jokaiselle asteen k arvolle lasketaan AIC paino:

$$w_k = \frac{e^{-\frac{1}{2}\Delta_k}}{\sum_{k=1}^{10} e^{-\frac{1}{2}\Delta_k}},$$

jossa $\Delta_k = AIC(k) - \min AIC(k')$ tai vastaavasti $\Delta_k = AICc(k) - \min AICc(k')$. AIC paino kertoo, kuinka todennäköistä on, että k -asteinen matriisi $\tilde{D}(k)$ tietyllä k :n arvolla on paras kuvaamaan mittauksissa saatua matriisia F ja siksi paras kuvaamaan mitattavaa tilaa verrattuna matriiseihin $\tilde{D}(k)$ eri k :n arvoilla.

Lopputuloksena saadaan selville systeemin tilaa kuvaavan teorian preparointien ja mittausten joukon dimensiot: preparoinneille dimensio on $k - 1$, siksi tila-avaruuden dimensio on $k - 1$, ja mittauksille sekä efekti-avaruudelle dimensio on k . Tila-avaruuden dimensio ei vastaa suoraan matriisiin $\tilde{D}(k)$ astetta k , koska kokeista saatuun todennäköisyysmatriisiin F lisättiin ensimmäiseksi pystyriiviksi ykkösten pystyriivi. Tästä johtuen tila-avaruus muodostuu vain $k - 1$:stä lineaarisesti riippumattomasta vektorista ja viimeinen vektori koostuu pelkistä ykkösistä, ja siksi ei ole lineaarisesti riippumaton.

Meidän käyttämämme alemman asteen approksimointi on selkeä ja yksinkertainen, mutta sitä voidaan tehdä myös muillakin tavoilla kuin viitteessä [26]. Muutenkin matemaattiset menettelyt, joiden lopputuloksena saadaan eriaisteiset matriisit $\tilde{D}(k)$ sekä niiden $\chi(k)^2$ ja Akaike informaatiokriteerit, voivat poiketa meidän käyttämistämme. Mazurekin artikkelissä [9] käytetään alemman asteen approksimoinnin lisäksi optimointia, joka on alustavasti NP-vaikea ongelma. Kuitenkin artikkelissa esitetään iteraatioalgoritmi, jolla optimointia matriisille $\tilde{D}(k)$ on mahdollista suorittaa. Koska GPT:n tomografia on niin uusi konsepti, ei voida ottaa kantaa, onko optimoinnille artikkelissä käytetty optimointialgoritmi paras mahdollinen.

4) Viimeisenä askeleena on mitattavan systeemin tilan tila- ja efektimatriisin selvittäminen, ja niiden avulla myös sopivan teorian tila- ja efektiavaruuden määrittäminen, mikä on GPT:n tomografian päämäärä. Kun mittauksia parhaiten vastaava todennäköisyysmatriisi \tilde{D} on selvillä, voidaan kirjoittaa se muotoon $\tilde{D} = SE$,

jossa S on $m \times l$ GPT tilamatriisi ja E on $l \times n$ GPT efektimatriisi. Vastaavasti tilamatriisiin pystyvektoreita merkitään s_i :llä ja kutsutaan GPT tilavektoreiksi ja efektimatriisiin vaakavektoreita merkitään e_j :llä ja kutsutaan GPT efektivektoreiksi. Nyt \tilde{D} :n alkio $p(H|P_i, M_j)$ on $p(H|P_i, M_j) = s_i \cdot e_j$. Edellisistä valinnoista johtuen tilamatriisiin ensimmäinen pystyvektori s_1 koostuu pelkistä ykkösistä. On kuitenkin muistettavaa, että S ja E pareja on olemassa äärettömän paljon, kaikki riippuu operattoreiden vektorikannan valinnasta.

Koska GPT:n tomografia on niin uusi, ei ole yhtä muita parempaa tapaa selvittää S ja E jokaisen $\tilde{D}(k)$ tapauksessa. Ongelmaa voidaan lähestyä eri tavoin. Mazurekin artikkelissa [9] hajotetaan matriisi F , jonka ensimmäisenä pystyrivinä on ykkösten rivi, QR-hajotelmalla matriiseiksi Q , joka on $m \times m$ unitaarimatriisi, ja R , joka on $m \times n$ yläkolmiomatriisi. Tämän jälkeen saaduille matriiseille Q ja R tehdään joukko yksinkertaisia operaatioita, jotta saataisiin S ja E . Matriisi Q jaetaan vakiolla c , matriisi R kerrotaan samalla vakiolla ja näin saadaan uudet matriisit $Q' = Q/c$ ja $R = cR$. Seuraavaksi kirjoitetaan uudet matriisit muotoon $Q' = (Q_0 Q_1)$ ja $R' = (R_0 R_1)^T$, jossa Q_0 on Q' :n ensimmäinen pystyrivi ja Q_1 on loput pystyrit matriisista Q' sekä vastaavasti R_0 on R' :n ensimmäinen vaakarivi ja R_1 on loput vaakarivit matriisista R' . Astetta $k - 1$ olevalle tulomatriisille $Q_1 R_1$ tehdään pääakselihajotelma, nyt $Q_1 R_1 = U' \Sigma V'^T$. Lisäksi voidaan kirjoittaa pääaskelihajotelman matriisit uusiin muotoihin:

$$\begin{aligned} U' &= (U_{k-1} U'') \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} \Sigma_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ V' &= (V_{k-1} V'') \end{aligned}$$

jossa U_{k-1} ja V_{k-1} ovat $k - 1$ vasemmanpuoleisinta pystyriviä matriiseista U' ja V' , vastaavasti U'' ja V'' ovat matriisien U' ja V' loput pystyriveistä ja Σ_{k-1} on $(k - 1) \times (k - 1)$ kokoinen vasemmalla yläpuolella oleva matriisin Σ pala, joka

sisältää kaikki nolasta poikkeavat $Q_1 R_1$:n ominaisarvot.

Nyt voidaan kirjoittaa tila- ja efektimatriisit:

$$S = \left(Q_0 U_{k-1} \sqrt{\Sigma_{k-1}} \right)$$

$$E = \begin{pmatrix} R_0 \\ \sqrt{\Sigma_{k-1}} V_{k-1}^T \end{pmatrix}.$$

Tämän jälkeen artikkelissä tila- ja efektimatriiseille tehdään optimointi, jolloin samalla optimoituu matriisi $\tilde{D}(k) = S(k)E(k)$. $S(k)$ ja $E(k)$ optimoidaan pitäen vuorotellen yksi matriiseistä muuttumattomana. Tämän tarkoituksena on minimoida $\chi(k)^2$ kullekin k :n arvolle. Optimointi siis kuuluu varsinaisesti askeleen 3.

GPT:n tomografian päätavoite saavutetaan, kun pienintä $\chi(k)^2$:ta vastaavan tila- ja efektimatriisin $S(k)$ ja $E(k)$ avulla esitetään mitatun systeemin tilan tila- ja efektiavaruuksia. Jos halutaan selvittää efektiavaruus, niin ensimmäisenä muodostetaan uusi matriisi $(E(k) \quad 1 - E(k))$, joka vastaa mittaustulosten H ja myös mittaustulosten V efekteja (tai vastaavasti muulle parille H/V :n sijasta). Seuraavaksi otetaan uuden matriisin pystyvektoreiden konveksisulkeuma, eli pienin konveksijoukko, joka sisältää uuden matriisin kaikki pystyvektorit. Saatu sulkeuma vastaa mitattavamme systeemin GPT efektiavaruutta. GPT tila-avaruus on toisaalta vain konveksisulkeuma matriisin $S(k)$ vaakavektoreita.

Tila- ja efektiavaruuden muotojen perusteella voidaan päättää, mihin teoriaan mitattu systeemi kuuluu ja lisäksi voidaan selvittää, mitkä teoriat vastaavat erilaisia mitattuja tiloja. Toisin sanoen voidaan tarkistaa, mikä teoria on riittävä selittämään eri tilojen fysiikkaa, ja eliminoida teoriat, joille ei ole vastinetta mitattavissa olevien systeemien tilojen keskuudessa.

Tämän työn käsittelemissä kokeissa keskityttiin askeleen 3, eli sopivan teorian tila- ja efektiavaruuden dimension selvittämiseen.

3 Yhden kubitin GPT:n tomografian koejärjestely

Kokeellisessa toteutuksessa on kaksi tärkeätä osaa: fotoniparin luominen sekä fotonin preparointi ja mittaus. Seuraavaksi esitetään ne molemmat.

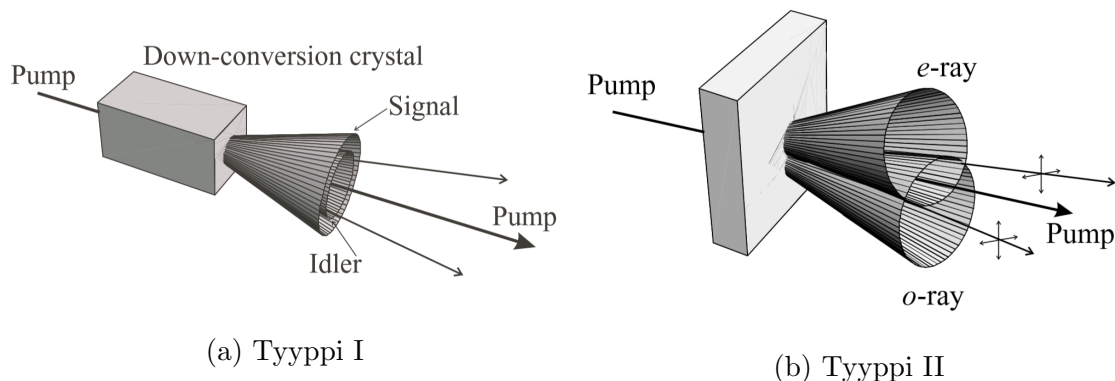
3.1 Fotoniparin luominen

Fotonipari luodaan *spontaanin parametrisen alaskonversion* avulla. Tämä menetelmä perustuu siihen, että laserlähteestä fotonit johdetaan tietynlaiseen epälineaariseen optiseen materiaaliin, jolloin yhden fotonin ja materiaalin keskinäisestä vuorovaikuksesta voi syntyä fotonipari. Fotonipari ei kuitenkaan synny jokaisesta fotonista, vaan spontaanisti tyypillisesti todennäköisyydellä $10^{-7} - 10^{-12}$. Siksi on tärkeätä käyttää tehokasta laserlähdettä. Sen lisäksi, jos materiaaliin sisään menevän fotonin taajuus on ω , niin syntyneen fotoniparin taajuuksien summa on ω ja taajuudet voi olla erisuuret tai yhtä suuret, jolloin puhutaan degenoituneista fotoneista. Myös liikemäärän säilymistä tapahtuu.

Tarkempi spontaanin parametrisen alaskonversion kuvaus perustuu oleellisesti lähteisiin [21, 29, 30].

Yhden fotonin ja optisen materiaalin epätavallinen vuorovaikutus syntyy siksi, että materiaalilla on toisen asteen epälineaarinen susceptibiliteetti [29]. Tällaisia materiaaleja ovat kahtaistaittavat, ei keskipistesymmetriset (englanniksi *noncentrosymmetric*), kiteet. Kahtaistaittavuudella tarkoitetaan materiaalin ominaisuutta, jolloin materiaalin taitekerroin riippuu valosäteen polarisaatiosta ja tulosuunnasta. Meidän koejärjestelyssämme on käytetty *β -barium boraatti (BBO)* kidettä spontaanin parametrisen alaskonversion synnyttämiseksi. Se on yleisestikin yksi käytetyimmistä kiteistä.

Kun prosessissa syntyy fotonipari, niin toista fotonia käytetään niin sanottuun *heraldointiin*, ja toinen fotoni on *signaalifotoni*. Heraldointifotonia ei käytetä varsinaiseen kokeeseen; kun detektorilla rekisteröi heraldointifotonin, se tarkoittaa että



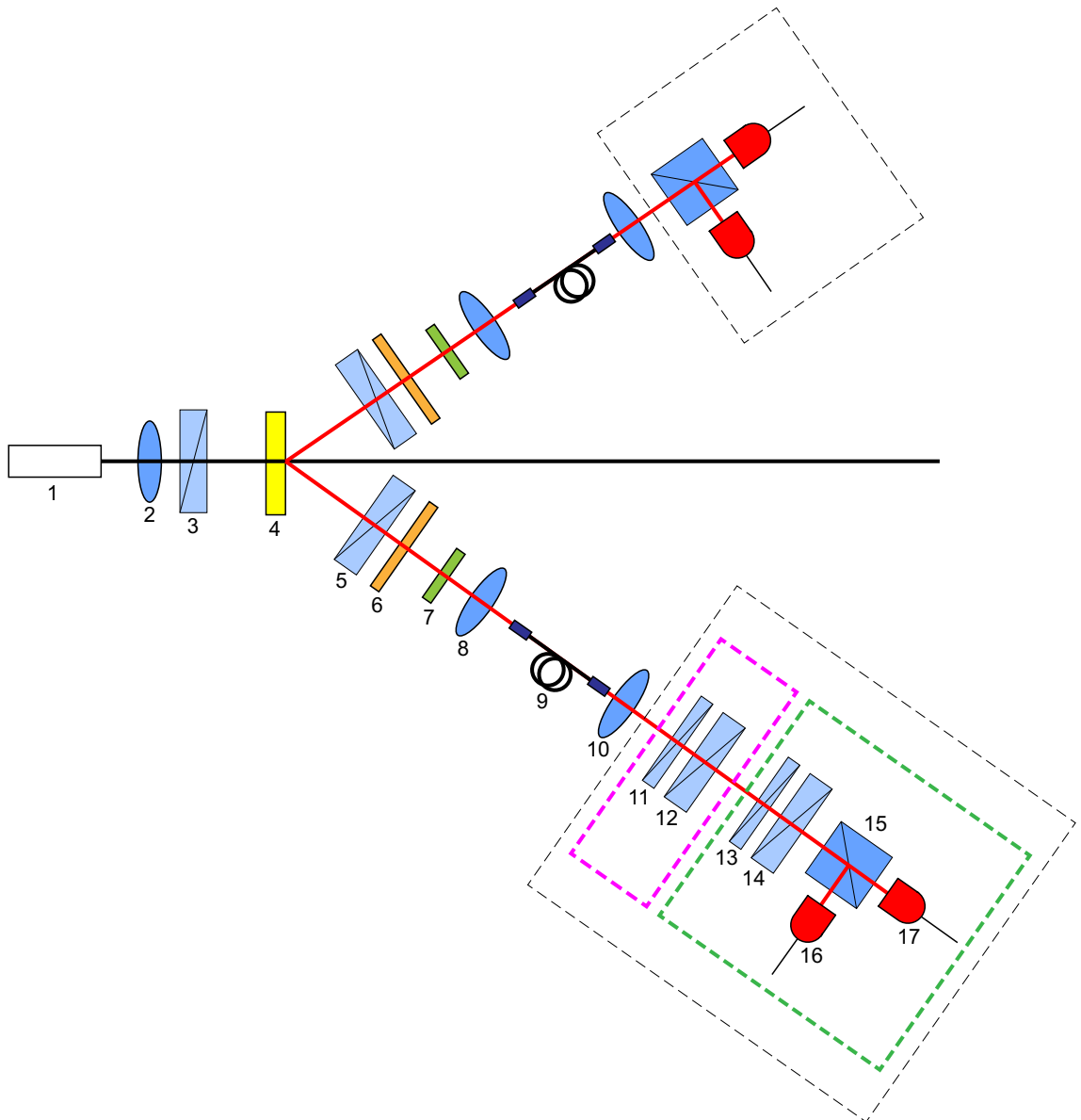
Kuva 1: a) Spontaani parametrinen alaskonversio tyyppiä I. Syntyneet fotonit ovat laserlähden säteen ympäri piirrettyjen ympyröiden vastakkaisilla sivuilla. Tämä takaa taajuuden ja liikemäärän säilymistä. Jos syntyneiden fotonien taajuudet ovat yhtä suuria, niin fotonit sijaitsevat saman lasersädekeskeisen ympyrän halkaisijan vastakkaisissa pisteissä. Sen lisäksi, jos syntynyt fotonipari on esim. H/V polarisaatiosuunnassa, niin molempien fotonin polarisaatio on joko H tai V. b) Spontaani parametrinen alaskonversio tyyppiä II. Jokainen syntynyt fotoni sijoittuu omaan ympyrän kehään, ja nämä ympyrät leikkaavat toisiaan. Tällöin jos toisella ympyrällä syntyvät fotonit ovat, esimerkiksi, H polarisoituneet, niin toisella ympyrällä V polarisoituneet. Kietoutuneet fotonit sijaitsevat aina ympyröiden leikkauspisteissä niin, että toinen syntyneistä fotoneista on toisessa pisteessä, ja toinen toisessa. Silloin ei voida sanoa tarkasti, kumpi fotoni tulee kummastakin ympyräkehästä eli kumpi on H ja kumpi on V polaisoitunut. (Kuvan lähteenä on [29].)

varsinaiseen kokeeseen osallistuva signaalifotoni on onnistuneesti preparoitu. Näin pystytään aina tietämään, onko spontaani parametrinen alaskonversio tapahtunut vai ei.

On olemassa kaksi erilaista spontaanin parametrinen alaskonversion tyyppiä. *Tyyppi I* tapauksessa syntyneillä heraldointi- ja signaalifotoneilla (kuvassa "idler" ja "signal") on sama polarisaatio, esim. H tai V. Sen lisäksi molempien fotonien polarisaatiot ovat kohtisuorassa laserlähteen säteen (kuvassa "pump") polarisaatio-suuntaan nähden. Kuvassa 1a on esitetty tyyppin I spontaani parametrinen alaskonversio. Kuitenkin tällä tavalla on mahdotonta saada kietoutuneita fotonitiloja, kun taas *tyyppiä II* oleva spontaani parametrinen alaskonversio voi tuottaa kietoutuneita fotonitiloja, kuva 1b. Kietoutuneisuus on tässä tapauksessa kytketty polarisaatioon. Tyyppin II tapauksessa syntyneillä fotoneilla (kuvassa "o-ray" ja "e-ray") on polarisaatiot aina kohtisuorassa toisiinsa nähden.

Pelkkä laserlähde ja BBO-kide luovat kyllä fotoniparin, mutta fotoniparien laatua voidaan parantaa laittamalla tiettyjä optisia komponentteja BBO-kiteen jälkeen. Kokonaisuudessaan koelaitteisto on seuraava, kuva 2:

- 1) Puolijohdelaseri, jonka aallonpituus on 405 nm ja teho on 40 mW.
- 2) Fokusoiva linssi, joka kohdistaa lasersädettä BBO-kiteeseen.
- 3) Puoliaaltolevy, joka kääntää lasersäteen lineaaripolarisaatiota BBO-kiteelle sopivaksi.
- 4) BBO-kide, jonka jälkeen kaikki optiset komponentit ovat samanlaiset sekä signaali- että heraldointifotonille. Heraldointifotoni on kuvan 2 yläpuolella olevassa haarassa ja signaalifotoni alapuolella olevassa haarassa.
- 5) Puoliaaltolevy, joka on käännetty 45° kulmaan ja näin se vaihtaa BBO-kiteestä tulevat V ja H fotonit keskenään.
- 6) BBO-kide, joka on puolet alkuperäisestä ohuempi ja kompensoi ensimmäisen kiteen aiheuttamaa V-polarisoituneen fotonin poikittaista siirtoa; siirto tapahtuu H-



Kuva 2: Yhden kubitin GPT:n tomografian koelaitteisto

polarisoituneen fotonin nähden. Puoliaaltolevyn jälkeen V-polarisoitunut fotoni saa H polarisaation, joten kompensoidaan sen siirtoa.

7) Kapeakaistainen interferenssisuodin (keskitäajuus 810 nm ja kaistanleveys on 10 nm), joka päästää vain degeneroituneet fotonit, joilla olisi aallonpituus 810 nm ± 10 nm.

8) Fokusoiva linssi, joka kohdistaa fotonit yksimoodikuittuun.

9) Yksimoodikuitu, joka poistaa kaiken informaation, joka voi sisältyä fotonin spatiaaliseen vapausasteeseen.

10) Fokusoiva linssi, joka kohdistaa fotonit seuraavalle optiselle komponentille.

Näin syntyy fotonipari, joka on aina kietoutunut. Se tapahtuu siksi, että BBO-kiteen jälkeen tulevat fotonit poimitaan puolialtolevyihin sellaisista kohdista, jotka vastaavat edellä mainittujen ympyröiden leikkauskohtia. Tässä vaiheessa signaalifotoni ja heraldointifotoni eivät eroa keskenään, mutta ero ilmenee seuraavassa vaiheessa, joka on merkitty mustalla katkoviivalla molempien fotonien kohdalla. Siinä varsinaiseen kokeeseen osallistuvaa signaalifotoni preparoidaan ja sitten mitataan. Heraldointifotoni menee vain polarisoivaan säteenjakajaan, jonka molemmat haarat vievät yksifotonidetektoriin. Kun toinen detektoreista rekisteröi fotonin, niin heraldointifotonin mittaus on suoritettu. Samanaikaisesti sen kanssa signaalifotonin pitäisi tulla rekisteröidyksi omassa yksifotonidetektorissa. Näin heraldointifotonilla on tärkeä tehtävä, sillä ilman sitä varsinaisessa kokeessa olisi enemmän dataa, koska mukana pääsisivät yksittäiset kohinafotonit, jotka tulevat muualta kuin parametrisen alaskonversion tuloksena.

Heraldointifotonin ohjaaminen säteenjakajaan ei ole tarpeellinen toimipide, vaan fotoni voidaan ohjata suoraan yksifotonidetektoriin. Meidän kokeessamme säteenjakaja on jäänyt, koska samanlaista koejärjestelyä käytetään kvanttiteorian tomografiaan, jossa säteenjakaja on tarpeellinen. Se ei aiheuta mitään ongelmia GPT:n tomografian suorituksessa.

3.2 Fotonin preparointi ja mittaus

Tämän kappaleen lähteinä käytetään [20, 21, 31].

Yleisesti ottaen preparointi ja mittaus suoritetaan käyttäen puoli- ja neljänneaaltolevyjä. Kääntämällä niitä muutetaan fotonin polarisaatiota. Fotonin polarisaatiotilassa tapahtuu muutos, koska aaltolevy saa aikaan vaihesiirron polarisaa-

tion komponenteissa. Esimerkiksi kvanttimekaniikassa yleinen puhdas tila $|\psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$ muuttuu aaltolevyn jälkeen tilaksi $|\psi\rangle = \alpha'|H\rangle + \beta'|V\rangle$, jossa α' , β' ja vastaavasti vaihesiirrot määräytyvät aaltolevyn ja sen kääntämiskulman mukaan. Matemaattisesti puhuen aaltolevyt operoivat niihin saapuviin tiloihin unitaarioperaatioina. Puoli- ja neljännesaaltolevy vastaavat unitaarioperaattoreita $U_{HWP}(\theta)$ ja $U_{QWP}(\theta)$:

$$U_{HWP}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ 2 \cos(\theta) \sin(\theta) & \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$

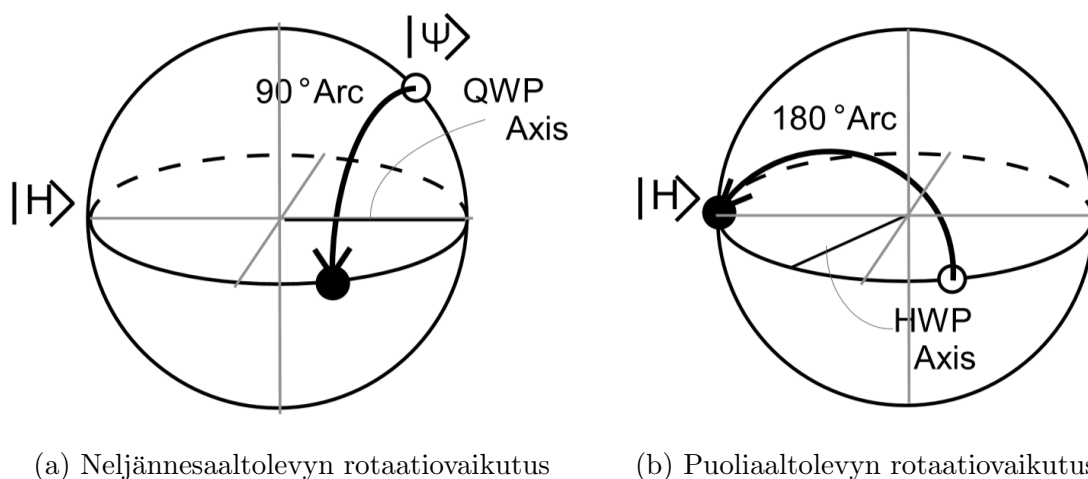
$$U_{QWP}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + i \sin^2(\theta) & (1 - i) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ (1 - i) \cos(\theta) \sin(\theta) & \sin^2(\theta) + i \cos^2(\theta) \end{pmatrix},$$

jossa θ on aaltolevyn kääntämiskulma. Esimerkiksi, kun $\pi/4$ kulmaan käännettyyn puoliaaltolevyyn saapuu fotonitilassa $|H\rangle$, niin sen tila muuttuu tilaksi $|V\rangle$:

$$|H\rangle \quad \longrightarrow \quad U_{HWP}\left(\frac{\pi}{4}\right)|H\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |V\rangle.$$

Blochin pallossa se tarkoittaa sitä, että aaltolevyt toimivat rotaatioina pystysuorassa olevan R/L akselin ympäri [20, 32]. Esimerkiksi fotonin lineaarinen H/V polarisaatio voi muuttua ympyräpolarisaatioksi, kun käytetään neljännesaaltolevyä kulmassa 45° . Vastaavasti mittaus perustuu siihen, että aaltolevyjen avulla fotonille voidaan tehdä projektioita, jolloin riippuen aaltolevyn asennosta, kun fotonitilalla on kulkenut polarisoivan säteenjakajan kautta detektoreille, tapahtuu projektiivinen mittaus. Esimerkiksi tietyllä neljännesaaltolevyn kulman valinnalla saadaan mitattavissa olevaa tilaa Blochin pallon lineaarisen polarisaation tasolle, kuva 3a. Sitten sopivasti käyttämällä puoliaaltolevyä voidaan tilaa saada horisontaalisesti polarisointuneeksi, kuva 3b. Tämän jälkeen polarisoiva säteenjakaja päästä läpi projektioita H ja heijastaa tilaa V, joita rekisteröi detektorit.

Aaltolevyjen optisen akselin kulmaa 0° vastaa kohtisuorassa signaalifotonin säteen kanssa oleva, laboratorion koordinaatistossa ylöspäin osoittava, suora. Silloin, kun



Kuva 3: Tilan evoluutio, kun käytetään ensiksi a) neljännesaaltolevyä (QWP) ja sitten b) puoliaaltolevyä (HWP). (Kuvan lähteenä on [20].)

puoliaaltolevyä käännetään laboratoriossa kulmaan θ , niin Blochin pallossa se vastaa lineaarisen tason 2θ rotaatiota R/L akselin ympäri. Vastaavasti neljännesaaltolevyllä laboratorion kulmaa θ vastaa Blochin pallossa 4θ rotaatio.

Näin ollen, signaalifotonin preparointiin käytetään kuvassa 2 esitetyt komponentit 11 ja 12, jotka ovat neljännesaaltolevy ja puoliaaltolevy. Preparointiaskel kokonaisuudessaan on merkitty kuvaan vaaleanpunaisella katkoviivalla. Kaksi aaltolevyä riittää, sillä preparoinnit niiden avulla kattavat kaikki Blochin pallon tilat. Mittaukseen, joka on merkitty kuvaan 2 vihreällä katkoviivalla, käytetään optisia komponentteja 13-17: neljännesaaltolevy 13, puoliaaltolevy 14, polarisoiva säteenjakaja 15 ja yksittäisfotonidetektorit 16 ja 17. Aaltolevyistä käytetään sekä neljännesaaltolevyä että puoliaaltolevyä, koska yhdessä ne mahdollistavat minkä vain mielivaltaisen polarisaatiotilan mittauksen. Detektoriin 17 kulkeutuu horisontaalisesti polarisoituneet tilat suoraan säteenjakajan läpi. Detektoriin 16 pääsevät säteenjakajasta heijastuneet vertikaalisesti polarisoituneet tilat, jotka ovat horisontaalisesti polarisoituneiden tilojen ortogonaaliset komplementit. Yksittäisfotonidetektorit rekisteröivät niihin saapuvat fotonit. Kokeessa käytettyjen yksifotonidetektoreiden herkkyys 810 nm aallonpituudella on noin 55 %.

Lopputuloksena on yksittäisfotonidetektoreista saatu data heraldointifotonille ja signaalifotonille. Jotta taustakohinafotonit eivät pääsisi mukaan analysoimisessa käytettävään dataan, pitää alussa valikoida detektoreihin saapuvat signaalit. Valikointi tapahtuu koinsidenssiyksikköä käyttäen. Se rekisteröi kaikkien detektoreiden signaalitapahtumat ja samalla antaa jokaiselle signaalille aikamerkin. Koinssidenssiyksikön tehtävänä on sitten verrata eri detektoreissa rekisteröidyjen signaalien aikamerkit ja valita varsinaiseen dataan vain sellaiset signaalit, joiden aikamerkki heraldointifotonille ja signaalifotonille ovat samat. Aikamerkkien ei tarvitse olla loputtoman tarkasti samanlaiset, vaan samanaikaisina pidetään signaalit, joita koinsidenssiyksikkö rekisteröi noin viiden nanosekunnin sisällä. Toisin sanoen, jos heraldointi- ja signaalifotoni saapuivat detektoreihin enintään viiden nanosekunnin päästä toinen toisesta, niin oletetaan, että kyseinen fotonipari syntyi samanaikaisesti spontaanin parametrin alaskonversion tuloksena. Tällainen aikaikkuna voisi olla lyhyempikin, mutta kokeeseen osallistuvia kietoutuneita heraldointi- ja signaalifotonin pareja syntyy satunnaisesti ja siksi harvoin, joten 5 ns on riittävän pieni aikaikkuna.

Meidän kokeessamme kyse on GPT:n tomografiasta, jossa ennen koetta ei oleteta systeemin tilasta mitään eikä itse kokeen aikana oleteta kvanttiteorian olevan oikea teoria kyseiselle systeemin tilalle. Ei tarvitse myöskään tietää, miten eri säteenjakajien asennot vaikuttavat polarisaatioon. Onnistuneen tuloksen ainoana tekijänä on preparointien ja mittausten mahdollisimman monipuolinen suoritus. Esimerkiksi jos kaikki mittaukset suoritetaan käyttäen vain yhtä aaltolevyä välillä 0° - 20° , ne kattavat vain murto-osa efektiivisuudesta. Tällöin voi syntyä tilanne, jossa kyse olisi kvanttimekaniikan teoriasta, mutta tulokset eivät viittäisi siihen. Käytännössä GPT:n tomografiaa suunniteltaessa riittää hyvä preparointiaaltolevyn ja mittausaaltolevyjen kulmien valinta; valitaan kulmat satunnaisesti, mutta pyritään valitsemaan kulmat monipuolisesti neljännesaaltolevylle väliltä $0^\circ - 90^\circ$ ja

puoliaaltolevylle väliltä $0^\circ - 180^\circ$.

Kvanttiteorian yhden kubitin tomografian koelaitteisto ei eroa mitenkään yllä esitetystä, paitsi että aaltolevyt numero 11 ja 12 voivat puuttua signaalifotonin haarasta tai komponentin 10 jälkeen voi tulla muitakin optisia komponentteja riippuen halutusta preparoinnista. Ero yleistettyyn todennäköisyysteoriaan verrattuna tulee siis preparoinnin ja mittauksen suorituksessa. Preparointi on kvanttimekaniikassa ”pysyvä”. Spontaanin parametrinen alaskonversion tuloksena on fotonipari, jolle voidaan tehdä preparointi johonkin tilaan käyttämällä komponentin 10 jälkeen polarisaattoreita tai aaltolevyjä. Kuitenkin kaikki preparointia varten olevat optiset komponentit laitetaan haluttuihin paikkoihin halutuilla asetuksilla vain kerran ennen kokeen alkamista eikä niiden paikkoja tai asetuksia muuteta kokeen aikana. Kvanttiteorian tomografia suoritetaan tällä tavalla preparoidulle tilalle. Kvanttimekaniikan tomografia perustuu projektiivisiin mittauksiin. Ensimmäisenä projisoidaan tilaa Blochin pallon vaikka R/L polarisaatioakselin kohtisuoralle tasolle, joka on polarisaatioakselien H/V ja D/A yhdensuuntainen. Ensimmäinen projektiivinen mittaus voi tehdä myös H/V tai D/A akselin kohtisuoralle tasolle. Sen jälkeen tehdään projektiivinen mittaus, joka projisoi tilaa kohtisuorasta tasosta H/V akselin (tai toisen jäljelle jääneen akselin) suuntaiselle suoralle. Lopuksi tilaa projisoidaan tästä suorasta D/A polarisaatioakselin suuntaiselle suoralle, joka käytännössä antaa jo tarkan pistekoordinaatin Blochin pallossa. Vastaavasti viimeisenä voidaan tehdä joku toinen, mutta aina vain jäljelle jäänyt, projektiivinen mittaus. Aaltolevyt laitetaan siis sellaisiin asentoihin, että saataisiin mittaukset halutuissa kannoissa eli ennen koetta tiedetään jo, kuinka monen kubitin tomografiaa halutaan suorittaa ja valitaan aaltolevyille sellaiset kulmat, jotka mahdollistavat Stokesin parametrien laskemista. Tällä tavalla mittaukset ovat hyvin kontrolloituja, ja tiedetään aina tarkasti, mitä tietoa saadaan mistäkin mittauksesta.

4 Yhden kubitin GPT:n tomografia

Suoritetussa kokeessa keskityttiin kappaleen 2.2.2 kolmeen ensimmäiseen askeleeseen. Tärkeimpänä tehtävä pidettiin tila- ja efektiavaruuden dimension selvittämistä, eli $\chi(k)^2$:n minimin löytämistä ja sitä kautta parhaan matriisin $\tilde{D}(k)$ asteen k löytämistä. Koko aihe on erittäin uusi kokeellisen teoreettisen fysiikan haarassa, joten k :n selvittäminen, mikä ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen prosessi, on riittävän haastava tehtävä.

Jotta pystyisimme päättämään jotain GPT:n tomografian pätevydestä, piti suorittaa se ennalta tunnetulle tilalle. Tällä tavalla lopussa voitiin verrata GPT:n tomografiasta saatua tulosta todellisena pidettävän kvanttimekaniikan tomografian tulokseen. Näin ensimmäisenä toistettiin Mazurekin artikkelissä [9] kuvaama yhden kubitin GPT:n tomografia. Tuloksena pitää siis olla $k = 4$, tila-avaruuden dimensio $k - 1 = 3$ ja efektiavaruuden dimensio $k = 4$.

4.1 Informaatiokriteerien arvojen laskeminen ja tulokset

Tomografia yleistetyn teorian viitekehyksessä alkaa tarkalla mittausten ja preparointien suunnittelulla. Yhdessä Mazurekin kokeessa käytettiin 100 eri mittausta ja jokaiselle niistä 100 preparointia, jolloin todennäköisyysmatriisissa oli 10000 alkiota. Minä suoritin kokeen, jossa jokaiselle kuudestatoista mittauksesta oli vain 16 preparointia. Saadussa 16×16 todennäköisyysmatriisissa on siten vain 256 alkiota. Tämä vastaa Mazurekin kokeen preparointi-mittauspareista vain alle kolmea prosenttia. Mitä enemmän on kokeesta saadussa todennäköisyysmatriisissa alkiota, sitä suuremmalla todennäköisyydellä tulokset ovat luotettavia, eli kubitin tapauksessa preparoinnit kattavat Blochin palloa monipuolisesti ja mittaukset sijoittuvat tasaisesti Blochin timantissa. Siitä syystä piti suunnitella huolellisesti, mitä preparointeja ja mittauksia tehdään, jotta saadut tulokset olisivat luotettavia. Suunnitteleminen tarkoitti puoli- ja neljännesaaltolevyjen kulmien valitsemista. Preparointia varten

yrityttiin valita kulmat satunnaisesti, ilman suurempaa miettimistä miten mikäkin aaltolevyn asento vaikuttaa eri tiloihin. Sen lisäksi tarkoituksena oli käyttää monipuolisesti erilaisia kulmia koko mahdollisten kulmien väliltä: puoliaaltolevyn väliltä 0° - 180° ja neljännesaaltolevyn väliltä 0° - 90° . Puoliaaltolevyn kulmat 0° ja 180° ovat ekvivalentteja kiertoja Blochin pallossa, vastaavasti neljännesaaltolevyn kulmat 0° ja 90° . Tämä on myös otettu huomioon. Näin tuntemattoman tilan preparoinniksi valikoitui liitekappaleessa A taulukossa VII esitetty kulmien joukko.

Koska mittausten määrä oli niin pieni, suunnittelemisessa pidettiin mielessä kvanttimekaniikan H/V, R/L ja D/A mittauskantoja. Niitä vastasivat puoliaaltolevyn ja neljännesaaltolevyn kulmat 0° , 0° (H/V), 0° , 45° (R/L) ja $22,5^\circ$, 0° (D/A). Tämä oli helppo tapa varmistaa, että mittaukset ovat riittävän monipuolisia. Kuitenkin kannattaa pitää mielessä, että kvanttimekaniikkaa tai mitään muuta teoriaa ei voinut olettaa oikeaksi, ja tällaista logiikkaa käytettiin vain käytännöllisistä syistä. Todellisuudessa pitää ajatella, että kaikki mittaukset olivat satunnaisia ja näin satumalta niiden joukossa oli kolmen yleisten kvanttimekaniikan kantojen projektiiviset mittaukset. Muuten mittaukset oli valittu samalla periaatteella kuin preparoinnit - satunnaisesti ja monipuolisesti. Sen lisäksi suljettiin pois preparointien ja mittausten päällekkäisyydet eli melkein kaikki kulmaparit poikkeavat toisistaan. Poikkeuksena on 0° , 0° kulmapari, joka esiintyy sekä preparoinneissa että mittauksissa. Liitekappaleessa A taulukossa VIII on esitetty mittauskulmat.

Jo tässä vaiheessa huomattiin GPT:n tomografian suuri etu. Aaltolevyjen kulmien hyvällä tarkkuudella ei ole suurta väliä, koska pieniä virheitä syntyy muutenkin, ja lopputuloksena tulee kuitenkin täysiasteinen todennäköisyysmatriisi. Koko analysoinnin tarkoituksena on löytää matriisi, joka selittää mittaustuloksia parhaiten, mutta sen löytämiseksi tehdään paljon approksimaatioita. Täten ei voida sanoa, olisiko tarkoilla kulmilla lopputuloksena saatu \tilde{D} parempi kuin vähemmän tarkoilla kulmilla. Myöskään ei haittaa vaikka alkuperäisestä suunnitelmasta poiketen prepa-

roinneissa laitettaisiin jonkun kulman erilaiseksi. Koska metodi perustuu mittausten tiheyteen ja satunnaisuuteen, niin se, mitä olisi luonut kvanttiteorian tomografiassa virheen, on tässä pätevä mittausta tai preparointi. Pääasia on pitää jokaiselle preparoinnille mittaukset samanlaisina. Virhettä olisi tullut, jos kesken koetta olisi vaihtanut mittausten joukko. Pitää muistaa vertaus prosessitomografiaan, ja näin mittausten pitää pysyä muuttumattomina jokaisen preparoinnin kohdalla.

Mittaus suoritettiin niin, että toinen fotoni oli aina heraldoimassa. Syntyvien fotoniparien tila pysyi aina samana ja oli tuntematon. Siitä syystä heraldointifotonin valinnalla ei ollut mitään väliä, joten valittiin satunnaisesti fotoni, joka menee kuvan 2 yläpuolella olevan haaran analysaattoriasemaan. Toisessa haarassa signaalifotonille suoritettiin preparointeja ja mittauksia. Fotonistatistiikkaa kerättiin kunkin preparointi-mittausparin kohdalla 20,1 sekunnin aikana. Sen jälkeen kirjoitettiin ylös sekä havaittujen horisontaalisesti polarisoituneiden fotonien että vertikaalisesti polarisoituneiden fotonien määrä, yksikkönä fotoni sekunnissa. Todennäköisyysmatriisiin laskettiin aina H fotonin saamisen todennäköisyydet.

Esimerkiksi ensimmäisen preparoinnin ja ensimmäisen mittauksen tuloksena saatiin 48,1 horisontaalisesti polarisoitunutta ja 272,2 vertikaalisesti polarisoitunutta fonia sekunnissa. Koska mittausaika on sama molemmille tuloksille, niin sitä ei tarvitse ottaa huomioon todennäköisyyden laskemisessa. Nyt horisontaalisesti polarisoituneen fotonin saamisen todennäköisyys ensimmäisellä preparoinnilla ja ensimmäisellä mittauksella on:

$$p(H|P_1, M_1) = \frac{48,1 \text{ fotoni/s}}{48,1 \text{ fotoni/s} + 272,2 \text{ fotoni/s}} = 0,149937656.$$

Jos heraldointi- ja signaalifotonit olisivat valittu toisinpäin (signaalifotonille myös silloinkin suoritettaisiin preparoinnit ja mittaukset), niin fotonistatistiikasta lasketut todennäköisyydet eivät merkittävästi poikkeaisi nykyisistä tuloksista.

Lopulta tuloksena oli todennäköisyysmatriisi F , joka on esitetty taulukon muodossa liitekappaleessa A taulukossa IX. Todennäköisyydet ovat esitetty siinä kahden

desimaalin tarkkuudella, kaikissa laskuissa kuitenkin käytettiin todennäköisyyksiä pyöristämättä.

Sitten saatuun todennäköisyysmatriisiin ensimmäiseksi pystyriiviksi lisättiin ykkösen rivi, näin saatiin matriisi, jota merkitään edelleen F :ksi. Seuraavaksi ohjelmassa Python laskettiin F :n pääakselihajotelma käyttäen seuraavaa koodia:

```
import numpy as np
F = np.loadtxt("data.txt")
u, s, v = np.linalg.svd(F, full_matrices = False)
```

Alussa otetaan käyttöön "NumPy" pakkaus, jonka avulla voidaan käyttää muun muuassa lineaarialgebran operaatioita. Seuraavaksi tiedostosta "data.txt" ladataan matriisi F . Viimeisenä tehdään pääakselihajotelma, jonka tuloksena on matriisit u ja v , jotka vastaavat kappaleessa 2.2.2 kuvailtuja matriiseja U ja V^T , sekä kappaleessa 2.2.2 kuvaillun matriisin S päädiagonaalien termit, jotka ovat vektorin s muodossa. "full_matrices = False" on tarpeellinen komento, kun hajotettava matriisi ei ole neliömatriisi, sillä meidän tapauksessamme se on 17×16 matriisi.

Tässä vaiheessa on tärkeätä tarkastella matriisin S saadut päädiagonaalien arvot s , jotka ovat siis matriisin F ominaisarvot. Ne ovat esitetty taulukossa I. Nähdään, että neljä ensimmäistä ominaisarvoa ovat samaa suuruusluokkaa. Niiden jälkeiset ominaisarvot ovat enää suuruusluokkaa $1/100$ neljän ensimmäisten ominaisarvon suuruusluokasta, ja pienimmät ovat suuruusluokkaa $1/1000$. Ominaisarvot kertovat matriisin F sisältämästä tiedosta "tärkeysjärjestyksestä" ja vastaavasti voidaan nähdä kuinka monta astetta k matriisista F ovat dominoivia. Vaikka matriisi F on täysiasteinen, tuloksistamme nähdään, että dominoivia asteita on 4. Tämä siis viittaa siihen, että todellisuudessa mitattavissa olevan systeemin tilaa vastaa parhaiten $k = 4$, mikä on oikea tulos. Kuitenkin pelkistä ominaisarvoista ei voida luotettavasti päättää k :n arvo, vaikka nopeana tarkastuksena siitä, ollaanko edes lähellä oikeita arvoja, tällaista testiä voidaan pitää. Sen lisäksi on tärkeätä huomata, miten

Taulukko I: Matriisin S päädiagonaalin termit

9,12805756	3,42305835	2,60960902	1,14249058
0,0990598789	0,0626057055	0,0365362189	0,0260406511
0,0217650249	0,0165429679	0,0150939291	0,0113333371
0,0108954664	0,00775949978	0,00564255317	0,00125985306

ensimmäisestä neljästä ominaisarvosta mikään ei ole huomattavasti suurempi kuin muut. Vastaavasti jälkimmäiset arvot ovat pitkälti samaa suuruusluokkaa. Tämä taas tarkoittaa sitä, että koe oli hyvin suunniteltu sekä mittaukset ja preparoinnit oli monipuolisesti valittuja. Muuten syntyisi tilanne, jossa tulisi monesti samalla tavalla preparoitu tila tai vastaavasti toisia lähellä olevat mittaukset.

Jotta residuaalin laskeminen olisi mahdollista, ensimmäisenä lasketaan matriisille F $(\Delta F_{ij})^2$:t. Esimerkiksi taas ensimmäiselle mittaukselle ja ensimmäiselle preparoinnille saadaan $(\Delta F_{21})^2$ (on muistettavaa, että ensimmäisenä pystyrivinä on ykköset, siksi todennäköisyysmatriisin termin indeksi on 2,1):

$$(\Delta F_{21})^2 = \frac{N_0 N_1}{(N_0 + N_1)^3} = \frac{48,1 \cdot 272,2}{(48,1 + 272,2)^3} = 0,000397308.$$

Ensimmäiselle pystyriville $(\Delta F_{1j})^2 = \infty$. Näin ollen, jokaiselle matriisin F termille on vastaavaa arvo $(\Delta F_{ij})^2$, ja nämä arvot ovat esitetty taulukossa X liitekappaleessa A. Siellä jokainen arvo on pyöristetty kahteen merkitsevään lukuun, ja oikeat arvot saadaan, kun taulukossa esitetyt luvut kerrotaan luvulla 10^{-4} . Nähdään, että kaikki arvot ovat suuruudeltaan $0,37 \times 10^{-4}$ - $8,4 \times 10^{-4}$. Suurin osa arvoista on välillä 2×10^{-4} - 8×10^{-4} . Toisin sanoen, virhe $(\Delta F_{ij})^2$ on lähes vakio.

Seuraava askel oli matriisien u ja v sekä vektorin s alemman asteen approksimointi eri asteilla k , approksimoiduista matriiseista $\tilde{D}(k)$:n laskeminen, jokaiselle matriisille $\tilde{D}(k)$ residuaalin $\chi(k)^2$ arvon laskeminen ja Akaike informaatiokriteerin laskeminen kahdella eri tavalla. Kaikki nämä, paitsi Akaike informaatiokriteerin ar-

vojen laskeminen, suoritettiin ohjelmassa Python seuraavalla koodilla:

```

import numpy as np

F = np.loadtxt("data.txt")
dF = np.loadtxt("DeltaF_ij.txt")

u, s, v = np.linalg.svd(F, full_matrices=False)

for k in range(1,11):
    uc = u.copy()
    sc = s.copy()
    vc = v.copy()

    uc[:,k:] = 0
    vc[k:,:] = 0
    sc[k:] = 0

    vec = (uc @ np.diag(sc) @ vc - F)[: , 1:].flatten()
    dvec = dF.flatten()
    print("k=", k)
    print(sum(vec**2/dvec))

```

Tässä matriisin F lisäksi ladattiin termeistä $(\Delta F_{ij})^2$ koostuva matriisi tiedostosta "DeltaF_ij.txt". Sitä kutsuttiin matriisiksi dF . Se matriisi on samanlainen kuin taulukossa X, paitsi, että siitä puuttuu ensimmäinen pystyrivi, jolla residuaalin laskemisessa ei ole merkitystä. Seuraavaksi suoritettiin pääaskelihakajotelmia niin kuin aikaisemminkin. Sen jälkeisillä komennoilla suoritettiin F :lle alemman asteen

approksimointi kullekin asteen arvolle $k = 2, 3, \dots, 10$ saaden matriisit $\tilde{D}(k)$ ja laskettiin jokaiselle $\tilde{D}(k)$:lle residuaalin $\chi(k)^2$ arvo. Lopulta kaikki saadut residuaalin arvot tulostetaan. Komentoriveissä matriisia $\tilde{D}(k)$ vastaa ”uc @ np.diag(sc) @ vc” ja residuaalia vastaa ”sum(vec**2/dvec)”.

Taulukossa II on esitetty kaikki residuaalin arvot, kun $k = 2, 3, \dots, 10$. Residuaalin arvot ovat pyöristetty neljään merkitsevään lukuun. Niistä nähdään, miten nopeasti pienenee residuaalin arvot kohdasta $k = 3$ kohtaan $k = 4$, jonka jälkeen $\chi(k)^2$:n arvot pienenevät vain vähän, pysyen koko ajan samassa sadan tai myöhemmin kymmenen suuruusluokassa. Tietenkin residuaalin arvo pienenee myös jyrkästi kohdasta $k = 2$ kohtaan $k = 3$, mutta sen jälkeen arvot eivät asetu samaan suuruusluokkaan, vaan tapahtuu toinen jyrkkä putous, joka on havainnollistettu kuvassa 4a. Siksi residuaalin arvot viittavat siihen, että haettu efektiivaruuden dimensio ei voi olla pienempi kuin 4.

Kun kaikki residuaalin arvot oli laskettu, laskettiin Akaike kriteerin arvot kahdella kaavalla. Lopputulokset ovat esitetty samassa taulukossa II ja kuvassa 4 kohdissa 4b ja 4c. Taulukossa Akaike informaatiokriteerien arvot ovat pyöristetty kolmeen merkitsevään lukuun. Kuvissa Akaike informaatiokriteerien arvot ovat esitetty minimiarvon lähellä.

Lopputuloksista huomattiin, miten herkästi riippuu Akaike kriteerin minimi siitä, millainen funktio $n(k)$ on. Akaike kriteeri, joka oli laskettu Mazurekin ehdottamalla funktiolla $n(k)$, joka vastasi vain vapausasteiden määrää, antoi hyvin samanlaiset arvot asteille $k = 4, 5, 6, 7$, mikä näkyy hyvin kuvassa 4b. On kuitenkin vaikeata nähdä minimi, joka osui asteen arvolle $k = 5$, koska jokainen arvo $AIC(4)$, $AIC(5)$, $AIC(6)$ ja $AIC(7)$ on välillä 321-369, jolloin suurimman ja pienimmän arvon erotus on vain 67. Sen lisäksi erotus $AIC(3) - AIC(4) = 3199$, mikä on suuruusluokkaa 10^3 . Mazurekin artikkelissä [9] Akaike kriteerin minimi, joka osui arvolle $k = 4$, oli jopa 10^3 - 10^4 kertaa pienempi kuin $AIC(3)$. Kuitenkin erotus $AIC(5) - AIC(4)$ oli suuruusluokas-

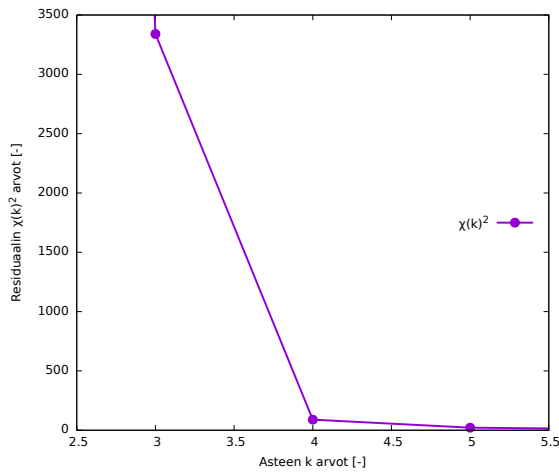
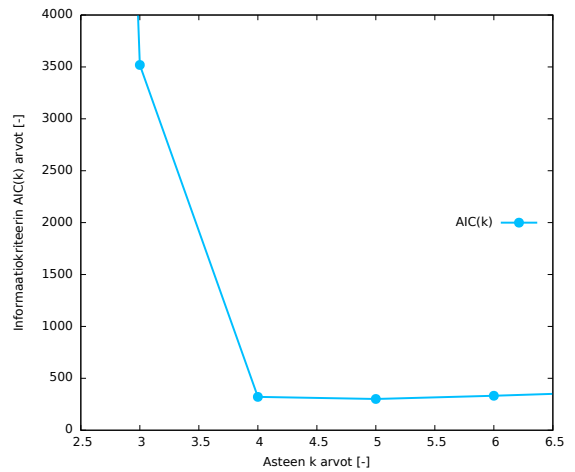
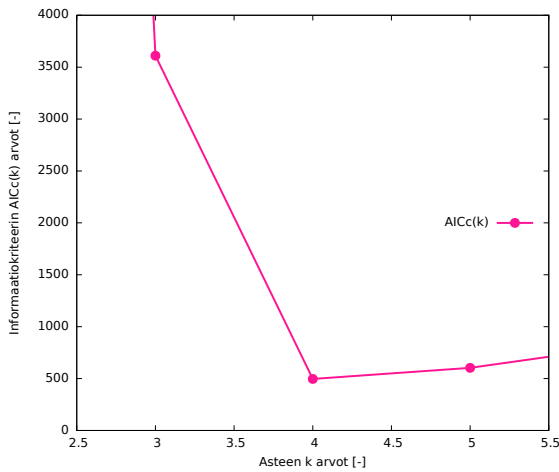
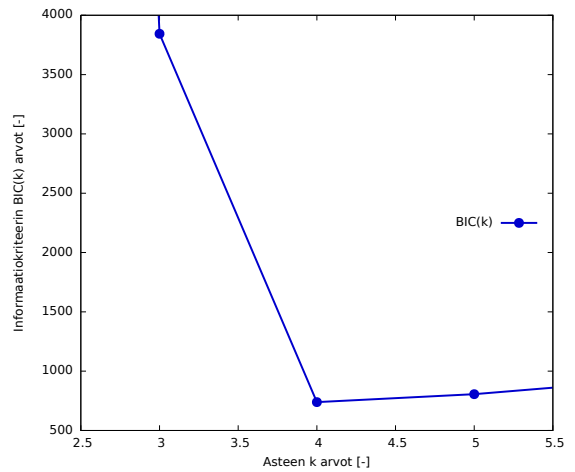
Taulukko II: GPT:n tomografian tulokset

k	$\chi(k)^2$	$AIC(k)$	$AIC_c(k)$	$BIC(k)$
2	34380	34500	34500	34700
3	3340	3520	3610	3840
4	89,26	321	496	739
5	21,76	302	603	806
6	8,210	332	817	915
7	5,107	369	1120	1020
8	3,857	404	1540	1120
9	2,597	435	2140	1210
10	1,908	462	3050	1290

sa 100, kun mittaus-preparointi pareja oli 10000. Ottaen huomioon suuruusluokat, erotus on myös hyvin pieni.

Mazurekin ehdottamalla Akaike kriteerillä saatiin ”väärä” minimi. Kuitenkin, kun funktiota $n(k)$ muutettiin hiukan, ja laskettiin $AIC_c(k)$, niin minimi osui kohdalle $k = 4$. Tämän lisäksi saatiin erotukseksi $AIC_c(5) - AIC_c(4)$ jopa 107, mikä on huikea parannus edelliseen. Nyt kuvaajassa 4c minimi erottuu paljon selkeämmin. Tietenkin tämä on selitettävissä sillä, että meillä datapisteitä oli paljon vähemmän, kuin Mazurekin kokeessa, jolloin Akaike kriteerin kaava pienelle datapisteiden määrälle toimii paremmin. Myös Mazurekin artikkelissä nähdään, vasta kun preparointimittauspareja oli jopa 1012036, niin erotus $AIC(5) - AIC(4)$ oli luokkaa 2000. Selkeästi huomataan, että $AIC(k)$ toimii paremmin suurille todennäköisyysmatriiseille.

Meidän ja Mazurekin kokeiden tuloksista voitiin myös huomata, miten herkkä Akaike kriteeri $AIC(k)$ on saaduille tuloksille. Kriteerin suuruusluokkaa huomioon ottaen, minimin k ja seuraavan kohdan $k + 1$ Akaike kriteerin arvojen erotus ei ol-

(a) $\chi(k)^2$:n arvot, kun $k = 3, 4, 5$.(b) $AIC(k)$:n arvot, kun $k = 4, 5, 6$.(c) $AICc(k)$:n arvot, kun $k = 3, 4, 5$.(d) $BIC(k)$:n arvot, kun $k = 3, 4, 5$.

Kuva 4: Residuaalin $\chi(k)^2$, Akaike informaatiokriteerien $AIC(k)$ ja $AICc(k)$ ja Bayesian informaation kriteerin $BIC(k)$ arvot eri asteen k arvoilla.

lut kovin suuri. Paljon huomattavampi oli pudotus arvosta $AIC(3)$ arvoon $AIC(4)$. Tästä tulee mieleen, voiko tällainen jyrkkä pudotus olla merkki minimistä, mutta siksi Akaike informaatiokriteeri otettiin käyttöön, koska haluttiin rajata monotonista vähenemistä jollain minimillä. Muuten residuaali olisi riittävä kriteeri, sillä siinäkin esiintyy jyrkkä pudotus. Kuitenkin meidän kokeemme tapauksessa saatiin pudotuksesta huolimatta loiva minimi kohtaan $k = 5$.

Koska Akaike kriteeri on selkeästikin herkkä funktiolle $n(k)$, niin kokeiltiin *Baye-*

sian informatiokriteerin $BIC(k)$ laskemista. Tulokset ovat esitetty taulukossa II. Bayesian informaatiokriteerin kaava eroaa Akaiken informaatiokriteeristä juurikin funktiolla $n(k)$. $BIC(k)$:ssa ”rangaistaan” vapaista parametreista enemmän, ja kaava on seuraavanlainen:

$$BIC(k) = \chi(k)^2 + r_k \ln n,$$

jossa $r_k = k(n + m - k)$ on matriisin $\tilde{D}(k)$ vapausasteiden määrä ja $n = 17 \cdot 16 = 272$ on matriisin $\tilde{D}(k)$ termien määrä. Loppujen lopuksi Akaike informaatiokriteerin kaavaa muutettiin vain vähän, koska $\ln n \approx 5,6$. Tulokset ovat esitetty taulukossa II ja kuvassa 4d. Minimien kannalta saatiin vastaavanlainen tilanne kuin $AIC_c(k)$:n tapauksessa, mikä näkyy hyvin vertaamalla kuvaajat 4c ja 4d. k :n arvojen 8,9,10 kohdalla tilanne muistutti kuitenkin enemmän $AIC(k)$:n tapausta, mikä näkyy informaatiokriteerien arvoista taulukossa II. Kokonaisuudessaan minimi erottuu nyt suhteellisen hyvin, mutta minimin jälkeen informaatiokriteerin arvot kasvavat lineaarisemmin kuin $AIC_c(k)$:n tapauksessa. Voidaan sanoa, että $BIC(k)$ on välimaasto $AIC(k)$:n ja $AIC_c(k)$:n välillä.

4.2 Informaatiokriteerien antamien tulosten analysointi

Saatujen tulosten perusteella päästään kysymykseen siitä, mikä ”rangaistus” vapaisista asteista on hyvä, jos jokaisella eri $n(k)$:lla saadaan helposti vähän erilaiset tulokset ja jopa minimi eri asteen arvoille. On myös hyvää pohtia, kuinka sattumanvarainen oikean tuloksen saaminen on. Helpoimmillaan voidaan tarkastaa saatujemme tulosten sattumanvaraisuutta hiukan muuttamalla residuaalin arvoja (tätä voidaan ajatella kokeista saadun datan kevyenä muokkauksena, jonka tuloksena residuaalin arvot muuttuisivat) ja katsomalla, muuttuuko k :n minimi eri informaatiokriteereille. Kaikkien tehtyjen muutosten pitää olla perusteltuja. Residuaalia $\chi(k)^2$ laskiessa huomattiin, että $(\Delta F_{ij})^2$ on oleellisesti vakio. Sillä jakaminen vaikuttaa residuaalin arvoon enimmäkseen vain suuruusluokkaa muuttaen. Muutetaan siis residuaalin

$\chi(k)^2$ kaavaa niin, että jätettiin pois nimittäjä:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{F_{ij} - \tilde{D}_{ij}}{\Delta F_{ij}} \right)^2 \quad \longrightarrow \quad \chi_{new}^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(F_{ij} - \tilde{D}_{ij} \right)^2.$$

Nyt voidaan laskea informaatiokriteerien $AIC(k)$, $AICc(k)$ ja $BIC(k)$ arvot käyttäen uutta residuaalia $\chi'(k)^2 = \chi_{new}^2(k) \cdot 10000$. Kertomalla $\chi_{new}^2(k)$ 10000:lla saadaan residuaalin suuruusluokkaa taas oikeaks, sillä χ_{new}^2 :n arvot ovat keskimäärin 10^4 pienemmät kuin χ^2 :n arvot. Informaatiokriteerien uudet arvot ovat esitetty taulukossa III, jossa saatujen arvojen pyöristys on tehty samalla tavalla kuin taulukossa II. Nähdään, että uudet tulokset vastaavat hyvin aikaisempia. Taas Akaike informaatiokriteeri antaa väärän tuloksen, jonka mukaan sopivimman teorian efektiivisyys olisi viisiulotteinen ja tila-avaruus neljäulotteinen. Kuitenkin taas kerran korjattu Akaike informaatiokriteeri ja Bayesian informaatiokriteeri antavat oikean minimin, $k = 4$. Tällä kertaa suurin ero informaatiokriteerin minimiarvon ja seuraavan arvon välillä antoi taas kerran $AICc(k)$, muissa tapauksissa vastaavanlainen ero oli huomattavasti pienempi kuin taulukon II antamilla arvoilla.

Kokonaisuudessa voidaan tehdä päätelmän, että Akaike ja Bayesian informaatiokriteerit pysyvät vahvasti samoissa tuloksissa, vaikka kokeesta saatu data, ja siten myös residuaalin arvot, jonkin verran muuttuisivat. Tästä johtuen voidaan päätellä ainakin meidän 16×16 preparointi-mittausparien kohdalla, että yllä mainitut informaatiokriteerit ovat suhteellisen luotettavia. Meidän tapauksessamme paras kriteeri on $AICc(k)$, mikä ei ole yllätys, sillä kokeesta saatu todennäköisyysmatriisi ei ole suuri. Sekä $\chi'(k)^2$:n että $\chi(k)^2$:n tapauksessa $AICc(k)$ antoi hyvin samanlaiset tulokset.

Vaikka tässä analyysissä Akaike kriteeri $AICc(k)$ antoi luotettavilta vaikuttavia tuloksia, ei voi olla varmaa, että näin käy kaikkien mahdollisten pienidataisten GPT:n tomografiakokeiden kohdalla. Jotta asiaa varmistuisi, pitäisi tehdä lukuisia GPT:n tomografiakokeita. Sen lisäksi ei voi ottaa mitään kantaa siihen, kuinka paljon tulosten tarkkuus riippuu mittausdatan määrästä. Uutta pohdintamateriaa-

Taulukko III: Uudestaan lasketut $AIC(k)$, $AICc(k)$ ja $BIC(k)$, kun residuaali on $\chi'(k)^2 = \chi_{new}^2(k) \cdot 10000$.

k	$\chi'(k)^2$	$AIC(k)$	$AICc(k)$	$BIC(k)$
2	80860	81000	81000	81200
3	12860	13000	13100	13400
4	163,6	396	571	813
5	71,37	351	653	855
6	32,26	356	841	939
7	19,03	383	1130	1040
8	12,25	412	1540	1130
9	7,809	440	2140	1220
10	5,227	465	3060	1290

lia ja mahdollisuuksia uusille kokeille on siis paljon. Esim. Onko totta, että suuren todennäköisyysmatriisin ja Akaike informaatiokriteerin avulla saadaan luotettavia GPT:n tomografian tuloksia? Ovatko sellaiset tulokset paremmat kuin pieni todennäköisyysmatriisi ja $AICc(k)$:n tulokset? Kuinka pieni matriisi voi antaa luotettavia tuloksia? Näihin kaikkiin kysymyksiin ei voi vastata meidän kokeemme perusteella.

Lopuksi voidaan vielä laskea AIC painot $w(k)$ Akaike ja Bayesian informaatiokriteereille. Akaike ja Bayesian informaatiokriteerien painokertoimet ovat esitetty taulukossa IV ja paksunnettuna ovat arvot, joiden painokerroin on merkittävä. Koska painokerroin kertoo kuinka todennäköistä on, että mitattavaa systeemiä parhaiten kuvaavan teorian efektiivisyys on k -ulotteinen, niin mitä lähempänä arvoa $w(k) = 1$, sitä varmemmin kyseinen k on oikea tulos. On tärkeätä myös muista, että kaikkien painojen pitää summautua yhdeksi, $\sum_{k=1}^{10} w(k) = 1$. Taulukossa kaik-

Taulukko IV: AIC painot informaatiokriteereille $AIC(k)$, $AIC_c(k)$ ja $BIC(k)$.

k	$w_{AIC}(k)$	$w_{AIC_c}(k)$	$w_{BIC}(k)$
2	0	0	0
3	0	0	0
4	$5,8 \cdot 10^{-5}$	1	1
5	0,99994	$6,6 \cdot 10^{-24}$	$3,0 \cdot 10^{-15}$
6	$2,4 \cdot 10^{-7}$	0	$4,6 \cdot 10^{-39}$
7	$2,4 \cdot 10^{-15}$	0	$1,0 \cdot 10^{-62}$
8	$6,8 \cdot 10^{-23}$	0	0
9	$1,4 \cdot 10^{-29}$	0	0
10	$1,7 \cdot 10^{-35}$	0	0

ki painokertoimien arvot $w(k) \leq 1 \cdot 10^{-70}$ ovat merkitty nollalla. Tästä syystä myös puuttuu rivi $k = 1$, joka oli mukana summalausekkeessa, mutta $w(1)$ on oleellisesti nolla ja siksi ei ole relevantti. Vaikka painokertoimet eivät voi saada arvoksi tasan 1, kuitenkin laskiessa painokertoimet useimmissa tapauksissa käytetään todella pieniä lukuja, jolloin arvot $w(k) = 1$ ovat riittävällä tarkkuudella oikeutettuja.

Yllä saatujen tulosten perusteella voidaan tehdä seuraavat päätelmät: 1) korjautun Akaike informaatiokriteerin lisäksi Bayesian informaatiokriteeri antaa noin yhtä suurella varmuudella samanlaisen tuloksen k :n minimiksi, 2) on mahdollista saada täysin vääriä tuloksia erittäin hyvällä Akaike painolla.

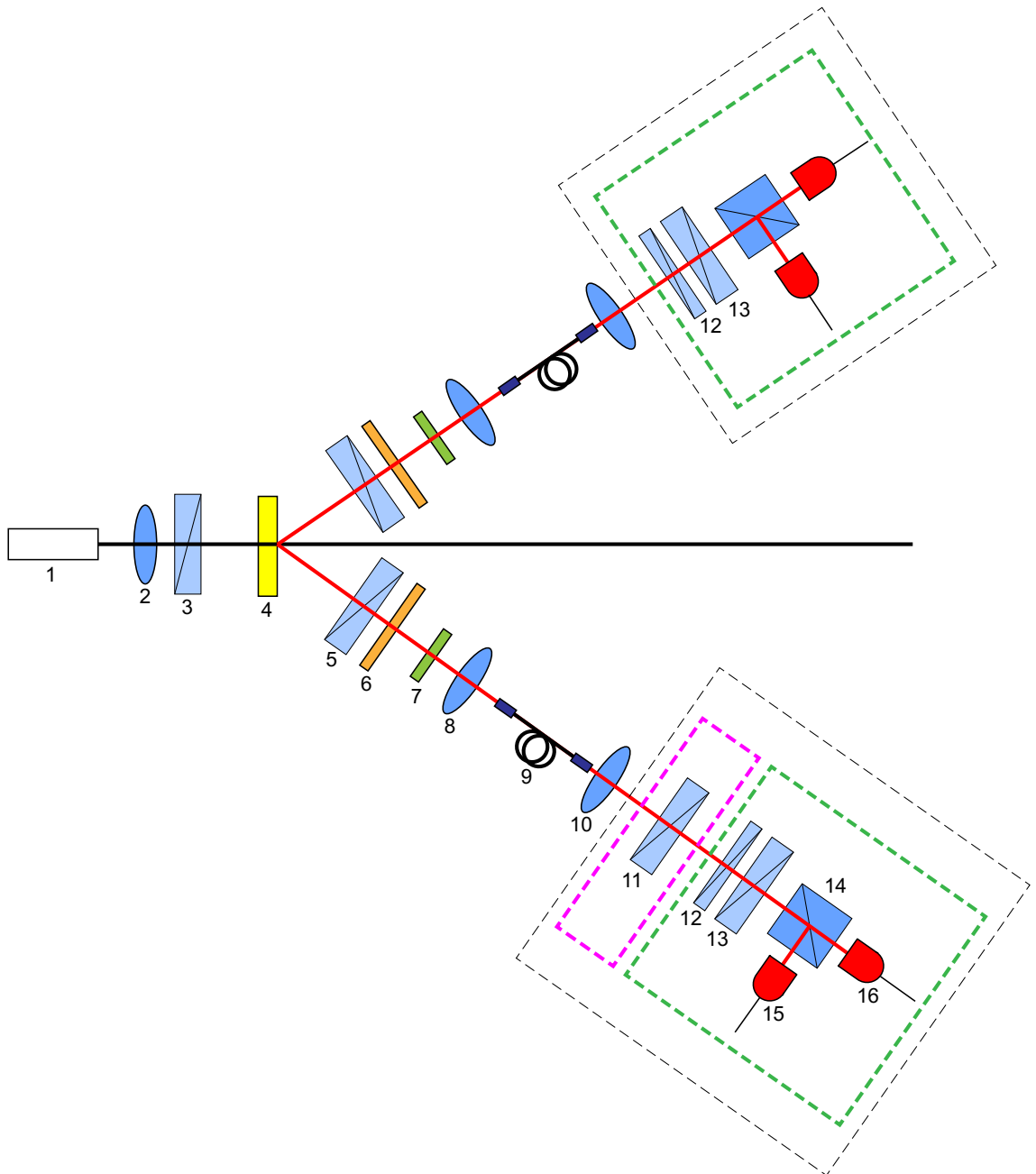
5 Kahden kubitin GPT:n tomografian esitarkastus

Yleistetyn todennäköisyysteorian tomografiaa voi kutsua tomografiaksi vain, jos sen avulla voidaan kuvailla eridimensioisia systeemejä, muuten sitä pitäisi kutsua GPT:n yhden kubitin mittaus- ja analysointimenetelmäksi. Oletetaan siis, että GPT:n tomografiaa on mahdollista suorittaa myös kahden ja useamman kubitin tiloille.

Koska kirjallisuudesta ei löydy esimerkkejä useamman kubitin GPT:n tomografiasta, niin ensimmäisenä suoritettiin yksi kahden kubitin koe, josta pystyttiin tarkistamaan, oliko kahden kubitin GPT:n tomografia onnistunut. Riippumatta siitä, olisiko tomografia onnistunut vai ei, tulosten perusteella pystyttiin ymmärtämään paremmin, mistä on kyse kahden kubitin GPT:n tomografiassa.

Yhden kubitin GPT:n tomografiassa käytettiin kuvan 2 mukaista koelaitteistoa, jossa toinen foton oli heraldoimassa ja toinen foton oli tomografian kohteena. Nyt tomografian kohteena olikin molemmat fotonit. Koelaitteisto oli melkein samanlainen kuin ennen, ja se on esitetty kuvassa 5. Nähdään, että tällä kertaa myös toisen haaran fotonille suoritetaan mittaus käyttäen neljännes- ja puolialtolevyjä. Kuvassa mittaus on merkitty vihreällä katkoviivalla ja mittaukseen käytetyt aaltolevyt ovat molemmissa haaroissa merkitty samoilla numeroilla 12 ja 13. Fotonistatistiikka sisältää nyt jokaiselle preparointi-mittausparille sekä ensimmäisen että toisen haaran horisontaalisesti ja vertikaalisesti polarisoituneiden fotonien määrät, merkitään N_{01} ja N_{11} yhden haaran fotonimäärälle sekä N_{02} ja N_{12} toisen haaran fotonimäärälle. Tässä ei ole väliä, kumman haaran fotonimäärä merkitään alaindeksillä 1 (tai vastaavasti 2).

Preparointeja olisi voinut tehdä monella eri tavalla, ja koska tämä oli ensimmäinen testi kahden kubitin GPT:n tomografiasta, päätettiin pitää preparoinnit yksinkertaisina. Preparointiin käytettiin vain yhtä puolialtolevyä, kuvassa 5 numero 11,



Kuva 5: Kahden kubitin GPT:n tomografian koelaitteisto

joka sijoitettiin vain toiseen haaraan. Kuvassa preparointi on merkitty vaaleanpu-
 naisella katkoviivalla. Koska kokeeseen osallistuva fotonipari on alunperin aina kie-
 toutunut, niin puoliaaltolevyn avulla tehdyt preparoinnit muuttaisivat kahden foto-
 nin kietoutunutta tilaa, mutta eivät poistaisi kietoutuneisuutta. On olemassa vaara,
 että tällaiset preparoinnit eivät kata monipuolisesti kahden kubitin tila-avaruutta.

Toisaalta kahden kubitin tila-avaruudessa erilaiset kietoutuneet tilat sijoittuvat kuitenkin eri pisteisiin.

Koska kyseessä on kahden kubitin tila, niin Blochin pallo on liian pieni tila-avaruudeksi, ja oikean tila-avaruuden dimensio on nyt 15 [33]. Näin GPT:n tomografian tuloksena pitää olla $k = 16$. Jotta oikean tila-avaruuden dimension saaminen olisi mahdollista, todennäköisyysmatriisin pitää olla suurempi kuin aikaisemmin käytetty 16×16 . Näin ollen mittauksia päätettiin suorittaa 40 ja preparointeja suoritettiin 12 yhden puoliaaltolevyn avulla. Suunnitelmana oli tässä välivaiheessa analysoida saatu todennäköisyysmatriisi, sen jälkeen suunnitella enemmän preparointeja, mm. tulotilaksi preparointeja, ja suorittaa uusille preparoinnille samat 40 mittausta kuin aikaisemmin, näin täydentäen matriisi ”riittävänkokoiseksi”, esimerkiksi 20×40 . Kuitenkin jo välivaiheessa huomattiin, ettei suoritettu tomografian algoritmi voi toimia kyseiselle kahden kubitin tilalle.

Loppujen lopuksi suoritettiin mittaukset ja preparoinnit, jotka ovat esitetty liitekappaleessa A taulukoissa XI ja XII. Taulukossa XI merkinnät HWP_1 ja QWP_1 tarkoittavat kuvan 5 yläpuolella olevan haaran puoli- ja neljännesaaltolevyjä numero 13 ja 12 ja vastaavasti HWP_2 ja QWP_2 tarkoittavat samanlaisia aaltolevyjä alapuolella olevassa haarassa. Tällaisen tomografian tuloksena saadulle 12×40 todennäköisyysmatriisille suoritettiin vastaavanlainen analysointi kuin yhden kubitin GPT:n tomografian tapauksessa. Ainoana erona oli fotonin 1 (vastaavasti olisi voinut olla fotonin 2) horisontaalisesti polarisoituneen tilan todennäköisyyden laskeminen:

$$p_{2-qubit}(H | P, M) = \frac{N_{01}}{N_{01} + N_{11} + N_{02} + N_{12}}.$$

Voidaan huomata heti, että tällainen kaava laadullisesti ei välttämättä eroa mitenkään yhden kubitin tomografian todennäköisyyden kaavasta. Kyse on vain siitä, kuinka suurella luvulla fotonistatistiikasta saadut yhden haaran horisontaalisesti polarisoituneiden fotonien määrät jaetaan. On ilmeistä, että todennäköisyydet ovat erilaisia kuin vastaavien preparointien ja mittausten yhden kubitin GPT:n tomo-

Taulukko V: Ominaisarvot kahdella eri tavalla lasketuille todennäköisyysmatriiseille

Todennäköisyysmatriisi 1			
6,85145922	1,69107803	1,10981062	1,0094682
0,06029104	0,05531691	0,04853624	0,04493178
0,04048291	0,03293253	0,02801215	0,02485115
Todennäköisyysmatriisi 2			
11,76947388	3,2105045	2,11379551	1,92249605
0,08127492	0,07906267	0,06695232	0,06363871
0,05839709	0,05239672	0,04563873	0,0398415

grafiassa. Kuitenkin $N_{01} + N_{11} + N_{02} + N_{12}$ on melkein vakio, jolloin suoritettussa kokeessa todennäköisyyden kaava ei välttämättä sisällä riittävää informaatiota kahdesta kubitista, jotta tuloksena olisi $k = 16$.

Kahden kubitin GPT:n tomografian todennäköisyysmatriisia voidaan ajatella sisältävän moniakkin todennäköisyyksiä, jotka olisivat voineet tulla myös yhden kubitin tomografian jollain preparoinnilla. Ei voi väittää, että olisi mahdollista saada täsmälleen sama todennäköisyysmatriisi, mutta on mahdollista saada yhden kubitin GPT:n tomografialla lähes samanlainen matriisi, jos preparoinnit olisivat sopivia ja mukana olisi mittausvirheitä tai muita mahdollisia häiriötekijöitä. Lisää todisteita tästä tuo kahden kubitin GPT:n tomografiassa käytetty koelaitteisto. Sitä voidaan ajatella myös yhden kubitin GPT:n tomografian koelaitteistoksi, jossa heraldointifotonille ennen sen osumista detektorille suoritetaan jonkinlainen tilamuutos aaltolevyjen avulla. Kuitenkin heraldointifotonin tilalla ei ole väliä, koska heraldointifotoni ei osallistu varsinaiseen kokeeseen. Muuten lähtökohdat molemmissa kokeissa ovat samanlaisia.

Seuraavaksi laskettiin kahdella eri tavalla residuaalin arvot kaikille mahdolli-

sille asteille eli $k = 1, \dots, 12$; matriisin koko rajoittaa asteiden arvot kahteentoista. Ensimmäisessä tavassa $\chi^2(k)$ laskettiin, kun todennäköisyysmatriisi koostui $p_{2\text{-qubit}}(H | P, M)$:ista, toisessa tavassa, kun todennäköisyysmatriisi koostui todennäköisyyksistä $p(H | P, M) = \frac{N_{01}}{N_{01} + N_{11}}$, joita voidaan ajatella tulevan koelaitteistolla 5 suoritetusta yhden (alemman haaran) kubitin GPT:n tomografiasta. Tämän lisäksi laskettiin kahden eri todennäköisyysmatriisin ominaisarvot.

Kannattaa huomata, että ΔF_{ij} :t lasketaan myös kahden kubitin GPT:n tomografian tapauksessa samalla tavalla kuin yhden kubitin GPT:n tapauksessa, koska Gaussinen virhe syntyy jokaisen fotonin statistiikasta toisesta fotonista riippumatta:

$$(\Delta F_{ij})^2 = \frac{N_{01}N_{11}}{(N_{01} + N_{11})^3}.$$

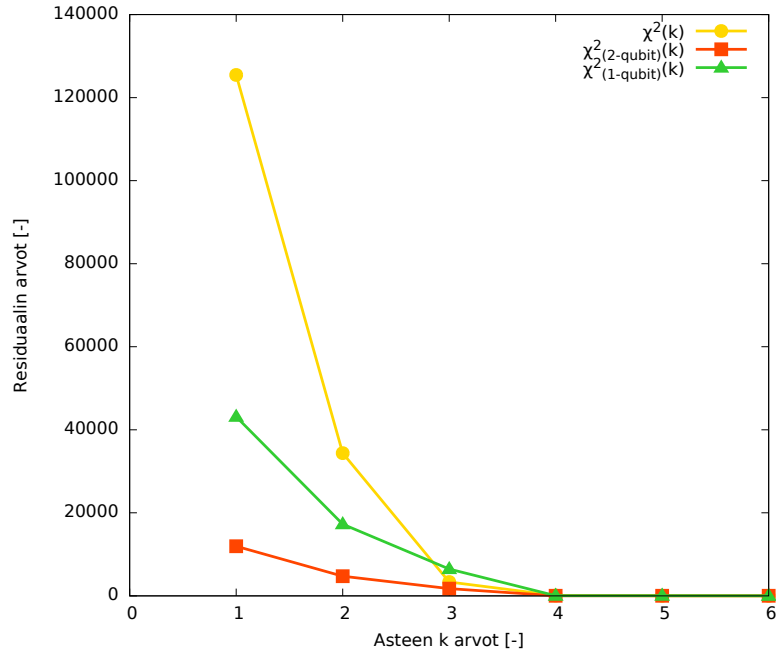
Ominaisarvot ovat esitetty taulukossa V, jossa todennäköisyysmatriisi 1 viittaa matriisiin, joka koostuu alkioista $p_{2\text{-qubit}}(H | P, M)$ ja todennäköisyysmatriisi 2 koostuu vastaavasti alkoista $p(H | P, M) = \frac{N_{01}}{N_{01} + N_{11}}$. Residuaalin arvot, jotka ovat pyöristetty neljään merkitsevään lukuun, ovat esitetty taulukossa VI. Merkinnät $\chi_{1\text{-qubit}}^2(k)$ ja $\chi_{2\text{-qubit}}^2(k)$ vastaavat todennäköisyysmatriiseja, joissa saadut fotonistatiistiikat analysoidaan niin kuin kyseessä olisi ollut yhden kubitin tai kahden kubitin GPT:n tomografia vastaavasti.

Akaike ja Bayesian informaatiokriteerien laskeminen oli tarpeetonta, koska jo taulukoiden V ja VI tuloksista nähdään, että systeemiä parhaiten kuvaava aste on todennäköisemmin $k = 4$, mutta ei ainakaan lähellä arvoa 15. Parempaa vertaamista varten tehtiin kuvaaja 6, jossa samaan koordinaatistoon laitetaan yhden ja kahden kubitin GPT:n tomografian residuaalien arvot. Kahden kubitin tapauksessa tehtiin kuvaajat molemmille residuaalille $\chi_{2\text{-qubit}}^2(k)$ ja $\chi_{1\text{-qubit}}^2(k)$.

Kuvaajasta nähdään paremmin, että kahden kubitin alustavan GPT:n tomografian tulokset eivät ole niin yksikäsitteisiä, nimittäin vain oikeassa yhden kubitin GPT:n tomografiassa näkyy selkeä dynamiikka, jossa asteen arvon kasvaessa residuaalin arvo pienenee voimakkaasti ja vasta asteen 4 kohdalla lähestyy mittakaavassa

Taulukko VI: Residuaalin arvot kahdella eri tavalla lasketuille todennäköisyysmatriiseille

k	$\chi_{2-qubit}^2(k)$	$\chi_{1-qubit}^2(k)$
1	11950	43140
2	4728	17260
3	1751	6471
4	23,00	42,55
5	16,96	34,68
6	12,45	26,72
7	8,357	21,14
8	5,749	14,95
9	3,471	9,888
10	1,981	5,612
11	0,8205	2,324
12	$2,723 \cdot 10^{-26}$	$1,413 \cdot 10^{-25}$



Kuva 6: Residuaalin arvot yhden kubitin kokeessa (kuvaajalla merkitty $\chi^2(k)$) sekä kahdella eri tavalla lasketut residuaalin arvot kahden kubitin kokeessa (kuvaajalla $\chi^2_{2-qubit}(k)$ ja $\chi^2_{1-qubit}(k)$).

pieniä arvoja. Kahden kubitin GPT:n tomografian residuaalin arvot, joita laskettiin koelaitteistoa yhden kubitin GPT:n tomografian koelaitteistona pitäen, muistuttavat enemmän yhden kubitin tomografian käyrää, mutta voidaan havaita huomattavasti loivempi pudotus. Residuaalin $\chi^2_{2-qubit}(k)$ arvot ovat mittakaava huomioon ottaen melko tasaiset.

Tällaisille tuloksille voi olla erilaista selityksiä, joiden oikeaksi osoittamiseen tai vastaavasti pois sulkemiseen tarvitaan uusia kokeita, mahdollisesti uusia koejärjestelyjä ja paljon aikaa itse tutkimiseen. Tässä on siis kokonainen uusi tutkimusaihe, jonka lopputulokset auttaisivat näkemään paremmin, onko GPT:n tomografiolla kokeellisesti etuja systeemien analysoimisessa, kun systeemin koko kasvaa. Saatujen tulosten mahdolliset selitykset, joihin päädyttiin, ovat esitetty alla. Todennäköisempänä pidetään kuitenkin ensimmäinen selitys.

- 1) Kahden kubitin GPT:n tomografian preparoinnit tehtiin liian yksipuolisesti,

jolloin esimerkiksi tulotilan preparoinnit olisivat kattaneet tila-avaruutta eri tavalla ja kokonaisuudessa suoritettun kokeen 20×40 todennäköisyysmatriisista olisi saanut oikean tuloksen $k = 16$. Nyt taas, kun kokeen tuloksia analysoidaan yhden kubitin GPT:n tomografian tavoin, saadaan melko hyvät tulokset, jos otetaan huomioon, että varsinaisessa yhden kubitin GPT:n tomografiassa preparoinnit olivat monipuolisemmat. Jos tulokset analysoidaan kahden kubitin GPT:n tomografiana, niin kaikin puolin huono koe antaa huonoja tuloksia. Jos tämä selitys on oikea, niin kysymykseksi jää, kuinka monta ja millaisia preparointia (ja mittausta) tarvitaan saamaan oikeita tuloksia.

2) Lokaalit mittaukset, eli sellaiset, joissa kahta fotonia mitataan erikseen, niin kuin tässä kokeessa tehtiin, eivät ole riittäviä useamman kubitin GPT:n tomografian kannalta. Tässä tapauksessa kaikkia mahdollisia tuloksia todennäköisyysmatriisi ”käsittelee” yhden kubitin GPT:n tomografian tuloksina, joissa voi olla erilaisten virheiden aiheuttamia ”vääriä” todennäköisyysarvoja. Silloin tulokseksi tulisi aina paremmin tai huonommin systeemin efektiivisuuden dimensioksi $k = 4$. Jos tämä selitys on oikea, niin ensinnäkin pitäisi selvittää, mitä todennäköisyyksiä todennäköisyysmatriisiin pitää sisältää. Kysymys onkin, millaiset mittaukset tuottavat tarvittavia todennäköisyyksiä ja kuinka helposti sellaiset mittaukset ovat tehtävissä. Jos näihin kysymyksiin tulisi vastauksia, niin seuraavaksi pitäisi miettiä, miten GPT:n yhden kubitin tomografian analysointialgoritmia pitäisi muuttaa ei pelkästään kahdelle kubitille vaan yleisesti n -kubitille päteväksi.

6 Johtopäätökset

Tässä työssä esitettiin yleistetyn todennäköisyysteorian perusteet ja niihin pohjautuva yleistetyn todennäköisyysteorian tomografia sekä teoreettisesti että toteutuksen kannalta. Näitä esitettiin kvanttimekaniikan määritelmien ja tomografian kanssa rinnakkain. Lopulta esitettiin kahden eri kokeen kulku, analysointivaihe ja tulok-

set. Kokeissa keskityttiin vain systeemin tilan tila- ja efektiivisuuden dimension saamiseen.

Ensimmäisenä suoritettiin GPT:n tomografia yhdelle kubitille, jolloin tiedettiin jo etukäteen, että oikea tulos systeemin tilan efektiivisuuden dimensiolla on $k = 4$. Oikea tulos saatiin hyvin esille, kun koetulosten matemaattisessa analyysissä käytettiin informaatiokriteereinä korjattu Akaike informaatiokriteeri pienikokoiselle datalle $AICc$ ja Bayesian informaatiokriteeri BIC . Kun käytössä oli tavallinen Akaike kriteeri AIC , saatiin liian iso efektiivisuuden dimensio $k = 5$.

Yhden kubitin kokeen tulosten analysointivaiheessa nähtiin, miten herkkiä informaatiokriteerit ovat eri preparointi-mittausparien määrälle ja vapausasteista ”rangaistavalle” funktiolle $n(k)$. Sen lisäksi parasta arvoa k vastaavat informaatiokriteerin minimi eivät olleet aina mitenkään niin voimakkaita kuin niiden toivoisi olevan. Tämän työn perusteella ei voi myöskään sanoa, antaako esimerkiksi $AICc$ aina oikeita tuloksia, jos preparointi-mittausjoukko on suhteellisen pieni, mutta hyvin suunniteltu, koska informaatiokriteerin $AICc$ korjaustermi ei ole suunniteltu alunperin tämän työn systeemejä varten. Tästä johtuen jatkotutkimusten kannalta hyvä tehtävä on löytää parhaiten sopiva informaatiokriteeri, joka antaa aina esimerkiksi pienikokoisen (tai vastaavasti suurikokoisen) todennäköisyysmatriisin tapauksessa oikeita tuloksia eikä ole niin herkkä mahdollisille erikaltaisille virheille tai itse mittaus-preparointijoukolle. Toisena mahdollisena tutkimuslinjana on yritys löytää vain yksi täydellinen informaatiokriteeri, joka toimisi erikokoisille todennäköisyysmatriiseille. Kuitenkin tällainen ajatus on hyvin sidottu preparointi-mittausparien minimaalisen sellaisen määrän selvittämiseen, että tuloksena olisi aina oikea k .

Tässä työssä esitetty analysointialgoritmi ei ole juuri sellaisenaan ainoa mahdollinen. Poikkeuksia voi löytää esimerkiksi alemman asteen approksimointialgoritmissa, mahdollisessa optimoinnin käyttämisessä alemman asteen approksimoinnin

yhteydessä tai muutenkin matemaattisissa menetelmissä, joilla päästään systeemiä parhaiten kuvaavan todennäköisyysmatriisiin. Tämä tarkoittaa, että saadut tulokset eivät ole matemaattisesti parhaat mahdolliset ja jatkotutkimuksissa voi pohtia, miten matemaattisesti voidaan parantaa GPT:n tomografian analysointialgoritmia. Vastaavasti koelaitteiston kannalta on mahdollista tutkia jatkossa, voiko saada fotonistatistiikat virheettömämmiksi.

Koelaitteisto GPT:n tomografiaa varten ei eronnut kvanttiteorian tomografian koelaitteistosta melkein yhtään. Kuitenkin yhden kubitin GPT:n tomografiassa pitää suorittaa paljon enemmän mittauksia ja preparointeja kuin kvanttimekaniikan tomografiassa. Siksi voidaan sanoa, että pienidimensioisten tilojen tapauksessa GPT:n tomografia ei ole kvanttitomografiaa käytännöllisempää. Epäkäytännöllisyyttä lisää myös GPT:n tomografian tulosten pieni informatiivisuus. Toisaalta, kvanttitomografiassa mittausten ja analysointivaiheessa laskujen määrä kasvaa systeemin tilan dimension kasvaessa, kun taas GPT:n tomografian mittausten ja preparoinnin määrän ei tarvitse kasvaa lainkaan tai ainakaan merkittävästi. Tästä johtuen GPT:n tomografia voisi olla helppo menetelmä selvittämään systeemin tilan dimensio, kun käsitellään suurdimensioisia tiloja.

Toisessa kokeellisessa osuudessa yritettiin suorittaa kahden kubitin GPT:n tomografia. Kahden tai useamman kubitin GPT:n tomografiasta ei ole mitään kirjallisuutta, joten tämä yritys oli ensimmäinen aiheen esitarkastus. Suoritetusta kahden kubitin GPT:n tomografiasta ei saatu oikeita tuloksia. Tiedettiin etukäteen, että oikea efektiavaruuden dimensio on $k = 16$, kuitenkin saatiin tulokseksi taas kerran $k = 4$.

Tätä tulosta voidaan selittää kahdella eri tavalla. Väärä tulos voi johtua huonosta kokeen suunnittelusta: preparointeja tehtiin vain sellaisia, jotka eivät rikkooneet lähtökohtaisesti kietoutuneen kahden kubitin tilan kietoutuneisuutta. Tällaiset preparoinnit saattoivat olla liian yksipuolisia, jolloin esimerkiksi lisätyt tulotilaksi

preparoinnit olisivat täydentäneet preparointijoukko oikean tuloksen saamiseen sopivaksi. Tätä selitystä pidetään todennäköisempänä. Toisena mahdollisena väärän tuloksen selityksenä on itse tomografian suoritus: kahden kubitin GPT:n tomografiassa tehtiin samanlaisia lokaaleja mittauksia niin kuin yhden kubitin GPT:n tomografiassa, erona vain se, että kahden kubitin tapauksessa lokaalit mittaukset tehtiin molemmille kubiteille. On mahdollista, että lokaalit mittaukset eivät kykene antaa todennäköisyysmatriisiin riittävästi informaatiota jatkoanalysoinnin kannalta. Silloin todennäköisyysmatriisin analysointimenetelmä ymmärtää todennäköisyyksiä niin kuin ne olisi yhden kubitin GPT:n tomografian tuloksia, joissa esiintyy virheitä. Tässä tapauksessa saisimme aina kubittien tapauksessa tulokseksi $k = 4$, jos vain preparointi-mittausjoukko on sopiva.

Kahden kubitin GPT:n tomografiassa saadun väärän tuloksen parempaa ymmärtämistä varten pitäisi suorittaa useita kokeita, joissa olisi mahdollista todistaa yllä mainitut selitykset oikeiksi tai vääriksi, tai mahdollisesti löytää uusia selityksiä. Sen lisäksi jatkotutkimuksessa on pyrittävä ymmärtää millaiset mittaukset tuottavat tarvittavia todennäköisyyksiä (esimerkiksi onko ei-lokaalit mittaukset tarpeellisia), miten niitä voidaan toteuttaa ja kuinka monta ja millaista preparointia pitää suorittaa oikean tuloksen saamiseksi. Viimeisenä ja laajimpana jatkotutkimuksena olisi pyrkimys löytää yleisesti kaikille yhden, kahden tai useamman kubitin systeemeille pätevät GPT:n tomografian algoritmi ja analysointimenetelmät. Vasta silloin GPT:n tomografiaa voisi oikeasti verrata eriluonteisissa tilanteissa kvanttitomografiaan ja nähdä, onko joku tomografia käytännöllisempi kuin toinen jossain tilanteessa.

Kuitenkin tällä hetkellä yleistetyn todennäköisyysteorian tomografia on menetelmänä vielä hyvin epäluotettava verrattuna kvanttiteorian tomografiaan. Koska GPT:n kokeellinen puoli on niin vähän tutkittu, tällä hetkellä ainoa tapa varmistaa tuloksen oikeutta on GPT:n tomografian tuloksen vertaaminen saman systeemin kvanttiteorian tomografian tulokseen. Voidaan siis sanoa, että GPT:n tomografia

on riittäväällä tasolla ymmärretty vain yhden kubitin tapauksessa, mutta kahden tai useaman kubitin tapauksessa GPT:n tomografia vaatii paljon tutkimuksia, jotta siitä voisi saada yleisesti pätevä systeemin tilan karakterisointimenetelmä.

Viitteet

- [1] G. Ludwig, *Communications in Mathematical Physics* **4**, 331 (1967).
- [2] G. Ludwig, *Communications in Mathematical Physics* **9**, 1 (1968).
- [3] J. Gunson, *Communications in Mathematical Physics* **6**, 262 (1967).
- [4] B. Mielnik, *Communications in Mathematical Physics* **15**, 1 (1969).
- [5] B. Mielnik, *Communications in Mathematical Physics* **37**, 221 (1974).
- [6] E. B. Davies ja J. T. Lewis, *Communications in Mathematical Physics* **17**, 239 (1970).
- [7] S. Gudder, *Communications in Mathematical Physics* **29**, 249 (1973).
- [8] M. D. Mazurek, M. F. Pusey, R. Kunjwal, K. J. Resch ja R. W. Spekkens, *Nature Communications* **7**, 1 (2016).
- [9] M. D. Mazurek, M. F. Pusey, K. J. Resch ja R. W. Spekkens, arxiv.org (2019).
- [10] G. Chiribella, G. M. D'Ariano ja P. Perinotti, *Physical Review A* **81**, 62348 (2010).
- [11] P. Janotta ja R. Lal, *Physical Review A* **87**, 52131 (2013).
- [12] L. Leppäjärvi, *Convex operational theories and non-classical features of quantum theory* (Turun yliopisto, 2017).
- [13] M. Plávala, *Physical Review A* **94**, 42108 (2016).
- [14] S. W. Al-safi, *Quantum theory from the perspective of general probabilistic theories* (University of Cambridge, 2015).
- [15] P. Janotta ja H. Hinrichsen, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **47**, 323001 (2014).

- [16] H. Barnum ja A. Wilce, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* **270**, 3 (2011).
- [17] P. Lahti ja J. Kiukas, *luentomoniste Kvanttimekaniikka II* (Fysiikan ja tähtitieteen laitos, Turun yliopisto, 2014).
- [18] P. Busch, P. Lahti, J.-P. Pellonpää ja K. Ylinen, *Quantum Measurement*, 1 ed. (Springer International Publishing, 2016).
- [19] T. Heinosaari ja M. Ziman, *The Mathematical Language of Quantum Theory: From Uncertainty to Entanglement* (Cambridge University Press, 2011).
- [20] J. B. Altepeter, E. R. Jeffrey ja P. G. Kwiat, *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics* **52**, 105 (2005).
- [21] T. Kuusela, *luentomoniste Kvanttikokeet* (Fysiikan ja tähtitieteen laitos, Turun yliopisto, 2017).
- [22] I. Agresti, D. Poderini, G. Carvacho, L. Sarra, F. Buscemi, M. D. Arno ja F. Sciarrino, *Quantum Science and Technology* **4**, 035004 (2019).
- [23] M. F. Pusey, *Foundations of Physics* **42**, 688 (2012).
- [24] S. Stenholm ja K.-A. Suominen, *Quantum Approach to Informatics* (John Wiley & Sons, Inc., 2005).
- [25] K. P. Burnham ja D. R. Anderson, *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach* (Springer, New York, NY, 2002).
- [26] T. Roughgarden ja G. Valiant, *CS168: The Modern Algorithmic Toolbox Lecture #9: The Singular Value Decomposition (SVD) and Low-Rank Matrix Approximations*, 2015.
- [27] M. D. Mazurek, M. F. Pusey, R. Kunjwal, K. J. Resch ja R. W. Spekkens, *Nature Communications* **7**, 1 (2016).

- [28] M. Yuan, *Science China Mathematics* **59**, 2485 (2016).
- [29] C. Gerry, P. Knight ja P. L. Knight, *Introductory Quantum Optics* (Cambridge University Press, 2005).
- [30] A. G. White, P. G. Kwiat, D. F. James ja P. H. Eberhard, *Physical Review Letters* **83**, 3103 (1999).
- [31] D. F. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro ja A. G. White, *Physical Review A* **64**, 15 (2001).
- [32] M. Born ja E. Wolf, *Principles of optics : electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*, 4 ed. (Pergamon Press, 1970).
- [33] O. Gamel, *Physical Review A* **93**, 1 (2016).

A Liitekappale

Taulukko VII: Tuntemattoman tilan preparoinnit

Preparointi nro	Puoliaaltolevyn kulma [°]	Neljännesaaltolevyn kulma [°]
1	180	10
2	140	20
3	100	30
4	80	40
5	25	50
6	50	60
7	75	80
8	10	70
9	0	0
10	0	27
11	0	58
12	0	83
13	40	0
14	86	0
15	122	0
16	168	0

Taulukko VIII: Tuntemattoman tilan mittaukset

Mittaus nro	Puoliaaltolevyn kulma [°]	Neljännesaaltolevyn kulma [°]
1	11,5	0
2	22,5	0
3	34	0
4	45	0
5	160	0
6	0	22,5
7	0	45
8	0	0
9	11,5	22,5
10	22,5	45
11	22,5	68
12	22,5	11,5
13	11,5	68
14	68	22,5
15	90	11,5
16	135	45

Taulukko IX: Mittaustuloksista laskettu todennäköisyismatriisi F

0,15	0,44	0,77	0,93	0,54	0,43	0,49	0,07	0,35	0,70	0,79	0,35	0,47	0,63	0,23	0,58
0,79	0,58	0,31	0,18	0,53	0,55	0,58	0,86	0,54	0,20	0,24	0,63	0,59	0,54	0,69	0,44
0,33	0,47	0,64	0,71	0,53	0,60	0,46	0,30	0,66	0,92	0,81	0,49	0,48	0,37	0,50	0,58
0,79	0,97	0,90	0,60	0,02	0,09	0,04	0,45	0,40	0,38	0,09	0,90	0,03	0,26	0,24	0,96
0,53	0,37	0,28	0,34	0,70	0,89	0,66	0,69	0,93	0,95	0,80	0,51	0,71	0,32	0,87	0,38
0,30	0,05	0,08	0,39	0,97	0,88	0,98	0,67	0,58	0,48	0,80	0,12	0,98	0,83	0,79	0,01
0,06	0,25	0,60	0,88	0,72	0,43	0,72	0,15	0,11	0,35	0,73	0,12	0,68	0,95	0,24	0,34
0,87	0,98	0,85	0,53	0,02	0,15	0,03	0,53	0,49	0,43	0,07	0,94	0,04	0,19	0,32	0,95
0,08	0,33	0,69	0,93	0,64	0,49	0,61	0,08	0,30	0,66	0,85	0,23	0,58	0,76	0,27	0,48
0,65	0,82	0,83	0,66	0,19	0,36	0,13	0,36	0,66	0,81	0,46	0,81	0,16	0,15	0,38	0,90
0,78	0,96	0,89	0,62	0,03	0,06	0,06	0,41	0,36	0,32	0,08	0,88	0,04	0,33	0,20	0,95
0,30	0,66	0,92	0,95	0,32	0,10	0,33	0,06	0,09	0,35	0,45	0,48	0,26	0,70	0,02	0,75
0,87	0,56	0,20	0,01	0,58	0,80	0,60	0,99	0,89	0,59	0,40	0,73	0,66	0,29	0,93	0,44
0,14	0,47	0,81	0,97	0,51	0,35	0,47	0,03	0,27	0,62	0,73	0,33	0,44	0,68	0,16	0,62
0,64	0,27	0,03	0,09	0,83	0,94	0,85	0,93	0,85	0,63	0,66	0,45	0,87	0,50	0,98	0,17
0,40	0,75	0,96	0,92	0,22	0,16	0,19	0,09	0,29	0,60	0,49	0,61	0,17	0,47	0,09	0,86

Taulukko X: Matriisin F arvot $(\Delta F_{ij})^2$, yksikkönä 10^{-4}

∞	4,0	7,4	5,0	1,9	7,6	7,3	7,4	2,2	7,0	6,2	4,7	7,1	7,7	6,8	5,5	7,3
∞	4,9	7,4	6,8	4,6	7,5	7,3	7,4	3,6	7,4	5,1	5,8	7,0	7,3	7,5	6,3	7,6
∞	6,8	7,5	7,1	6,2	7,5	7,3	7,7	6,5	6,7	2,1	4,7	7,6	7,6	7,3	7,5	7,3
∞	5,0	0,88	2,7	7,2	0,58	2,6	1,2	7,5	7,4	7,3	2,7	2,7	0,78	6,0	5,7	1,0
∞	7,6	7,3	6,5	7,1	6,3	2,9	6,9	6,3	2,0	1,5	4,8	7,6	6,2	6,9	3,4	7,2
∞	6,7	1,5	2,5	7,5	0,80	3,1	0,58	7,0	8,0	8,4	4,9	3,7	0,70	4,3	5,3	0,52
∞	1,9	6,1	7,6	3,2	6,4	7,8	6,1	4,2	3,2	7,3	6,0	3,4	6,8	1,3	6,0	7,5
∞	3,6	0,46	3,9	7,9	0,64	4,2	1,1	7,9	8,0	8,1	2,3	1,8	1,3	5,2	7,2	1,3
∞	2,4	7,3	6,7	2,0	7,2	7,7	7,5	2,5	6,6	7,0	3,9	5,8	7,7	5,5	6,5	8,0
∞	6,7	4,1	4,1	6,8	4,8	6,8	3,6	7,0	6,7	4,4	7,6	4,6	4,4	4,1	7,3	2,6
∞	4,9	1,0	2,3	7,1	0,86	1,8	1,8	7,4	6,9	6,7	2,3	3,1	1,2	6,8	5,2	1,3
∞	6,7	6,7	2,1	1,2	6,8	2,3	7,0	1,6	2,6	7,0	7,4	7,6	6,0	6,1	0,51	5,7
∞	3,3	7,3	5,0	0,42	7,2	4,5	7,3	0,37	2,9	7,2	7,4	5,7	6,6	6,3	1,8	7,4
∞	3,9	7,4	4,6	0,85	7,4	6,8	7,4	1,0	5,9	7,1	5,8	6,8	7,6	6,4	4,3	6,9
∞	6,6	6,0	0,79	2,4	4,1	1,6	3,6	1,9	3,6	6,7	6,6	7,5	3,2	7,5	0,67	4,4
∞	7,3	5,3	0,99	2,0	5,3	4,3	4,8	2,7	6,4	7,1	7,4	7,0	4,4	7,6	2,7	3,5

Taulukko XI: Kahden kubitin GPT:n tomografian mittaukset

Mittaus nro	HWP ₁ [°]	QWP ₁ [°]	HWP ₂ [°]	QWP ₂ [°]
1	71	13	8	27
2	27	15	6	3
3	2	37	28	26
4	11	42	28	31
5	75	25	20	37
6	82	30	45	43
7	39	6	17	1
8	23	23	32	17
9	74	14	71	3
10	54	4	82	24
11	49	37	79	7
12	45	35	25	7
13	10	12	28	17
14	25	25	46	0
15	43	4	65	4
16	24	8	53	14
17	43	17	1	27
18	12	9	18	1
19	7	26	18	38
20	34	42	50	40
21	46	42	79	34
22	2	11	76	36
23	84	20	76	45
24	61	43	47	28
25	48	7	48	14
26	49	31	20	18
27	2	44	46	15
28	75	43	18	9
29	12	20	24	24
30	36	9	5	40
31	38	10	83	9
32	55	11	2	2
33	21	6	23	42
34	22	20	76	16
35	29	39	65	38
36	60	3	22	25
37	7	24	18	29
38	21	0	7	45
39	43	24	48	7
40	2 8	18	17	25

Taulukko XII: Kahden kubitin GPT:n tomografian preparoinnit

Mittaus nro	Puoliaaltolevyn kulma [°]
1	ei puoliaaltolevyä
2	0
3	3
4	8
5	15
6	20
7	24
8	31
9	36
10	40
11	47
12	52