



LYHIMMÄN REITIN ONGELMAT

Blend Zeqiri

Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2020

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatujaarjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

ZEQIRI, BLEND: Lyhimmän reitin ongelmat
Pro gradu -tutkielma, 37 s.
Matematiikka
Huhtikuu 2020

Tutkielmassa tarkastellaan kahden annetun pisteen välisen lyhimmän tai nopeimman reitin etsimistä erilaisissa tapauksissa. Esimerkiksi reitti voidaan määrätä kulkemaan jonkin pisteen tai alueen kautta.

Peruskäsitteiden ja tulosten jälkeen käsitellään ensin Heronin menetelmää lyhimmän reitin selvittämiseksi kahden pisteen välillä, kun reitti heijastuu suorasta. Menetelmän pääperiaatteena on, että lyhimmällä reitillä tulokulma on yhtä suuri kuin heijastuskulma, mikä voidaan todeta käyttämällä peilausta ja kolmioiden yhtenevyyttä. Heronin menetelmää käyttäen ratkaistaan yksinkertaisia lyhimmän reitin tapauksia.

Yksinkertaisten ongelmien jälkeen käydään läpi esimerkki ongelmasta, jossa eri alustat vaikuttavat reitin valintaan. Tällöin huomataan, että lyhin reitti ei välttämättä ole nopein reitti. Alustoina ovat uima-altaan vesi ja sitä ympäröivä asfaltti. Toisin kuin yksinkertaisissa ongelmissa, nopeimman reitin ratkaiseminen vaatii geometrisen tarkastelun lisäksi myös laskennallista työtä.

Seuraavaksi tarkastellaan tapauksia, joissa pisteiden A ja B välisen reitin on kuljettava annetun ympyrän kehän kautta. Pisteet voivat olla eri puolilla kehää tai samalla puolella. Jälkimmäinen jakautuu vielä kahteen tapaukseen, joissa molemmat pisteet A ja B ovat kehän sisä- tai ulkopuolella. Kun pisteet ovat sisäpuolella, saadaan lyhin reitti muodostamalla tasakylkinen kolmio pisteiden avulla. Tästä luodaan yleinen kaava, jolla saadaan ratkaistua kehäpisteen C sijainti, jolla reitin ACB pituus on lyhin. Tapauksessa jossa pisteet A ja B ovat ympyrän kehän ulkopuolella konstruoidaan kompleksilukuyhtälö, jonka avulla voidaan ratkaista lyhimmän reitin kehäpisteen C sijainti.

Asiasanat: lyhin reitti, Heronin menetelmä, minigolf, kompleksianalyysi, Alhazenin ongelma

Sisältö

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Johdanto | 1 |
| 2 | Geometriaa | 2 |
| 2.1 | Kolmioepäyhtälö | 2 |
| 2.2 | Kolmioiden geometriaa | 2 |
| 2.3 | Kompleksianalyysia | 5 |
| 3 | Lyhimmän reitin ongelma | 9 |
| 3.1 | Yksinkertaiset ongelmat | 9 |
| 3.2 | Minigolf | 10 |
| 3.3 | Kaareva peili | 13 |
| 4 | Nopein reitti ja uima-allas | 15 |
| 5 | Alhazenin ongelma | 23 |
| 5.1 | Pisteet ympyrän sisällä | 23 |
| 5.2 | Pisteet ympyrän ulkopuolella | 29 |
| 6 | Yhteenveto | 36 |

1 Johdanto

Kautta aikojen tutkijat ja tiedemiehet ympäri maailmaa ovat tarkastelleet valon kulua erityisissä tapauksissa. Esimerkiksi 900- ja 1000-luvun vaihteessa elänyt irakilainen tiedemies Abu al-Hasan ibn al-Haitham, eli Alhazen, pohti kirjassaan *Optiikasta* kreikkalaisen tiedemiehen, Klaudios Ptolemaioksen, vuonna 150 määrittelemää ongelmaa, mihin kohtaan pallomaiseen peiliin on osoitettava valon lähteellä, jotta valo heijastuisi havaitsijalle [5]. Tämä ongelma tunnetaan myös nimellä Alhazenin ongelma. On yleisesti tiedossa, että valo kulkee ajallisesti lyhintä reittiä pitkin. Näin ollen ongelman voidaan ajatella olevan lyhimmän reitin ongelma.

Lyhin mahdollinen reitti on asia, johon pyritään monissa sovelluksissa. Kyse voi olla yrityksestä, joka pyrkii lyhimellä reitillä minimoimaan kustannuksia, tai henkilöstä, joka haluaa päästä mahdollisimman nopeasti paikasta toiseen. Lyhimmän reitin selvittämisen kannalta on hyvä tietää, mitkä eri ulkoiset tekijät vaikuttavat reittiin. Ulkoisia tekijöitä voivat olla esimerkiksi liikenne tai muuttuvat alustat. Kun oletetaan, että reitissä ei ole ulkoisia tekijöitä, voidaan lyhin reitti hyvin pitkälti selvittää pelkästään geometrisella tarkastelulla, eli käyttämällä geometrisia tuloksia hyödyksi. Geometrinen tulosten osalta tässä työssä lähteenä on käytetty Tero Harjun ja Tero Kilpeläisen luentomonisteita [1] ja [2].

Käytännön elämässä on geometrinen ominaisuuksien lisäksi huomioitava ulkoisia tekijöitä, jotka johtavat monimutkaisiin laskuihin, joita voidaan laskea laskentaohjelmilla. Vaihtuvien alustojen vaikutusta lyhimpään reittiin on ongelma, jota käsitellään käyttäen Kathleen Bellin, Shania Polsonin ja Tom Richmondin julkaisua [4]. Alhazenin ongelmaa käsitellään kolmiulotteisen ongelman sijaan kaksiulotteisena, eli pallopeilin sijaan on ympyräpeili. Tapauksessa, jossa valonlähde ja havaitsija ovat ympyräpeilin sisäpuolella, on käytetty Michael Woltermannin julkaisua [5]. Tapauksessa, jossa ne ovat ulkopuolella, on käytetty Tom Hullin ja Thibaut Damourin kirjaa [6].

2 Geometriaa

Tässä luvussa käydään läpi tutkielmassa tarvittavat geometrian peruskäsitteet ja tulokset. Lähteenä on käytetty luentomonistetta [1]. Lisäksi kerrataan myös hie-
man kompleksianalyysin perusteita. Olkoot A ja B tason pisteitä. Merkinnällä AB
viitataan itse janaan ja kyseisen janan pituuteen.

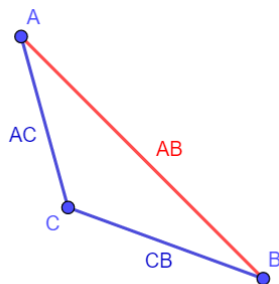
2.1 Kolmioepäyhtälö

Käydään ensiksi läpi melko yksinkertainen ja intuitiivinen, mutta tärkeä lause geo-
metriassa.

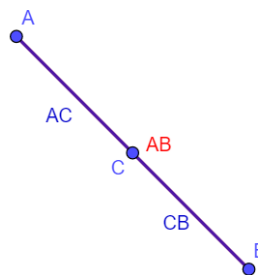
Lause 2.1 (Kolmioepäyhtälö). *Olkoot A , B ja C pisteitä euklidisella tasolla. Silloin
pätee yhtälö*

$$AB \leq AC + CB.$$

Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jos saadaan muodostettua jana pisteiden A ja
 B välille, on se silloin lyhin mahdollinen reitti. Jos ei kuljetakaan suoraan pisteestä A
pisteeseen B , vaan käydään välissä pisteessä C , on reitti pidempi. Kolmioepäyhtälön
yhtäsuuruus pätee vain, kun C on janalla AB .



Kuva 1: Piste $C \notin AB$



Kuva 2: Piste $C \in AB$.

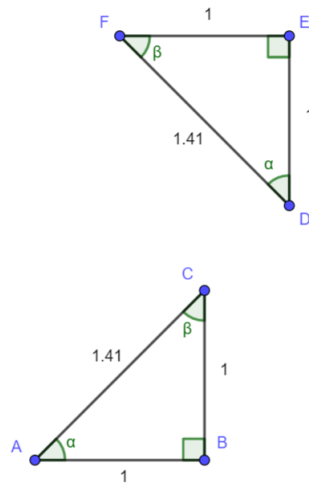
Lyhimpien reittien määrittämisen kannalta kolmioepäyhtälö on merkittävä tulos,
kuten tässä tutkielmassa tulee käymään ilmi.

2.2 Kolmioiden geometriaa

Seuraavat kolmioihin liittyvät määritelmät ovat keskeisiä tämän tutkielman kannal-
ta.

Määritelmä 2.1 (Yhtenevyys). *Kolmiot Δ ja Δ' ovat yhtenevät, merkitään $\Delta \cong$
 Δ' , jos niiden vastinkulmat ovat yhtä suuret ja vastinsivut yhtä pitkät.*

Yhtenevyys voidaan todeta jo silloin, kun tiedetään kolmion vastinsivujen olevan
yhtä pitkät. Kuvassa 3 on esitetty kolmiot $\Delta = \Delta ABC$ ja $\Delta' = \Delta DEF$. Kuvasta
nähdään helposti, että vastinkulmat ja -sivut ovat yhtä suuret ja täten kolmiot ovat
yhtenevät eli $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



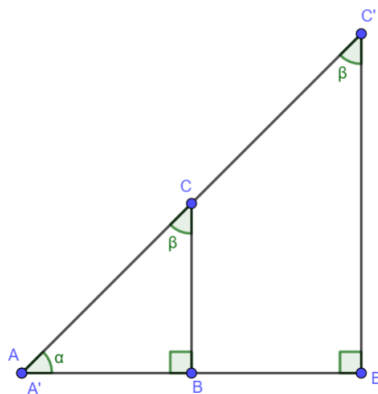
Kuva 3: Keskenään yhtenevät kolmiot ΔABC ja ΔDEF .

Määritelmä 2.2 (Yhdenmuotoisuus). *Kolmiot $\Delta = \Delta ABC$ ja $\Delta' = \Delta A'B'C'$ ovat yhdenmuotoiset, jos niiden vastinkulmat ovat yhtä suuret ja vastinsivut ovat verrannolliset, eli*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Jos Δ ja Δ' ovat yhdenmuotoiset, niin merkitään $\Delta \sim \Delta'$.

Yhdenmuotoisuus voidaan todeta jo jos kolmioiden Δ ja Δ' kaksi vastinkulmaa ovat yhtä suuret. Tällöin on kolmas vastinkulma automaattisesti myös yhtä suuri, ja näin ollen kolmiot Δ ja Δ' ovat yhdenmuotoiset.

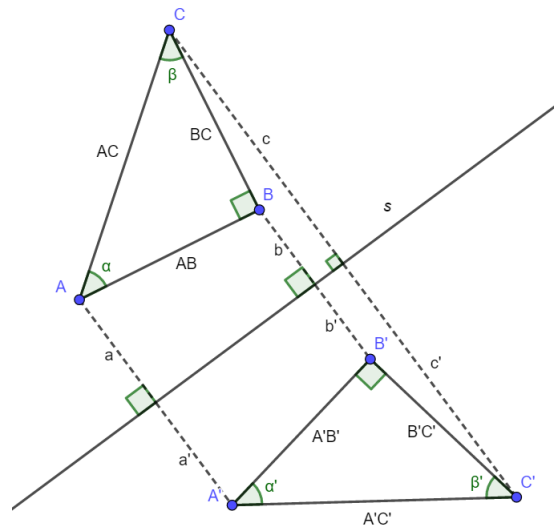


Kuva 4: Havainnollistus keskenään yhdenmuotoisista kolmioista Δ ja Δ' .

Määritelmä 2.3 (Peilaus). *Olkoon Δ kolmio $\Delta = \Delta ABC$ ja s jokin suora. Kun kolmiota Δ peilataan suoran s suhteen, muodostuu suoran s toiselle puolelle kolmion Δ peilaus Δ' , jonka jokaisen kohdan normaalietaisyys suoralle s on sama kuin vastaavalla kohdalla kolmiossa Δ .*

Kuvassa 5 on peilattu kolmio $\Delta = \Delta ABC$ suoran s suhteen, jolloin on saatu kolmio $\Delta' = \Delta A'B'C'$. Kolmioiden Δ ja Δ' vastaavien kärkipisteiden etäisyydet suoralle s , esimerkiksi a ja a' , ovat yhtä suuret.

Peilauksessa kolmioiden vastinsivut, eli kuvan 5 havainnollistuksessa esimerkiksi sivut AB ja $A'B'$, ovat yhtä pitkät. Vastaavasti myös vastinkulmat, kuten α ja α' kuvassa 5, pysyvät yhtä suurina. Vastinkulmien yhtäsuuruus voidaan todeta myös siten, että vastinsivujen ollessa yhtä pitkät, ovat kolmiot ΔABC ja $\Delta A'B'C'$ yhtenevät, jolloin vastinkulmienkin on oltava yhtä suuret.

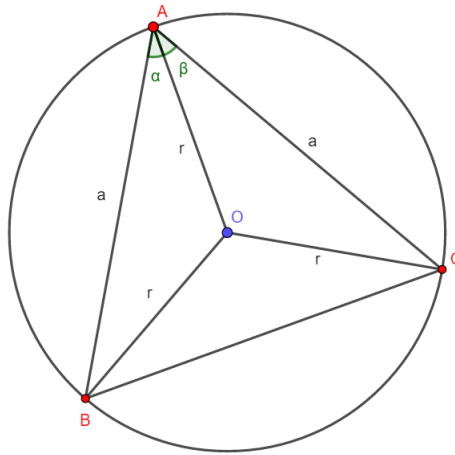


Kuva 5: Kolmio ΔABC ja sen peilaus $\Delta A'B'C'$ suoran s suhteen.

Lause 2.2 (Tasakylkinen kolmio ympyrässä). *Olko tasakylkinen kolmio ΔABC ympyrässä $\omega(O, r)$, missä kärkipisteet ovat ympyrän kehällä ja A on kärkikulma. Tällöin pätee*

$$\angle BAO = \angle OAC.$$

Todistus. Merkitään $\angle BAO = \alpha$, $\angle OAC = \beta$ ja $AB = a$ (kuva 6). Verrataan kolmioita ΔABO ja ΔAOC . Kolmion tasakylkisyyden myötä janojen AB ja AC ovat yhtä pitkät eli $AB = AC = a$. Selvästi janojen BO , CO ja AO pituudet ympyrän säde r . Koska kolmioiden ΔABO ja ΔAOC kaikki vastinsivut ovat yhtä pitkät, ovat ne yhdenmuotoiset eli $\Delta ABO \sim \Delta AOC$. Tällöin myös vastinkulmat α ja β ovat yhtä suuret. \square



Kuva 6: Tasakylkinen kolmio $\triangle ABC$ ympyrässä $\omega(O, r)$.

2.3 Kompleksianalyysia

Luvussa 5 lähestytään lyhimmän reitin selvittämistä käyttämällä hyödyksi kompleksilukuanalyysia. Tätä varten tarkastellaan ja todistetaan muutamia siihen liittyviä ominaisuuksia [2].

Kompleksiluku $z \in \mathbb{C}$ on muotoa $z = x + yi$, missä x on pisteen z reaali-osa eli $Re(z) = x$, y on imaginaari-osa eli $Im(z) = y$ ja i on imaginaariyksikkö, jolle pätee $i^2 = -1$. Kompleksinen koordinaatisto koostuu reaali- ja imaginaariakselista, ja kompleksiluku z vastaa pistettä (x, y) . Luvun $z = x + yi$ konjugaatti on $\bar{z} = x - yi$. Luvun z itseisarvo $|z|$ ilmaisee sen pituuden, eli $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Lause 2.3. Olkoot $z = x + yi$, $\bar{z} = x - yi$ ja $w = s + ti$ kompleksilukuja. Tällöin

- (i) $|z| = |\bar{z}|$
- (ii) $z\bar{z} = |z|^2$
- (iii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

Todistus. Kohta (i) on helppo todistaa Pythagoraan lauseen avulla,

$$\begin{aligned} |\bar{z}| &= \sqrt{x^2 + |-y|^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= |z|. \end{aligned}$$

Todistetaan seuraavaksi kohta (ii)

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + yi)(x - yi) \\ &= x^2 - xyi + xyi - y^2i^2 && |i^2 = -1 \\ &= x^2 - y^2 \cdot (-1) \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

ja lopuksi vielä kohta (iii)

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{(x + yi) + (s + ti)} \\ &= \overline{(x + s) + (y + t)i} \\ &= (x + s) - (y + t)i \\ &= x + s - yi - ti \\ &= (x - yi) + (s - ti) \\ &= \bar{z} + \bar{w}. \end{aligned}$$

□

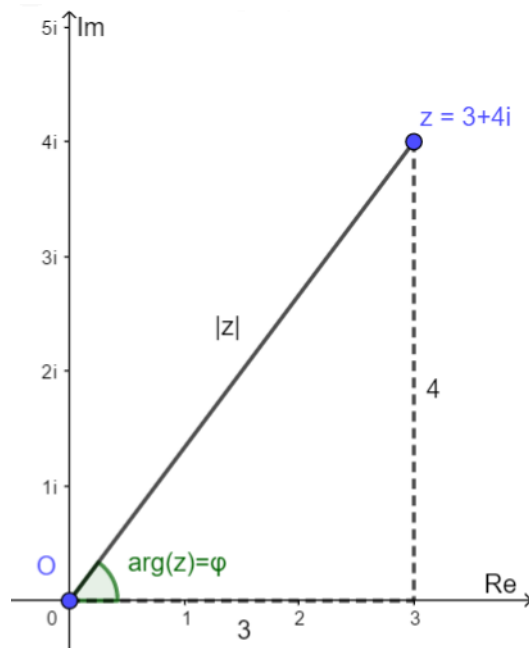
Helposti nähdään, että kohta (iii) pätee myös kun summan sijaan tarkastellaan erotusta, eli $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$.

Määritelmä 2.4. Olkoon piste $z = x + yi$ kompleksisessa koordinaatistossa. Tällöin sen argumentti $\arg(z)$ ilmaisee pisteen paikkavektorin ja x -akselin välisen kulman suuruuden $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

Olkoon kompleksinen piste $z = 3 + 4i$. Tällöin saadaan kuvan 3 mukainen kuvio, josta voidaan päätellä seuraavat yhtäsuuruudet

$$\begin{cases} y = |z| \sin(\varphi), \\ x = |z| \cos(\varphi). \end{cases}$$

Eli $\arg(z) = \sin^{-1}\left(\frac{y}{|z|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{x}{|z|}\right) = \varphi$.



Kuva 7: Piste z ja sen argumentti havainnollistettuna

Määritelmä 2.5. Kompleksista pistettä z voidaan esittää myös napakoordinaatiston avulla, jolloin se on muodossa $z = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$.

Tämän muodon avulla seuraava lause voidaan todistaa helpommin.

Lause 2.4. Olkoot $z = |z|(\cos(a) + i \sin(a))$ ja $w = |w|(\cos(b) + i \sin(b))$, missä a ja b ovat pisteitä z ja w vastaavat argumentit. Silloin

$$(i) \quad \arg(z) + \arg(w) = \arg(zw) \quad \text{ja}$$

$$(ii) \quad \arg(x) - \arg(y) = \arg\left(\frac{x}{y}\right).$$

Todistus. Todistetaan ensin kohta (i),

$$zw = |z||w|(\cos(a) + i \sin(a))(\cos(b) + i \sin(b))$$

$$\begin{aligned} &= |z||w|(\cos(a) \cos(b) + i \sin(b) \cos(a) + i \sin(a) \cos(b) + \overbrace{i^2}^{-1} \cdot \sin(a) \cos(b)) \\ &= |z||w|(\cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) + i(\sin(b) \cos(a) + \sin(a) \cos(b))) \\ &= |z||w|(\cos(a + b) + i \sin(a + b)). \end{aligned}$$

Tuloksesta seuraa, että luvun zw argumentiksi tulee kulma $a+b$, mikä todistaa kohdan (i).

Seuraavaksi todistetaan kohta (ii),

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{|z|(\cos(a) + i \sin(a))}{|w|(\cos(b) + i \sin(b))} \\
&= \frac{|z|(\cos(a) + i \sin(a)) \cdot (\cos(b) - i \sin(b))}{|w|(\cos(b) + i \sin(b)) \cdot (\cos(b) - i \sin(b))} \\
&= \frac{|z|(\cos(a) \cos(b) - i \cos(a) \sin(b) + i \sin(a) \cos(b) - \overbrace{i^2}^{-1} \sin(a) \sin(b))}{|w|(\cos^2(b) - \cancel{i \sin(b) \cos(b)} + \cancel{i \sin(b) \cos(b)} + \sin^2(b))} \\
&= \frac{|z|(\cos(a) \cos(b) - i \cos(a) \sin(b) + i \sin(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b))}{|w|(\cos^2(b) + \sin^2(b))} \\
&= \frac{|z| \left[\left(\frac{\cos(a-b)}{2} + \frac{\cos(a+b)}{2} \right) - i \left(\frac{\sin(a+b)}{2} - \frac{\sin(a-b)}{2} \right) + i \left(\frac{\sin(a-b)}{2} + \frac{\sin(a+b)}{2} \right) + \left(\frac{\cos(a-b)}{2} - \frac{\cos(a+b)}{2} \right) \right]}{|w|} \\
&= \frac{|z| \left(\frac{\cos(a-b)}{2} + \frac{\cos(a+b)}{2} - \frac{i \sin(a+b)}{2} + \frac{i \sin(a-b)}{2} + \frac{i \sin(a-b)}{2} + \frac{i \sin(a+b)}{2} + \frac{\cos(a-b)}{2} - \frac{\cos(a+b)}{2} \right)}{|w|} \\
&= \frac{|z| \left(\frac{\cos(a-b)}{2} + \frac{\cos(a-b)}{2} + \frac{\cos(a+b)}{2} - \frac{\cos(a+b)}{2} - \frac{i \sin(a+b)}{2} + \frac{i \sin(a+b)}{2} + \frac{i \sin(a-b)}{2} + \frac{i \sin(a-b)}{2} \right)}{|w|} \\
&= \frac{|z|}{|w|} \left(\cos(a-b) + \frac{\cancel{\cos(a+b)}}{2} - \frac{\cancel{\cos(a+b)}}{2} - \frac{\cancel{i \sin(a+b)}}{2} + \frac{\cancel{i \sin(a+b)}}{2} + i \sin(a-b) \right) \\
&= \frac{|z|}{|w|} (\cos(a-b) + i \sin(a-b)).
\end{aligned}$$

Tuloksesta nähdään, että lukujen $z, w \in \mathbb{C}$ osamäärän $\frac{z}{w}$ argumentiksi saadaan kulma $a-b$, mikä todistaa väitteen. \square

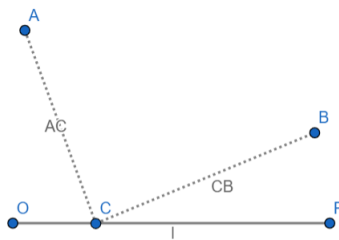
3 Lyhimmän reitin ongelma

Yleisesti lyhimmän reitin ongelmissa pyritään löytämään lyhin tai nopein reitti pisteestä A pisteeseen B . Yleensä etsityn lyhimmän reitin pitää toteuttaa annettuja lisäehtoja, joista yksinkertaisin ehto on se, että reitti kulkee jonkun annetun pisteen tai suoran kautta. Tällä ehdolla varustetut ongelmat ovat sikäli helppo ratkaista, että ne vaativat vain geometrista tarkastelua, eikä niinkään algebrallista laskutaitoa. Kun ongelmassa otetaan alusta huomioon, eli kun eri alustoilla on eri etenemisvauhdit, vaatii lyhimmän ja nopeimman reitin löytäminen myös laskennallista työtä. Tällaista versiota ongelmosta käsitellään luvussa 4.

3.1 Yksinkertaiset ongelmat

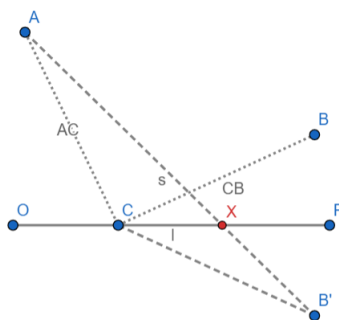
Tässä alaluvussa on käytetty pohjana lähdettä [3]. Aloitetaan yksinkertaisella ongelmallalla, jossa pisteet A ja B ovat suoran l samalla puolella. Tarkoituksena on päästä pisteestä A pisteeseen B suoran l kautta. Ts. on löydettävä piste $C \in l$, jolla reitti ACB on lyhin. Kuvassa 8 nähdään havainnollistus tästä alkutilanteesta.

Yksi tapa ratkaista ongelma on kokeilla eri paikkoja pisteelle C . Tämä ei kuitenkaan ole kovin tehokas tapa, vaikka olisi tiedossa, että tulokulman $\angle ACO$ on oltava yhtä suuri kuin heijastuskulman $\angle PCB$.



Kuva 8: Alkutilanne.

Lähdetään liikkeelle Heronin menetelmällä, jossa jompaa kumpaa pistettä peilataan suoran l toiselle puolelle. Tehdään näin pisteelle B ja olkoon peilattu piste B' . Peilauksen myötä reitit ACB' ja ACB ovat yhtä pitkät. Olkoon nyt piste $X \in l$ haluttu lyhimmän reitin piste. Piirretään suora pisteiden A ja B' välille ja merkitaan suorien $s(A, B')$ ja l leikkausta pisteeksi $X = s(A, B') \cap l$.

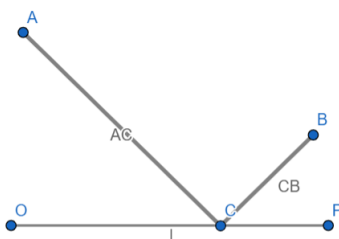


Kuva 9: Peilattu piste B' ja piste X .

Käytetään alaluvussa 2.1 käsitellyä kolmioepäyhtälöä ja tietoa siitä, että $CB = CB'$. Saadaan

$$ACB = ACB' \geq AXB' = AXB$$

Kolmioepäyhtälön nojalla reitti AXB on lyhin reitti ja se on ainoa sellainen. Yllä olevasta kuvasta 9 nähdään, että tulokulma $\angle AXC$ ja kulma $\angle B'XP$ ovat vastakkaisina kulmina yhtä suuret. Peilauksen myötä $\angle B'XP = \angle PXB$, eli $\angle AXC = \angle PXB$, mikä tarkoittaa sitä, että tulokulma on yhtä suuri kuin heijastuskulma. Näin ollen lyhimässä reitissä tulokulma on yhtä suuri kuin heijastuskulma, mikä on Heronin menetelmän pääperiaate. Kuvassa 10 nähdään lyhin reitti ratkaistuna.



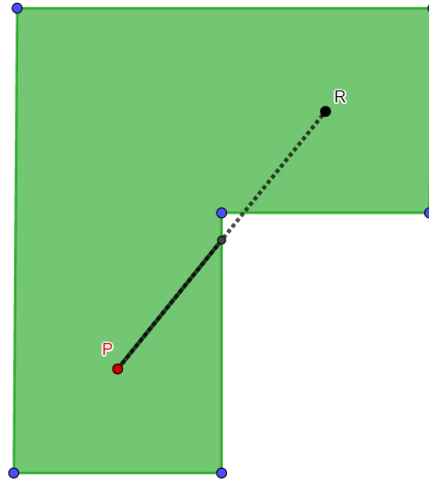
Kuva 10: Lyhin reitti ACB .

3.2 Minigolf

Minigolf on peli, jossa erilaisilla radoilla yritetään lyödä pallo reikään joko suoraan tai käyttämällä reunoja kimmokkeina. Tässä alaluvussa keskitytään löytämään lyhin reitti pallolle aloituspisteestä reikään soveltamalla Heronin menetelmää.

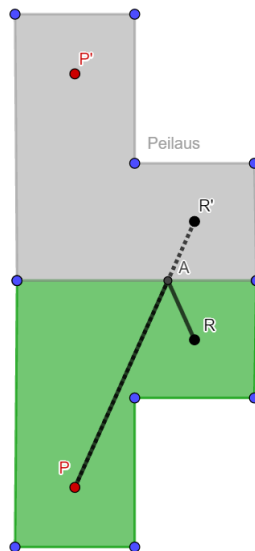
Yleensä minigolf-radalla perusoletuksena on, että palloa ei voida lyödä suoraan reikään, eli pallon P ja reiän R väliin muodostettu jana PR on jossain kohtaa radan ulkopuolella. Tällöin lyhin reitti löydetään pelaamalla koko rata jonkin reunan suhteen, kunnes pallon ja peilattun reiän välinen jana ei ole mistään kohtaa alkuperäisen radan ja peilattujen ratojen muodostetun monikulmion ulkopuolella. Tällaiseen peilauksilla konstruoituun monikulmioon viitataan tästä lähtien termillä *uusi rata*.

Kuvassa 11 on esitetty yksinkertainen minigolf-rata, jossa punainen piste on pallo P ja musta piste on reikä R . Kuvasta huomataan heti, että jana PR kulkee osittain radan ulkopuolella, jolloin palloa ei voida lyödä suoraan reikään.



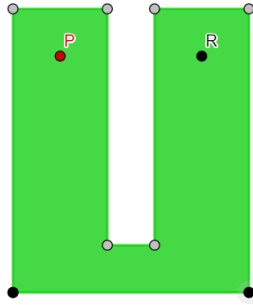
Kuva 11: Yksinkertainen minigolf-rata.

Heronin menetelmän tavoin suoritetaan ensin peilaus. Peilataan koko minigolf-rata ylimmän reunan suhteen (kuva 12). Huomataan, että pallon P ja peilatus reiän R' välille muodostettu jana PR' on kokonaan uuden radan sisäpuolella. Olkoon piste A kohta, jossa jana PR' leikkaa radan yläreunaa. Tällöin lyhin reitti reikään R on $PAR' = PAR$.



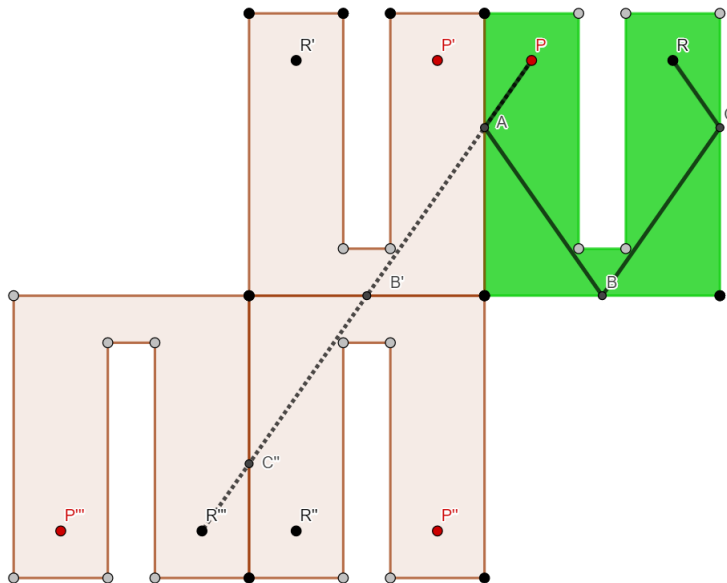
Kuva 12: Peilattu yksinkertainen minigolf-rata ja sen lyhin reitti.

Yksinkertaisen radan tapauksessa yksi peilaus riitti lyhimmän reitin löytämiseen. Haastavammilla radoilla on kuitenkin yleensä suoritettava useampi peilaus. Kuvassa 13 on haastavampi minigolf-rata, jossa vaaditaan useampaa peilausta.



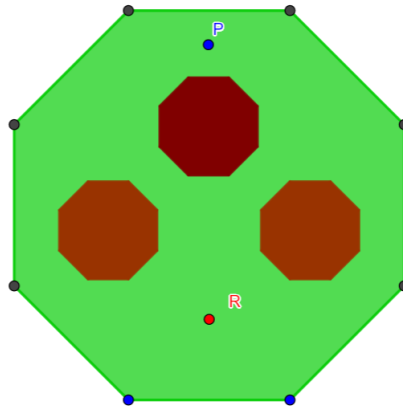
Kuva 13: Hankala rata, jossa yksi peilaus ei riitä.

Kuvan 13 mukaista rataa varten on tehtävä kolme peilausta. Kuvassa 14 näkyy peilaukset ja lyhin reitti $PAB'C''R''' = PABCR$.

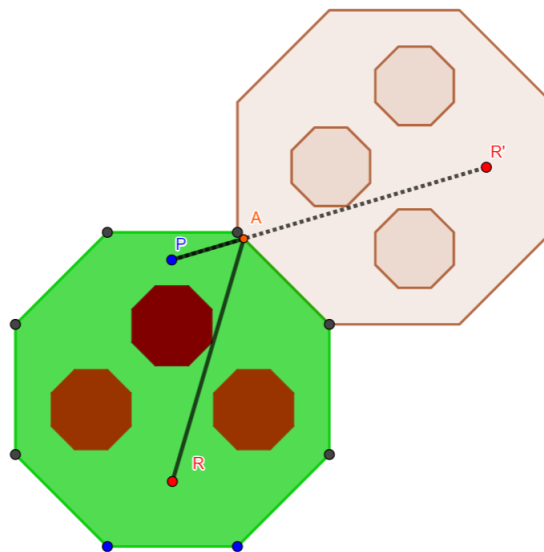


Kuva 14: Kuvan 13 hankalan radan uusi rata ja lyhin reitti.

Radoissa voi olla myös esteitä, kuten kuvan 15 tapaisessa radassa. Näiden esteiden voidaan ajatella olevan radan ulkopuolta. Tämän radan lyhimmän reitin löytämiseen tarvitaan vain yksi peilaus. Kuvassa 16 näkyy uusi rata ja lyhin reitti $PAR' = PAR$.



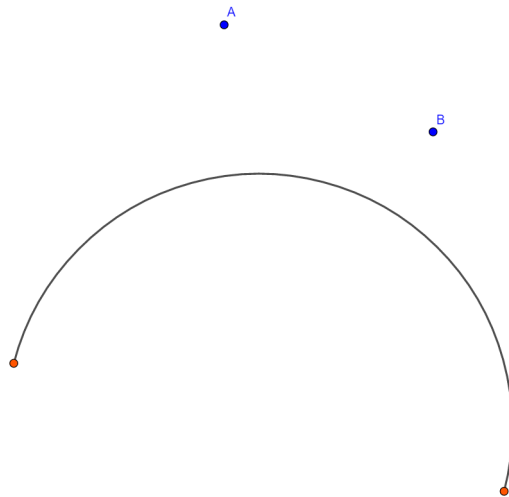
Kuva 15: Rata, jossa on esteitä.



Kuva 16: Uusi rata ja lyhin reitti.

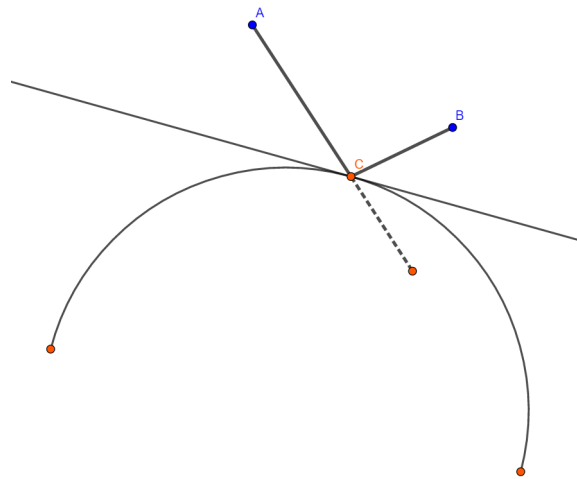
3.3 Kaareva peili

Heronin menetelmää voidaan käyttää myös kaarevareunaisten objektien kautta kulkevan lyhimmän reitin etsimiseen. Tähän mennessä reunat ovat olleet suoria. Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa alusta ei olekaan suoria, vaan kaari. Kuvassa 17 on konkaavi kaari, eli kaari, joka on kokonaan tangenttiensa toisella puolella.



Kuva 17: Konkaavi kaari.

Heronin menetelmää voidaan käyttää kaarevissa tapauksissa tangentin avulla, kuten kuvassa 18 nähdään. On kuitenkin huomioitavaa, että pisteen (kuvan 18 tapauksessa piste C) löytäminen kaarelta ei ole yksinkertaista. Lyhimmän reitin ratkaisemiseksi on käytetty GeoGebraa. Myöhemmin tässä tutkielmassa käydään läpi, miten kyseinen lyhin reitti ratkaistaan.



Kuva 18: GeoGebran avulla ratkaistu lyhin reitti.

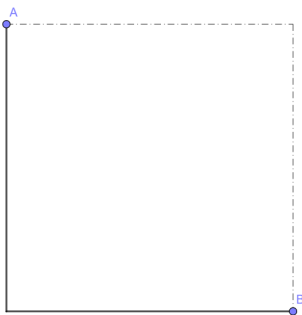
4 Nopein reitti ja uima-allas

Tähän menneessä lyhimmän reitin löytämiseen ei olla tarvittu kuin geometrista osaamista, sillä reittiin ei ole vaikuttanut ulkoisia tekijöitä. Yksi yleisin reittiin vaikuttava tekijä on alusta. Eri alustoilla edetään eri nopeuksilla, ja näin ollen lyhin reitti ei aina välttämättä ole nopein reitti. Nopein reitti on se reitti, jolla kuluu vähiten aikaa kuljettaessa pisteestä A pisteeseen B . Näissä tapauksissa lyhimmän reitin ratkaisemiseen vaaditaan geometrisen tarkastelun lisäksi myös matemaattisia laskuja.

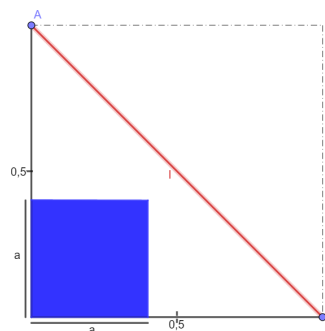
Tarkastellaan nopeimman reitin ongelmaa, kun alustoina ovat vesi (uima-allas) ja asfaltti, mikä pohjautuu lähteeseen [4]. Käytetään pohjana neliönmuotoista aluetta, jonka sivun pituus on 1, kuten kuvassa 19. Tässä pisteen A koordinaatit ovat $(1, 0)$ ja pisteen B koordinaatit $(0, 1)$. Seuraavaksi lisätään alueeseen neliömuotoinen uima-allas vasempaan alareunaan. Uima-altaan sivun pituus on a . Esimerkin kannalta tärkeitä ehtoja:

1. Uima-altaassa uiminen eli uintinopeus u on hitaampi kuin sen ulkopuolella käveleminen eli kävelynopeus k , eli $u < k$.
2. Uima-altaaseen menemiseen ja siitä poistumiseen kulunutta aikaa ei oteta laskuissa huomioon.

On selvää, että jos $a < \frac{1}{2}$, niin lyhin ja nopein reitti on kulkea suoraan pisteestä A pisteeseen B , kuten kuvassa 20 käy ilmi.



Kuva 19: Tarkasteltavan esimerkin pohja.

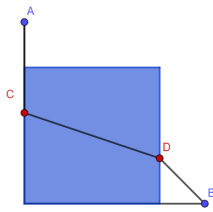


Kuva 20: Nopein reitti kun $a < \frac{1}{2}$.

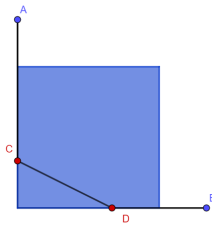
Tämä ei ole matemaattisessa eikä käytännön mielessä erityisen mielenkiintoinen tapaus, joten tarkastellaan tilannetta, jossa uima-altaan sivun a pituus on $a > \frac{1}{2}$. Tässä tapauksessa nopein reitti kulkee joko uima-altaan läpi tai uima-altaan oikean yläkulman kautta. Jälkimmäinen tarkoittaa sitä, että k on sen verran suurempi kuin u , että ei kannata kulkea uima-altaan kautta.

Oletetaan ensin, että on kuljettava uima-altaan kautta. Olkoon piste C sisäänmenokohta ja piste D poistumiskohta uima-altaassa. Nopeimman reitin kannalta pisteen C on oltava joko uima-altaan yläreunassa tai vasemmassa reunassa. Vastaavasti

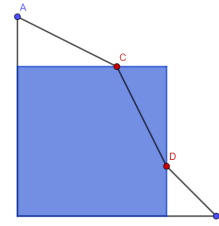
pisteen D on oltava joko oikeassa reunassa tai alareunassa. Kuvissa 21-23 näkyy mahdolliset nopeimmat reitit.



Kuva 21

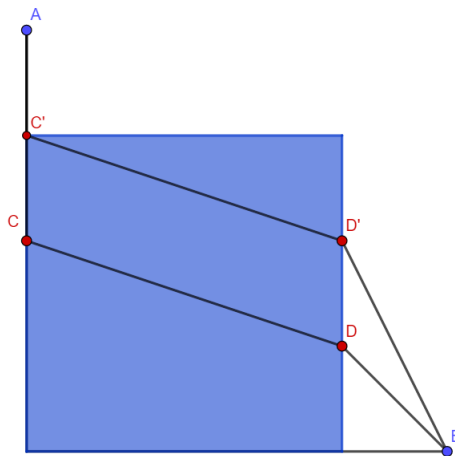


Kuva 22



Kuva 23

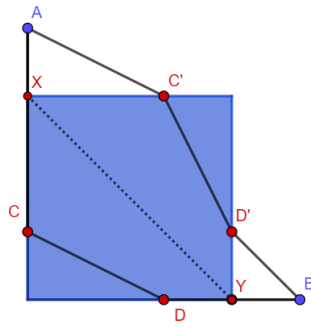
Osoitetaan geometrisella tarkastelulla, että pisteen C on oltava yläreunassa. Valitaan kuvan 21 mukainen tilanne ja sijoitetaan piste C' uima-altaan vasempaan yläkulmaan. Valitaan seuraavaksi piste D' siten, että janat CD ja $C'D'$ ovat samansuuntaiset. Nyt on saatu reitit $ACDB$ ja $AC'D'B$, jotka näkyvät kuvassa 24.



Kuva 24: Ensimmäisen tilanteen geometrinen tarkastelu.

Janojen CD ja $C'D'$ samansuuntaisuuden nojalla ne ovat yhtä pitkät eli $CD = C'D'$ ja lisäksi myös janat $C'C$ ja $D'D$ ovat yhtä pitkät. Nyt reiteillä $ACDB$ ja $AC'D'B$ on sama uintimatka ja alussa yhteinen kävelymatka AC' , eli lyhin reitti määräytyy kävelymatkan perusteella. Vertaillaan janoja $C'C + DB$ reitistä $ACDB$ ja $D'B$ reitistä $AC'D'B$ keskenään. Aikaisemmin todettiin, että $C'C = D'D$, eli vertaillaan matkat $D'DB$ ja $D'B$. Kolmioepäyhtälöä apuna käyttäen saadaan $D'B \leq D'D + DB$ ($=D'DB$), eli reitti $AC'D'B$ on lyhyempi. Näin ollen nopeimmassa reitissä piste C on yläreunassa.

Tarkastellaan seuraavaksi kuvan 22 mukaista tilannetta, jossa piste C on vasemmassa reunassa ja piste D alareunassa. Olkoot X ja Y lävistäjän päätepisteet. Peilataan pisteet C ja D lävistäjän XY suhteen ja merkitaan ne pisteiksi C' ja D' kuvan 25 mukaisesti.



Kuva 25: Toisen tilanteen geometrinen tarkastelu.

Peilauksessa etäisyydet pysyvät samoina. Täten $CD = C'D'$, $XC = XC'$ ja $DY = D'Y$. Koska uintimatkat $C'D'$ ja CD ovat samat, täytyy nopeinta reittiä selvittää kävelymatkojen avulla.

Hyödyntämällä kolmioepäyhtälöä ja tieto siitä, että $XC = XC'$, saadaan

$$AXC = AXC' \geq AC',$$

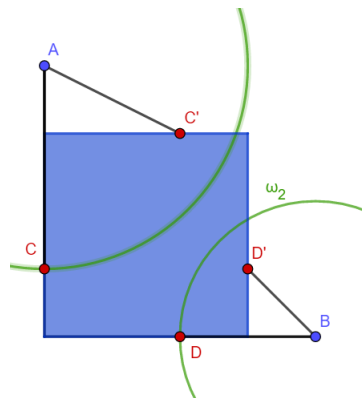
eli reitti AC' on lyhyempi kuin reitti AC .

Samalla periaatteella saadaan

$$DY + YB = D'Y + YB \geq D'B.$$

Koska $AC' < AC$, $D'B < DB$ ja $CD = C'D'$, on silloin reitti $AC'D'B$ lyhyempi kuin $ACDB$ eli nopeampi.

Tilannetta voidaan tarkastella myös esimerkiksi GeoGebran avulla; Muodostetaan ympyrät ω_1 ja ω_2 , jossa $\omega_1 = \omega(A, AC)$ ja $\omega_2 = \omega(B, BD)$ (Kuva 26).



Kuva 26: Tarkastelu GeoGebran avulla.

Kuvasta 26 nähdään selvästi, että piste D' on ympyrän ω_2 sisällä. Tällöin etäisyyden $D'B$ on oltava pienempi kuin DB . Samalla periaatteella myös ympyrässä ω_1 , eli koska piste C' on ympyrän ω_1 sisäpuolella, on $AC' < AC$.

Kuvien 24 ja 25 mukaisten tapausten tarkastelusta voidaan vihdoin sanoa, että piste C ei voi olla vasemmalla reunalla.

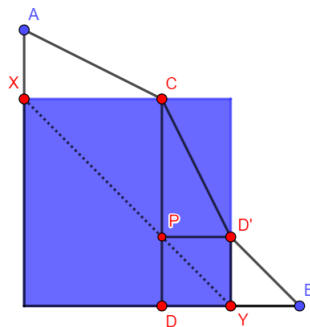
Vielä on osoitettava, että pisteen D on oltava uima-altaan oikealla reunalla. Olkoon piste D uima-altaan alareunalla. Peilataan se lävistäjän XY suhteen, jolloin saadaan peilattu piste D' oikealle reunalle (kuva 27). Olkoon piste P lävistäjän XY ja janan CD leikkauspiste. Peilauksen myötä PD ja PD' ovat yhtä pitkiä. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$CP + PD = CP + PD' \geq CD'.$$

Edelleen peilauksen nojalla DY ja $D'Y$ ovat yhtä suuret. Nyt kolmioepäyhtälön nojalla

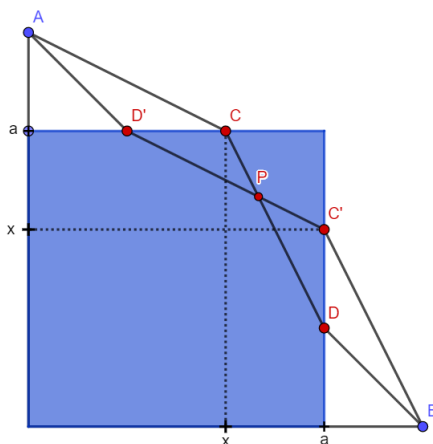
$$DY + YB = D'Y + YB \geq D'B.$$

Näin ollen reitti $ACD'B$ on lyhin, eli pisteen D on oltava oikealla reunalla.



Kuva 27: Pisteen D sijainnin geometrinen tarkastelu.

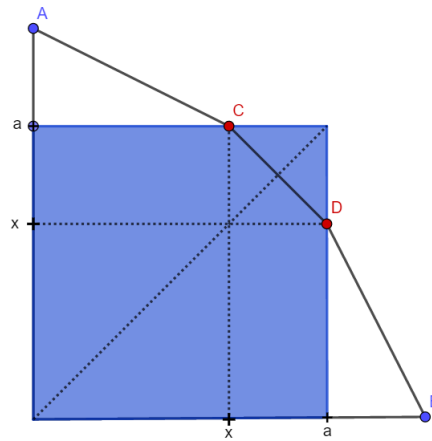
Nopeimman reitin on siis oltava kuvan 23 mukainen, eli piste C on yläreunalla ja piste D on oikealla reunalla. Osoitetaan nyt, että nopein reitti $ACDB$ on symmetrinen lävistäjän $y = x$ suhteen. Käytetään kuvaa 23 pohjana, ja peilataan pisteet C ja D lävistäjän $y = x$ suhteen, jolloin saadaan pisteet C' ja D' .



Kuva 28: Pisteet C ja D peilattu lävistäjän $y = x$ suhteen.

Oletetaan, että $ACDB$ on nopein reitti ja epäsymmetrinen lävistäjäsuoran $y = x$ suhteen. Pisteiden C ja D peilauksen myötä on saatu toinen nopein reitti $AD'C'B$. Oletuksen nojalla matka ACP on nopein. Koska myös reitti $AD'C'B$ on nopein, on myös matka $AD'P$ nopein. Samoin matkojen $PC'B$ ja PDB on oltava nopeimpia. Koska ACP ja $PC'B$ ovat keskenään samat peilauksen nojalla, ovat kaikki neljä reittiä pisteistä A ja B pisteeseen P samankestoisia. Eli esimerkiksi reiteissä $ACPC'B$ ja $ACPDB$ menee yhtä paljon aikaa.

Tarkastellaan nyt reittiä $ACPC'B$. Tämän on oltava nopein reitti, eli jokaisen osareitinkin täytyy olla nopein. Huomataan kuitenkin, että osareitti CPC' ei ole nopein, koska CC' olisi kolmioepäyhtälön nojalla nopeampi. Toisin sanoen $CC' < CPC'$. Tämä osoittaa, että nopeimman reitin on oltava symmetrinen lävistäjän $y = x$ suhteen (kuva 29). Tämän tuloksen perusteella tiedetään, että pisteiden C ja D koordinaatit ovat (x, a) ja (a, x) vastaavasti.



Kuva 29: Nopein reitti $ACDB$ geometrisen tarkastelun nojalla.

Ratkaistaan seuraavaksi nopein reitti $ACDB$, jossa $A(0, 1)$, $C(x, a)$, $D(a, x)$ ja $B(1, 0)$. Matka AC on helppo ratkaista Pythagoraan lauseella,

$$AC^2 = (1 - a)^2 + x^2,$$

mistä saadaan

$$AC = \sqrt{(1 - a)^2 + x^2}.$$

Uintimatka CD saadaan myös käyttämällä Pythagoraan lausetta

$$CD^2 = (a - x)^2 + (a - x)^2 = 2(a - x)^2,$$

mistä saadaan

$$CD = \sqrt{2(a - x)^2} = \sqrt{2}(a - x).$$

Matka DB on sama kuin AC , eli $DB = \sqrt{(1 - a)^2 + x^2}$.

Olkoon $T(x)$ funktio, joka ilmaisee reitissä $ACDB$ kulunutta aikaa.

$$T(x) = \frac{2\sqrt{(1 - a)^2 + x^2}}{k} + \frac{\sqrt{2}(a - x)}{u},$$

jossa u on uintinopeus ja k on kävelynopeus. Halutaan ratkaista kohtaa x , jolla funktio $T(x)$ saa pienimmän arvonsa, joten derivoidaan funktio $T(x)$ muuttujan x suhteen ja ratkaistaan nollakohdat.

$$\begin{aligned}
 T'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2\sqrt{(1-a)^2 + x^2}}{k} + \frac{\sqrt{2}(a-x)}{u} \right) \\
 &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2((1-a)^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{k} + \frac{\sqrt{2}a}{u} - \frac{\sqrt{2}x}{u} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{2((1-a)^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}}{k} - \frac{\sqrt{2}}{u} \\
 &= \frac{2x}{k((1-a)^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{2}}{u} \\
 &= \frac{2x}{k\sqrt{(1-a)^2 + x^2}} - \frac{\sqrt{2}}{u}.
 \end{aligned}$$

Seuraavaksi lasketaan nollakohdat,

$$T'(x) = 0.$$

Sijoittamalla derivaatan yhtälö saadaan

$$\frac{2x}{k\sqrt{(1-a)^2 + x^2}} - \frac{\sqrt{2}}{u} = 0,$$

ja siirtämällä termi $\frac{\sqrt{2}}{u}$ toiselle puolelle saadaan

$$\frac{2x}{k\sqrt{(1-a)^2 + x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{u}.$$

Korottamalla kumpikin puoli potenssiin kaksi saadaan

$$\frac{4x^2}{k^2((1-a)^2 + x^2)} = \frac{2}{u^2}.$$

Kertomalla ristiin,

$$4x^2u^2 = 2k^2((1-a)^2 + x^2),$$

ja kertomalla oikeanpuoleinen sulklauseke auki saadaan

$$4x^2u^2 = 2k^2(1-a)^2 + 2k^2x^2.$$

Siirtämällä termi $2k^2x^2$ vasemmalle puolelle,

$$4x^2u^2 - 2k^2x^2 = 2k^2(1-a)^2,$$

ja ottamalla termi $2x^2$ yhteiseksi tekijäksi, saadaan

$$2x^2(2u^2 - k^2) = 2k^2(1 - a)^2.$$

Jaetaan yhtälö termillä $(2u^2 - k^2)$, jolloin saadaan

$$x^2 = \frac{2k^2(1 - a)^2}{2(2u^2 - k^2)},$$

missä osoittajan ja nimittäjän kertoimet supistuvat. Ottamalla vielä neliöjuuri lausekkeesta saadaan

$$x = \pm \frac{k(1 - a)}{\sqrt{2u^2 - k^2}}.$$

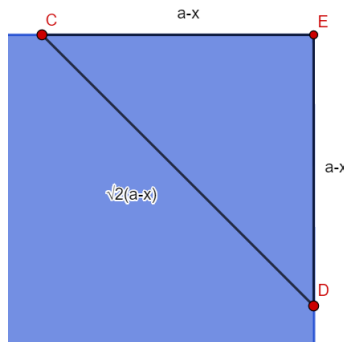
Näistä nollakohdista negatiivinen ei käy. On mahdollista, että kävelynopeus on sen verran suurempi kuin uintinopeus, että nopein reitti ei välttämättä kulje uima-altaan läpi. Ratkaistaan seuraavaksi nopeuksien välinen suhde, jolla tämä pätee.

Olkoon edelleen $C = (x, a)$, $D = (a, x)$ ja lisäksi $E = (a, a)$. Kuvan 30 mukaisessa tilanteessa reitit AE ja ED kävellään ja niihin kuluu aikaa yhteensä $2 \cdot \frac{a-x}{k}$. Suoraa reittiä CD uidaan ja siihen kuluu aikaa $\frac{\sqrt{2}(a-x)}{u}$, jonka osoittaja eli matka on saatu Pythagoraan lauseella,

$$CD^2 = AE^2 + ED^2.$$

Ottamalla neliöjuuri ja sijoittamalla pisteiden koordinaatit saadaan

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{AE^2 + ED^2}, \\ &= \sqrt{(a-x)^2 + (a-x)^2} \\ &= \sqrt{2(a-x)^2} \\ &= \sqrt{2}(a-x). \end{aligned}$$



Kuva 30: Havainnollistus mahdollisista reiteistä.

Jotta olisi nopeampaa kävellä reunoja pitkin kuin uida, täytyy kävelemiseen kulunut aika $\frac{CE+ED}{k}$ olla pienempi tai yhtäsuuri kuin uimiseen kulunut aika $\frac{CD}{u}$. Siis

$$\frac{CE + ED}{k} \leq \frac{CD}{u},$$

eli

$$\frac{2(a-x)}{k} \leq \frac{\sqrt{2}(a-x)}{u}.$$

Jaetaan yhtälö termillä $\sqrt{2}(a-x)$ ja kerrotaan termillä k

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \leq \frac{k}{u}$$

ja lavennetaan vasen puoli termillä $\sqrt{2}$, jolloin saadaan

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \leq \frac{k}{u}.$$

Koska $\sqrt{2}\sqrt{2} = \sqrt{2^2} = 2$, saadaan

$$\frac{2\sqrt{2}}{2} \leq \frac{k}{u},$$

eli

$$\sqrt{2} \leq \frac{k}{u}.$$

Eli kun $\frac{k}{u} \geq \sqrt{2}$ on nopeampaa kävellä pisteestä A pisteeseen $E = (a, a)$ ja siitä pisteelle B . Toisin sanoen, jotta olisi nopeampaa kulkea uima-altaan kautta, on kävelynopeuden k ja uintinopeuden u suhde $\frac{k}{u}$ oltava välillä $1 < \frac{k}{u} < \sqrt{2}$. Alaraja tulee oletuksesta, jossa $u < k$. Välin ylärajaa saadaan myös funktion $T'(x)$ nollakohdasta

$$x = \frac{k(1-a)}{\sqrt{2u^2 - k^2}},$$

missä juurettavan $2u^2 - k^2$ on oltava suurempi kuin 0. Sen arvo ei voi olla 0, koska juurilauseke on nimittäjänä. Yläraja saadaan yhtälöstä

$$2u^2 - k^2 > 0.$$

Siirtämällä termi k^2 oikealle puolelle,

$$2u^2 > k^2,$$

ja jakamalla termillä u^2 saadaan

$$2 > \frac{k^2}{u^2}.$$

Ottamalla vielä neliöjuuri yhtälöstä saadaan

$$\sqrt{2} > \frac{k}{u}.$$

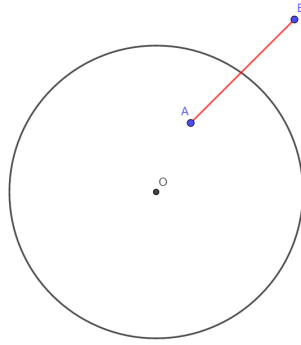
Lopputulokset. Olkoot pisteet $A = (0, 1)$ ja $B = (1, 0)$ ja lisäksi uima-altaan sivun a pituus välillä $0 \leq a \leq 1$. Jos uima-altaan sivun a pituus on pienempi kuin $\frac{1}{2}$, on nopein reitti suora reitti pisteestä A pisteeseen B .

Mikäli kävelynopeuden k ja uintinopeuden u suhde $\frac{k}{u}$ on suurempi tai yhtäsuuri kuin $\sqrt{2}$ ja $a \geq \frac{1}{2}$, on nopein reitti ABC , jossa $B = (a, a)$.

Jos suhde $\frac{k}{u}$ on välillä $1 < \frac{k}{u} < \sqrt{2}$ ja $a \geq \frac{1}{2}$, on nopein reitti $ACDB$, jossa $C = (\frac{k(1-a)}{\sqrt{2u^2 - k^2}}, a)$ ja $D = (a, \frac{k(1-a)}{\sqrt{2u^2 - k^2}})$.

5 Alhazenin ongelma

Tässä luvussa käydään läpi luvussa 3.3 mainittu tapaus, jossa ratkaistaan lyhin kahden pisteen välinen reitti, jonka täytyy kulkea ympyrän kehän kautta. Pisteet A ja B voivat olla joko ympyrän kehän eri puolilla tai samalla puolella. Tapaus, jossa ne ovat eri puolilla kehää, ei ole lainkaan mielenkiintoinen, sillä nopein reitti on suora reitti pisteestä A pisteeseen B , kuten kuvasta 31 voidaan nähdä.



Kuva 31: Lyhin reitti AB , kun pisteet ovat kehän eri puolilla.

5.1 Pisteet ympyrän sisällä

Seuraavan alaluvun käsittelyssä on käytetty lähdeä [5]. Olkoon ω ympyrä, jonka keskipiste on origo O ja säde on r , eli $\omega = \omega(O, r)$. Olkoon piste $C(x, y)$ ympyrän ω kehällä eli $C \in \omega$. Pisteet $A(a, b)$ ja $B(c, d)$ ovat ympyrän ω sisäpuolella. Todistetaan ensin seuraava trigonometrinen aputuloks, jota käytetään varsinaisen ongelman ratkaisemisessa.

Lemma 5.1. $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$.

Todistus.

$$\begin{aligned} \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} & | \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)} \\ &= \frac{\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} - \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} + \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} \\ &= \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}{1 + \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} \\ &= \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}. \end{aligned}$$

□

Lause 5.1. Piste $C(x, y) \in \omega(O, r)$ voidaan löytää muodostamalla tasakylkinen kolmio pisteiden $A(a, b)$ ja $B(c, d)$ avulla ja jonka kärkipisteet ovat kehällä (myös haluttu piste C).

Todistus. Olkoot kulmat α , β ja γ suorien CA , CB sekä CO ja x -akselin kanssa muodostamat kulmat, kuten kuvassa 32. Lauseen 2.2 nojalla kulmat $\angle ACO$ ja $\angle OCB$ ovat yhtä suuret, merkitään $\angle ACO = \angle OCB = \theta$. Kolmion kulmien summa on 180° , näin ollen

$$180^\circ = \theta + (180^\circ - \beta) + \gamma,$$

eli

$$180^\circ = \theta + 180^\circ - \beta + \gamma,$$

ja näin ollen

$$\theta = \beta - \gamma.$$

Samalla periaatteella myös toiselle kolmiolle,

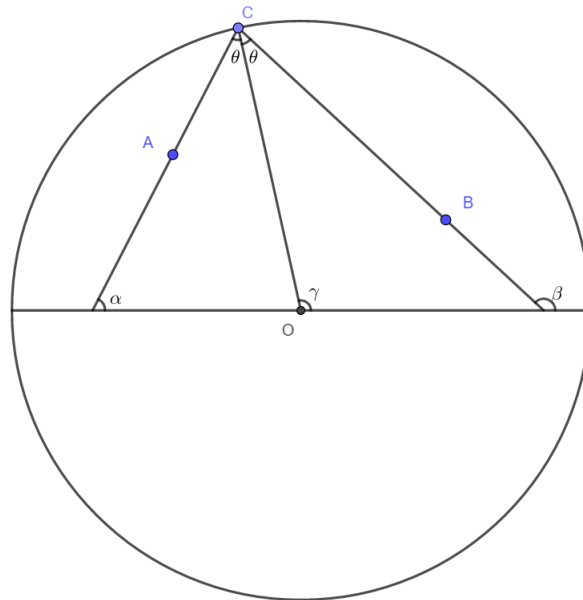
$$180^\circ = \theta + \alpha + (180^\circ - \gamma),$$

eli

$$180^\circ = \theta + \alpha + 180^\circ - \gamma,$$

jolloin

$$\theta = \gamma - \alpha.$$



Kuva 32: Kulmat α , β ja γ .

Ottamalla tangentit molemmista saadaan

$$\tan(\theta) = \tan(\beta - \gamma) \quad \text{ja} \quad \tan(\theta) = \tan(\gamma - \alpha),$$

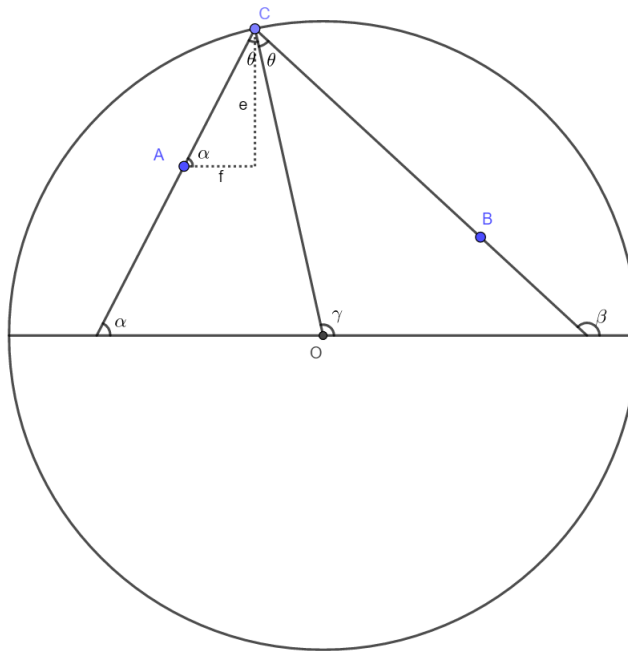
ja käyttämällä ensimmäistä aputulosta, saadaan

$$\tan(\theta) = \tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\gamma)}{1 + \tan(\beta) \cdot \tan(\gamma)} \quad (1)$$

ja vastaavasti myös

$$\tan(\theta) = \tan(\gamma - \alpha) = \frac{\tan(\gamma) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\gamma) \cdot \tan(\alpha)}. \quad (2)$$

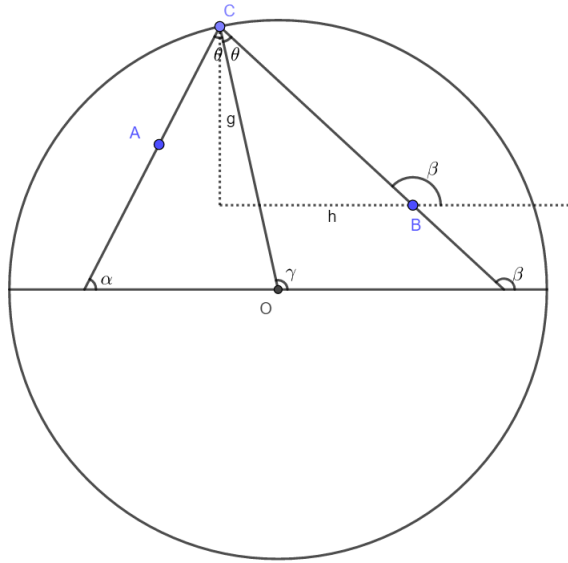
Seuraavaksi on selvitettävä $\tan(\alpha)$, $\tan(\beta)$ ja $\tan(\gamma)$. Tehdään tämä kuvien 33-35 avulla. Pisteet ovat $A(a, b)$, $B(c, d)$ ja $C(x, y)$.



Kuva 33: Havainnollistus kulman α tangentin ratkaisemisesta.

Kuvasta 33 saadaan

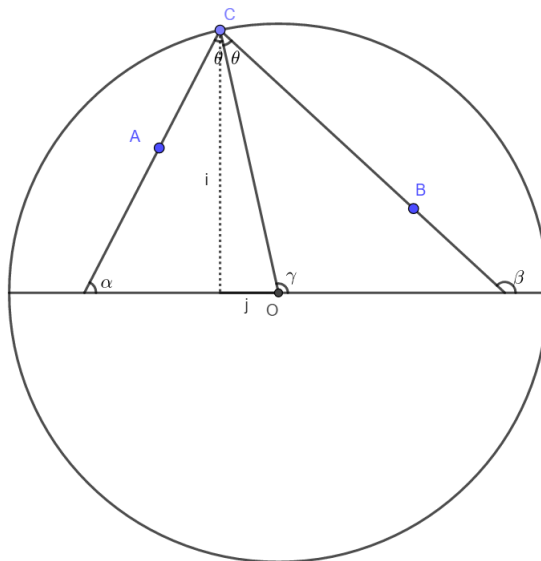
$$\tan(\alpha) = \frac{e}{f} = \frac{y - b}{x - a}. \quad (3)$$



Kuva 34: Havainnollistus kulman β tangentin ratkaisemisesta.

Kuvasta 34 saadaan

$$\tan(\beta) = \frac{g}{h} = \frac{y-d}{x-c}. \quad (4)$$



Kuva 35: Havainnollistus kulman γ tangentin ratkaisemisesta.

Kuvasta 35 saadaan

$$\tan(\gamma) = \frac{i}{j} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x}. \quad (5)$$

Merkitaan nyt yhtälöt (1) ja (2) yhtä suuriksi

$$\frac{\tan(\beta) - \tan(\gamma)}{1 + \tan(\beta) \cdot \tan(\gamma)} = \frac{\tan(\gamma) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\gamma) \cdot \tan(\alpha)}$$

ja sijoitetaan saatuun yhtälöön suhteet (3),(4) ja (5), eli

$$\frac{\frac{y-d}{x-c} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y-d}{x-c} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{\frac{y}{x} - \frac{y-b}{x-a}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{y-b}{x-a}}.$$

Lavennetaan samannimisiksi, jolloin saadaan

$$\frac{\frac{x(y-d)-y(x-c)}{x(x-c)}}{\frac{x(x-c)+y(y-d)}{x(x-c)}} = \frac{\frac{y(x-a)-x(y-b)}{x(x-a)}}{\frac{x(x-a)+y(y-b)}{x(x-a)}},$$

eli

$$\frac{(x(y-d) - y(x-c)) \cdot \cancel{(x(x-c))}}{(x(x-c) + y(y-d)) \cdot \cancel{(x(x-c))}} = \frac{(y(x-a) - x(y-b)) \cdot \cancel{(x(x-a))}}{(x(x-a) + y(y-b)) \cdot \cancel{(x(x-a))}}.$$

Kerrotaan sulkulausekkeet auki

$$\frac{xy - xd - yx + yc}{x^2 - xc + y^2 - yd} = \frac{yx - ya - xy + xb}{x^2 - xa + y^2 - yb},$$

ja lopuksi kerrotaan vielä ristiin

$$(yc - xd)(x^2 - xa + y^2 - yb) = (xb - ya)(x^2 - xc + y^2 - yd).$$

Vasen puoli on

$$ycx^2 - x^3d - yxca + x^2ad + y^3c - y^2xd - y^2cb + xydb$$

ja oikea puoli, kun siirretään yhtäsuuruusmerkin toiselle puolelle

$$-x^3b + x^2cb - xy^2b + xybd + yx^2a - yaxc + y^3a + y^2ad.$$

Ottamalla yksittäiset vakiot ja näiden tulot yhteisiksi tekijöiksi, saadaan

$$0 = a(yx^2 + y^3) + c(yx^2 + y^3) + b(-xy^2 - x^3) + d(-x^3 - y^2x) \\ + ca(-xy - xy) + db(xy + xy) + ad(x^2 - y^2) + cb(-y^2 + x^2).$$

Jatkamalla sieventämistä ja ryhmittelyä saadaan

$$0 = ay(x^2 + y^2) + cy(x^2 + y^2) - bx(x^2 + y^2) - dx(x^2 + y^2) \\ - 2xyca + 2xydb + ad(x^2 - y^2) + cb(x^2 - y^2) \\ = (ay + cy - bx - dx)(x^2 + y^2) + 2xy(db - ca) + (ad + cb)(x^2 - y^2) \\ = ((a + c)y - (b + d)x)(x^2 + y^2) + 2xy(db - ca) + (ad + cb)(x^2 - y^2). \quad (6)$$

Saatetaan yhtälö (6) yksinkertaisempaan muotoon merkkäämällä

$$P = ad + cb, Q = db - ca, R = a + c \text{ ja } S = b + d,$$

$$P(x^2 - y^2) + 2Qxy + (Ry - Sx)(x^2 + y^2) = 0. \quad (7)$$

Kyseessä on hyperbelin yhtälö. Nyt on etsittävä yhtälön (7) ja ympyrän $x^2 + y^2 = r^2$ leikkauspisteet, joita voi olla korkeintaan neljä. Tämä tehdään sijoittamalla ympyrän yhtälö yhtälöön (7)

$$P(x^2 - y^2) + 2Qxy + (Ry - Sx)r^2 = 0. \quad (8)$$

Eli kun pisteiden A ja B koordinaatit sekä ympyrän säde r ovat tiedossa, voi yhtälöstä (8) ratkaista pisteet $C = (x, y)$, jotka ovat ympyrän $\omega = (O, r)$ kehällä. Näistä sitten valitaan se, jonka kautta on lyhin etäisyys. \square

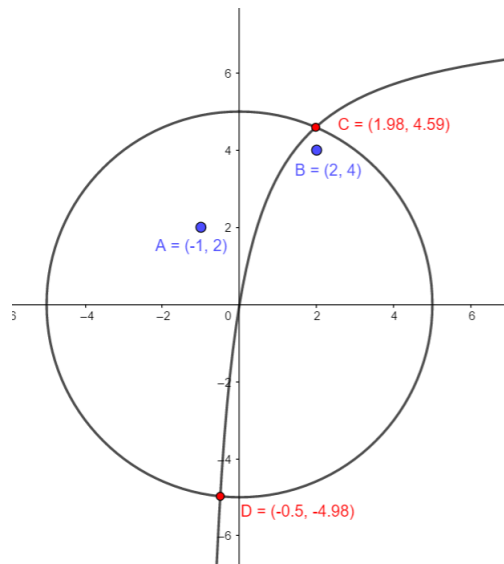
Esimerkki Olkoot pisteet $A(-1, 2)$ ja $B = (2, 4)$ sekä ympyrän säde $r = 5$ eli ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = 5^2$. Siis $a = -1$, $b = 2$, $c = 2$ ja $d = 4$, joten $P = 0$, $Q = 10$, $R = 1$ ja $S = 6$. Tällöin yhtälö (8) tulee muotoon

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot (x^2 - y^2) + 2 \cdot 10 \cdot xy + 25(1 \cdot y - 6 \cdot x) \\ &= 20xy + 25(y - 6x) \\ &= 20xy + 25y - 150x. \end{aligned}$$

Halutun kehäpisteen koordinaatit (x, y) saadaan ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 20xy + 25y - 150x = 0, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

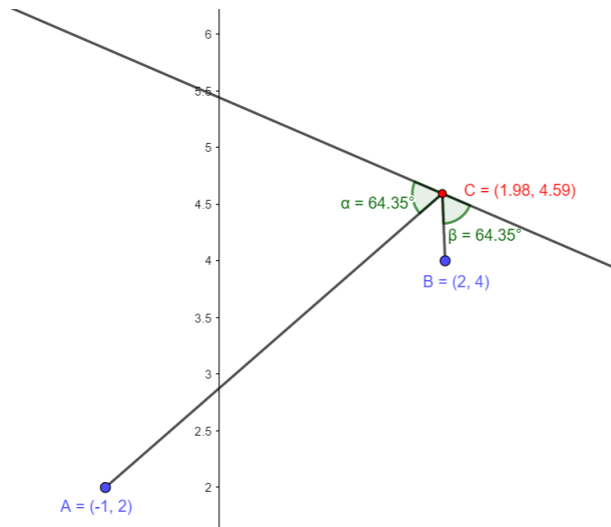
Tämä voidaan tehdä esimerkiksi GeoGebralla (kuva 37). Yhtälöryhmän ratkaisut ovat $C(1,98; 4,59)$ ja $D(-0,5; -4,98)$. Selvästi reitti ACB on lyhyempi kuin ADB , joten se on lyhin mahdollinen reitti pisteestä A pisteeseen B , kun reitin on kuljettava kehäpisteen kautta.



Kuva 36: Pisteet A ja B sekä esimerkin yhtälöryhmän ratkaisut C ja D .

Piirretään ympyrälle tangentti pisteen $C(1,98; 4,59)$ kohdalle ja tarkastellaan reittiä ACB . Huomataan, että muodostuneet kulmat α ja β (tulo- ja heijastuskulma

vastaavasti) ovat yhtä suuret. Tällöin Heronin periaatteen nojalla kehäpisteellä C saadaan tosiaan lyhin reitti (kuva 37).



Kuva 37: Pisteiden C tangenti sekä tulo- ja heijastuskulma α ja β .

5.2 Pisteet ympyrän ulkopuolella

Tässä luvussa tarkastellaan tilannetta, jossa molemmat pisteet A ja B ovat ympyrän ω ulkopuolella. Lähteenä on käytetty artikkelia [6]. Tässä tapauksessa ympyrä ω on origokeskeinen, eli $\omega = \omega(O, l)$. Tarkastelu tapahtuu kulmien avulla, minkä takia tarkastelussa on kompleksiavaruus \mathbb{C} mukana. Koska kyse on kulmista, voidaan muokata ongelmaa seuraavaan muotoon:

Lause 5.2. *Olkoot pisteet A ja B kompleksisia pisteitä ympyrän ω ulkopuolelta. Ympyrän ω kehällä on olemassa piste C , jota kautta kulkeva halkaisija puolittaa kulman $\angle ACB$.*

Pisteet voidaan kirjoittaa muotoon $A = x_1 + y_1i = a$, $B = x_2 + y_2i = b$ ja $C = x + yi = c$. Kahden pisteen välistä kulmaa kompleksisella tasolla voidaan ilmaista argumentilla. Tavoitteena on selvittää sellainen piste c ympyrän ω kehältä, jolle pätee $\angle acO = \angle Ocb$, eli

$$\arg\left(\frac{a-c}{O-c}\right) = \arg\left(\frac{O-c}{b-c}\right),$$

mikä on ekvivalenttisesti

$$\arg\left(\frac{a-c}{-c}\right) = \arg\left(\frac{-c}{b-c}\right).$$

Koska $\frac{a-c}{-c} = \frac{-(c-a)}{-c} = \frac{c-a}{c}$ ja $\frac{-c}{b-c} = \frac{-c}{-(c-b)} = \frac{c}{c-b}$, niin

$$\arg\left(\frac{c-a}{c}\right) = \arg\left(\frac{c}{c-b}\right),$$

mistä saadaan

$$\arg\left(\frac{c-a}{c}\right) - \arg\left(\frac{c}{c-b}\right) = 0.$$

Lauseen 2.4(ii) mukaan $\arg(x) - \arg(y) = \arg\left(\frac{x}{y}\right)$, jolloin saadaan

$$\arg\left(\frac{\frac{c-a}{c}}{\frac{c}{c-b}}\right) = 0,$$

eli

$$\arg\left(\frac{c-a}{c} \cdot \frac{c-b}{c}\right) = 0. \quad (9)$$

Yhtälö (9) voidaan tulkita niin, että $\left(\frac{c-a}{c} \cdot \frac{c-b}{c}\right)$ on reaaliluku, koska sen argumentti on 0. Tällöin myös sen konjugaatti on reaaliluku, eli ne ovat yhtä suuret. Jolloin

$$\left(\frac{c-a}{c} \cdot \frac{c-b}{c}\right) = \overline{\left(\frac{c-a}{c} \cdot \frac{c-b}{c}\right)},$$

eli

$$\frac{c-a}{c} \cdot \frac{c-b}{c} = \frac{\overline{c-a}}{\bar{c}} \cdot \frac{\overline{c-b}}{\bar{c}},$$

mikä on ekvivalentisti

$$\frac{c^2 - cb - ac + ab}{c^2} = \frac{\overline{c^2 - cb - ac + ab}}{\bar{c}^2}.$$

Kertomalla ristiin saadaan

$$(c^2 - cb - ac + ab)\bar{c}^2 = \overline{(c^2 - cb - ac + ab)}c^2$$

ja vielä kertomalla sulkeet auki saadaan

$$c^2\bar{c}^2 - cb\bar{c}^2 - ac\bar{c}^2 + ab\bar{c}^2 = \bar{c}^2c^2 - \overline{cb}c^2 - \overline{ac}c^2 + \overline{ab}c^2.$$

Lauseen 2.3(ii) nojalla $c\bar{c} = |c|^2 = l^2$, eli

$$l^4 - bl^2\bar{c} - al^2\bar{c} + ab\bar{c}^2 = l^4 - \bar{b}l^2c - \bar{a}l^2c + \overline{ab}c^2.$$

Tällöin supistamalla termit l^4 kummaltakin puolelta, järjestelemällä termit ja ottamalla $(a+b)$ ja $(\overline{a+b})$ yhteisiksi tekijöiksi, saadaan

$$-(a+b)l^2\bar{c} + ab\bar{c}^2 = -(\overline{a+b})l^2c + \overline{ab}c^2,$$

ja jälleen uudelleenjärjestelemällä päädytään muotoon

$$ab\bar{c}^2 - \overline{ab}c^2 = (a+b)l^2\bar{c} - (\overline{a+b})l^2c. \quad (10)$$

Olkoot nyt $Re(ab) = p$, $Im(ab) = q$, $Re(a + b) = r$ ja $Im(a + b) = s$ ja edelleen $c = x + yi$. Näin ollen yhtälö (10) tulee muotoon

$$(p + qi)(x - yi)^2 - (p - qi)(x + yi)^2 = (r + si)(x - yi)l^2 - (r - si)(x + yi)l^2. \quad (11)$$

Jatketaan sieventämällä ensin yhtälön (11) vasen puoli

$$\begin{aligned} & (p + qi)(x - yi)^2 - (p - qi)(x + yi)^2 \\ = & (p + qi)(x^2 - 2xyi + y^2i^2) - (p - qi)(x^2 + 2xyi + y^2i^2) \\ = & (p + qi)(x^2 - 2xyi + y^2i^2) - (p - qi)(x^2 + 2xyi + y^2i^2) \\ = & px^2 - 2pxyi + py^2i^2 + qix^2 - 2qxyi^2 + qy^2i^3 - (px^2 + 2pxyi + py^2i^2 - qix^2 - 2qxyi^2 - qy^2i^3) \\ = & px^2 - 2pxyi + py^2i^2 + qix^2 - 2qxyi^2 + qy^2i^3 - px^2 - 2pxyi - py^2i^2 + qix^2 + 2qxyi^2 + qy^2i^3 \\ = & \cancel{px^2} - 2pxyi + \cancel{py^2i^2} + qix^2 - \cancel{2qxyi^2} + qy^2i^3 - \cancel{px^2} - 2pxyi - \cancel{py^2i^2} + qix^2 + \cancel{2qxyi^2} + qy^2i^3 \\ = & -2pxyi + qix^2 + qy^2i^3 - 2pxyi + qix^2 + qy^2i^3 \\ = & -4pxyi + 2qix^2 + 2qy^2i^3 \quad |i^2 = -1 \\ = & -4pxyi + 2qix^2 - 2qy^2i \end{aligned}$$

ja vielä oikea puoli

$$\begin{aligned} & (r + si)(x - yi)l^2 - (r - si)(x + yi)l^2 \\ = & (rx - ryi + six - syi^2 - (rx + ryi - six - syi^2))l^2 \\ = & (rx - ryi + six - syi^2 - rx - ryi + six + syi^2)l^2 \\ = & (\cancel{rx} - ryi + six - \cancel{syi^2} - \cancel{rx} - ryi + six + \cancel{syi^2})l^2 \\ = & (2six - 2ryi)l^2 \\ = & 2sixl^2 - 2ryil^2 \end{aligned}$$

Saadaan yhtälö

$$2qix^2 - 4pxyi - 2qy^2i = 2sixl^2 - 2ryil^2.$$

Jatketaan sieventämistä jakamalla termillä $2i$, jolloin saadaan

$$qx^2 - 2pxy - qy^2 = sxl^2 - ryl^2,$$

eli

$$q(x^2 - y^2) - 2pxy = l^2(sx - ry).$$

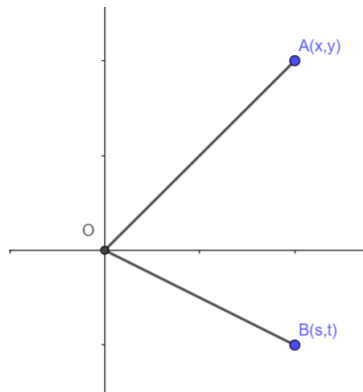
Halutun pisteen $C(x, y)$ koordinaatit saadaan siis ratkaistua yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - l^2 = 0 \\ q(x^2 - y^2) - 2pxy - l^2(sx - ry) = 0. \end{cases}$$

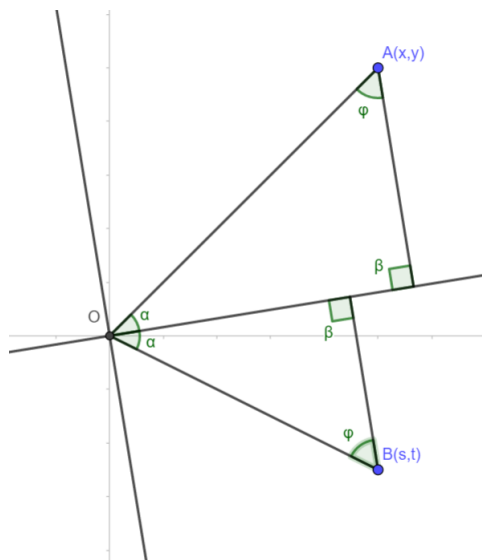
Yhtälö (12) on mahdollista saattaa vielä yksinkertaisempaan muotoon kiertämällä koordinaatistoa origon suhteen. Olkoot $A(x, y)$ ja $B(s, t)$ pisteitä kompleksisessä koordinaatistossa (kuva 38). Kierretään koordinaatistoa niin, että x -akseli puolittaa

kulman $\angle BOA$, jossa O on origo. Tällöin x -akselin ja janan OB välinen kulma on yhtä suuri kuin x -akselin ja janan OA välinen kulma. Kun pisteistä A ja B muodostetaan normaalit x -akselille, saadaan molemmille suora kulma. Tällöin molemmat muodostuneet kolmiot (kuva 39) ovat kolmen yhtä suuren kulman nojalla yhdenmuotoiset.

Yhdenmuotoisuutta hyödyntäen saadaan jana OB kertomalla jana OA jollakin vakiolla $k > 0$. Koska pisteet ovat kompleksisella tasolla ja piste B on koordinaatiston kiertämisen jälkeen välttämättä x -akselin alapuolella (yleisesti ottaen eri puolella kuin piste A), on jana OB janan $O\bar{A}$ (origon ja pisteen A konjugaatin \bar{A} välisen janan) suuntainen. Lopputuloksena saadaan $B = k\bar{A}$.



Kuva 38: Pisteet A ja B sekä janat OA ja OB .



Kuva 39: Kierretty koordinaatisto ja yhtenevät kolmiot.

Yhtälön (12) olevasta kertoimesta $q = \operatorname{Im}(ab)$ saadaan nyt koordinaatiston kiertämisen jälkeen

$$\begin{aligned} ab &= a \cdot k\bar{a} \\ &= k \cdot a\bar{a} \\ &= k \cdot (x_1 + y_1i)(x_1 - y_1i) \\ &= k(x_1^2 - x_1y_1i + x_1y_1i - y_1^2i^2) \\ &= k(x_1^2 + y_1^2), \end{aligned}$$

joten $\operatorname{Im}(ab) = 0$. Näin olleen yhtälö (12) tulee muotoon

$$-2pxy = l^2(sx - ry),$$

eli

$$2pxy + l^2(sx - ry) = 0$$

Ratkaistavan kehäpisteen $C(x, y)$ koordinaatit ovat siis yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - l^2 = 0 \\ 2pxy + l^2(sx - ry) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

ratkaisu. Yhtälöryhmällä on neljä mahdollista ratkaisua, joista yhden muodostavat halutun pisteen C koordinaatit.

Esimerkki. Olkoot pisteet $A(2, 1)$ ja $B(1, -\frac{1}{2})$ pisteitä kompleksisessä koordinaatistossa. Etsitään piste $C(x, y)$ origokeskeisen yksikköympyrän ($l^2 = 1$) kehältä, jolle reitti ACB on lyhin. Pisteiden koordinaateista huomataan, että pisteen B koordinaatit saadaan kertomalla pisteen A konjugaatin koordinaatit luvulla $\frac{1}{2}$, eli $B = \frac{1}{2}\bar{A}$. Näin ollen $q = \operatorname{Im}(AB) = 0$ ja voidaan käyttää yhtälöä (14).

Ratkaistaan ensin arvot p, r ja s ,

$$\begin{aligned} AB &= (2 + i)(1 - \frac{1}{2}i) \\ &= 2 - i + i - \frac{1}{2}i^2 \\ &= 2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} A + B &= (2 + i) + (1 - \frac{1}{2}i) \\ &= 2 + 1 + i - \frac{1}{2}i \\ &= 3 + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

eli $p = \operatorname{Re}(AB) = \frac{5}{2}$, $r = \operatorname{Re}(A + B) = 3$ ja $s = \operatorname{Im}(A + B) = \frac{1}{2}$. Sijoitetaan arvot yhtälöön (13), $2pxy + l^2(sx - ry) = 0$, jolloin saadaan

$$2 \cdot \frac{5}{2}xy + \frac{1}{2}x - 3y = 0,$$

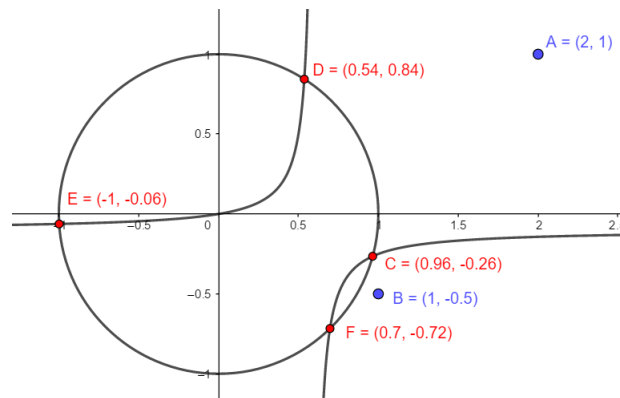
eli

$$5xy + \frac{1}{2}x - 3y = 0.$$

Koska ympyrä on yksikköympyrä, on säde $l = 1$ ja ympyrän funktio muotoa $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Ratkaistaan siis yhtälöryhmä

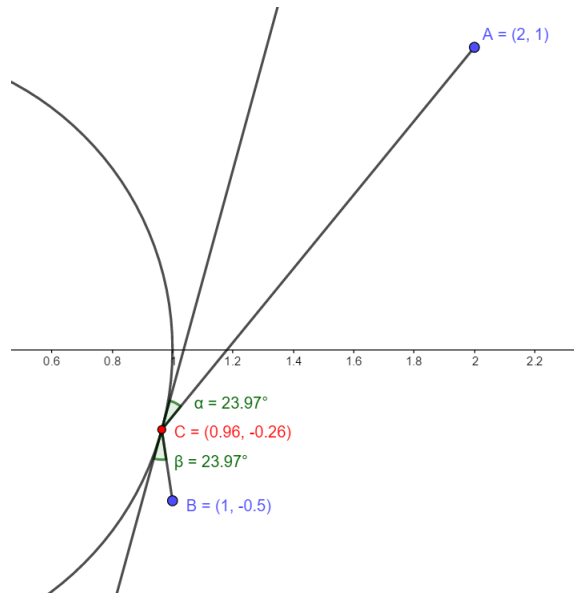
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 5xy + \frac{1}{2}x - 3y = 0. \end{cases}$$

Tämän voi tehdä esimerkiksi GeoGebralla (kuva 40). Yhtälöryhmän ratkaisut ovat $(0,96; -0,26)$, $(0,54; 0,84)$, $(-1; -0,06)$ ja $(0,7; -0,72)$, joista ensimmäinen on pisteiden A ja B sijaintien kannalta ainut toimiva.



Kuva 40: Yhtälöryhmän ratkaisut C, D, E ja F .

Tarkistetaan ratkaisu piirtämällä tangentti pisteelle $C(0,96; -0,26)$. Kuvasta 40 nähdään, että tulokulma α ja heijastuskulma β ovat yhtä suuret, joten Heronin periaatteen nojalla tämä on lyhin reitti.



Kuva 41: Ympyrän tangenti pisteelle C sekä tulo- ja heijastuskulma α ja β .

6 Yhteenveto

Tutkielmassa on käsitelty menetelmiä, joilla voidaan ratkaista tietyillä ehdoilla varustetut lyhimmän reitin ongelmat. Yksinkertaisissa ongelmissa reitillä on homogeeninen alusta ja sen on kuljettava suoran kautta. Tämänäyttöisissä ongelmissa voidaan käyttää Heronin menetelmää, missä käytetään hyödyksi kolmioiden geometriaa. Käytännön esimerkki tällaisesta ongelmasta on minigolf-radalla lyhimmän reitin selvittäminen, ks. luku 3.

Haastavampia ongelmia ovat ne, joissa alusta muuttuu reitin aikana tai reitti ei kulje suoran vaan kaarevan alustan kautta. Alustan vaihtuessa reitin aikana ja eri alustan ollessa neliönmuotoinen, voidaan geometrisella tarkastelulla selvittää niin sanotut sisäänmeno- ja ulostuloreunat. Tämän jälkeen voidaan laskennallisesti ratkaista tarkat sisäämeno- ja ulostulopisteet.

Kun kaareva alusta on ympyrä, jakautuu ongelma kahteen tapaukseen, missä alku- ja loppupiste ovat ympyrän kehän sisä- tai ulkopuolella. Tapaus, jossa ne ovat sisällä, voidaan ratkaista lyhin reitti muodostamalla niiden kautta kulkeva tasakylkinen kolmio ympyrän sisälle siten, että sen kärjet ovat ympyrän kehällä. Kun ne ovat ulkopuolella, saadaan lyhin reitti sijoittamalla tapaus kompleksiseen koordinaatistoon ja sitä kautta käyttämällä lukujen argumentteja hyödyksi.

Molempia tapauksia varten on johdettu yhtälöt, joiden avulla voidaan ratkaista haluttu kehäpiste, jolla saadaan lyhin reitti. On selvää, että ilman laskentaohjelmaa, kuten tutkielmassa käytetty GeoGebra, on yhtälöiden ratkaiseminen hankalaa.

Viitteet

- [1] T. Harju. *Geometria*. Turun yliopisto, 2016.
- [2] T. Kilpeläinen. *Kompleksianalyysi*. Jyväskylän yliopisto, 2005.
- [3] A. Golovanov. *Shortest Path Theory*. <https://brilliant.org/wiki/shortest-path-theory/>. [30.03.2020]
- [4] K. Bell, S. Polson, and T. Richmond. *The Fastest Path Between Two Points, with a Symmetric Obstacle*. The College Mathematics Journal, Volume 46, Issue 2:92-97, 2015.
- [5] M. Woltermann. *Alhazen's Billiard Problems*, 2010. <http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/41.pdf>. [30.03.2020]
- [6] T. Hull and T. Damour. *Origami³: Third International Meeting of Origami Science, Math, and Education*. CRC Press LLC, pages 88-90, 2002.