

# Unruh-ilmio

Pro Gradu  
Turun yliopisto  
Teoreettinen fysiikka  
2020  
LuK Justus Anttila  
Tarkastajat:  
Dosentti Iiro Vilja  
FM Juho Lankinen

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO

Fysiikan laitos

Anttila, Justus Unruh-ilmiö

Pro Gradu, 56 s.

Teoreettinen fysiikka

Heinäkuu 2020

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin Originality Check -järjestelmällä.

---

Unruh-ilmiössä tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä oleva havaitsija kokee näkevänsä kiihtyvyyteen verrannollista mustan kappaleen säteilyä, vaikka se matkaisi avaruudessa, jonka inertiaalinen havaitsija tulkitsee tyhjiöksi. Vaikka ilmiö on nimetty Unruh'n mukaan, hän ei ollut ensimmäinen, joka teorisoi ilmiön, mutta ensimmäinen, joka antoi sille fysikaalisen merkityksen.

Ilmiön ymmärtäminen vaatii pohjatietoa kvanttikenttäteoriasta sekä tasaisissa että kaarevissa avaruuksissa. Tämä siksi, koska kiihtyvä liike voidaan kuvata inertiaalisena liikkeenä kaarevan avaruuden pintaa pitkin. Unruh ilmiö voidaan johtaa kahdella eri tavalla, mutta vaikka lopputulos on sama, on toinen tapa luotettavampi, joskin pidempi.

Ilmiötä ei ole vielä kukaan mitattu kokeellisesti, sillä sen havaitseminen vaatii hyvin suuria kiihtyvyyksiä ja tarkkoja mittalaitteita, mutta tulevaisuudessa se voi olla mahdollista. Tosin Unruh-ilmiö ei ole teorian yksityiskohtien kannaltakaan täysin selvä ja osa sen ominaisuuksista on edelleen väiteltäviä. Ilmiön todellisuus itsessäänkin on kyseenalaistettu, mutta konsensus on ilmiön olemassaolon puolella.

# Sisältö

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Johdanto</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 Kvanttikenttäteoria Minkowskin avaruudessa</b>      | <b>4</b>  |
| 1.1 Skalaarikenttä . . . . .                             | 4         |
| 1.2 Skalaarikentän kvantisointi . . . . .                | 7         |
| 1.3 Energiaimpulssitensori . . . . .                     | 10        |
| 1.4 Vakuumienergian divergenssi . . . . .                | 14        |
| 1.5 Greenin funktiot . . . . .                           | 15        |
| <b>2 Kvanttikenttäteoria kaarevassa aika-avaruudessa</b> | <b>20</b> |
| 2.1 Aika-avaruuden rakenne . . . . .                     | 20        |
| 2.2 Skalaarikentän kvantisointi . . . . .                | 24        |
| 2.3 Liikkuva hiukkasilmaisin . . . . .                   | 29        |
| <b>3 Unruh-ilmio</b>                                     | <b>35</b> |
| 3.1 Tasaisesti kiihtyvä hiukkasilmaisin . . . . .        | 35        |
| 3.2 Rindlerin koordinaatisto . . . . .                   | 38        |
| 3.3 Rindlerin hiukkasten fysikaalinen merkitys . . . . . | 47        |
| <b>4 Unruh-ilmion kokeellinen todistaminen</b>           | <b>52</b> |
| <b>5 Yhteenveto</b>                                      | <b>54</b> |
| <b>Viitteet</b>  | <b>55</b> |

## Johdanto

Fulling totesi artikkelissaan vuonna 1973 [1], että kun ollaan kiihtyvän kappaleen koordinaatistossa, eli niin sanotussa Rindlerin koordinaatistossa [2], niin hiukkasen tulkinta poikkeaa standardista vapaan kentän mallista. Davies lähti jatkamaan tätä ideaa vuoden 1975 artikkelissaan [3], verraten sitä Hawkingin teorisoiimaan mustien aukkojen säteilyyn [4], mutta vain tasaisessa aika-avaruudessa. Tulokseksi hän sai, että kiihtyvä havaitsija kokee olevansa lämpökylvyssä. Kuitenkin vasta Unruh pystyi laajentamaan teorian koskemaan koko avaruutta ja siten antamaan tälle säteilylle fysikaalisen merkityksen artikkelissaan vuodelta 1976 [5]. Vielä tähän vahvistuksena DeWitt esitti vaihtoehdoisen ja luotettavamman johtotavan vuonna 1979 [6], tukeutuen koordinaatiston sijaan Greenin funktioihin. Ilmiötä, jossa kiihtyvä havaitsija kokee olevansa lämpökylvyssä, onkin kutsuttu myös Unruh-Davies-DeWitt-Fulling-ilmioksi, mutta yleisemmin se tunnetaan Unruh-ilmionä (Unruh effect).

Tässä työssä seurataan vahvasti Birellin ja Daviesin kirjaa [7], keskittyen Unruh-ilmioille olennaisiin käsitteisiin. Johtoja ja laskuja on laajennettu ja selkeytetty. Alussa käytäviä pohjatietoja vaaditaan juurikin edellä mainittuun täsmällisempään DeWittin esittelemään johtotapaan. Rindlerin koordinaatistoon perustuva johto esitetään tämän jälkeen.

Ensimmäisessä kappaleessa liikutaan tasaisessa aika-avaruudessa ja lähdetään liikkeelle skalaarikentän Lagrangen yhtälöstä. Lukijan oletetaan olevan tuttu käsitteen kanssa. Siitä johdetaan aluksi kenttäyhtälö ja sen ratkaisevat moodit. Tämän jälkeen siirrytään skalaarikentän kvantisointiin ja määritellään muunmuassa luomis- ja hävitysoperaattorit. Sitten tutkitaan energiaimpulssitensorin ominaisuuksia, jotta saadaan enemmän tietoa kentästä. Lopuksi vielä käsitellään Greenin funktiot, jotka auttavat tyhjiön kuvaamisessa.

Toisessa kappaleessa siirrytään tarkastelemaan kaarevia aika-avaruuksia. Vaikka Unruh-ilmio on tasaisen aika-avaruuden ilmiö, niin sen johtamiseen hyödynnetään

kaarevan avaruuden tuloksia. Tämä siksi koska kiihtyvä liike voidaan kuvata inertiaaliseksi liikkeeksi kaarevan avaruuden pintaa pitkin. Aluksi määritellään avaruuden metriikka ja puhutaan hieman Penrosen diagrammeista. Seuraavaksi suoritetaan uudelleen skalaarikentän kvantisointi, mutta tällä kertaa kaarevassa avaruudessa. Lopuksi tutkitaan yleisellä tasolla, miten hiukkasilmaisoin käyttäytyy, kun se liikkuu avaruudessa.

Kolmannessa kappaleessa siirrytään vihdoin itse Unruh-ilmion pariin. Edellisessä kappaleessa tutkitulle hiukkasilmaisimelle asetetaan tasaisesti kiihtyvä rata ja ratkaistaan se. Tällöin saadaan tulokseksi, että tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä oleva havaitsija kokee olevansa lämpökylvyssä, vaikka liikkuu inertiaalisen havaitsijan tulkinnan mukaan tyhjiössä. Tämän jälkeen johdetaan sama tulos, mutta käyttäen Rindlerin koordinaatistoa. Lopuksi käsitellään eri lähteiden tulkintoja Unruh-ilmion seurauksista, merkityksestä ja paikkansapitävyydestä.

Neljännessä kappaleessa syvennytään yrityksiin mitata Unruh-ilmiota kokeellisesti. Ilmiötä ei ole vielä kukaan saatu mitattua luotettavasti, vaikka yrityksiä on ollut monia. Tämä johtuu lähinnä ilmiön heikkoudesta. Tutkijat odottavat mittauslaitteiden kehittymistä, jotta voitaisiin saavuttaa tarvittavat kiihtyvyydet ja tarpeeksi tarkat mittaukset.

Viimeisestä kappaleesta löytyy vielä täsmällisempi yhteenveto kaikesta käsitellystä ja oma tulkintani ilmiöstä.

Käytetään Minkowskin avaruuden metriikalle signatuuria  $(+ - - -)$  ja käytetään yksiköitä  $\hbar = c = G = 1$ . Seuraavia merkintöjä käytetään paljon:

|  |                          |
|--|--------------------------|
| *  | kompleksikonjugaatti     |
| $\dagger$ , h.c.                                   | hermiittinen konjugaatti |
| $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ , $\partial_\mu$ | osittaisderivaatta       |
| $\nabla_\mu$                                       | kovariantti derivaatta   |
| ln   | luonnollinen logaritmi   |
| $[A, B]$   | $AB - BA$                |
| $\equiv$   | määritelty yhtä suureksi |
| $\approx$  | likimäärin yhtä suuri    |
| $::$   | normaalijärjestys        |

# 1 Kvanttikenttäteoria Minkowskin avaruudessa

Minkowskin avaruus on neliulotteinen monisto, jossa on kolmiulotteisen euklidisen avaruuden lisäksi myös aika yhtenä ulottuvuutena. Minkowskin avaruus on tasainen aika-avaruus ja sen yleistys on kaareva aika-avaruus. Päästäksemme kaarevan aika-avaruuden kvanttikenttäteoriaan, on helpompaa lähteä liikkeelle tasaisen aika-avaruuden kvantisoinnista.

## 1.1 Skalaarikenttä

Kvanttikenttäteoria toimii skalaarikentän lisäksi myös korkeampien spinien kentille, mutta Unruh-ilmiön tapauksessa riittää käsitellä aihetta vain skalaarikentän kannalta. Korkeampien spinien kanssa johdot ovat pohjimmiltaan samanlaisia, mutta tietenkin monimutkaisempia.

Käsitellään vapaata kenttää ja siitä yhden komponentin reaalista  $n$ -ulotteista skalaarikenttää  $\phi(x)$ , jolla on massa  $m$ . Sen Lagrangen yhtälö on muotoa

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (1.1)$$

Lagrangen yhtälön  $\mathcal{L}$  on itseasiassa tiheysfunktio ja sen vaikutus  $S$  saadaan laskettua integroimalla yli koko avaruuden

$$S = \int \mathcal{L} d^n x. \quad (1.2)$$

Esitetyn Lagrangen yhtälön kenttäyhtälö voidaan laskea varioimalla kentän  $\phi$  suhteen ja vaatimalla, että  $\delta S = 0$ . Tämän varioinnin lopputuloksena saadaan tunnetusti Eulerin yhtälö

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} = 0. \quad (1.3)$$



Lasketaan sen komponentit ensin erikseen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -m^2 \phi, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi)} &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left[ \underbrace{\frac{\partial(\partial_\mu \phi)}{\partial(\partial_\alpha \phi)}}_{=\delta_\mu^\alpha} \partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \underbrace{\frac{\partial(\partial_\nu \phi)}{\partial(\partial_\alpha \phi)}}_{=\delta_\nu^\alpha} \right] \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\delta_\mu^\alpha \partial_\nu \phi + \delta_\nu^\alpha \partial_\mu \phi) \\
&= \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\nu} \partial_\nu \phi + \eta^{\mu\alpha} \partial_\mu \phi) \quad \left| \eta^{\mu\alpha} = \eta^{\alpha\mu} \right. \\
&= \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\mu} \partial_\mu \phi + \eta^{\alpha\mu} \partial_\mu \phi) = \eta^{\alpha\mu} \partial_\mu \phi.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (1.3) voidaan laskea lopullinen kenttäyhtälö

$$\begin{aligned}
-m^2 \phi - \partial_\alpha \eta^{\alpha\mu} \partial_\mu \phi &= 0 \\
(\square + m^2) \phi &= 0,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

jossa  $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$  on d'Alembertin operaattori. Tämä yhtälö tunnetaan myös nimellä Kleinin-Gordonin yhtälö.

Kentän  $\phi$  liike voidaan ajatella aaltoliikkeenä ja sen vuoksi yhtälö (1.5) voidaan ratkaista ominaismoodien avulla. Aaltoliike, joka kulkee aaltoluvun  $\mathbf{k}$  määräämään suuntaan taajuudella  $\omega$ , saa seuraavanlaisen ratkaisujoukon

$$u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}, \tag{1.6}$$

jossa

$$\omega \equiv (k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.7}$$

$$k \equiv |\mathbf{k}| = \left( \sum_{i=1}^{n-1} k_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.8}$$

ja aaltoluvun  $\mathbf{k}$  karteesiset komponentit voivat saada arvoja

$$-\infty < k_i < \infty, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Moodit (1.6) ovat selvästi operaattorin  $\partial/\partial t$  ominaisfunktioita, sillä

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = -i\omega u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}), \quad \text{jossa } \omega > 0. \quad (1.9)$$

Tällöin niillä sanotaan olevan positiivinen taajuus suhteessa aikaan  $t$ .

Jotta voidaan tarkastella kahden kentän suhdetta toisiinsa, pitää määritellä sitä kuvaava operaatio. Skalaaritulo antaa tulokseksi kahden kentän välisen kulman. Se määritellään seuraavanlaisesti

$$\begin{aligned} (\phi_1, \phi_2) &= -i \int_t [\phi_1 \partial_t \phi_2^* - (\partial_t \phi_1) \phi_2^*] d^{n-1}x \\ &= -i \int_t \phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_2^* d^{n-1}x, \end{aligned} \quad (1.10)$$

missä integraalin  $t$  viittaa avaruudenkaltaiseen samanaikaisuuden hypertasoon ajanhetkellä  $t$ . Tämän määritelmän nojalla  $u_{\mathbf{k}}$  moodit (1.6) ovat ortogonaalisia

$$\begin{aligned} (u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) &= -i \int [u_{\mathbf{k}} \partial_t u_{\mathbf{k}'}^* - (\partial_t u_{\mathbf{k}}) u_{\mathbf{k}'}^*] d^{n-1}x \\ &= -i \int [u_{\mathbf{k}}(i\omega t) u_{\mathbf{k}'}^* - (-i\omega t) u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}^*] d^{n-1}x \\ &= 2\omega \int u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}^* d^{n-1}x \\ &= 2\omega \int AA^* e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega - i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x} + i\omega} d^{n-1}x \\ &= 2\omega |A|^2 \int e^{i(k-k')\cdot\mathbf{x}} d^{n-1}x \\ &= 2\omega (2\pi)^{n-1} |A|^2 \delta^{n-1}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &= 0, \quad \text{kun } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}'. \end{aligned}$$

Tässä  $A$  on verrannollisuuskerroin. Valitsemalla  $A$  sopivasti, jolloin

$$u_{\mathbf{k}} = [2\omega(2\pi)^{n-1}]^{-\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}, \quad (1.11)$$

saadaan skalaaritulossa normalisoidut  $u_{\mathbf{k}}$  funktiot:

$$(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) = \delta^{n-1}(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Usein on kätevää rajoittaa ratkaisujoukkoa koko avaruudesta paikanluonteisen  $L$ -sivuisen  $(n-1)$ -toruksen sisäpuolelle, eli valitsemalla jaksolliset reunaehdot. Silloin

$$u_{\mathbf{k}} = (2L^{n-1}\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}, \quad (1.12)$$

jossa

$$k_i = \frac{2\pi j_i}{L}, \quad j_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (1.13)$$

Näin ollen

$$(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Seuraavaksi siirrymme jatkuvasta kuvauksesta diskreettiin laatikkonormalisaation.

Siinä jokainen  $k$ -integrointi korvaataan diskreetillä summalla eli

$$\begin{aligned} \int d^{n-1}k &= \int dk_1 \int dk_2 \dots \int dk_{n-1} \\ &= \sum_{k_1} \left( \sum_{k_2} \left( \dots \sum_{k_{n-1}} \right) \right) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} \sum_{k_i} = \left( \frac{2\pi}{L} \right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \sum_{j_i} \\ &\equiv \left( \frac{2\pi}{L} \right)^{n-1} \sum_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Nyt meillä on kaikki tarvittava tieto siirtyä skalaarikentän kvantisointiin.

## 1.2 Skalaarikentän kvantisointi

Siirryttäessä tavallisesta kenttäteoriasta kvanttikenttäteoriaan pitää käsiteltävät kentät kvantisoida. Systemin kanoninen kvantisointi tapahtuu käsittelemällä kenttää  $\phi$  kuin operaattoria. Operaattoriformalismi voidaan muodostaa kentän  $\phi$  ja sen kanonisen konjugaattimomentin  $\pi$  avulla. Konjugaattimomentti määritellään

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi. \quad (1.15)$$

Nämä suureet noudattavat seuraavia samanaikaisia kommutaatiorelaatioita

$$\left. \begin{aligned} [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x}')] &= 0 \\ [\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] &= 0 \\ [\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] &= i\delta^{n-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Kenttämoodit (1.11) ja (1.12) muodostavat molemmat erikseen, yhdessä vastaa-  
van kompleksikonjugaatin kanssa, ortonormaalin kannan skalaaritulolla (1.10). Näin  
ollen  $\phi$  voidaan laajentaa seuraavasti:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} [a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x})]. \quad (1.17)$$

Tässä termit  $a_{\mathbf{k}}$  ja  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  ovat Hilbertin avaruuden operaattoreita. Samanaikaiset kom-  
mutaatiorelaatiot kentälle  $\phi$  ja momentille  $\pi$  ovat silloin ekvivalentteja seuraavien  
kommutaatiorelaatioiden kanssa

$$\left. \begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] &= 0 \\ [a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] &= 0 \\ [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned} [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x}')] &= \left[ \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x})), \sum_{\mathbf{k}'} (a_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x}') + a_{\mathbf{k}'}^{\dagger} u_{\mathbf{k}'}^*(t, \mathbf{x}')) \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left\{ \underbrace{[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}]}_{=0} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) u_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x}') + \underbrace{[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}]}_{=\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) u_{\mathbf{k}'}^*(t, \mathbf{x}') \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{[a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}'}]}_{=-\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}} u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}) u_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x}') + \underbrace{[a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}]}_{=0} u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}) u_{\mathbf{k}'}^*(t, \mathbf{x}') \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Muut kohdat saadaan samalla tavalla identtisiksi.

Tässä vaiheessa on hyvä määritellä Hilbertin avaruudessa käytettävä vektoreiden  
merkintätapa. Niin sanotut ket-vektorit eli pystyvektorit merkitään:  $|X\rangle$ , jossa  $X$

määrittelee Hilbertin avaruuden tilan. Tämän vektorin hermiittinen konjugaatti on bra-vektori eli  $\langle X| = |X\rangle^\dagger$ . Näiden sisätulo merkitään muodossa  $\langle X|Y\rangle$ , mistä termi bra-ket muodostuu.

Heisenbergin kuvassa ajasta riippumattomat kvantttilat kattavat koko Hilbertin avaruuden. Kätevä kanta Hilbertin avaruudelle on Fockin avaruuden tilat eli lukumäärätilat. Silloin normalisoidut kantavektorit voidaan muodostaa vektorista  $|0\rangle$ , jota kutsutaan tyhjiöksi eli vakuumitilaksi.

Tila  $|0\rangle$  annihiloituu eli häviää kun sitä operoidaan millä tahansa  $a_{\mathbf{k}}$  operaattorilla:

$$a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k}. \quad (1.19)$$

Kun taas operoidaan vakuumitilaa operaattorilla  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ , saadaan aikaiseksi yksihiukkastila  $|\mathbf{1}_{\mathbf{k}}\rangle$  eli

$$|\mathbf{1}_{\mathbf{k}}\rangle = a_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle \quad (1.20)$$

Samoin voidaan luoda useamman hiukkasen tiloja

$$|\mathbf{1}_{\mathbf{k}_1}, \mathbf{1}_{\mathbf{k}_2}, \dots, \mathbf{1}_{\mathbf{k}_j}\rangle = a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{k}_j}^\dagger |0\rangle,$$

jos kaikki aaltoluvut  $\mathbf{k}_i$ , joissa  $i = 1, 2, \dots, j$ , ovat erotettavia. Jos jokin  $a_{\mathbf{k}_i}^\dagger$  toistuu, niin toistuvien tilojen lukumäärää merkitään luvulla  ${}^i n$ , jolloin

$$|{}^1 n_{\mathbf{k}_1}, {}^2 n_{\mathbf{k}_2}, \dots, {}^j n_{\mathbf{k}_j}\rangle = ({}^1 n! {}^2 n! \cdots {}^j n!)^{-\frac{1}{2}} (a_{\mathbf{k}_1}^\dagger)^{{}^1 n} (a_{\mathbf{k}_2}^\dagger)^{{}^2 n} \cdots (a_{\mathbf{k}_j}^\dagger)^{{}^j n} |0\rangle.$$

Tässä  ${}^i n!$  termit ovat kompensoimassa Bose-Einsteinin identtisten skalaarihiukkasen statistiikkaa. Operointia yksittäisen  $n_{\mathbf{k}}$  hiukkasen tilaan voidaan kuvata seuraavilla kaavoilla

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger |n_{\mathbf{k}}\rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} |(n+1)_{\mathbf{k}}\rangle \quad (1.21)$$

$$a_{\mathbf{k}} |n_{\mathbf{k}}\rangle = n^{\frac{1}{2}} |(n-1)_{\mathbf{k}}\rangle. \quad (1.22)$$

Kantavektorit ovat normalisoidut seuraavasti:

$$\begin{aligned} & \langle {}^1n_{\mathbf{k}_1}, {}^2n_{\mathbf{k}_2}, \dots, {}^r n_{\mathbf{k}_r} | {}^1m_{\mathbf{k}_1}, {}^2m_{\mathbf{k}_2}, \dots, {}^s m_{\mathbf{k}_s} \rangle \\ &= \delta_{rs} \sum_{\alpha} \delta_{1n^{\alpha(1)}m} \cdots \delta_{rn^{\alpha(s)}m} \delta_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}'_{\alpha(1)}} \cdots \delta_{\mathbf{k}_r\mathbf{k}'_{\alpha(s)}}, \end{aligned}$$

jossa summa on yli kaikkien  $\alpha$ -permutaatioiden kokonaisluvuilla  $1 \dots s$ .

### 1.3 Energiainpulssitensori

Jotta saadaan lisätietoa kentän ominaisuuksista, tarkastellaan kentän Hamiltonin operaattoria ja liikemääräoperaattoreita. Nämä suureet saadaan energiainpulssitensorista  $T_{\mu\nu}$ , jota kutsutaan myös jännitystensoriksi. Se voidaan muodostaa Lagrangen yhtälöstä käyttämällä hyväksi Eulerin yhtälöä (1.3), kun oletetaan, että  $\mathcal{L}$  ei riipu koordinaateista  $x^\mu$  eli  $\partial_\mu \mathcal{L} = 0$ , [8, s. 8]. Johto menee seuraavanlaisesti

$$\begin{aligned} \partial_\nu \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \partial_\mu \phi \\ &= \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \partial_\nu \phi \\ \delta_\nu^\mu \partial_\mu \mathcal{L} &= \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right). \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että ehto

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$$

täyttyy, kun jännitystensorin määritellään olevan

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}. \quad (1.23)$$

Tämä on energiainpulssitensorin yleinen muoto ja soveltuu kaikille Lagrangen yhtälöille. Lisäksi, jos on useampia eri kenttiä, niin summataan yhtälön (1.23) oikean puolen ensimmäinen termi kaikkien kenttien yli.

Tähän yleiseen määritelmään (1.23) voidaan nyt sijoittaa käytössämme oleva vapaan kentän Lagrangen yhtälö (1.1) ja sen jo laskettu toinen derivaatta (1.4),

jolloin jännitystensoriksi saadaan

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \eta_{\alpha\mu} T_{\nu}^{\alpha} = \eta_{\alpha\mu} \left[ \eta^{\alpha\kappa} \partial_{\kappa} \phi \partial_{\nu} \phi - \delta_{\nu}^{\alpha} \left( \frac{1}{2} \partial_{\lambda} \phi \partial^{\lambda} \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \right] \\ &= \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_{\lambda} \phi \partial^{\lambda} \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \eta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Tästä voidaan muodostaa Minkowskin koordinaateissa Hamiltonin tiheys

$$T_{tt} = \frac{1}{2} \left[ (\partial_t \phi)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right] \quad (1.25)$$

ja liikemäärätiheys

$$T_{ti} = \partial_t \phi \partial_i \phi, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (1.26)$$

jotka kuvaavat aika-avaruuden energiajakaumaa ja nimensä mukaisesti liikemäärää. Nämä voidaan laskea määrittelemällemme kentälle sijoittamalla niihin kenttä  $\phi$  lausekkeesta (1.17). Yhtälöön (1.25) sijoitettaessa ja integroitaessa yli koko avaruuden saadaan muodostettua Hamiltonin operaattori, joka tässä vapaan kentän tapauksessa kuvaa kentän energiaa.

$$\begin{aligned} H \equiv \int_t T_{tt} d^{n-1}x &= \int_t \frac{1}{2} \left\{ \left[ \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}(-i\omega)u_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} i\omega u_{\mathbf{k}}^*) \right]^2 \right. & (*) \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \left[ \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} i k^j u_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} (-i k^j) u_{\mathbf{k}}^*) \right]^2 & (**) \\ &+ m^2 \left[ \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} u_{\mathbf{k}}^*) \right]^2 \left. \right\} d^{n-1}x. & (***) \end{aligned}$$

Kohta (\*\*) saadaan, kun tiedetään, että  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \sum_i k^i x^i$  ja muistamalla  $\mathbf{k}$ -summan määritelmä (1.14) derivointia varten. Lasketaan summan osat erikseen, kun  $u_{\mathbf{k}}$  saa-

daan kaavasta (1.12).

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_t \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (-\omega^2) (a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'}^* - a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}^* - a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'} ) d^{n-1}x \\
&= \frac{1}{2} \int_t \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (-\omega^2) \left( a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'} \frac{e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x} - 2i\omega t}}{2L^{n-1}\omega} + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}^\dagger \frac{e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x} - 2i\omega t}}{2L^{n-1}\omega} \right. \\
&\quad \left. - a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}^* \frac{e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}}{2L^{n-1}\omega} - a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} \frac{e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}}{2L^{n-1}\omega} \right) d^{n-1}x \\
&= \frac{1}{2} \frac{L^{n-1}}{2L^{n-1}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{\omega^2}{\omega} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) \omega
\end{aligned}$$

Muut kohdat saadaan samalla tavalla saadaan, kun  $k^i = \eta^{ij} k_j = -k_i$ .

$$\begin{aligned}
(**) &= \dots = \sum_{j=1}^{n-1} \left[ \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) \frac{k_j^2}{\omega} \right] \stackrel{(1.8)}{=} \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) \frac{k^2}{\omega}. \\
(***) &= \dots = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) \frac{m^2}{\omega}.
\end{aligned}$$

Nyt

$$(**) + (***) = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) \frac{m^2 + k^2}{\omega} \stackrel{(1.7)}{=} \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) \omega,$$

jolloin

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) \omega. \tag{1.27}$$

Käyttämällä kommutaatiorelaatioita (1.18), saadaan tämä yhtälö kirjoitettua muodossa

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \omega. \tag{1.28}$$

Tekemällä kentän  $\phi$  sijoitus yhtälöön (1.26) saadaan laskettua liikemäärän kom-



ponentit

$$\begin{aligned}
P_i &\equiv \int_t T_{ti} d^{n-1}x = \int_t \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} - a_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*) i k^i \sum_{\mathbf{k}'} (a_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} - a_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}'}^*) (-i\omega) d^{n-1}x \\
&= \int_t \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'}^* - a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}^* - a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'})(-\omega k_i) d^{n-1}x \\
&= \frac{L^{n-1}}{2L^{n-1}} \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) \frac{\omega k_i}{\omega} \stackrel{(1.18)}{=} \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (2a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + 1) k_i \\
&= \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} k_i + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} k_i.
\end{aligned}$$

Tässä jälkimmäinen summa on ääretön summa. Sitä voidaan käsitellä ultravioletti-katkaisun avulla eli käyttämällä suurta raja-arvoa, jolloin

$$\sum_{\mathbf{k}} k_i = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{|\mathbf{k}| < K} k_i = 0$$

Tämä raja-arvon sisällä oleva äärellinen summa menee nolaksi, sillä termin  $k_i$  määritelmän (1.13) mukaisesti sen negatiiviset ja positiiviset arvot kumoavat toisensa. Lopulta momentiksi siis saadaan

$$P_i = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} k_i. \quad (1.29)$$

Sekä  $H$ , että  $P_i$  kommutoivat seuraavien operaattoreiden kanssa

$$\left. \begin{aligned} N_{\mathbf{k}} &\equiv a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \\ N &\equiv \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Toisin sanoen

$$[N, H] = [N, P_i] = 0. \quad (1.31)$$

Tämä nähdään kun käytetään relaatioita (1.18), jolloin

$$\begin{aligned}
a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} &= a_{\mathbf{k}'}^\dagger (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} + \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}) a_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\
&= a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'} + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = a_{\mathbf{k}}^\dagger (a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger - \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}) a_{\mathbf{k}'} + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\
&= a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}'} \underbrace{- a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}_{=0} \\
&= a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}'} .
\end{aligned}$$

Operaattorin  $N$  fysikaalista merkitystä voidaan tutkia ottamalla siitä odotusarvo. Se voidaan tehdä käyttämällä hyväksi yhtälöitä (1.19) ja (1.22), jolloin saadaan

$$\langle 0|N_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k} \quad (1.32)$$

$$\langle {}^1n_{\mathbf{k}_1}, {}^2n_{\mathbf{k}_2}, \dots, {}^jn_{\mathbf{k}_j} | N_{\mathbf{k}_i} | {}^1n_{\mathbf{k}_1}, {}^2n_{\mathbf{k}_2}, \dots, {}^jn_{\mathbf{k}_j} \rangle = {}^in. \quad (1.33)$$

Näin ollen operaattorin  $N_{\mathbf{k}}$  odotusarvo on kokonaisluku  ${}^in$ , joka on ket-vektorin kohdassa  $\mathbf{k}_i$  oleva arvo. Kun (1.33) summataan yli kaikkien  $i$  saadaan

$$\langle |N| \rangle = \sum_i {}^in.$$

Tämän termien  $N_{\mathbf{k}}$  ja  $n$  välisen suhteen vuoksi on loogista antaa operaattorille  $N_{\mathbf{k}}$  nimeksi ”lukumääräoperaattori moodille  $\mathbf{k}$ ” ja operaattorille  $N$  nimeksi ”kokonaislukumääräoperaattori”. Relaaation (1.31) vuoksi operaattorin  $N$  ominaistilat ovat myös operaattoreiden  $H$  ja  $\mathbf{P}$  ominaistiloja. Aina kun luku  ${}^in$  kasvaa yhdellä, niin  $\langle |H| \rangle$  ja  $\langle |\mathbf{P}| \rangle$  kasvavat vastaavasti energian  $\omega_i$  ja momentin  $\mathbf{k}_i$  verran, joten tämän luvun voidaan ajatella kuvaavan kvanttien lukumäärää.

Nyt yhtälöiden (1.21) ja (1.22) kuvaamille operaattoreille  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  ja  $a_{\mathbf{k}}$  on olemassa hyödyllinen fysikaalinen tulkinta. Ensimmäinen vähentää moodin  $\mathbf{k}$  sisältämien kvanttien lukumäärää yhdellä ja jälkimmäinen taas nostaa sitä yhdellä. Sen vuoksi  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  on nimetty luomisoperaattoriksi ja  $a_{\mathbf{k}}$  hävitysoperaattoriksi.

## 1.4 Vakuumienergian divergenssi

Tila  $|0\rangle$  eli hiukkaseton tila tai vakuumitila on erityisen kiinnostava tila. Sen liikemäärä on nolla eli

$$\langle 0|\mathbf{P}|0\rangle = 0,$$

mikä seuraa suoraan yhtälöstä (1.29). Intuitiivisesti voitaisiin olettaa ettei siinä olisi myöskään yhtään energiaa, sillä tila ei sisällä yhtään kvanttia. Tutkittaessa yhtälöä

(1.28) huomataan kuitenkin, että

$$\langle 0|H|0\rangle = \langle 0|0\rangle \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2}\omega = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2}\omega,$$

kun käytetään normalisaatioehtoa  $\langle 0|0\rangle = 1$ . Tämä summa ei mene nolaksi vaan päinvastoin hajaantuu äärettömyyteen. Tätä energiaa kutsutaan vakuumienergiaksi.

Minkowskin avaruudessa vakuumienergiasta voidaan päästä eroon mittaamalla energia suhteessa tähän nolapiste-energiaan eli merkitsemällä se nolaksi. Se voidaan tehdä käyttämällä operaattoria  $:$  eli normaalijärjestysoperaattoria, joka vaihtaa luomis- ja hävitysoperaattoreiden järjestystä siten, että hävitysoperaattorit kirjoitetaan aina ensin, eli  $: a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} := a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}$ . Tätä käyttämällä, kaavasta (1.27) saadaan

$$: H := \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} \omega.$$

Normaalijärjestys on yksi esimerkki regularisaatiosta, joka on systemaattinen matemaattinen prosessi, jossa uudelleenmääritellään muodollisesti äärettömät kuvaukset, jotta ne olisivat matemaattisesti hyvin määriteltyjä ja toteuttaisivat fyysikaalisesti motivoituneita ehdot.

## 1.5 Greenin funktiot

Tyhjiön odotusarvoja eri vapaan kentän operaattoreille voidaan kuvata erilaisilla aaltoyhtälön Greenin funktioilla. Myöhemmin nähdään miten eri koordinaatistot määrittelevät erilaiset tyhjiöt, tällöin Greenin funktioiden avulla voidaan verrata näitä tyhjiöitä keskenään, mikä on Unruh-ilmion kannalta olennaista. Skalaarikentän tapauksessa tärkeitä ovat kentän kommutaattorin ja antikommutaattorin odotusarvot. Ne ovat muotoa

$$iG(x, x') = \langle 0|[\phi(x), \phi(x')] |0\rangle \tag{1.34}$$

$$G^{(1)}(x, x') = \langle 0|\{\phi(x), \phi(x')\} |0\rangle. \tag{1.35}$$

Funktio  $G$  tunnetaan Paulin-Jordanin tai Schwingerin funktiona ja funktiota  $G^{(1)}$  kutsutaan Hadamartin alkeisfunktioksi. Nämä Greenin funktiot voidaan jakaa positiivisiin ja negatiivisiin taajuuksiin seuraavasti:

$$\begin{aligned} iG(x, x') &= G^+(x, x') - G^-(x, x') \\ G^{(1)}(x, x') &= G^+(x, x') + G^-(x, x'), \end{aligned}$$

jossa  $G^\pm$ , joka tunnetaan nimellä Wightmanin funktio, saadaan yhtälöistä

$$\left. \begin{aligned} G^+(x, x') &= \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle \\ G^-(x, x') &= \langle 0 | \phi(x') \phi(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Feynmannin propagaattori  $G_F$  määritellään aikajärjestettynä kenttien tulona

$$\begin{aligned} iG_F(x, x') &= \langle 0 | T[\phi(x) \phi(x')] | 0 \rangle \\ &= \theta(t - t') G^+(x, x') + \theta(t' - t) G^-(x, x'), \end{aligned} \quad (1.37)$$

jossa

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Vielä on olemassa viivästetty ja edistetty Greenin funktio, jotka määritellään seuraavasti:

$$\left. \begin{aligned} G_V(x, x') &= -\theta(t - t') G(x, x') \\ G_E(x, x') &= -\theta(t' - t) G(x, x'). \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Niiden keskiarvo on

$$\bar{G}(x, x') = \frac{1}{2} [G_V(x, x') + G_E(x, x')],$$

joka liittyy Feynmannin propagaattoriin seuraavasti:

$$G_F = -\bar{G}(x, x') - \frac{1}{2} iG^{(1)}(x, x'). \quad (1.39)$$

Käyttämällä kenttäyhtälöä (1.5) nähdään, että  $G$ ,  $G^{(1)}$  ja  $G^\pm$  kaikki toteuttavat homogeenisen yhtälön

$$(\square_x + m^2)\mathcal{G}(x, x') = 0, \quad (1.40)$$

sillä

$$\square_x \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle = \langle 0 | [\square \phi(x)] \phi(x') | 0 \rangle = -m^2 \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle.$$

Käyttämällä tietoa  $\partial_t \theta(t-t') = \delta(t-t')$  ja samanaikaisia kommutaatiorelaatioita (1.16) saadaan seuraavat yhtälöt

$$(\square_x + m^2) G_F(x, x') = -\delta^n(x - x') \quad (1.41)$$

$$(\square_x + m^2) G_{V,E}(x, x') = \delta^n(x - x'), \quad (1.42)$$

sillä

$$\begin{aligned} \square_x \theta(t-t') G^+(x, x') &= \partial_{\mu(x)} \{ [\partial^\mu \theta(t-t')] G^+ + \theta(t-t') \partial^{\mu(x)} G^+ \} \\ &= [\square \theta(t-t')] G^+ + [\partial^\mu \theta(t-t')] \partial_{\mu(x)} G^+ \\ &\quad + [\partial_\mu \theta(t-t')] \partial^{\mu(x)} G^+ + \theta(t-t') \square_x G^+ \\ &\stackrel{\partial^t \equiv \partial_t}{=} \underbrace{[\partial_t \delta(t-t')] G^+}_{(*)} + 2 \underbrace{\delta(t-t') \partial_t G^+}_{(**)} + \theta(t-t') \underbrace{\square_x G^+}_{=-m^2 G^+}. \end{aligned}$$

Tiedosta  $\int \delta'(x) f(x) dx = -\int \delta(x) f'(x) dx$  saadaan

$$(*) = -\delta(t-t') \partial_t \delta(t-t') G^+,$$

joka on samaa muotoa kuin (\*\*), jota taas saadaan muokattua seuraavasti:

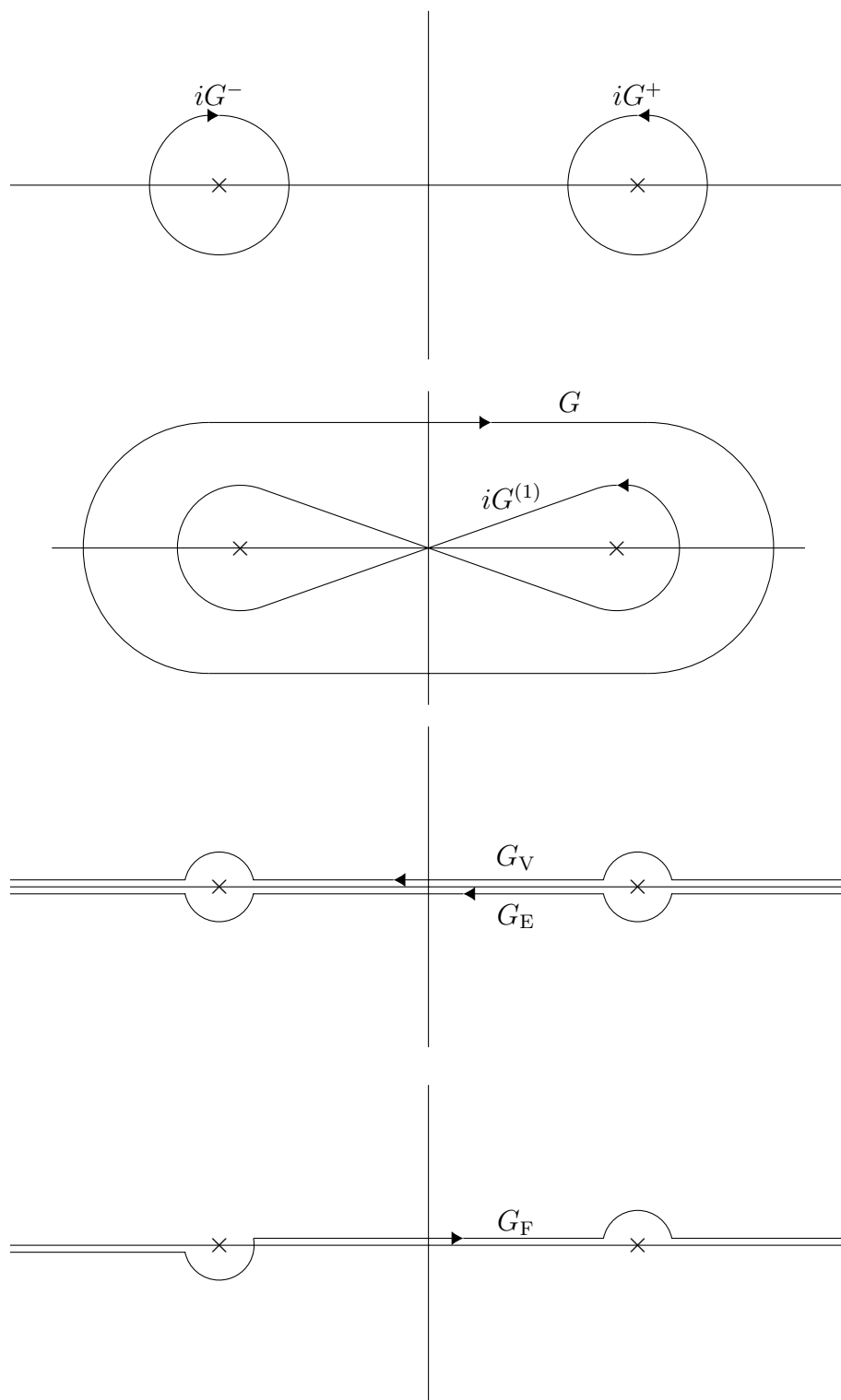
$$\begin{aligned} (**) &= \langle 0 | \pi(t, \mathbf{x}) \phi(t, \mathbf{x}') | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \phi(t, \mathbf{x}') \pi(t, \mathbf{x}) | 0 \rangle - i \delta^{n-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \langle 0 | 0 \rangle \\ &= \delta(t-t') \partial_t G^-(x, x') - i \delta^n(x - x'). \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\square_x \theta(t-t') G^+(x, x') = \delta(t-t') \partial_t G^-(x, x') - i \delta^n(x - x') - m^2 G^+(x, x')$$

ja samoin saadaan

$$\square_x \theta(t-t') G^-(x, x') = \delta(t-t') \partial_t G^-(x, x') - m^2 G^-(x, x').$$



Kuva 1. Eri Greenin funktiot ja niihin liittyvät napojen kierrot  $k^0$  kompleksitason kautta. Navat  $k^0 = \pm\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$  on merkitty rasteilla. Avoimien reittien ajattelun ollessa suljettuja äärettömän puoliympyrän avulla ylempässä tai alemmassa puolitasossa.

Kun vielä huomataan, että  $\partial_t \theta(t' - t) = -\delta(t' - t) = -\delta(t - t')$  niin sijoittamalla edellä lasketut tiedot yhtälöihin (1.37) ja (1.38) saadaan halutut yhtälöt.

Greenin funktiot  $G_{F,V,E}$  kuvaavat kentän häiriöiden etenemistä tietyillä reunaehdoilla.

Greenin funktioiden integraaliesitykset voidaan muodostaa korvaamalla  $\phi$ :n moodihajotelma (1.17) tyhjiön odotusarvoilla. Kaikki Greenin funktiot voidaan esittää seuraavasti:

$$\mathcal{G}(x, x') = (2\pi)^{-n} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2} d^n k. \quad (1.43)$$

Tällä integraalilla on navat kohdissa  $k^0 = \pm(|\mathbf{k}|^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ . Koordinaatin  $k^0$  integrointi voidaan suorittaa kiertämällä navat imaginääriavaruuden kautta. Se millä tavoin napa kierretään määrää sen, mikä Greenin funktio kaavasta saadaan ulos (kuva 1).

## 2 Kvanttikenttäteoria kaarevassa aika-avaruudessa

Seuraavaksi siirrymme tasaisesta Minkowskin avaruudesta kaareviin aika-avaruuksiin. Avaruus itsessään voi olla kaareutunut eri tavoin ja myös painovoima voi aiheuttaa siihen kaareutumista, kuten yleinen suhteellisuusteoria ennustaa. Kaarevia avaruuksia voidaan käyttää hyväksi myös tasaisen avaruuden teorioissa, sillä tasaisessa avaruudessa kiihtyvässä liikkeessä olevan kappaleen voidaan ajatella kulkevan tasaisella nopeudella sopivasti kaareutuneessa avaruudessa.

Avaruuden kaareutuminen määritellään pohjimmiltaan metrisellä tensorilla. Se oli Minkowskin avaruudessa  $\eta_{\mu\nu}$  ja nyt se on yleistä muotoa  $g_{\mu\nu}$ . Muut termit saadaan laskettua siitä.

### 2.1 Aika-avaruuden rakenne

Oletetaan aika-avaruuden olevan  $C^\infty$   $n$ -ulotteinen, globaalisti hyberbolinen, pseudo-Riemanninen monisto. Differentioituvuusehdot varmistavat differentiaaliyhtälöiden olemassaolon ja globaalinen hyberbolisuus varmistaa Cauchyn hyberpintojen olemassaolon.

Pseudo-Riemannisella metriikalla  $g_{\mu\nu}$ , jonka määrittelee kaarialkion neliö

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, (n-1),$$

on signatuuri  $n-2$ . Useampia koordinaattitilkkuja (coordinate patch), joihin liittyy metriikka  $g_{\mu\nu}$ , voidaan tarvita peittämään koko monisto. Määritellään determinantti

$$g = |\det g_{\mu\nu}|.$$

Aika-avaruuden kausaalista rakennetta voidaan kuvata Penrosen diagrammeilla. Niiden muodostamiseen käytetään konformikuvausta metriseen rakenteeseen, jolloin ääretön aika-avaruus voidaan esittää äärellisenä diagrammina (kompakti monisto). Konformikuvaukset kutistavat tai venyttävät monistoa toisin kuin koordinaattikuvaukset, jotka vain uudelleennimeävät koordinaatteja jollakin alueella muuttamatta



sen geometriaa. Konformikuvauksen voi kuvata seuraavasti:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x), \quad (2.1)$$

jollekin jatkuvalle, ei-katoavalle, äärelliselle reaalifunktiolle  $\Omega(x)$ . Avaruus on konformi toiselle avaruudelle, jos se on konformikuvauksen päässä siitä.

D'Alembertin operaattori yleistyy kaarevassa avaruudessa Laplacen–Beltramin operaattoriksi, joka määritellään

$$\square\phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu \cdot \nabla_\nu\phi = (-g)^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu[(-g)^{\frac{1}{2}}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi]. \quad (2.2)$$

Yksinkertaisena esimerkkinä Penrosen diagrammista käsitellään kaksiulotteista Minkowskin avaruutta, jossa kaarialkion neliö on muotoa

$$ds^2 = dt^2 - dx^2. \quad (2.3)$$

Työskentelemme usein nollakoordinaatistossa,  $u, v$ , joka määritellään seuraavasti:

$$\left. \begin{aligned} u &= t - x \\ v &= t + x, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

jolloin viivaelementiksi saadaan

$$ds^2 = (dt - dx)(dt + dx) = dudv. \quad (2.5)$$

Näin ollen metrinen tensori saa muodon

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

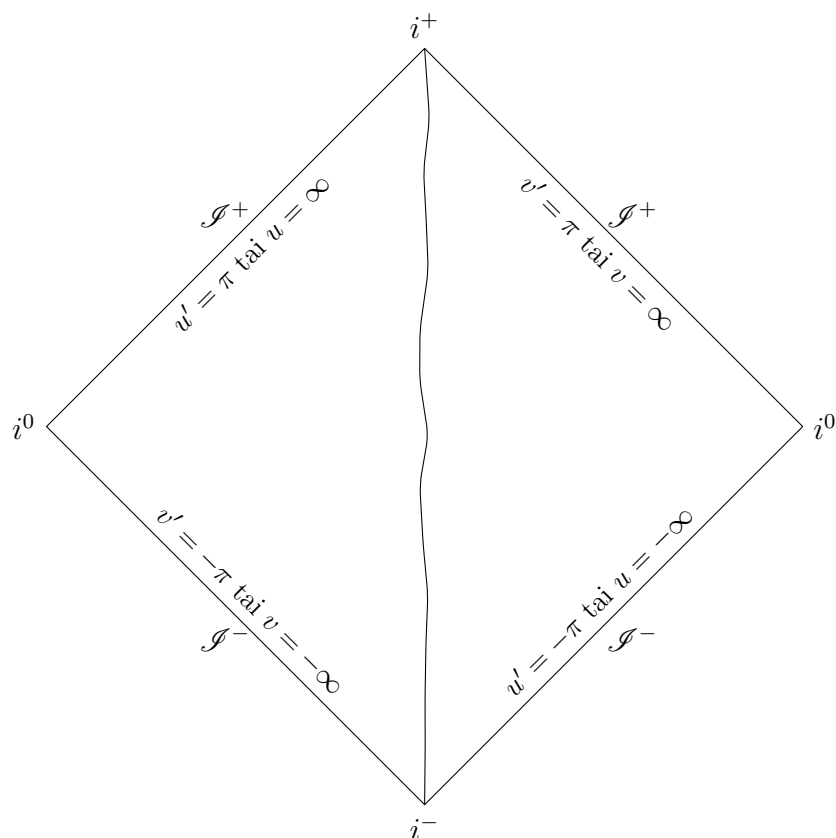
sillä

$$(du \ dv) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (du \ dv) \begin{pmatrix} dv \\ du \end{pmatrix} = dudv.$$

Tehdään koordinaattimuunnos

$$u' = 2 \arctan u$$

$$v' = 2 \arctan v,$$



Kuva 2. Penrosen konformi diagrammi Minkowskin avaruudesta. Kompakti alue  $-\pi \leq u', v' \leq \pi$  on konformi koko Minkowskin avaruuteen  $-\infty \leq u, v \leq \infty$ . Suorat  $u, v = \text{vakio}$  ovat aina  $45^\circ$  kulmassa. Kuvassa on myös esitettyä havaitsija, joka on asymptoottisesti ajanluonteinen.

jossa

$$-\pi \leq u', v' \leq \pi. \quad (2.6)$$

Nyt kaavasta (2.5) saadaan

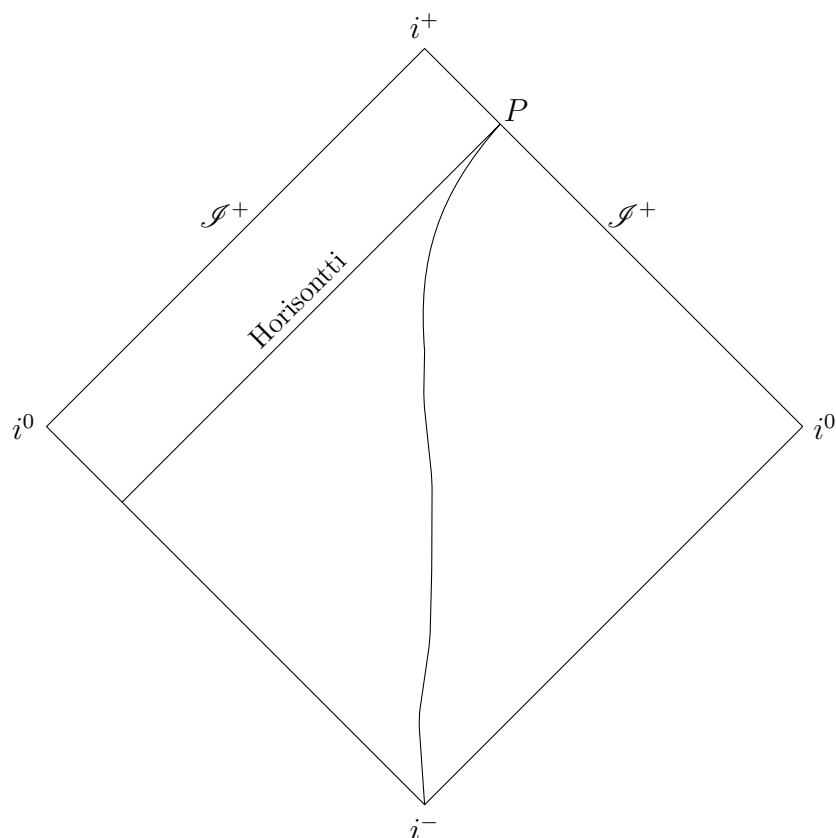
$$ds^2 = \frac{1}{4} \sec^2\left(\frac{1}{2}u'\right) \sec^2\left(\frac{1}{2}v'\right) du' dv'.$$

Jos nyt tehdään konformikuvaus

$$\Omega^2(x) = \left[ \frac{1}{4} \sec^2\left(\frac{1}{2}u'\right) \sec^2\left(\frac{1}{2}v'\right) \right]^{-1},$$

niin

$$g_{\mu\nu}(u', v') \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(u', v') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$



Kuva 3. Tämä ajanluonteinen maailmanviiva esittää havaitsijaa, joka jossain vaiheessa alkaa kiihdyttämään jatkuvasti oikealle, jolloin hän lähestyy asymptoottisesti valonnopeutta. Sen vuoksi tämä maailmanviiva ei saavuta pistettä  $i^+$ , vaan leikkaa reunan  $\mathcal{S}^+$  pisteessä  $P$ . Pisteestä  $P$  kautta kulkeva suora, jolle  $\bar{u} = \text{vakio}$ , toimii siis tapahtumahorisonttina, koska tätä maailmanviivaa kulkeva havaitsija ei voi ikinä havaita sen yläpuolella tapahtuvia tapahtumia.

jolloin konformikuvattu kaarialkio on

$$d\bar{s}^2 = du' dv'.$$

Kaarialkio on samaa muotoa kuin alkuperäisen Minkowskin avaruuden kaarialkio, mutta käsittää vain kompaktin alueen (2.6), joka näkyy kuvassa 2. Konformikuvaus on kutistanut äärettömyyden kaavion rajaviivoille.

Penrosen diagrammissa valoviivat (null rays) pysyvät  $45^\circ$  kulmassa eli ne ovat invariantteja konformimuunnoksissa. Näin ollen kausaali analyysi voidaan suorittaa valokartion avulla kuten Minkowskin avaruudessa. Selvästi kaikki valoviivat leikkaavat rajaviivat  $\mathcal{S}^+$  ja  $\mathcal{S}^-$ , joita kutsutaan tulevaisuuden ja menneisyyden valonluon-

teisiksi (null) äärettömyyksiksi. Asymptoottisesti ajanluonteiset käyrät suppenevat kohti pisteitä  $i^+$  ja  $i^-$ , jotka ovat tulevaisuuden ja menneisyyden ajanluonteiset äärettömyydet. Samoin paikanluonteiset käyrät suppenevat kohti paikanluonteista äärettömyyttä  $i^0$ .

Ajanluonteinen käyrä, joka on asymptoottisesti valonluonteinen, voi muodostua, jos hiukkanen on jatkuvassa tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, jolloin sen nopeus lähestyy valonnopeutta, kun  $t \rightarrow \infty$ . Tällainen maailmanviiva on piirrettynä kuvassa 3. Valonluonteisen asymtootin yläpuolella olevat tapahtumat ovat ikuisesti kausaalisesti saavuttamattomia kiihtyvälle hiukkaselle. Sen vuoksi tätä valonluonteista asymptoottia kutsutaan kiihtyvän hiukkasen tapahtumahorisontiksi.

Tämä analyysi pätee myös neliulotteiseen Minkowskin avaruuteen, jos jokaista diagrammin pistettä ajatellaan 2-palloksi, lukuunottamatta pisteitä, jotka ovat vertikaalisella symmetria-akselilla ja pisteitä  $i^0$ , jotka esittävät avaruusajan pisteitä. Silloin  $\mathcal{S}^+$  ja  $\mathcal{S}^-$  ovat itseasiassa valonkaltaisia 3-pintoja.

## 2.2 Skalaarikentän kvantisointi

Muodollisesti kentän kvantisointi kaarevassa avaruudessa tapahtuu samantyyllisesti kuin Minkowskin avaruuden tapauksessa. Yhtälöt ovat muuten samanlaisia, mutta niissä on myös avaruuden kaarevuutta kuvaavia termejä. Lagrangen tiheys on tässä tapauksessa muotoa

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(-g)^{\frac{1}{2}}[g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - (m^2 + \xi R)\phi^2],$$

jossa  $\phi(x)$  on skalaarikenttä ja  $m$  on yhden kentän kvantin massa. Skalaarikentän ja gravitaatiokentän kytkentää kuvaa termi  $\xi R\phi^2$ , jossa  $\xi$  on numeerinen tekijä ja  $R(x)$  on Riccin skalaarikaarevuus. Tämä termi tarvitaan renormalisointiin, kun Lagrangen yhtälöön lisätään vuorovaikutusta kuvaava termi. Kun  $\xi = 0$  puhutaan minimaalisen kytketymisen tapauksesta.

Vaikutus on samaa muotoa kuin ennenkin

$$S = \int \mathcal{L} d^n x$$

ja skalaarikenttäyhtälö muuttuu vain lisätermin verran

$$(\square_x + m^2 + \xi R)\phi = 0, \quad (2.7)$$

jossa  $\square$  saadaan nyt yhtälöstä (2.2).

Skalaaritulo yleistyy muotoon

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\sigma} (-g_{\sigma})^{\frac{1}{2}} \phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \phi_2^* d\sigma^{\mu}. \quad (2.8)$$

Tässä  $d\sigma^{\mu} = n^{\mu} d\sigma$ , jossa  $n^{\mu}$  on tulevaisuuteen osoittava yksikkövektori, joka on kohtisuorassa paikanluonteisen hyperpinnan  $\sigma$  kanssa ja  $d\sigma$  on tämän pinnan tilavuuselementti. Hyperpinta  $\sigma$  on Cauchyn pinta ja skalaaritulo on riippumaton sen muunnoksista.

Jos  $\sigma \rightarrow \sigma'$  niin, että  $\sigma$  ja  $\sigma'$  muodostavat paikanluonteiset rajat tilavuudelle  $v$ , eli reunan  $\partial v$ , niin Gaussin divergenssiteoreeman avulla saadaan

$$\begin{aligned} (\phi_1, \phi_2)_{\sigma} - (\phi_1, \phi_2)_{\sigma'} &= i \int_{\sigma'} (-g)^{\frac{1}{2}} \phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \phi_2^* d\sigma'^{\mu} - i \int_{\sigma} (-g)^{\frac{1}{2}} \phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \phi_2^* d\sigma^{\mu} \\ &= i \int_{\partial v} (-g)^{\frac{1}{2}} \phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \phi_2^* d(\partial v)^{\mu} \\ &= i \int_v (-g)^{\frac{1}{2}} \nabla^{\mu} \phi_1 \overleftrightarrow{\nabla}_{\mu} \phi_2^* dv \\ &= 0, \end{aligned}$$

joka nähdään seurauksena kenttäyhtälöstä (2.7) [8, s. 46].

Kenttäyhtälölle (2.7) on olemassa täydellinen joukko moodiratkaisuja  $u_i(x)$ , jotka ovat ortonormaaleja laskettuna skalaaritulolla (2.8). Ne siis toteuttavat ehdot

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij}, \quad (u_i, u_j^*) = 0. \quad (2.9)$$

Indeksi  $i$  viittaa joukkoon ominaisuuksia, joita tarvitaan merkitsemään moodeja. Kenttä  $\phi$  voidaan laajentaa samoin kuin yhtälössä (1.17):

$$\phi(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)]. \quad (2.10)$$

Teorian kovariantti kvantisointi voidaan tehdä käyttäen samoja kommutaatiorelaatioita kuin aiemmin kohdassa (1.18):

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \text{ jne.}$$

Vakuumitilan, Fockin avaruuden, jne. konstruointi voi tämän jälkeen edetä samoin kuin kappaleessa 1.2. Tällä kertaa formalismi ei kuitenkaan ole niin yksiselitteinen. Minkowskin avaruudessa koordinaatit ovat riippumattomia niiden sijainnista eli ne muodostavat symmetriaryhmän. Kaarevassa aika-avaruudessa näin ei ole, lukuun ottamatta joitain poikkeustapauksissa. Ei siis ole mitään yksittäistä koordinaatistoa, jolla kenttä  $\phi$  voitaisiin yleispätevästi hajottaa moodeihin. Yleisessä suhteellisuusteoriassa ilmiötä on tarkoitus kuvata yleisen kovarianssin kautta, jonka mielessä koordinaattisysteemit ovat fysikaalisesti merkityksettömiä.

Tarkastellaan siis toista ortonormaalia moodijoukkoa  $\bar{u}_j(x)$ . Kenttä  $\phi$  voidaan laajentaa tässä joukossa seuraavasti:

$$\phi(x) = \sum_j [\bar{a}_j \bar{u}_j(x) + \bar{a}_j^\dagger \bar{u}_j^*(x)]. \quad (2.11)$$

Tämä kentän  $\phi$  hajotelma määrittelee uuden vakuumitilan  $|\bar{0}\rangle$ , jolle

$$\bar{a}_j |\bar{0}\rangle = 0.$$

Se määrittelee myös uuden Fockin avaruuden.

Koska molemmat joukot ovat täydellisiä, niin moodit  $\bar{u}_j$  voidaan laajentaa vanhojen avulla:

$$\bar{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*) \quad (2.12)$$

ja toisinpäin eli vanhat uusien avulla

$$u_j = \sum_i (\alpha_{ji}^* \bar{u}_i - \beta_{ji} \bar{u}_i^*). \quad (2.13)$$

Nämä relaatiot tunnetaan Bogolubovin muunnoksina. Matriisit  $\alpha_{ij}$  ja  $\beta_{ij}$  ovat Bogolubovin kertoimia ja sijoittamalla muunnokset ehtoihin (2.9) saadaan ne esitettyä muodossa

$$\alpha_{ij} = (\bar{u}_i, u_j), \quad \beta_{ij} = -(\bar{u}_i, u_j^*), \quad (2.14)$$

sillä esimerkiksi

$$\begin{aligned} (\bar{u}_i, u_j) &= \left( \sum_k (\alpha_{ik} u_k + \beta_{ik} u_k^*), u_j \right) \\ &= \sum_k [\alpha_{ik} (u_k, u_j) + \beta_{ik} (u_k^*, u_j)] \\ &= \sum_k \alpha_{ik} \delta_{kj} = \alpha_{ij}. \end{aligned}$$

Merkitsemällä yhtälöt (2.10) ja (2.11) yhtä suuriksi saadaan

$$\begin{aligned} \sum_i (a_i u_i + a_i^\dagger u_i^*) &= \sum_j (\bar{a}_j \bar{u}_j + \bar{a}_j^\dagger \bar{u}_j^*) \\ &= \sum_j [\bar{a}_j \sum_k (\alpha_{jk} u_k + \beta_{jk} u_k^*) + \bar{a}_j^\dagger \sum_l (\alpha_{jl} u_l + \beta_{jl} u_l^*)] \\ &= \sum_j \sum_k [\bar{a}_j (\alpha_{jk} u_k + \beta_{jk} u_k^*) + \bar{a}_j^\dagger (\alpha_{jk}^* u_k^* + \beta_{jk}^* u_k)] \\ &= \sum_j \sum_k [(\alpha_{jk} \bar{a}_j + \beta_{jk}^* \bar{a}_j^\dagger) u_k + (\alpha_{jk}^* \bar{a}_j^\dagger + \beta_{jk} \bar{a}_j) u_k^*] \\ &= \sum_k \left[ \sum_j (\alpha_{jk} \bar{a}_j + \beta_{jk}^* \bar{a}_j^\dagger) u_k + \sum_j (\alpha_{jk}^* \bar{a}_j^\dagger + \beta_{jk} \bar{a}_j)^\dagger u_k^* \right]. \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että

$$a_i = \sum_j (\alpha_{ji} \bar{a}_j + \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger) \quad (2.15)$$

ja samalla tavalla saadaan

$$\bar{a}_j = \sum_i (\alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji} a_i^\dagger). \quad (2.16)$$

Bogolubovin kertoimilla on seuraavanlaiset ominaisuudet

$$\begin{aligned}\sum_k (\alpha_{ik}\alpha_{jk}^* - \beta_{ik}\beta_{jk}^*) &= \delta_{ij} \\ \sum_k (\alpha_{ik}\beta_{jk} - \beta_{ik}\alpha_{jk}) &= 0,\end{aligned}$$

sillä esimerkiksi

$$\begin{aligned}\delta_{ij} = (\bar{u}_i, \bar{u}_j) &= \left( \sum_k (\alpha_{ik}u_k + \beta_{ik}u_k^*), \sum_l (\alpha_{jl}u_l + \beta_{jl}u_l^*) \right) \\ &= \sum_{k,l} [(\alpha_{ik}u_k, \alpha_{jl}u_l) + (\alpha_{ik}u_k, \beta_{jl}u_l^*) + (\beta_{ik}u_k^*, \alpha_{jl}u_l) + (\beta_{ik}u_k^*, \beta_{jl}u_l^*)] \\ &= \sum_{k,l} [\alpha_{ik}\alpha_{jl}^*\delta_{kl} + \beta_{ik}\beta_{jl}^*(-\delta_{kl})] \\ &= \sum_k (\alpha_{ik}\alpha_{jk}^* - \beta_{ik}\beta_{jk}^*).\end{aligned}$$

Yhtälöstä (2.15) nähdään, että kaksi Fockin avaruutta, joiden kantoina ovat  $u_i$  ja  $\bar{u}_j$ , ovat erilaiset, kun  $\beta_{ji} \neq 0$ . Esimerkiksi  $|\bar{0}\rangle$  ei annihiloitu termin  $a_i$  avulla:

$$a_i|\bar{0}\rangle = \sum_j \beta_{ji}^*|\bar{1}_j\rangle \neq 0.$$

Itseasiassa operaattorin  $N_i = a_i^\dagger a_i$  odotusarvo  $u_i$  moodin hiukkasille tilassa  $|\bar{0}\rangle$  on

$$\langle \bar{0}|N_i|\bar{0}\rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2,$$

joka tarkoittaa, että moodien  $\bar{u}_j$  tyhjiö sisältää  $\sum_j |\beta_{ji}|^2$  hiukkasta moodissa  $u_i$ .

Jos moodit  $u_j$  ovat taajuudeltaan positiivisia suhteessa johonkin ajanluonteiseen Killingin vektorikenttään  $\xi$ , jolle on voimassa

$$\mathcal{L}_\xi u_j = -i\omega u_j, \quad \omega > 0$$

(vertaa yhtälöön (1.9)), ja moodit  $\bar{u}_k$  ovat lineaarikombinaatio vain moodeista  $u_j$  (ei  $u_j^*$ ) sisältäen siis vain positiivisia taajuuksia suhteessa kenttään  $\xi$ , niin  $\beta_{jk} = 0$ . Siinä tapauksessa myös  $\bar{a}_k|0\rangle = 0$ , samoin kuin  $a_j|0\rangle = 0$ . Silloin nämä kaksi moodijoukkoa  $u_j$  ja  $\bar{u}_k$  jakavat yhteisen vakuumitilan. Jos mikä tahansa  $\beta_{jk} \neq 0$ , niin moodien  $\bar{u}_k$  on sisällettävä sekä positiivisia ( $u_j$ ), että negatiivisia ( $u_j^*$ ) taajuuksia olevia moodeja ja silloin hiukkasia on paikalla.



## 2.3 Liikkuva hiukkasilmaisin

Unruh-ilmiöön päästäksemme pitää ensin vastata kysymykseen: Miten tietynlainen hiukkasilmaisin käyttäytyy annetussa tilanteessa? Siihen käytämme DeWittin [6, s. 693] esittämää johtoa, jossa käytetään idealisoitua pistemäistä hiukkasta, jolla on sisäisiä energiatiloja, joita merkitään energialla  $E$ . Energiatila kytkeytyy skalaarikenttään  $\phi$  monopolivuorovaikutuksella. Työskentelemme neliulotteisessa Minkowskin avaruudessa.

Oletetaan, että hiukkasilmaisin kulkee pitkin maailmanviivaa, jota kuvaavat funktiot  $x^\mu(\tau)$ , jossa  $\tau$  on ilmaisimen ominaisaika. Ilmaisimen ja kentän vuorovaikutusta kuvataan Lagrangen funktion vuorovaikutusosalla  $cm(\tau)\phi[x(\tau)]$ , jossa  $c$  on pieni kytkentävakio ja  $m$  on ilmaisimen monopoliliikemääräoperaattori. Oletetaan, että kenttä  $\phi$  on vakuuutilassa  $|0_M\rangle$ , jonka määrittelee (1.19) ja jossa alaviite  $M$  viittaa ”Minkowskin tyhjiöön”. Yleisellä liikeradalla ilmaisim ei pysy perustilassaan  $E_0$  vaan virittyy tilaan  $E > E_0$ , samalla kun kenttä virittyy tilaan  $|\psi\rangle$ . Tarpeeksi pienelle vakiolle  $c$ , viritysamplitudi (amplitude for a transition to an excited state) voidaan laskea vaikutuksen vuorovaikutusosasta käyttämällä ensimmäisen kertaluvun häiriöteoriaa, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
& \langle E, \psi | e^{iS_I} | 0_M, E_0 \rangle \\
&= \langle E, \psi | e^{-i \int H_I d\tau} | 0_M, E_0 \rangle \\
&= \langle E, \psi | e^{i \int cm(\tau)\phi[x(\tau)]d\tau} | 0_M, E_0 \rangle \\
&= \langle E, \psi | 1 + ic \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau)\phi[x(\tau)]d\tau + \dots | 0_M, E_0 \rangle \\
&= \underbrace{\langle E, \psi | 0_M, E_0 \rangle}_{=0} + \langle E, \psi | ic \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau)\phi[x(\tau)]d\tau + \dots | 0_M, E_0 \rangle \\
&\approx ic \langle E, \psi | \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau)\phi[x(\tau)]d\tau | 0_M, E_0 \rangle.
\end{aligned}$$

Käyttämällä operaattorin  $m(\tau)$  aikaevoluution yhtälöä

$$m(\tau) = e^{iH_0\tau} m(0) e^{-iH_0\tau},$$

missä  $H_0|E\rangle = E|E\rangle$ , voidaan viritysamplitudi jakaa tekijöihinsä seuraavasti:

$$ic\langle E|m(0)|E_0\rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E-E_0)\tau} \langle \psi|\phi(x)|0_M\rangle d\tau. \quad (2.17)$$

Jos  $\phi$  laajennetaan tavallisiin Minkowskin tasoaaltojen moodeihin (1.17), on selvää, että tämän asteen häiriöteoriassa virittyminen voi tapahtua vain tilalle  $|\psi\rangle = |1_{\mathbf{k}}\rangle$ , joka sisältää yhden tajuuskvantin  $\omega = (|\mathbf{k}|^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ , jollakin aaltoluvulla  $\mathbf{k}$ . Käytetään myös jatkumon normalisaatiota (1.11) ja koska kyseessä on koko avaruus, voidaan summaus korvata suoraan integroinnilla. Siten saadaan

$$\begin{aligned} \langle 1_{\mathbf{k}}|\phi(x)|0_M\rangle &= \langle 1_{\mathbf{k}}|\int d^3k'(a_{\mathbf{k}'}u_{\mathbf{k}'} + a_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}'}^*)|0_M\rangle \\ &= \int d^3k'\langle 1_{\mathbf{k}}|a_{\mathbf{k}'}|0_M\rangle u_{\mathbf{k}'} + \langle 1_{\mathbf{k}}|a_{\mathbf{k}'}^\dagger|0_M\rangle u_{\mathbf{k}'}^* \\ &= \int d^3k'\langle 1_{\mathbf{k}}|1_{\mathbf{k}'}\rangle (2\omega'(2\pi)^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}+i\omega't} \\ &= (16\pi^3\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega t}. \end{aligned}$$

Pitää ottaa huomioon, että edellisen yhtälön  $\mathbf{x}$  ei ole riippumaton muuttuja vaan määrittänyt ilmaisimen radan mukaan. Oletetaan, että ilmaisin kulkee pitkin inertiaalista maailmanviivaa eli

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}\tau(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.18)$$

missä  $x = \text{vakio}$ ,  $\mathbf{v} = \text{vakio}$ ,  $|\mathbf{v}| = v < 1$ . Kun vielä  $|\psi\rangle = |1_{\mathbf{k}}\rangle$ , saadaan integraali (2.17) muotoon

$$\begin{aligned} (16\pi^3\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E-E_0)\tau} e^{i\tau(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}} d\tau \\ = (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0} \delta(E - E_0 + (\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Kuitenkin, koska  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} \leq \omega$  ja  $E < E_0$ , deltafunktion argumentti on aina positiivinen ja viritysamplitudi häviää. Virittyminen on kielletty energian säilymisen vuoksi.

Jos valitsisimme inertiaalisen maailmanlinjan sijaan monimutkaisemman radan niin integraali (2.17) ei olisi tuottanut  $\delta$ -funktiota vaan tulos olisi ollut nolasta poik-

keava. Sellaisessa tapauksessa kannattaa laskea viritysamplitudi kaikille mahdollisille energiatiloille  $E$  ja kentille  $\phi$ . Se voidaan tehdä neliöimällä lausekkeen (2.17) itseisarvo

$$\begin{aligned} & |ic\langle E|m(0)|E_0\rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E-E_0)\tau} \langle \psi|\phi(x)|0_M\rangle d\tau|^2 \\ &= c^2 |\langle E|m(0)|E_0\rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(E-E_0)\tau} (\langle \psi|\phi(x(\tau))|0_M\rangle)^* d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E-E_0)\tau'} \langle \psi|\phi(x(\tau'))|0_M\rangle d\tau' \\ &= c^2 |\langle E|m(0)|E_0\rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-i(E-E_0)(\tau-\tau')} \langle 0_M|\phi(x(\tau))|\psi\rangle \langle \psi|\phi(x(\tau'))|0_M\rangle \end{aligned}$$

ja summaamalla yli energiatilojen  $E$ , sekä täydellisen joukon  $\psi$ . Kun tiedetään, että  $\sum_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \mathbb{1}$ , niin saadaan tulokseksi

$$c^2 \sum_E |\langle E|m(0)|E_0\rangle|^2 \mathcal{F}(E - E_0), \quad (2.19)$$

jossa

$$\mathcal{F}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-iE(\tau-\tau')} G^+(x(\tau), x(\tau')). \quad (2.20)$$

Ilmaisimen vastefunktio  $\mathcal{F}(E)$  on riippumaton ilmaisimen ominaisuuksista ja määräytyy positiivisen taaajuuden Wightmanin funktion  $G^+$  (1.36) avulla. Se edustaa ”hiukkasten” kylpyä, jonka ilmaisim havaitsee liikkeensä seurauksena. Jäljelle jäänyt tekijä edustaa ilmaisimen valikoivuutta koskien tätä kylpyä ja se riippuu ilmaisimen sisäisestä rakenteesta.

Niissä tapauksissa, joissa ilmaisimen liikerata Minkowskin avaruudessa on muotoa

$$G^+(x(\tau), x(\tau')) = g(\Delta\tau)$$

$$\Delta\tau \equiv \tau - \tau',$$

jollekin funktiolle  $g$ , systeemi on muuttumaton aikasiirrosta ilmaisimen koordinaatistossa ( $\tau \rightarrow \tau + \text{vakio}$ ). Tämä tarkoittaa sitä, että ilmaisim on tasapainossa kentän  $\phi$  kanssa siten, että ilmaisimen absorboimien kvanttien lukumäärä ominaisaikayk-

sikköä  $\tau$  kohden pysyy vakiona. Jos tämä lukumäärä on nolasta poikkeava niin virittymistodennäköisyys hajaantuu, sillä viritysamplitudi lasketaan äärettömän ominaisaikavälin yli. Tämä nähdään yhtälöstä (2.20), sillä Whightmanin funktio riippuu nyt vain termistä  $\tau - \tau'$ . Näin ollen

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(E) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-iE\Delta\tau} g(\Delta\tau) \quad | \quad d\tau \rightarrow d(\Delta\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\tau) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-iE\Delta\tau} g(\Delta\tau). \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\tau) e^{-iE\Delta\tau} g(\Delta\tau) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\end{aligned}$$

Tämä äärettömyys voidaan välttää käsittelemällä virittymistodennäköisyyttä ominaisaikayksikköä kohden, jolloin yhtälö (2.19) saadaan muotoon

$$c^2 \sum_E |\langle E|m(0)|E_0\rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\tau) e^{-i(E-E_0)\Delta\tau} G^+(\Delta\tau). \quad (2.21)$$

Seuraavien esimerkkien yksinkertaistamiseksi rajoitutaan käsittelemään massatonta skalaarikenttää  $\phi$ . Yleinen Greenin funktio saadaan yhtälöstä (1.43). Siitä saadaan Whightmanin funktio  $iD^+$  merkitsemällä massa nolaksi ja laskemalla integrandin  $f$  residy navan  $k^0 = |\mathbf{k}|$  ympäri pitkin ympyrän kehää positiiviseen kiertosuuntaan, kuten nähdään kuvasta 1.

$$\begin{aligned}\text{Res}(f, |\mathbf{k}|) &= \lim_{k^0 \rightarrow |\mathbf{k}|} (k^0 - |\mathbf{k}|) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-ik^0(t-t')}}{(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2} \\ &= \lim_{k^0 \rightarrow |\mathbf{k}|} (k^0 - |\mathbf{k}|) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-ik^0(t-t')}}{(k^0 - |\mathbf{k}|)(k^0 + |\mathbf{k}|)} \\ &= \lim_{k^0 \rightarrow |\mathbf{k}|} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-ik^0(t-t')}}{k^0 + |\mathbf{k}|} \\ &= \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-i|\mathbf{k}|(t-t')}}{2|\mathbf{k}|},\end{aligned}$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned}iD^+(x, x') &= (2\pi)^{-4} \pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-i|\mathbf{k}|(t-t'-i\varepsilon)}}{|\mathbf{k}|} d^3k \\ D^+(x, x') &= (2\pi)^{-4} \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-i|\mathbf{k}|(t-t'-i\varepsilon)}}{|\mathbf{k}|} d^3k.\end{aligned}$$

Pieni imaginaariluku  $-i\varepsilon$ , jossa  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , on lisätty termiin  $t-t'$ , jotta funktio pysyisi analyyttisenä alemmassa kompleksisen  $(t-t')$ -tason puolikkaassa, eli nollakohta siirtyy reaaliakselilta ylempään puolitason. Tämä integraali voidaan ratkaista siirtymällä pallokoordinaatistoon, jolloin

$$\begin{aligned}
D^+(x, x') &= (2\pi)^{-4} \pi \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \frac{e^{i|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \cos\theta - i|\mathbf{k}|(t-t'-i\varepsilon)}}{|\mathbf{k}|} \\
&= \frac{2\pi^2}{(2\pi)^{-4}} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{e^{i|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \cos\theta - i|\mathbf{k}|(t-t'-i\varepsilon)}}{|\mathbf{k}|} \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \int_0^\pi \frac{1}{i|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \frac{e^{i|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \cos\theta - i|\mathbf{k}|(t-t'-i\varepsilon)}}{|\mathbf{k}|} \\
&= \frac{1}{8\pi^2 |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 (e^{i|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - e^{-i|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}) e^{-i|\mathbf{k}|(t-t'-i\varepsilon)}}{i|\mathbf{k}|^2} \\
&= \frac{1}{8i\pi^2 |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| (e^{i|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - e^{-i|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}) e^{-i|\mathbf{k}|(t-t'-i\varepsilon)} \\
&= \frac{1}{8i\pi^2 |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \int_0^\infty \left[ \frac{e^{i|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - i|\mathbf{k}|(t-t'-i\varepsilon)}}{i|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - i(t-t'-i\varepsilon)} - \frac{e^{-i|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - i|\mathbf{k}|(t-t'-i\varepsilon)}}{-i|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - i(t-t'-i\varepsilon)} \right] \\
&= \frac{1}{8\pi^2 |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - (t-t'-i\varepsilon)} + \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| + (t-t'-i\varepsilon)} \right] \\
&= \frac{1}{8\pi^2 |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \cdot \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| + (t-t') - i\varepsilon + |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - (t-t') + i\varepsilon}{(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - (t-t') + i\varepsilon)(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| + (t-t') - i\varepsilon)} \\
&= \frac{1}{8\pi^2 |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \cdot \frac{2|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2 - (t-t'-i\varepsilon)^2} \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{(t-t'-i\varepsilon)^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}
\end{aligned}$$

Lopputulokseksi saadaan siis

$$D^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2 [(t-t'-i\varepsilon)^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2]} \quad (2.22)$$

Inertiaalisen liikeradan tapauksessa (2.18) yhtälön (2.22) nimittäjä ilman vakio-

kerrointa menee muotoon

$$\begin{aligned}
(t - t' - i\varepsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 &= (\Delta\tau(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} - i\varepsilon)^2 - |\Delta\tau\mathbf{v}(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}|^2 \\
&= (\Delta\tau(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}})^2 - \Delta\tau(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}i\varepsilon - \varepsilon^2 \\
&\quad - (\Delta\tau|\mathbf{v}|(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}})^2 \\
&= (1 - v^2)(\Delta\tau(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}})^2 - \Delta\tau i \underbrace{(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}\varepsilon}_{=\varepsilon} - \varepsilon^2 \\
&= (\Delta\tau)^2 - \Delta\tau i\varepsilon - \varepsilon^2 \\
&= (\Delta\tau - i\varepsilon)^2.
\end{aligned}$$

Tässä positiivinen tekijä  $(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$  absorboitiin lukuun  $\varepsilon$ . Näin ollen Whightmanin funktio saa muodon

$$D^+(\Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2(\Delta\tau - i\varepsilon)^2}. \quad (2.23)$$

Nyt yhtälön (2.21) integraali voidaan laskea käyttämällä residylaskentaa kulkemalla pitkin ääretöntä puoliympyrää alemmassa  $\Delta\tau$ -puolitasossa, sillä  $E - E_0 > 0$ . Koska integrandin napa on  $\Delta\tau = i\varepsilon$ , joka on ylemmässä puolitasossa, niin integroinnin tulos on nolla. Eli kuten odotettiin, niin hiukkasia ei tässä tapauksessa havaita.

### 3 Unruh-ilmio

Edellisissä kappaleissa rakennettiin teoreettinen pohja Unruh-ilmion laskemiselle. Tässä kappaleessa lasketaan kahdella eri tavalla kiihtyvän havaitsijan havaitsema lämpökylpy. Ensin lasketaan käyttäen kappaleessa 2.3 laskettua viritysamplitudia ja sitten käyttämällä kappaleen 2.1 tavoin koordinaattimuunnosta. Lopulta pohditaan mikä fysikaalinen merkitys tällä ilmiöllä on ja millaisia vastaväitteitä siihen on esitetty.

#### 3.1 Tasaisesti kiihtyvä hiukkasilmaisin

Kappaleessa 2.3 laskettiin ratkaisu yhtälölle (2.19) käyttäen Wightmanin funktiota, joka on muotoa (2.22). Inertiaalisen liikkeen tapauksessa hiukkasia ei havaittu. Tarkastellaan nyt hiukkasilmaisinta, joka on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä.

Ilmaisim, joka kulkee pitkin hyperbolista rataa  $(t,z)$ -tasossa eli

$$x = y = 0, \quad z = (t^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = \text{vakio}, \quad (3.1)$$

kiihdyttää tasaisesti kiihtyvyydellä  $\alpha^{-1}$  ilmaisimen koordinaatistossa. Ilmaisimen ominasiaika  $\tau$  riippuu ajasta  $t$  hyperbolisen käyrän ominaisuuksien mukaisesti eli

$$t = \alpha \sinh(\tau/\alpha).$$

Näin ollen yhtälön (2.22) nimittäjä saadaan muotoon

$$\begin{aligned} (t - t' - i\varepsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 &= (\alpha \sinh \frac{\tau}{\alpha} - \alpha \sinh \frac{\tau'}{\alpha} - i\varepsilon)^2 \\ &\quad - [(\alpha^2 \sinh^2 \frac{\tau}{\alpha} + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} - (\alpha^2 \sinh^2 \frac{\tau'}{\alpha} + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}]^2 \end{aligned}$$

Käytetään hyväksi identiteettejä

$$\begin{aligned} \sinh x - \sinh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \cosh x - \cosh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}, \end{aligned}$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
(t - t' - i\varepsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 &= \left(2\alpha \cosh \frac{\tau + \tau'}{2\alpha} \sinh \frac{\tau - \tau'}{2\alpha} - i\varepsilon\right)^2 \\
&\quad - \left(2\alpha \sinh \frac{\tau + \tau'}{2\alpha} \sinh \frac{\tau - \tau'}{2\alpha}\right)^2 \\
&= 4\alpha^2 \cosh^2 \frac{\tau + \tau'}{2\alpha} \sinh^2 \frac{\tau - \tau'}{2\alpha} - 4\alpha i\varepsilon \cosh \frac{\tau + \tau'}{2\alpha} \sinh \frac{\tau - \tau'}{2\alpha} \\
&\quad - \varepsilon^2 - \sinh^2 \frac{\tau + \tau'}{2\alpha} \sinh^2 \frac{\tau - \tau'}{2\alpha} \\
&= 4\alpha^2 \sinh^2 \frac{\tau - \tau'}{2\alpha} - 4\alpha i\varepsilon \underbrace{\cosh \frac{\tau + \tau'}{2\alpha}}_{=\varepsilon} \sinh \frac{\tau - \tau'}{2\alpha} - \varepsilon^2 \\
&= 4\alpha^2 \left( \sinh^2 \frac{\tau - \tau'}{2\alpha} - \frac{i\varepsilon}{\alpha} \sinh \frac{\tau - \tau'}{2\alpha} - \frac{\varepsilon^2}{4\alpha^2} \right) \\
&= 4\alpha^2 \left( \sinh \frac{\tau - \tau'}{2\alpha} - \frac{i\varepsilon}{2\alpha} \right)^2
\end{aligned}$$

Lukuun  $\varepsilon$  absorboitiin taas positiivinen termi. Samoin siitä voidaan ottaa irti positiivinen termi, sillä riittää, että nollakohta pysyy ylemmässä puolitasossa, jolloin analyttisyys säilyy. Koska  $\varepsilon$  on hyvin pieni, voidaan käyttää approksimoiteja

$$\sinh i\varepsilon \approx i\varepsilon \quad \text{ja} \quad \cosh i\varepsilon \approx 1.$$

Otetaan vielä käyttöön identiteetti

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,$$

jolloin

$$\begin{aligned}
(t - t' - i\varepsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 &= 4\alpha^2 \left( \sinh \frac{\tau - \tau'}{2\alpha} \cosh i\varepsilon - \cosh \frac{\tau - \tau'}{2\alpha} \sinh \frac{i\varepsilon}{2\alpha} \right)^2 \\
&\approx 4\alpha^2 \sinh^2 \left( \frac{\tau - \tau'}{2\alpha} - \frac{i\varepsilon}{\alpha} \right),
\end{aligned}$$

Nyt yhtälö (2.22) saadaan siis lopulta muotoon

$$D^+(\Delta\tau) = - \left[ 16\pi^2 \alpha^2 \sinh^2 \left( \frac{\tau - \tau'}{2\alpha} - \frac{i\varepsilon}{\alpha} \right) \right]^{-1}.$$



Käyttämällä identiteetejä

$$\begin{aligned}\csc^2(\pi x) &= \pi^{-2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x - k)^{-2} \\ \sin(ix) &= i \sinh x,\end{aligned}$$

jolloin

$$(\sinh^2 x)^{-1} = [(-i)^2 \sin^2(-ix)]^{-1} = -\csc^2(ix),$$

voidaan edellinen yhtälö kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}D^+(\Delta\tau) &= (16\pi^2\alpha^2)^{-1}\pi^{-2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{i}{\pi} \left( \frac{\tau - \tau'}{2\alpha} - \frac{i\varepsilon}{\alpha} \right) - k \right]^{-2} \\ &= (16\pi^2\alpha^2)^{-1}\pi^{-2} \left( \frac{i}{2\pi\alpha} \right)^{-2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Delta\tau - 2i\varepsilon + 2\pi i\alpha k)^{-2} \\ &= -(4\pi^2)^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Delta\tau - 2i\varepsilon + 2\pi i\alpha k)^{-2}\end{aligned}$$

Tämä voidaan nyt sijoittaa yhtälöön (2.21) ja siinä esiintyvä Fourier'n muunnos voidaan laskea residylaskennan avulla. Integradin  $f$  kaksinkertaiset navat ovat kohdissa  $\Delta\tau = 2i\varepsilon - 2\pi i\alpha k \equiv g(k)$ . Samoin kuin inertiaalisen radan tapauksessa, niin tässäkin voidaan kulkea ääretöntä puoliympyrää alemmassa  $\Delta\tau$ -puolitasossa negatiiviseen kiertosuuntaan. Silloin navat, joilla  $k \leq 0$ , häviävät. Residyksi navoille, joilla  $k > 0$  saadaan

$$\begin{aligned}\text{Res}(f, 2i\varepsilon - 2\pi i\alpha k) &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow g(k)} \frac{d}{d\Delta\tau} \left[ (\Delta\tau - g(k))^2 \frac{e^{-i(E-E_0)\Delta\tau}}{(\Delta\tau - g(k))^2} \right] \\ &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow g(k)} [-i(E - E_0)] e^{-i(E-E_0)\Delta\tau} \\ &= -i(E - E_0) e^{-2(E-E_0)(\pi\alpha k - \varepsilon)}.\end{aligned}$$

Tässä vaiheessa voidaan ottaa raja-arvo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , jolloin yhtälö (2.21) saadaan muotoon

$$c^2 \sum_E |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2 \frac{-2\pi i}{-4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -i(E - E_0) e^{-2\pi(E-E_0)\alpha k} \right]$$

Summaus yli termin  $k$  on ääretön geometrinen sarja, jolloin viritysamplituliksi saadaan lopulta

$$\begin{aligned} & \frac{c^2}{2\pi} \sum_E (E - E_0) |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2 \left( \frac{1}{1 - e^{-2\pi(E-E_0)\alpha}} - 1 \right) \\ &= \frac{c^2}{2\pi} \sum_E \frac{(E - E_0) |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2}{e^{2\pi(E-E_0)\alpha} - 1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Yhtälössä esiintyy Planckin tekijä  $[e^{2\pi(E-E_0)\alpha} - 1]^{-1}$ , mikä viittaa siihen, että tasapainotila kiihdytetyn ilmaisimen ja tilassa  $|0_M\rangle$  olevan kentän  $\phi$  välillä on sama kuin siinä tapauksessa, kun ilmaisin olisi pysynyt kiihdyttämättömänä, mutta olisi upotettuna lämpökylpyyn lämpötilassa

$$T = 1/2\pi\alpha k_B = \text{kiihdytys}/2\pi k_B, \quad (3.3)$$

missä  $k_B$  on Boltzmannin vakio. Tätä ilmiötä, jossa kiihtyvässä liikkeessä oleva havaitsija kokee olevansa lämpökylvyssä, sanotaan Unruh-ilmiöksi.

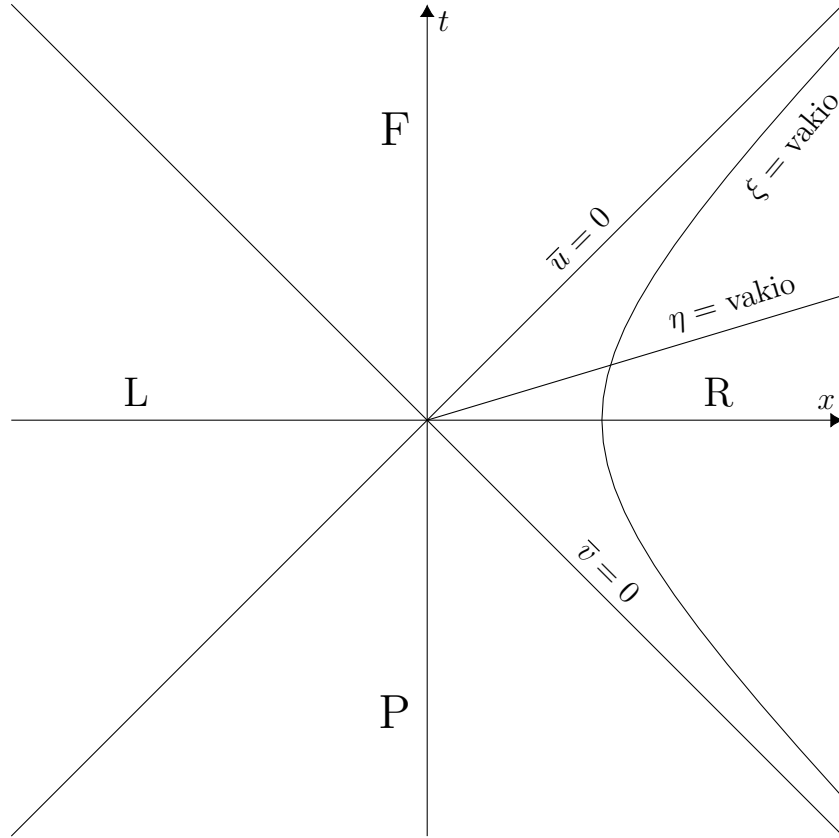
### 3.2 Rindlerin koordinaatisto

Seuraavaksi käytetään koordinaattimuunnosta ilmiön johtamiseen. Vaikka edellistä tapausta käsiteltiin neliulotteisessa avaruudessa, niin käytössä oli periaattessa vain yksi paikkakoordinaatti, sillä kiihdytys tapahtui suoraa linjaa pitkin. Eli vaikka tarkasteltaisiin vain kaksiulotteista tapausta, niin samat laskut päteisivät myös neliulotteiseen tapaukseen. Työskennellään siis kaksiulotteisessa Minkowskin avaruudessa, jossa on metriikka (2.3) tai (2.4), jolloin

$$ds^2 = d\bar{u}d\bar{v} = dt^2 - dx^2. \quad (3.4)$$

Tässä nollakoordinaattien päälle on asetettu viiva helpottamaan vertailua myöhempien tuloksien kanssa. Tehdään seuraavanlainen koordinaattimuunnos

$$\begin{aligned} t &= a^{-1} e^{a\xi} \sinh a\eta \\ x &= a^{-1} e^{a\xi} \cosh a\eta, \end{aligned}$$



Kuva 4. Rindlerin koordinaatit Minkowskin avaruudessa. Aikakoordinaatit ( $\eta = \text{vakio}$ ) ovat suoria viivoja origon läpi ja paikkakoordinaatit ( $\xi = \text{vakio}$ ) ovat hyperboleja, joiden asymptootit ovat suorat  $\bar{u} = 0$  ja  $\bar{v} = 0$ . Asymptootit jakavat avaruuden neljään alueeseen: R, L, F ja P. Nämä pitää peittää eri koordinaattitilkuilla, sillä Rindlerin koordinaatit eivät ole analyttisiä yli pisteen  $\bar{u} = \bar{v} = 0$ .

jossa  $a = \text{vakio} > 0$  ja  $-\infty < \eta, \xi < \infty$ . Nollakoordinaateissa

$$\bar{u} = -a^{-1}e^{-a\eta} \quad (3.5)$$

$$\bar{v} = a^{-1}e^{a\xi}, \quad (3.6)$$

jossa  $u = \eta - \xi$  ja  $v = \eta + \xi$ . Nyt (3.4) saadaan muotoon

$$ds^2 = e^{2a\xi}dudv = e^{2a\xi}(d\eta^2 - d\xi^2). \quad (3.7)$$

Koordinaatit  $(\eta, \xi)$  peittävät vain neljänneksen Minkowskin avaruudesta: kiilan  $x > |t|$ , joka näkyy kuvassa 4. Viivat joilla  $\eta$  on vakio ovat suoria ( $x \propto t$ ) ja viivat joilla  $\xi$  on vakio ovat hyperboleja, joille

$$x^2 - t^2 = a^{-2}e^{2a\xi} = \text{vakio}. \quad (3.8)$$

Näin ollen ne esittävät tasaisesti kiihtyvien havaitsijoiden maailmanviivoja, kuten todettiin edellisessä kappaleessa. Kun verrataan yhtälöitä (3.1) ja (3.8) huomataan, että

$$ae^{-a\xi} = \alpha^{-1} = \text{itseiskiihtyvyys}. \quad (3.9)$$

Näin ollen käyrät, joilla on suuri positiivinen  $\xi$  (kaukana origosta), kuvaavat heikosti kiihdytettyjä havaitsijoita. Hyperboleilla, jotka kulkevat läheltä origoa, on sen sijaan suuri negatiivinen  $\xi$  ja siten suuri itseiskiihtyvyys. Kaikki hyperbolit lähestyvät asymptoottisesti valokartiota (null rays) eli suorita, joilla  $\bar{u} = 0$  ja  $\bar{v} = 0$  (tai  $u = \infty$  ja  $v = -\infty$ ). Tämä tarkoittaa, että kiihdytetyt havaitsijat lähestyvät valonnopeutta, kun  $\eta \rightarrow \pm\infty$ . Havaitsijan itseisaika  $\tau$  riippuu koordinaateista  $\xi$  ja  $\eta$  seuraavasti:

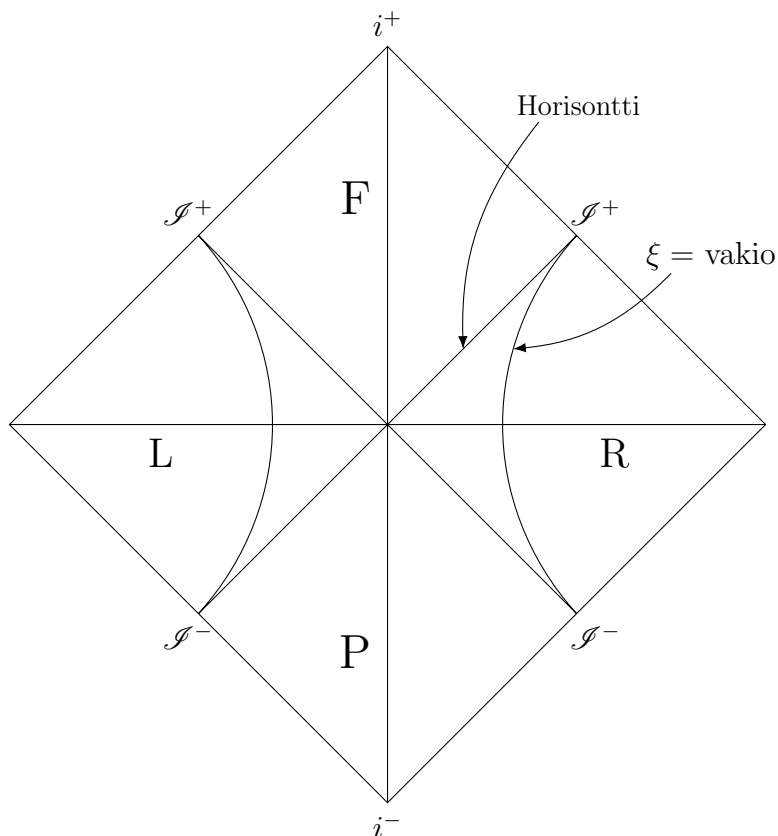
$$\tau = e^{a\xi}\eta. \quad (3.10)$$

Systeemi  $(\eta, \xi)$  tunnetaan Rindlerin koordinaattisysteeminä [2, s. 61] ja osio  $x > |t|$  on nimeltään Rindlerin kiila (Rindler wedge). Tasaisesti kiihtyviä havaitsijoita sanotaan Rindlerin havaitsijoiksi.

Toinen Rindlerin kiila,  $x < |t|$ , saadaan peilaamalla ensin  $t$ - ja sitten  $x$ -akseli. Se voidaan tehdä muuttamalla koordinaattimuunnoksien etumerkit. Nimetään vasemman ja oikean puoleisia kiiloja kirjaimin L (left) ja R (right). Merkkien vaihdokset tarkoittavat periaatteessa, että aika kulkee kiilassa L eri suuntaan eli ajan kasvaessa  $\eta$  laskee.

Rindlerin kiilat L ja R eivät ole kausaalisesti yhteydessä toisiinsa, sillä Rindlerin havaitsijat voivat lähestyä, mutta eivät ylittää, valokartiota, joka toimii tapahtumahorisonttina. Kuvan 4 jäljelle jääneet alueet ovat tulevaisuus F (future) ja menneisyys P (past). Kiiloissa F ja P olevat tapahtumat voidaan liittää kiiloihin L ja R valonluonteisin suorien.

Kausaali rakenne ilmenee myös Penrosen diagrammissa (kuva 5), jossa Rindlerin havaitsijat leikkaavat kohdan  $\mathcal{I}^\pm$  tosin kuin asymptoottisesti inertiaaliset havaitsi-



Kuva 5. Konformi diagrammi Rindlerin koordinaattisysteemistä. Alueet R, L, F ja P ovat nyt timantinmuotoisia alueita. Ajanluonteiset käyrät  $\xi = \text{vakio}$  leikkaavat reunat  $\mathcal{S}^\pm$ , eivätkä pisteitä  $i^\pm$ . Selvästi tapahtumia alueessa F ei voi nähdä alueessa R, joten suora  $\bar{u} = 0$  toimii tapahtumahorisonttina, muodostaen suoran  $\bar{v} = 0$  kanssa valokartion.

jat, jotka leikkaavat kohdat  $i^\pm$ . Näin ollen valokartio toimii tulevaisuuden tapahtumahorisonttina ja tapahtumat alueessa F eivät voi kasuaalisti vaikuttaa timantinmuotoiseen alueeseen R.

Tarkastellaan kaksiulotteista massatonta skalaarikenttää  $\phi$  kaksiulotteisessa Minkowskin aika-avaruudessa. Aaltoyhtälöllä

$$\square\phi \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} = 0$$

on tavalliset ortonormaalit moodiratkaisut

$$\bar{u}_k = (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega t}, \quad (3.11)$$

joissa  $\omega = |k| > 0$  ja  $-\infty < k < \infty$ . Näillä moodeilla on positiivinen taajuus

suhteessa ajanluonteiseen Killingin vektoriin  $\partial t$  siten, että ne toteuttavat yhtälön

$$\mathcal{L}_{\partial t} \bar{u}_k = \partial_t \bar{u}_k = -i\omega \bar{u}_k, \quad (3.12)$$

jossa  $\mathcal{L}_X$  on Lien derivaatta. Moodit, joilla  $k > 0$ , muodostuvat oikealle liikkuvista aalloista

$$(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega \bar{u}},$$

jotka kulkevat pitkin suoraa  $\bar{u} = \text{vakio}$ . Kun  $k < 0$ , aallot liikkuvat vasemmalle pitkin suoraa  $\bar{v} = \text{vakio}$  eli moodit ovat muotoa

$$(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega \bar{v}}.$$

Minkowskin vakuunitila  $|0_M\rangle$  ja siihen liittyvä Fockin avaruus saadaan muodostettua laajentamalla kenttä  $\phi$  moodien  $\bar{u}_k$  avulla, kuten on esitetty kappaleessa 1.2.

Rindlerin alueilla R ja L voidaan muodostaa toisenlainen kvantisointikuvaus, kun käytetään moodien  $\bar{u}_k$  vastinkappaleita Rindlerin koordinaatistossa eli moodeja  $u_k$ . Metriikka (3.7) on konformi koko Minkowskin avaruudelle sillä, konformikuvauksella  $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{-2a\xi} g_{\mu\nu}$ , se palautuu muotoon  $d\eta^2 - d\xi^2$ , jossa  $-\infty < \eta, \xi < \infty$ . Koska aaltoyhtälö on konformisti muuttumaton, se voidaan kirjoittaa Rindlerin koordinaateissa:

$$e^{2a\xi} \square \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0. \quad (3.13)$$

Tälle on olemassa moodiratkaisut

$$u_k = (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{ik\xi \pm i\omega\eta} \quad (3.14)$$

$$\omega = |k| > 0, \quad -\infty < k < \infty.$$

Ylempi merkki yhtälössä (3.14) viittaa alueeseen L ja alempi merkki alueeseen R. Merkin vaihtumisen voidaan ajatella johtuvan joko ”ajan kääntymisestä” tai siitä, että oikealle kulkeva aalto kulkee kohti laskevia koordinaatin  $\xi$  arvoja alueessa R

ja kohti nousevia arvoja alueessa L. Joka tapauksessa moodit (3.14) toteuttavat normalisaatioehdot (2.9). Niillä on positiivinen taajuus suhteessa ajanluonteiseen Killingvektoriin  $+\partial_\eta$  alueessa R ja  $-\partial_\eta$  alueessa L siten, että ne toteuttavat yhtälön

$$\mathcal{L}_{\pm\partial_\eta} u_k = -i\omega u_k \quad (3.15)$$

yhtälön (3.12) sijaan.

Se, että moodit (3.14) ovat samaa muotoa kuin moodit (3.11), seuraa systeemin konformista triviaaliudesta, eli siitä, että Rindlerin avaruus on konformi Minkowskin avaruudelle ja aaltoyhtälö (1.5) on konformisti muuttumaton.

Määritellään termit

$${}^R u_k = \chi_R(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{ik\xi - i\omega\eta} \quad (3.16)$$

$${}^L u_k = \chi_L(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{ik\xi + i\omega\eta}, \quad (3.17)$$

missä  $\chi_{R,L}$  on alueen R tai L karakteristinen funktio.

Joukko (3.16) on täydellinen Rindlerin alueessa R ja joukko (3.17) alueessa L, mutta kumpikaan ei ole täydellinen koko Minkowskin avaruudessa. Yhdessä joukot ovat kuitenkin niin täydellisiä, että suorat, joilla  $\eta = \text{vakio}$ , alueiden L ja R läpi ovat Cauchyn pintoja koko aika-avaruudelle. Sen vuoksi moodit (3.16) ja (3.17) voidaan analyttisesti jatkaa alueille F ja P ( $a$  muuttuu imaginääriseksi). Näin ollen nämä Rindlerin moodit ovat yhtä pätevä kanta kentän  $\phi$  kvantisoinnille kuin Minkowskin avaruuden kanta (3.11).

Kenttä voidaan laajentaa siis kummassakin joukossa eli

$$\phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k \bar{u}_k + a_k^\dagger \bar{u}_k^*) \quad (3.18)$$

tai

$$\phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (b_k^{(1)L} u_k + b_k^{(1)\dagger L} u_k^* + b_k^{(2)R} u_k + b_k^{(2)\dagger R} u_k^*). \quad (3.19)$$

Nämä laajennukset tuottavat kaksi eri Fockin avaruutta ja kaksi eri tyhjiötä:  $|0_M\rangle$  ja  $|0_R\rangle$ , joissa M ja R viittaavat Minkowskin ja Rindlerin avaruuksiin. Tyhjiöt määritellään seuraavasti:

$$a_k|0_M\rangle = 0$$

$$b_k^{(1)}|0_R\rangle = b_k^{(2)}|0_R\rangle = 0.$$

Rindlerin moodit eivät ole analyttisiä alueiden L ja R rajalla  $\bar{u} = \bar{v} = 0$ , sillä moodissa tapahtuu merkin vaihdos. Minkowskin moodit taas ovat analyttisiä, eivät vain reaaliakseleilla  $\bar{u}$  ja  $\bar{v}$ , vaan myös niiden kompleksitasojen alemmissa puoliskoissa. Tämä analyttisyys on totta kaikille funktioille, jotka muodostuvat vain positiivisten taajuuksien Minkowskin moodeista. Näin ollen Rindlerin moodien on epäanalyttisyytensä vuoksi sisällettävä myös negatiivisia taajuuksia. Kuten kapaleessa 2.2 todettiin, niin negatiivisten ja positiivisten taajuuksien sekoittumisen vuoksi Rindlerin tyhjiö ei voi olla sama kuin Minkowskin tyhjiö. Tämä tarkoittaa sitä, että yhteen moodijoukkoon liittyvä tyhjiö sisältää toiseen moodijoukkoon liittyviä hiukkasia.

Jotta voitaisiin määritellä, mitä Rindlerin avaruuden hiukkasia voidaan havaita Minkowskin tyhjiössä, pitää ensin määritellä Bogolubovin muunnokset kahden moodijoukon välillä. Tämä voitaisiin tehdä käyttämällä yhtälöitä (2.14), mutta se voidaan tehdä mukavammin Unruh'n [5] esittelemällä tavalla eli huomaamalla, että vaikka  ${}^R u_k$  ja  ${}^L u_k$  ovat epäanalyttisiä, niin epänormalisoidut kombinaatiot

$${}^R u_k + e^{-\pi\omega/a} {}^L u_{-k}^* \tag{3.20}$$

$${}^R u_{-k}^* + e^{\pi\omega/a} {}^L u_k \tag{3.21}$$

ovat analyttisiä ja rajoitettuja samalla alueella kun Minkowskin mooditkin. Tämä voidaan nähdä kun kirjoitetaan kombinaatiot Minkowskin koordinaateissa.

Tutkitaan kombinaatiota (3.20). Se voidaan kirjoittaa Minkowskin koordinaa-



teissa sijoittamalla siihen (3.16), jolloin saadaan

$${}^R u_k + e^{-\pi\omega/a} {}^L u_{-k}^* = (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} (\chi_R e^{ik\xi - i\omega\eta} + e^{-\pi\omega/a} \chi_L e^{-i(-k)\xi - i\omega\eta}).$$

Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa  $k < 0$ . Kun tiedetään, että  $\omega = |k|$  ja että  $u = \eta - \xi$ , niin yhtälö saadaan muotoon

$${}^R u_k + e^{-\pi\omega/a} {}^L u_{-k}^* = (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} (\chi_R e^{-i\omega u} + e^{-\pi\omega/a} \chi_L e^{-i\omega u}).$$

Muistamalla koordinaattimuunnos (3.5), jolloin

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -a^{-1} e^{-a\bar{u}} \\ u &= -\frac{\ln(-a\bar{u})}{a}, \end{aligned}$$

saadaan yhtälö muotoon

$${}^R u_k + e^{-\pi\omega/a} {}^L u_{-k}^* = (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} (\chi_R e^{i\omega \ln(-a\bar{u})/a} + e^{-\pi\omega/a} \chi_L e^{i\omega \ln(-a\bar{u})/a}).$$

Jotta kombinaatio voisi olla analyyttinen alemman kompleksitason puolikkaassa, haaraleikkauksen (branch cut) tulee sijaita ylemmässä puolitasossa, jolloin  $\ln(-1) = -i\pi$ . Selkeästi  $\bar{u}$  on negatiivinen alueessa R ja positiivinen alueessa L, jolloin

$$\begin{aligned} {}^R u_k + e^{-\pi\omega/a} {}^L u_{-k}^* &= (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} (\chi_R e^{i\omega \ln(a|\bar{u}|)/a} + e^{-\pi\omega/a} \chi_L e^{i\omega \ln(-a|\bar{u}|)/a}) \\ &= (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} (\chi_R e^{i\omega \ln(a|\bar{u}|)/a} + e^{-\pi\omega/a} \chi_L e^{i\omega(-i\pi)/a} e^{i\omega \ln(a|\bar{u}|)/a}) \\ &= (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} (\chi_R (a|\bar{u}|)^{i\omega/a} + e^{-\pi\omega/a} e^{\pi\omega/a} \chi_L (a|\bar{u}|)^{i\omega/a}) \\ &= \frac{a^{i\omega/a}}{\sqrt{4\pi\omega}} |\bar{u}|^{i\omega/a}. \end{aligned}$$

Samoin, kun  $k < 0$ , saadaan tulokseksi

$${}^R u_k + e^{-\pi\omega/a} {}^L u_{-k}^* = \frac{a^{i\omega/a}}{\sqrt{4\pi\omega}} |\bar{v}|^{i\omega/a}.$$

Kombinaatio (3.20) on siis selkeästi analyyttinen kuljettaessa pisteen  $\bar{u} = \bar{v} = 0$  yli ja myös alemmassa kompleksitason puolikkaassa. Epäanalyyttinen piste origossa ei

haittaa sillä se kuuluu haaraleikkaukseen, jolloin se kierretään alemman kompleksitason kautta. Samat laskut ja päättelyt pätevät myös kombinaatiolle (3.21).

Koska moodeilla (3.20) ja (3.21) on samat positiivisten taajuuksien analyyttiset ominaisuudet kuin Minkowskin moodeilla, niillä on myös oltava sama vakuumitila  $|0_M\rangle$ . Kenttä  $\phi$  voidaan siis laajentaa, yhtälön (3.18) sijaan, käyttämällä moodeja (3.20) ja (3.21). Näin saadaan

$$\begin{aligned} \phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [2 \sinh(\pi\omega/a)]^{-\frac{1}{2}} [d_k^{(1)} (e^{\pi\omega/2a} R u_k + e^{-\pi\omega/2a} L u_{-k}^*) \\ + d_k^{(2)} (e^{-\pi\omega/2a} R u_{-k}^* + e^{\pi\omega/2a} L u_k)] + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

jossa

$$d_k^{(1)} |0_M\rangle = d_k^{(2)} |0_M\rangle = 0.$$

Yhtälöön on lisätty normalisoiva tekijä  $[2 \sinh(\pi\omega/a)]^{-\frac{1}{2}}$ , joka nähdään helposti kun huomioidaan ehdot (2.9).

Operaattorien  $b_k^{(1,2)}$  relaatiot operaattoreihin  $d_k^{(1,2)}$  saadaan ottamalla sisätulot  $(\phi, {}^R u_k)$  ja  $(\phi, {}^L u_k)$ , sijoittamalla kenttä  $\phi$  laajennettuna ensin yhtälön (3.19) ja sitten yhtälön (3.22) mukaisesti. Lopputulokseksi saadaan

$$b_k^{(1)} = [2 \sinh(\pi\omega/a)]^{-\frac{1}{2}} [e^{\pi\omega/2a} d_k^{(2)} + e^{-\pi\omega/2a} d_{-k}^{(1)\dagger}] \quad (3.23)$$

$$b_k^{(2)} = [2 \sinh(\pi\omega/a)]^{-\frac{1}{2}} [e^{\pi\omega/2a} d_k^{(1)} + e^{-\pi\omega/2a} d_{-k}^{(2)\dagger}]. \quad (3.24)$$

Näistä Bogolubovin muunnoksista saadaan relaatio tilojen  $|0_R\rangle$  ja  $|0_M\rangle$  välille.

Tarkastellaan nyt kiihdyttävää Rindlerin havaitsijaa, jolle  $\xi = \text{vakio}$ . Yhtälöstä (3.10) nähdään, että havaitsijan itseisaika on verrannollinen termiin  $\eta$ . Silloin voidaan odottaa, että Rindlerin havaitsijan tyhjiö olisi  $|0_R\rangle$ , sillä sen tila liittyy moodeihin, joilla on positiivinen taajuus suhteessa koordinaattiin  $\eta$ . Näin ollen, yhtälön (3.19) perusteella, Rindlerin havaitsija alueessa L (vastaavasti R) havaitsee hiukkasia lukumääräoperaattorin  $b_k^{(1)\dagger} b_k^{(1)}$  (vastaavasti  $b_k^{(2)\dagger} b_k^{(2)}$ ) mukaisesti. Jos kenttä on

tilassa  $|0_M\rangle$  eli siinä ei ole Minkowskin avaruuden hiukkasia, niin yhtälöiden (3.23) ja (3.24) avulla voidaan laskea, että Rindlerin havaitsija näkee

$$\langle 0_M | b_k^{(1,2)\dagger} b_k^{(1,2)} | 0_M \rangle = e^{-\pi\omega/a} [2 \sinh(\pi\omega/a)]^{-1} = (e^{2\pi\omega/a} - 1)^{-1}$$

hiukkasta moodissa  $k$ . Tämä on täsmälleen Planckin spektri säteilylle lämpötilassa  $T_0 = a/(2\pi k_B)$ . Lämpötila  $T$ , jonka kiihdytetty havaitsija näkee, saadaan Tolmannin-Ehrenfestin relaatiosta

$$T(g_{\mu\nu} K^\mu K^\nu)^{\frac{1}{2}} = \text{vakio},$$

jossa termit  $K^\mu = \delta_0^\mu$  ovat ajanluonteisen Killingin vektorin komponentteja. Saadaan siis

$$T(g_{00}^M)^{\frac{1}{2}} = T_0(g_{00}^R)^{\frac{1}{2}}$$

Termi  $g_{00}^M$  saadaan metriikasta (3.7), jossa kiihdytetyn havaitsijan avaruuskoordinaatti pysyy vakiona, eli

$$g_{\mu\nu} = \frac{e^{2a\xi}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Termi  $g_{00}^R = \frac{1}{2}$ , sillä se saadaan normaalista Rindlerin avaruuden metriikasta. Tällöin

$$\begin{aligned} \frac{e^{2a\xi}}{2} T &= \frac{1}{2} T_0 \\ T &= e^{-2a\xi} T_0. \end{aligned}$$

Tästä saadaan, käyttämällä yhtälöä (3.9), lämpötilaksi  $T = 1/(2\pi\alpha k_B)$ , joka on täysin sama tulos kuin aikaisemmassa kappaleessa (3.3) laskettu tulos kiihdytetylle ilmaisimelle Minkowskin avaruudessa. Näitä kiihtyvässä liikkeessä olevan havaitsijan näkemiä hiukkasia sanotaan Rindlerin hiukkasiksi.

### 3.3 Rindlerin hiukkasten fysikaalinen merkitys

Edellä on nyt esitetty kaksi esimerkkiä, joissa kiihtyvässä liikkeessä oleva havaitsija näkee hiukkasia, vaikka kenttä  $\phi$  on vakuumitilassa  $|0_M\rangle$ , jossa inertiaalinen havaitsija ei siis havaitse mitään. Selvästi silti kiihtyvä ilmaisin absorboi energiaa, niin kuin

se olisi lämpökylvyssä. Silti on myös totta, että  $\langle 0_M | : T_{\mu\nu} : | 0_M \rangle = 0$ , joka ilmenee kappaleessa 1.4. Myös, kun tehdään tensorimuunnos kiihtyvään koordinaatistoon, saadaan taas  $\langle 0_M | : T'_{\mu\nu} : | 0_M \rangle = 0$ , joten sekä kiihtyvät että inertiaaliset havaitsijat ovat samaa mieltä siitä, että kentän  $\phi$  energiaimpulssitensori häviää. Mitä siis on tämä kiihtyvän havaitsijan näkemä lämpökylvyn energiajakauma?

Fulling [1] toi ilmi, että Rindlerin avaruuden hiukkasia ei voi identifioida Minkowskin avaruuden hiukkasten kanssa, sillä käsitys hiukkasesta on erilainen näissä kahdessa teoriassa. Tämä näkyy myös edellisessä kappaleessa, kun verrataan eri tyhjiöitä keskenään. Hiukkanen toisessa avaruudessa ei ole hiukkanen toisessa, joten Rindlerin hiukkasella ei ole samanlaista täyttä fysikaalista merkitystä kuin Minkowskin hiukkasella. Sitä on siksi kuvailtu myös fiktiiviseksi hiukkaseksi. Kirjassa [7] todetaan, että tämä kertoo ennemminkin perinteisen kvanttikenttäteorian hiukkasen määritelmän pätevän vain hyvin rajatuissa olosuhteissa. Mikä koetaan hiukkaseksi, olisi siis riippuvainen itse havaitsijasta.

Kun ilmaisin virittyy, myös kenttään ilmestyy kvantti eli sekä ilmaisimen että kentän energia kasvaa. Koska tila  $| 0_M \rangle$  ei voi tuottaa puuttuvaa energiaa, niin kirjassa [7] esitetään, että kiihdytyksen aiheuttava taho tuottaa sen. Eli kun ilmaisin kiihdyttää, niin sen kytkeytyminen kenttään  $\phi$  aiheuttaa kvantin emission, joka taas aiheuttaa vastustavan voiman kiihdyttävälle voimalle. Ulkoisen voiman tekemä työ vastuksen ylittämiseksi antaa puuttuvan energian, joka syötetään kenttään ilmaisimesta emittoidun kvantin muodossa ja itse ilmaisimeen, joka samanaikaisesti virittyy. Ilmaisimen kannalta kokonaisefekti on lopulta vain termisesti jakautuneen kvantin absorptio.

Unruh'n ja Waldin artikkelissa [9] muodostetaan inertiaalinen tulkinta kiihtyvälle hiukkasilmaisimelle Minkowskin avaruudessa. Vaikka ulkopuolisen inertiaalisen havaitsijan näkökulmasta kvanttikenttä on vakuuutilassa, niin sen pitää silti hyväksyä, että kiihtyvä ilmaisin virittyy. Inertiaalinen havaitsija tulkitsee Rindlerin hiukkasen

absorption Minkowskin hiukkasen emissiona. Emissio tapahtuu kuitenkin vain ilmaisimen virittyessä, joten virittymistä ei voi tulkita jarrutussäteilyn tai muun prosessin tuottaman Minkowskin kvantin itseabsorptioksi. Molempien havaitsijoiden mielestä kentän energia kasvaa, mutta inertiaalisen havaitsijan mielestä se kasvaa koska hiukkanen emittoitiin. Kiihtyvä havaitsija taas kokee, että energia laskee, sillä hiukkanen absorboitiin, mutta kokonaisuudessaan se nousee, sillä osittainen mittaus suoritettiin. Vaikuttaa siltä, että ilmaisimien virittyä absorboimalla osan tyhjiön fluktuaatiosta siinä kentän alueessa, jossa ilmaisimien sijaitsee. Tämä prosessi vapauttaa kausaalisesti riippumattomassa alueessa vastaavan fluktuaation muodostumaan oikeaksi hiukkasiksi. Tämä hiukkanen voidaan sitten havaita kyseisessä alueessa olevalla ilmaisimella. Kausaalisuuden rikkomiselta vältytään, sillä korrelaatioita näiden tapahtumien välillä voidaan huomata vasta mittauksia vertailemalla. Kiihtyvään ilmaisiin kytköksissä oleva inertiaalinen havaitsija ei siis näe emittoitua säteilyä, vaan se vain tulkitsee virittymisen emissioksi.

Edellä kuvattua ilmaisimen emittoimaa säteilyä kutsutaan Unruh-säteilyksi ja siihen on myös toisenlaisia näkökulmia. Paperissa [10] tuodaan esille tilanne, jossa tasaisesti kiihtyvä oskillaattori saavuttaa termisen tasapainon, joka on identtinen Unruh-lämpötilassa olevan inertiaalisen oskillaattorin kanssa. Kun tämä äärellisessä lämpötilassa oleva systeemi sitten liikkuu nollalämpötilassa olevassa tyhjiössä, voisi olettaa, että energiaa säteilisi. Paperissa tullaan lopputulokseen, että kiihdyttävä voima ja säteilyreaktio tasapainottavat toisensa, jolloin systeemi pysyy tasapainossa, eikä säteile ympäristöön.

Unruh käsittelee Unruh-säteilyä artikkelissaan [11]. Siinä hän toteaa, että vaikka kiihtyvä kappale on tasapainossa Unruh-lämpötilassa, se silti vaikuttaa kentän ominaisuuksiin. Näin ollen inertiaalinen ilmaisimien voi erottaa systeemin, jossa on lämpökylpy, Minkowskilaisesta systeemistä, ellei se ole kausaalisti lämpökylvyn ulottumattomissa. Inertiaalinen havaitsija, joka tarkastelee kenttää vain Rindlerin kii-

lasta, voi erottaa Rindlerin ja Minkowskin tyhjiöt toisistaan. Tämä ero riippuu kuitenkin vain paikanluonteisesta koordinaatista, jolloin eroavaisuuksien voidaan sanoa olevan sidoksissa oskillaattoriin. Eroavaisuus siis tarkoittaa säteilyä oskillaattorista. Tämä on verrattavissa tasaisesti kiihtyvään elektroniin, jonka ei sanota säteilevän, vaikka sähkömagneettinen kenttä sen ympärillä poikkeaa paikallaan olevan elektronin kentästä. Ei siis kannata puhua oskillaattorin säteilystä vaan siitä, muuttaako oskillaattori kentän mitattavia ominaisuuksia. Se, sanotaanko näitä muutoksia sitten ”säteilyksi” tai ”tyhjiön polarisaatioksi”, on ennemminkin semanttinen kuin fysikaalinen ongelma.

Unruh-ilmiö ei ole kaikkien hyväksymä. Papereissa [12] ja [13] ongelmaksi ilmoitetaan reunaehdot, eli toisin sanoen Rindlerin kiilat, joita ei Minkowskin avaruudessa ole olemassa. Näitä reunaehtoja ei voitaisi ylittää käyttämällä kombinaatioita (3.20) ja (3.21), jolloin Minkowskin tyhjiö ei ole preparatoitavissa oleva tila tasaisesti kiihtyvälle ilmaisimelle. Unruh-ilmiö taantuu silloin idealisoisuksi erikoistapaukseksi, eikä ole yleistettävissä koko Minkowskin avaruuteen. Vastauksena tähän Unruh ja Fulling toteavat paperissaan [14], että paperissa [13] tehdyt oletukset olisivat virheellisiä, johon vastauksena paperissa [15] todetaan, että ne eivät ole.

Boyer [16] toi esille, että täydellinen yhteys kiihdyksellä nollapistesäteilyssä ja Planckin jakaumalla, joka nähtiin skalaarikentällä, ei ilmene sähkömagneettisessa kentässä. Kuten skalaarikentän tapauksessa, myös sähkömagneettisessa kentässä kiihdyttävä monopoli-ilmaisimelle havaitsee säteilyä, joka on isotrooppista ja termistä, mutta säteilyn jakauma sisältää Planckin jakaumaa noudattavan termin lisäksi ylimääräisen termin. Havaittaja siis erottaa ovatko havaitut hiukkaset peräisin kiihdytyksestä vai lämpökylvystä.

Artikkelissaan [17] Matsas ja Vanzella toteavat Unruh-ilmiön olevan välttämätön standardin kvanttikenttäteorian johdonmukaisuuden kannalta. Vaikka ilmiö itsessään odottaa kokeellista varmistusta, niin monet muut jo mitatut ilmiöt riippuvat ilmiön

olemassaolosta. Unruh-ilmion luotettavuuden tulisi siis olla yhtä korkealla tasolla kuin itse kvanttikenttäteorian.

Unruh-ilmio on tasaisen avaruuden ilmio, mutta sitä vastaa kaarevassa avaruudessa Hawkingin säteily. Artikkelissa [4] Hawking saa tulokseksi, että musta aukko säteilee kuin se olisi musta kappale lämpötilassa  $\kappa/2\pi k_B$ , jossa  $\kappa$  on mustan aukon pinnan painovoima. Lämpötila on siis hyvin samanmuotoinen kuin Unruh-ilmiossa.

## 4 Unruh-ilmion kokeellinen todistaminen

Unruh-ilmiötä ei ole vielä kukaan havaittu kokeellisesti, vaikka yrityksiä on ollut lukuisia. Syy tähän johtuu tarvittavan kiihdytyksen suuruudesta. Kun otetaan mukaan luonnonvakiot, niin Unruh-lämpötila (3.3) saadaan muotoon

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B},$$

jossa  $\hbar$  on Planckin vakio,  $a$  on ominaiskiihtyvyys ja  $c$  on valonnopeus. Tämän perusteella, jotta saataisiin Unruh-lämpötilaksi yksi kelvin, tulisi kiihtyvyyden olla noin  $2,47 \cdot 10^{20} \text{ m/s}^2$ , joka vastaa kiihtymistä levosta valonnopeuteen noin 1,2 pikosekunnissa. Sen lisäksi, että näin suuri kiihtyvyys on hankala saavuttaa, kiihtyvyys on tuhoisa makroskooppiselle kappaleelle. Aika on muutenkin niin lyhyt, ettei termalisaatiota ehdi tapahtua. Kun kiihtyvyyttä pienennetään, niin silloin lämpötila laskee ja sen tarkka mittaaminen vaikeutuu.

Mittaamisen ongelmia on yritetty ratkaista lukuisin eri tavoin. Ensimmäinen tapa tutkia Unruh-ilmiötä oli tutkia elektroneita kiihdytettynä lämpömittareina [18]. Lineaarisisissa hiukkakiihdyttimissä saavutettavat kiihtyvyydet ovat kuitenkin niin pieniä, että termalisaation saavuttaminen veisi enemmän aikaa kuin universumi on ollut olemassa. Ratkaisuna tähän oli laittaa elektronit kiertämään ympyrärataa säilytysrenkaassa. Ilmion mittaaminen tapahtuisi tutkimalla spinien polarisaation muutosta. Kun elektronit kiertävät ympyräradalla, täytyy ottaa huomioon myös muita ilmiöitä ja Unruh-ilmiö ei välttämättä edes ole suoraan sovellettavissa tilanteeseen. Yksi ehdotus on, että tämän tapauksen Unruh-ilmiö on identtinen kokeellisesti havaitun Sokolov-Trenov-ilmion kanssa [19].

Moni ehdotettu koemenetelmä luottaa ulkopuoliseen havaintipaikkaan, joka ei välttämättä ole mahdollista, sillä ulkopuolelta katsottuna Unruh-säteily mahdollisesti kumoutuu kokonaan tai ainakin osittain [20]. Ratkaisuna voisi olla käyttää Berryn vaihetta [21]. Tässä ilmiössä, tietyissä olosuhteissa, kvanttisysteemin yhdeksi ominaisuudeksi muodostuu Berryn vaihe. Tämä vaihe on selvästi poikkeava kun verrataan



inertiaalista ja kiihdytettyä kvanttisysteemiä. Tämä ero johtuu siitä, että toinen ilmaisimien vuorovaikuttaa vakuumitilan kanssa ja toinen termisen tilan kanssa. Kiihtyvän ilmaisimen Berryn vaihe riippuu Unruh-lämpötilasta. Tämä tarkoittaa sitä, että Unruh-ilmiö muuttuu suoraan itse ilmaisimen ominaisuuksia, jolloin ei tarvitse luottaa Unruh-säteilyyn. Sen lisäksi erot tulevat esille jo niinkin matalissa kuin  $10^{17}$  m/s<sup>2</sup> kiihtyvyyksissä ja kiihdytyksen tarvitsee kestää vain nanosekunteja.

Unruh-ilmiöllä on myös vaikutus kahden kvanttisysteemin väliseen lomittumiseen. Kun toinen lomittuneista systeemeistä on inertiaalinen ja toista kiihdytetään tasaisesti niin yleisesti ottaen se johtaa lomittumisen heikkenemiseen [22]. Mitä suurempi kiihtyvyys sitä pienemmäksi lomittuminen laskee. Tätä voisi periaatteessa käyttää Unruh-efektin havaitsemiseen, mutta koetilanteessa lomittuminen heikkenee myös ympäristön vaikutuksesta, jolloin Unruh-ilmiön aiheuttamaa heikkene mistä on vaikea tunnistaa. Tietyissä tapauksissa lomittuminen voi kuitenkin myös vahvistua [23]. Tällöin, jos lomittuminen vahvistuu, Unruh-ilmiön vaikutus on mahdollista todeta, vaikka ympäristötekijät olisivat heikentäneet lomittumista. Kvanttimetrologian avulla voidaan löytää optimaaliset olosuhteet ilmiön havainnointiin [24].

Hyvä läpikäynti lukuisiin erilaisiin koemenetelmiin löytyy artikkelista [25]. Monille kokeille yhteistä on kuitenkin ennuste, että kun tekniikka kehittyy, saadaan aikaan suurempia kiihtyvyyksiä ja tarkempia mittauksia, jolloin mittaaminen tulee mahdolliseksi. Kuitenkaan vielääkään ei ole konsesusta siitä, että Unruh-ilmiö olisi saatu mitattua.

## 5 Yhteenveto

Kuten käy ilmi kappaleessa 3.2, Unruh-ilmiö on melko suoraviivaista johtaa suoraan koordinaattimuunnosten avulla. Luotettavampaan johtamiseen tarvitsee käydä läpi jonkin verran kvanttikenttäteorian perusteita, mutta niissäkään ei tarvitse mennä suunnattoman syvälle. Unruh-ilmiö on siis hyvinkin suora seuraus kvanttikenttäteoriasta.

Unruh-ilmiöllä on vankka konsensus tutkijoiden kesken, vaikka sen kaikki osat alueet eivät ole täysin selkeitä, kuten näkyy kappaleessa 3.3. Jopa ilmiön laajennus kattamaan koko Minkowskin avaruus on kyseenalaistettu, joka on ymmärrettävää, sillä kvanttikenttäteorian normalisaatioiden fysikaalisuus on jokseenkin tulkinnanvaraista. Suurempi kiista on kuitenkin ilmiön ilmenemisen yksityiskohdissa, kuten Unruh-säteilyn olemassaolossa, jolla on myös suora vaikutus joihinkin mittausmenetelmiin.

Valitettavasti, kuten kappaleessa 4 todetaan, Unruh-ilmiötä ei ole kokeellisesti havaittu. Menetelmiä on kuitenkin ehdotettu useita ja useimmat niistä luottavat mittauslaitteistojen kehitykseen, jolloin paremmat kiihtyvyydet ja tarkemmat mitaukset voisivat mahdollistaa ilmiön havaitsemisen. Ilmiöllä on kuitenkin epäsuoria havaintoja, jotka lujittavat ilmiön luotettavuutta.

Henkilökohtaisesti koen Unruh-ilmiön lepäävän varsin vankalla pohjalla teorian kannalta, vaikka suoria kokeellisia havaintoja ei olekaan. Varsinkin kiinnostavaa on miten hiukkasen merkitys on tavallaan riippuvainen havaitsijasta ja tuo siten uuteen valoon hiukkasten todellisuuden. On mielenkiintoista miten eri tulkinnat siitä, mikä on fysikaalista, johtavat paljonkin eriäviin lopputuloksiin. Tämä toimii siis hyvänä esimerkkinä siitä, miten teorit eivät ole ikinä kiveen hakattuja ja miten pelkästään kysymykseen siitä, mikä on hiukkanen, on vaikea vastata.

## Viitteet

- [1] S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* **7**, 2850 (1973).
- [2] W. Rindler, *Essential relativity: special, general, and cosmological, Texts and monographs in physics* (Van Nostrand Reinhold Co., 1969).
- [3] P. C. W. Davies, *J. Phys. A* **8**, 609 (1975).
- [4] S. W. Hawking, *Comm. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [5] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- [6] S. W. Hawking ja W. Israel, *General Relativity; an Einstein Centenary Survey* (Cambridge University Press, 1979).
- [7] N. D. Birrell ja P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, 1982), p. 340.
- [8] L. Parker ja D. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity, Cambridge Monographs on Mathematical Physics* (Cambridge University Press, 2009).
- [9] W. G. Unruh ja R. M. Wald, *Phys. Rev. D* **29**, 1047 (1984).
- [10] G. W. Ford ja R. F. O'Connell, *Phys. Lett. A* **350**, 17 (2006).
- [11] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **46**, 3271 (1992).
- [12] V. A. Belinskii, B. M. Karnakov, V. D. Mur ja N. B. Narozhnyi, *JETP Lett.* **65**, 902 (1997).
- [13] N. B. Narozhny, A. M. Fedotov, B. M. Karnakov, V. D. Mur ja V. A. Belinskii, *Phys. Rev. D* **65**, 25004 (2001).
- [14] S. Fulling ja W. Unruh, *Phys. Rev. D* **70**, (2004).

- [15] N. Narozhny, A. Fedotov, B. Karnakov, V. Mur ja V. Belinskii, Phys. Rev. D **70**, 48702 (2004).
- [16] T. H. Boyer, Phys. Rev. D **21**, 2137 (1980).
- [17] G. Matsas ja D. Vanzella, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 1573 (2002).
- [18] J. S. Bell ja J. M. Leinaas, Nucl. Phys. B. **212**, 131 (1983).
- [19] E. T. Akhmedov ja D. Singleton, JETP Lett. **86**, 615 (2008).
- [20] S. Iso, Y. Yamamoto ja S. Zhang, Phys. Rev. D **84**, 25005 (2011).
- [21] E. Martín-Martínez, I. Fuentes ja R. B. Mann, Phys. Rev. Lett. **107**, 131301 (2011).
- [22] I. Fuentes-Schuller ja R. B. Mann, Phys. Rev. Lett. **95**, 120404 (2005).
- [23] M. Montero ja E. Martín-Martínez, J. High Energy Phys. **2011**, 6 (2011).
- [24] J. Wang, Z. Tian, J. Jing ja H. Fan, Sci. **4**, 7195 (2014).
- [25] L. C. B. Crispino, A. Higuchi ja G. E. A. Matsas, Rev. Mod. Phys. **80**, 787 (2008).