TURUN YLIOPISTO

NOLLASUMMAPELIT JA NIIDEN LINEAARINEN OPTIMOINTI

Jaakko Mäntylä

Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2021

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

MÄNTYLÄ, JAAKKO: Nollasummapelit ja niiden lineaarinen optimointi
Pro gradu -tutkielma, 35 s.
Matematiikka
Toukokuu 2021

Nollasummapelien avulla mallinnetaan monia erilaisia tilanteita ja niiden tuottoja sekä tappioita. Tilanteissa, joita pelit kuvaavat, on usein voittajia sekä häviäjiä. Näiden tilanteiden tutkimista varten on peliteoriassa kehitetty tapoja joilla selvittää paras mahdollinen toimintamalli eli strategia.

Tässä tutkielmassa käydään läpi yleisiä nollasummapelejä, tarkastellaan nollasummapelejä sekä lineaarista optimointia tarkemmin sekä tarkastellaan mahdollisia ratkaisukeinoja. Nollasummapelille mahdollinen strategia voi olla puhdas -tai sekastrategia, pelistä riippuen. Nashin tasapaino on käsite, jota useimmiten käytetään kun etsitään optimaalista ratkaisua pelille. Nollasummapeleissä optimaalinen ratkaisu on myös aina pareto optimaali, joka on myös konsepti ratkaisulle peliteoriassa. Nollasummapeleissä Nashin tasapaino on siis myös aina pareto optimaali.

Ratkaisun löytämistä peleihin, joissa ei ei ole selkeää puhdasta strategiaa käytetään lineaarista optimointia. Lineaarisen optimoinnin avulla saadaan muokattua pelit sellaiseen muotoon, että voimme simplex-metodia käyttämällä löytää ratkaisun. Simplex-metodia käytetään myös monissa koneellisissa ratkaisuissa, joista yhtä esitellään myös tässä tutkielmassa.

Sisällys

1 Johdanto

Peliteoria on tieteenala, jossa pyritään muodostamaan matemaattisia malleja, joilla pystytään määrittämään ja päättämään paras mahdollinen pelitapa, joka tilanteeseen. Termillä peli ei varsinaisesti aina viitata tavallisiin peleihin, vaan konfliktitilanteisiin kahden tai useamman osallistujan välillä, jossa jokaisella osallistujalla on mahdollisuus vaikuttaa konfliktin lopputulokseen. Lähtöoletuksena tilanteissa on aina, että osallistujilla, joista tästä eteenpäin puhutaan pelaajina, on tiedossa kaikki mahdolliset toiminnot ja lopputulokset sekä itseltaan että vastapelaajilta. Toisena oletuksena on, että jokainen pelaaja yrittää maksimoida oman tuottonsa. Näiden oletusten myötä peliteorian tavoitteena on kehittää teorioita, joilla ennustetaan ihmisten käyttäytymistä pelitilanteissa.

Kahden yrityksen hintakisa on esimerkki pelistä. Peli on joukko olosuhteita, joiden lopputulokseen vaikuttaa päätöksentekijät eli pelaajat. Molemmat yritykset saavat saman verran tuottoa (10), jos sopivat yhteisesti pitävänsä hinnat korkeina. Jos toinen yritys päättääkin laskea hintaa, saa se enemmän asiakkaita ja sitä kautta isomman tuoton (15). Tässä tilanteessa toisenkin yrityksen kannattaisi laskea hintoja, jonka myötä molemmat saavat pienemmän tuoton (5). Kuvataan tilannetta taulukossa

	korkea hinta	matala hinta
korkea hinta	10, 10	5, 15
matala hinta	15, 5	5, 5

Taulukko 1: hintakilpailu

Pelit kuten pokeri, shakki ja ristinolla ovat edellä esitetyn kaltaisia pelejä. Kaikissa näissä pelaajat pelaavat toisiaan vastaan. Esimerkiksi ruletissa sen sijaan ei ole vastustajaa vaan siinä pelaaja pelaa taloa vastaan. Peliteorian ongelmille pyritään aina kehittämään ratkaisu tai ratkaisumalli. Jos ratkaisun avulla valittua strategiaa vaihtamalla ei voi saavuttaa parempaa lopputulosta, kutsutaan pelaajien valitseman strategian muodostamaa tilannetta tasapainoksi. Tasapainon käsitteitä on monia, joista esimerkkinä on Nashin tasapaino, jossa pelaaja ei pysty parantamaan omaa odotettua tuottoaan vaihtamalla strategiaa.

2 Peruskäsitteitä

Peli koostuu pelaajista, jotka suorittavat toimintoja ennalta tunnettujen vaihtoehtojen määräämästä joukosta. Pelaajien valitsemien strategioiden kombinaatioista muodostuu lopulta pelaajien tuotto.

Määritelmä 1. (n-pelaajan peli, hyötyfunktio) Olkoon $n \in \mathbb{N}$, $S_1, ..., S_n$ äärellisiä joukkoja ja $f_1, ..., f_n$ kuvauksia

$$f_i : S_1 \times \cdots S_n \to \mathbb{R} \text{ kaikilla } i = 1, ..., n.$$

Tällöin $n - pelaajan\ peliksi$ sanotaan kolmikkoa (n, S, F), jossa n on pelaajien määrä, $S = (S_1, ..., S_n)$ on puhtaiden strategioiden määrä ja $F = (f_1, ..., f_n)$ on pelaajan *hyötyfunktio.*

Määritelmä 2. Olkoon $f : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ pelaajan hyötyfunktio kahden palaajan pelissä, jossa m on matriisin rivien määrä ja n sarakkeiden määrä, i kuvaa tiettyä riviä ja j tiettyä saraketta. Tällöin matriisia

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} = [f(i,j)]_{i,j=1}^{m,n}$$

sanotaan pelaajan 1 *tuottomatriisiksi (payoffmatrix).*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Määritelmä 3. Olkoon kahden pelaajan pelissä pelaajan 1 tuottomatriisi $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ ja pelaajan 2 tuottomatriisi $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$. Tällöin pelin *normaalimuoto* on matriisi

$$C = [c_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} = [(a_{ij}, b_{ij})]_{i,j=1}^{m,n}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}, b_{11} & a_{12}, b_{12} & ... & a_{1n}, b_{1n} \\ a_{21}, b_{21} & a_{22}, b_{22} & ... & a_{2n}, b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}, b_{m1} & a_{m2}, b_{m2} & ... & a_{mn}, b_{mn} \end{bmatrix}$$

2.1 Nash-tasapaino

Nashin tasapaino kuvaa tilannetta, jossa kukaan pelaaja ei voi vaihtamalla strategiaansa parantaa tilannettaan. Jotta kaikki pelaajat pelitilanteessa voivat saavuttaa n Nash-tasapainon, tulee jokaisen pelaajan tietää jokaisen strategiat. Nash-tasapaino on nimetty John Forbes Nashin mukaan Ensimmäisen kerran teoria Nash-tasapainosta julkaistiin 1944 teoksessa *Theory of Games and Economic Behavior* [1]. Nash ei ollut tästä yksin vastuussa vaan teoria julkaistiin yhdessä Oskar Morgensternin kanssa. Nashin mukaan tasapainon voi aina löytää sekastrategioiden (mixed strategies) avulla. Puhdas strategia (pure strategy) määrittää tietyn valinnan joka tilanteeseen pelissä. Sekastrategiassa (mixed strategy) pelaajalla on määrätty todennäköisyydet, joilla pelata puhtaita strategioita. Puhtaat strategiat ovat myös sekastrategioiden alajoukkoja. Tämä teoria rajoittui aikanaan vain nollasummapeleihin, jotka ovat työn pääosassa. Teoriassaan he näyttivät, että jokaisesta nollasummapelistä, jossa on äärellinen määrä valintoja, löytyy sekastrategioiden Nash-tasapaino. Myöhemmin Nash todisti väitteen pätevän kaikkiin peleihin, joissa on äärellinen määrä valintoja ja strategioita.

Määritelmä 4. Olkoon S_i kaikkien mahdollisten strategioiden joukko pelaajalle i, jossa $i = 1, ..., n$. Olkoon $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$ joukko, joka sisältää yhden strategian jokaiselle pelaajalle, jossa $s_{-i}^* = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ määrittää $n-1$ strategian kaikille muille paitsi pelaajalle i. Olkoon $u_i(s_i, s_{-i}^*)$ pelaajan i tuotot kuvattuna strategioiden funktiona. Strategiajoukko s^* on Nash-tasapaino jos

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \text{ kaikille } s_i \in S_i.$$

Esimerkki 1. Taulukossa 2 on esitetty eräs peli. Tämä peli sisältää strategiaparin (s_i^*, s_{-i}^*) joka on Nash-tasapainopari. Pelaajan 1, eli rivipelaajan, kannattaa aina pelata strategiaa a, koska mahdolliset tuotot ovat 1 ja 3 pelaajalle 1, kun strategialla b mahdolliset tuotot ovat -2 ja 0. Kun pelaaja 1 pelaa strategiaa a, niin pelaajan 2 kannattaa aina pelata strategiaa c. Strategiapari (a, c) on Nash-tasapainopari, koska kumpikaan pelaaja ei voi vaihtamalla parantaa tilannettaan.

	c	d
a	1, -1	3, -3
b	-2, 2	0, 0

Taulukko 2: Nash-tasapaino esimerkki

Määritelmä 5. Tasapainoa (s_i^*, s_{-i}^*) kutsutaan vahvaksi, jos se on yksikäsitteisesti paras strategia, eli

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) > u_i(s_i, s_{-i}^*) \text{ kaikille } s_i \in S_i.$$

Määritelmä 6. Tasapainoa (s_i^*, s_{-i}^*) kutsutaan heikoksi, jos se ei ole vahva tasapaino.

Esimerkki 2. Taulukossa 3 on esitetty eräs peli. Tässä pelissä on kaksi nash-tasapainoparia, (a, a) ja (b, b). Tasapainopari a, a on vahva tasapaino, koska se on yksikäsitteisesti paras strategia molemmille pelaajille. Tasapainopari b, b on sen sijaan heikko tasapaino, koska a, a olisi parempi strategia molemmille pelaajille.

	a	b
a	4, 4	1, 3
b	3, 1	3, 3

Taulukko 3: tasapaino esimerkki

2.2 Turvataso ja satulapiste

Peleissä päätökset tehdään kahden perusperiaatteen pohjalta. Ensimmäinen periaate on, että pelaajat pyrkivät aina maksimoimaan turvatasonsa. Tämän periaatteen pohjalta pelaajan 1 tulisi määritellä tuottomatriisin jokaisen rivin minimialkio, ja pelata strategiaa, jossa maksimimäärä näistä rivien minimeistä saavutetaan. Seuraavaksi määritellään nämä termit $m \times n$ tuottomatriisille A.[5]

Määritelmä 7. Strategian s_i turvataso on matriisin A rivin i alkioiden minimi

$$\min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$$

Oletetaan että näiden rivien maksimi löytyy riviltä h, ja sanotaan sen olevan u_1. Seuraa että

$$u_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = \min_{1 \leq j \leq n} a_{hj}.$$

Samoin pelaajan 2 tulisi selvittää jokaisen pystysarakkeen maksimi alkio ja käyttää strategiaa, joka vastaa sarakkeeseen, josta saadaan pienin määrä maksimikohtia.

Määritelmä 8.

$$\max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$$

Oletetaan että pienin määrä sarakkeiden maksimeja saavutetaan sarakkeessa k, ja määritellään tämän minimin olevan u_2. Seuraa että,

$$u_2 = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ik}$$

Lause 1. *Seuraava epäyhtälö on tosi $u_1 \leq u_2$*

Todistus. Määritelmien 7 ja 8 mukaan rivien maksimi löytyy riviltä h ja minimit sarakkeiden maksimeista löytyvät sarakkeesta k. Oletetaan että alkio a_{hj} on rivin h minimi ja a_{ik} on sarakkeen k maksimi. Koska alkio a_{hk} on sekä rivillä h että sarakkeessa k, selvästi nähdään että $a_{hj} \leq a_{hk}$ ja $a_{hk} \leq a_{ik}$ joten

$$u_1 = a_{hj} \leq a_{hk} \leq a_{ik} = u_2$$

□

Seuraus 1. *Jos $u_1 = u_2$, niin $a_{hj} = a_{jk} = a_{ik}$, Ja alkio a_{hk} on sekä rivin h minimi että sarakkeen k maksimi.*

Määritelmä 9. Alkio a_{hk} on tuottomatriisin satulapiste, jos

$$\min_{1 \leq j \leq n} a_{hj} = a_{hj} = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ik}$$

Lause 2. *On totta, että $u_1 = u_2$ jos ja vain jos tuottomatriisissa A on satulapiste.*

Todistus. Seurauksen 1 mukaan jos $u_1 = u_2$, matriisissa on satulapiste. Oletetaan siis että A sisältää satulapisteen alkion a_{hk}. Koska alkio on sarakkeen maksimi, kaikkien muiden alkioiden sarakkeessa k on oltava pienempiä tai yhtä suuria kuin a_{hk}. Mutta koska a_{hk} on myös rivin h minimi, a_{hk} on yhtä suuri rivin minimien maksimin kanssa; eli $a_{hk} = u_1$. Samoin $a_{hk} = u_2$, seuraa $u_1 = u_2$ □

Yhteenvetona nähdään, että kaksi perusperiaatetta määrittävät pelit joissa $u_1 = u_2$. Pelaajan 1 tulee aina pelata rivi jossa maksimimäärä riviminimeitä saavutetaan, ja pelaajan 2 tulee aina pelata sarake jossa saatutetaan maksimimäärä sarakkeiden maksimeita. Tälläisen pelin arvo on aina $u_1 = u_2$, koska tämä on odotettu lopputulos. Tälläisissä peleissä on myös aina satulapiste joka on piste a_{hk}. Pelaaja 1 pitäisi pelata rivi h ja pelaajan 2 sarake k, jolloin seuraa että pelin arvo on $a_{hk} = u_1 = u_2$.

Esimerkki 3. Taulukko 11 on erään nollasummapelin 4×5 tuottomatriisi, jonka oikeaan reunaan kirjataan rivien minimit. Alapuolelle kirjataan sarakkeiden maksimit.

9	5	5	17	3	3
9	14	9	15	22	9
6	10	6	8	7	6
4	11	8	9	4	4
9	14	9	17	22	

Taulukko 4: Tuottomatriisin satulapiste

Tuottomatriisia käsitellessämme pitää miettiä, toisen periaatteen pohjalta, milloin strategiapari on tasapainossa. Tuottomatriisista nähdään että jos pelaaja 2 olettaa pelaajan 1 pelaavan rivin 2 eli strategia r_2, paras vastaus tähän strategiaan on silloin valita joko sarake 1 tai 3. Jos pelaaja 1 olettaa pelaajan 2 pelaavan jommankumman näistä sarakkeista, pelaaja 1 ei hyödy mitään jos hän poikkeaa strategiasta r_2. Tuottomatriisissa kuitenkaan strategiapari(r_2, s_2) ei ole tasapainossa, koska pelaaja 1 voi hyötyä vaihtamalla mikäli pelaaja 2 pelaa strategiaa s_2. Esimerkki pelille on siis olemassa ratkaisu. Esimerkistä nähdään myös että $u_1 = u_2 = 9$ joka on tuottomatriisin satulapiste.

3 Nollasummapelit

Määritelmä 10. (nollasummapeli) Pelaajan i hyötyfunktio on kuvaus $f_i : S_1 \times ... \times S_n \to \mathbb{R}$ kaikilla $i = 1, ..., n$. Jos

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in S_1 \times ... \times S_n$$

Niin kyseessä on *n-pelaajan nollasummapeli.*

Seuraus 2. *Pelaajien 1 ja 2 hyötyfunktiot ovat kuvaukset $f_1 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ ja $f_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$. Nollasummapelissä kahdelle pelaajalle pätee*

$$f_1(x, y) = -f_2(x, y) \textit{ kaikilla } x \in S_1, y \in S_2$$

Seuraus 3. *Seurauksesta 2. seuraa että pelaajien 1 ja 2 voittomatriisit nollasummapelissä ovat $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ ja $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ ja niille pätee $A = -B$, josta seuraa*

$$a_{ij} = -b_{ij} \textit{ kaikilla } i, j$$

Esimerkki 4. Kappaleessa kaksi, esimerkissä 1 esitetty peli, on kahden pelaajan nollasummapeli. Riippumatta strategiasta, jonka pelaajat valitsevat, on tuottojen summa nolla. Pelaaja 2 häviää tasan saman summan minkä pelaaja 1 voittaa tai päinvastoin. Vaikka pelaaja 1 pelaisi strategiaa b ja pelaaja 2 strategiaa d, jolloin tuotot ovat $(0, 0)$, on tuottojen summa edelleen nolla, koska kumpikaan pelaajista ei tuota mitään.

Tässä luvussa esitellään nollasummapelin käsite ja muutamia kuuluisia nollasummapelejä. Nollasummapeli on suoran konfliktin peli. Nollasummapeli on tilanne peliteoriassa, jossa yhden pelaajan voitto aiheuttaa aina muiden pelaajien häviön/häviöt. Tässä tilanteessa kaikkien pelaajien voittojen ja tappioiden summa on aina nolla, jonka takia tätä tilannetta kutsutaankin nollasummapeliksi. Nollasummapelissä pelaajien mielenkiinnon kohteet, tai halutut lopputulokset, ovat aina suorassa ristiriidassa keskenään. Joten myös esimerkiksi jalkapallo tai tennis ovat nollasummapelejä, jalkapallossa toisen joukkueen voitto on aina toisen joukkueen tappio. Tenniksessä toisen pelaajan voitto on aina toisen pelaajan tappio. Kahden hengen nollasummapelissä toinen pelaaja voittaa summan minkä toinen pelaaja häviää. Kuuluisia nollasummapelejä joita tässä luvussa esitellään ovat "kivi, sakset ja paperi", kolikonheitto, morra ja pokeri. [8], [3], [4]

Määritelmä 11. Strategiapari (s_i^*, s_{-i}^*) on pareto optimaali, jos ja vain jos ei ole olemassa toista paria (s_i, s_{-i}), niin että $u(s^*) \geq u(s)$ ja joko $u_i(s^*) > u_i(s)$ tai $u_{-i}(s^*) > u_{-i}(s)$

Pareto optimaali on peliteorian tilanne, jossa kenenkään tilannetta ei voida parantaa huonontamatta toisen tilannetta. Ero pareto optimaalin ja nash-tasapainon välillä on selvä. Kuten aikaisemmassa kappaleessa määriteltiin, nash-tasapaino on yleinen ratkaisu pelille, josta kukaan pelaaja ei halua poiketa mikäli kaikki muut pelaavat nash-tasapainon määräämää strategiaa. Pareto-optimaali sen sijaan ei määrää strategiaa koska esimerkiksi, mikä vain tulos nollasummapelissä on Pareto optimaali. Eli nollasummapelissä jos joku pelaaja voittaa, ainakin toinen häviää aina. Kaikkien pelaajien tuottojen summa on aina nolla. Nollasummapeleissä ei ole määritelty pelaajien määrän ylärajaa, mutta aina on oltava vähintään kaksi pelaaja. Jotta peli olisi aito nollasummapeli, on lopullinen tappioiden summa on oltava täysin sama kuin lopullinen voittojen summa. [6]

	valinta 1	valinta 2
valinta 1	$-a, a$	$b, -b$
valinta 2	$c, -c$	$-d, d$

Taulukko 5: Nollasummapelin eräs esitystapa

Yllä olevassa taulukossa kuvattu nollasummapelin tuotot(payoutit) kahden hengen pelissä. Jos pelaaja yksi, eli pystyrivi, tekee valinnan a, saa pelaaja kaksi tulokseksi -a ja niin edelleen. Tästä taulukosta nähdään että valintojen lopputulosten summa on aina 0. Nollasummapelien tuottomatriisi esitetään usein vain toisen pelaajan, pelaajan 1, tuottomatriisina.

Määritelmä 12. Pelaajan 1 tuottomatriisi on kahden hengen nollasummapelissä *pelin tuottomatriisi.*

Esimerkki 5. Esimerkin 1 peli voidaan esittää myös muodossa

	c	d
a	1	3
b	-2	0

Taulukko 6: Nollasummapelin tuottomatriisi

3.1 Strategiat

Yksinkertaisesti selitettynä strategia ohjaa pelaajan tekemään parhaita mahdollisia valintoja. Strategia on paras valinta kaikista mahdollisista valinnoista tietyssä pelin tilanteessa. Toisissa peleissä on enemmän mahdollisia valintoja kuin toisissa, jolloin eri pelit ovat strategisempia, tai toisin sanoen monimutkaisempia kuin toiset. Peliteoriassa strategiaa voidaan kuvata täydellisenä ohjejoukkona. Strategia antaa mahdollisuuden "neuvotella"riippumatta siitä mitä vastapelaaja tekee tai ei tee. Kun määritellään strategiaa erikseen jokaiselle pelaajalle, pitää ensin määritellä pelin lopputulos. Tuotot (payoffs) määräävät jokaisen pelaajan lopputulokselle numeron. Täten kahden pelaajan nollasummapeliä voidaan aina kuvata tuottomatriisilla (payoffmatrix).

Vaakarivi matriisissa kuvaa toisen pelaajan strategioita ja sarakkeet kuvaavat toisen pelaajan. Matriisin solut sen sijaan kuvaavat lopputulosta. Jokaisessa solussa on listattu pelaajan tai pelaajien tuotot, nollasummapelissä ei tarvitse listata kuin toisen pelaajan tuotto, koska tuottojen summa on aina 0, jos toisen pelaajan tuotto on a, on toisen pelaajan tuotto $-a$. Jos tiedetään toisen pelaajan tuotto tiedetään

	A	B	C
Oikea	1	2	3
Vasen	-1	-2	-3

Taulukko 8: Esimerkkipeli

varmasti myös toisen. Nollasummapeleissä jos listataan vain toinen numero se on aina rivipelaajan eli pelaajan 1 tuotto.

	valinta 1	valinta 2
valinta 1	$-a$	b
valinta 2	c	$-d$

Taulukko 7: Tuottomatriisi

Strategiat ovat usein monimutkaisia. Esimerkit ja mallipelit yksinkertaistavat strategioiden kompleksisuutta. Otetaan esimerkkinä shakki, ehkä yksi maailman tunnetuimmista peleistä. Shakki on myös kahden pelaajan nollasummapeli. Peliteorian kannalta strategia shakissa on täydellinen suunnitelma pelin pelaamista varten, eli kaikki mahdolliset siirrot etukäteen suunniteltuna. Tarkemmin ottaen, jos pelaat valkoisilla sinulla pitäisi olla suunniteltuna avaussiirto, vastaus kaikkiin mahdollisiin vastustajan ensimmäisiin siirtoihin, jonka jälkeen vastaus kaikkiin mahdollisiin vastustajan toisiin siirtoihin ja niin edelleen. Tämä johtaa siihen että mahdollisia siirtoja ja täten strategioita on shakissa lukematon määrä.

Ideana strategioissa on se, että jos pystyt määrittelemään strategian, voit pelata sillä strategialla miettimättä strategiaa enää. Kun sinulla on strategia sekä valkoiselle että mustalle voit pelata peliä. Pelin aikana voit päättää kumpi voittaa ja määrätä tuotot. Teoriassa tämä prosessi on helppo ja yksinkertainen, todellisuudessa se ei kuitenkaan kerro kuinka peliä pelataan. Yksinkertaisemmissakin peleissä strategian suunnittelu lähtee siitä että määritellään ensimmäinen siirto ja vastaus kaikkiin mahdollisiin vastustajan siirtoihin. Yksinkertaisemmissakin peleissä tämä johtaa todella suureen määrään strategioita.

Peliteoria tarjoaa vinkkejä miten pelata nollasummapelejä. Tuottomatriisista näkee usein helposti etenkin sen mitä strategiaa kannattaa välttää.

Esimerkki 6. Esimerkiksi taulukon 6 tuottomatriisista näkee, että pelaaja 1, jonka tuotot ovat listattu, pärjää paremmin valitsemalla oikean vasemman sijaan. Kyseisessä pelissä ei ole mitään merkitystä, minkä strategian pelaaja 2 valitsee, oikea eli ensimmäinen rivi on silti aina parempi ratkaisu kuin vasen eli toinen rivi pelaajalle 1.

Tulevissa kappaleissa tarkastellaan strategioita tarkemmin muutamien esimerkkien avulla. Ensimmäisenä otetaan tarkasteluun “kivi, sakset ja paperi ”-peli.

3.2 Päätöksenteko

Päätöksenteolla tarkoitetaan tilannetta, jossa pelaajalla on tietty setti valintoja. Näitä valintoja kutsutaan strategioiksi. Strategioista pitää valita yksi, jota suositaan muita ennen. Monessa pelissä pelaajalla ei ole tietoa mikä strategia missäkin tilanteessa suoranaisesti on paras, vaan pelaajan tehtävänä on selvittää paras strategia. Pelistä tai tilanteesta riippuen päätös suoritetaan tiettyjen ehtojen alla, pelaajalla on joko varmaa tietoa valinnastaan, pelaaja voi ottaa riskin valinnallaan, tai pelaajalla ei ole tietoa valinnastaan.

Varmaa tietoa pelaajalla on tilanteessa, jossa strategia johtaa tiettyyn määrättyyn lopputulokseen. Ruokavalio-ongelma jota esitellään tarkemmin kappaleessa 4.4 on hyvä esimerkki. Tuotteiden hinnat ja ravintosisällöt ovat tiedossa, valinnan tekijän tarvitsee vain optimoida valintansa parhaansa mukaan.

Riskiä tilanteessa on, mikäli päätöksenteko ei johda uniikkiin lopputulokseen. Vaan joukkoon mahdollisia lopputuloksia, joista jokainen esiintyy tietyllä todennäköisyydellä jonka pelaaja tietää. Esimerkiksi ruletissa (joka ei ole nollasummapeli), pelaajan pitää päättää mitä numeroa, väriä, tai numeroiden kombinaatiota haluaa panostaa. Mahdolliset lopputulokset näille valinnoille ovat: joko alkuperäisen panoksen häviäminen tai summan, joka määritellään panoksen tyypin ja koon mukaan, voittaminen. Todennäköisyydet määräytyvät täysin panostuksen tyypin mukaan.

Epävarmuus päätöksenteossa syntyy jos valinnat, joista päätös pitää tehdä muodostuvat valinnoista, jotka johtavat joukkoon lopputuloksia, joiden esiintymistodennäköisyyttä ei tiedetä. Yleistäen peliteoria kuuluu tähän kategoriaan, koska monesti vastapelaajan valintoja ei tiedetä. Peliteorian valinnoilla on nimenomaisesti tarkoitus koittaa minimoida epävarmuus ennustamalla vastapelaajan valinnat, pelin perusteiden avulla.

Tässä tutkielmassa on pääosassa kahden pelaajan nollasummapelit, joissa molemmilla pelaajilla on äärellinen määrä mahdollisia valintoja (strategioita). Näiden pelien tuottoja esitetään matriisimuodossa, joka on helppo tapa nähdä samanaikaisesti pelaajien kaikkien valintojen tuotot. Niin kuin myöhemmin tässä tutkielmassa nähdään, pelaajien ensimmäinen tehtävä on maksimoida oma turvatasonsa (security level), eli tehdä valinta josta itse kärsii vähiten. Toinen tehtävä on löytää strategiapari, joka on tasapainossa (equilibrium).

3.3 Kivi, sakset ja paperi

Seuraavaksi esitellään peliä "kivi, sakset ja paperi". Kyseinen peli on klassinen esimerkki kahden hengen nollasummapelistä. Pelaaja joko voittaa, häviää tai tulee tasapeli. "Kivi, sakset ja paperi"pelissä pelaajat valitsevat samanaikaisesti joko kiven, sakset tai paperin, jonka jälkeen pelaajat paljastavat valintansa samanaikaisesti. Tämän jälkeen selvitetään tulos. Jos molemmat pelaajat tekevät saman valinnan, esimerkiksi molemmat valitsevat kiven, päättyy peli tasapeliin. Jos taas toinen valitseen kiven ja toinen sakset, kiven valinnut pelaaja voittaa ja sakset valinnut pelaaja häviää. Jos toinen valitsee kiven ja toinen paperin, kiven valinnut pelaaja häviää ja jos toinen valitsee sakset ja toinen paperin, paperin valinnut pelaaja häviää.

Pelaajilla on aina kolme vaihtoehtoa, jotka kaikki ovat yhtä hyviä. Tarkastellaan tilanteen tuottomatriisia. Ensimmäinen alkio solussa on pelaajan 1 tuotto ja toinen alkio solussa on pelaajan 2 tuotto.

	K	P	S
K	0, 0	1, -1	-1, 1
P	-1, 1	0, 0	1, -1
S	1, -1	-1, 1	0, 0

Taulukko 9: Kivi, sakset ja paperi pelin payoff-taulukko

3.4 Kolikonheitto

Seuraavaksi esitellään kolikonheittoa, joka on myös kahden hengen nollasummapeli. Kolikonheitossa pelaajalla on aina kaksi strategiaa, joko valita kruuna tai valita klaava. Toinen pelaajista heittää kolikon pyörimään ilmaan ja toinen pelaaja valitsee joko kruunan tai klaavan. Jos valinnan tehneen pelaajan valinta osuu oikeaan, hän voittaa ja heiton tehnyt pelaaja häviää. Jos taas valinnan tehneen pelaajan valinta menee väärin, heiton suorittanut pelaaja voittaa ja valinnan tehnyt pelaaja häviää. Jokaisessa yksittäisessä heitossa on aina voittava pelaaja ja häviävä pelaaja, koska tasapelin mahdollisuutta ei ole. Täten jokaisen tuloksen summa on nolla, siispä kyseessä on nollasummapeli.

Kruuna	1, -1
klaava	-1, 1

Taulukko 10: Kolikonheitto-pelin tuottomatriisi

3.5 Morra

Morra on peli, jota on pelattu tuhansia vuosia. Morra on kahden hengen nollasummapeli, toinen voittaa ja toinen häviää tai tulee tasapeli molempien välille. Pelaajat näyttävät samanaikaisesti joko yhden sormen tai kaksi sormea ja ilmoittaa numeron välillä kahdesta neljään. Jos pelaajan valitsema numero täsmää pystyssä olevien sormien lukumäärään, hävinneen pelaajan on maksettava oikein arvanneelle pelaajalle summan määrä rahaa. Jos molemmat arvaavat oikein, ei raha vaihda omistajaa. Myös jos molemmat arvaavat väärin raha ei vaihda omistajaa. Morrassa pelaajalla on neljä mahdollista strategiaa.

-Pelaaja voi näyttää yhden sormen ja arvata numeron kaksi.

-Pelaaja voi näyttää yhden sormen ja arvata numeron kolme.

-Pelaaja voi näyttää kaksi sormea ja arvata numeron kolme.

-Pelaaja voi näyttää kaksi sormea ja arvata numeron neljä.

Näistä neljästä mahdollisesta strategiasta syntyy 4×4 payoff matriisi.

Tuottomatriisissa $1s2$ tarkoittaa, että pelaaja näyttää yhden sormen ja valitsee numeron kaksi, ja esimerkiksi $2s3$ tarkoittaa että pelaaja näyttää kaksi sormea ja valitsee numeron kolme. Matriisissa nähdään että suurin mahdollinen voitto on neljä. Tämä syntyy kun molemmat pelaajat nostavat kaksi sormea ja vain toinen valitsee luvun neljä.

	1s2	1s3	2s3	2s4
1s2	0	-2	-3	0
1s3	-2	0	0	3
2s3	3	0	0	-4
2s4	0	-3	4	0

Taulukko 11: Morra-pelin payout-taulukko

3.6 Pokeri

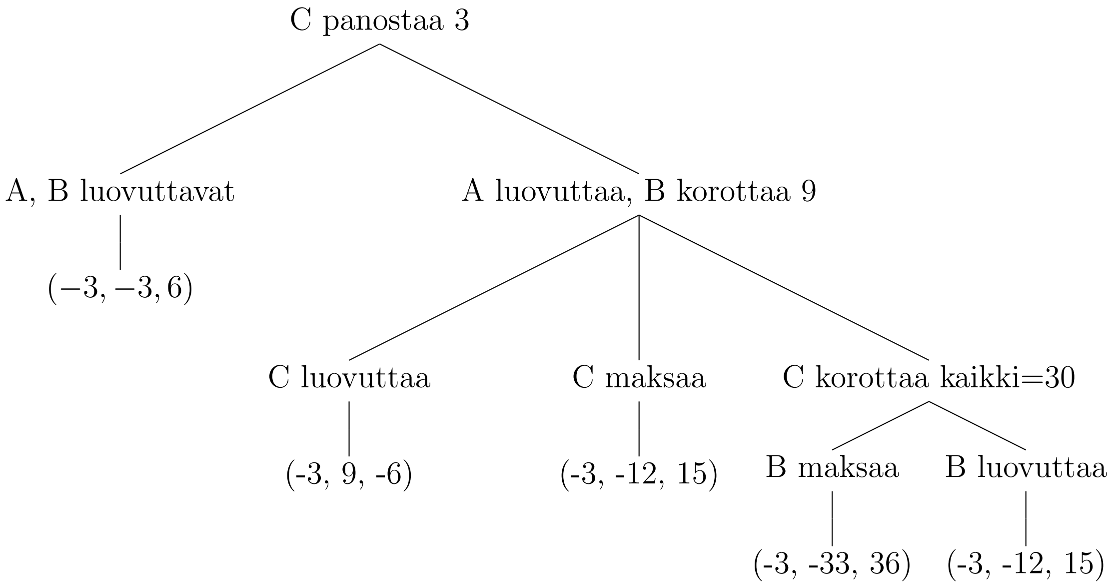
Tässä kappaleessa esitellään nollasummapeli pokeri. Pokeri on korttipeli, jossa pelaajille jaetaan kortteja ja jaon päätteeksi parhaan käden omaava pelaaja saa potin rahat itselleen. Jaossa on panostuskierroksia, joilla pelaajat toimivat vuorollaan ja voivat joko passata, lyödä, maksaa (jos aikasemmin joku pelaajista lyönyt), korottaa tai luovuttaa. Jako päättyy välittömästi mikäli jaossa on jäljellä vain yksi pelaaja, ja tällöin jäljelle jäänyt pelaaja saa potin itselleen. Mikäli jako etenee viimeiseen panostuskierrokseen ja senkin jälkeen mukana on vielä enemmän kuin yksi pelaaja, tapahtuu showdown eli käsien näyttö, jossa parhaan käden omaava pelaaja vie potin itselleen. Pokeri eroaa aikaisemmista peleistä siten, että pokerissa voi olla pelaajia kahdesta ainakin yhdeksään, pelaajamäärä ei kuitenkaan vaikuta pelin luonteeseen teoriassa mitenkään. Pelaajamäärästä riippumatta löytyy aina voittaja ja häviäjiä, jos jako ei pääty kaikkien osalta tasapeliin. Mutta käsitellään tässä tilannetta jossa on kolme pelaajaa. Jotta pokeri olisi nollasummapeli, on kaikkien kolmen pelaajan payouttien summan oltava nolla.

Taulukko 10 on erään tilanteen pokeripelin tuottomatriisi. Taulukossa 10 on tilanne jossa 3 pelaajaa on päätynyt viimeiselle panostuskierrokselle ja jossa pelaaja C, jolla on paras käsi, panostaa kolmella, ja kaikki ovat laittaneet aikaisemmilla kierroksilla pottiin kolme yksikköä. F valinta tarkoittaa luovuttamista (fold) ja C valinta tarkoittaa maksamista (call). Jätetään tässä taulukossa huomioimatta mahdollisuus korottamiseen.

Pelaaja C panostaa 3		pelaaja A	
		F	X
Pelaaja B	F	(-3, -3 , 6)	(-6, -3 , 9)
	X	(-3, -6, 9)	(-6, -6, 12)

Taulukko 12: Pokeripelin tuottomatriisi

Niin kuin taulukosta nähdään, riippumatta pelaajien valinnoista, on tuottojen summa nolla. Pelaaja C saa potin joka tilanteessa, koska hänellä oli paras käsi, potin koko vain kasvaa mitä enemmän on maksajia potissa. Toki oikeassa tilanteessa pokerissa sekä pelaajalla A että B olisi mahdollisuus korottaa ja mahdollisesti saada pelaaja C luovuttamaan paras käsi, mutta tätä tilannetta ei käsitellä tässä kirjotelmassa tarkemmin. Seuraavaksi käydään läpi puugraafin avulla tilanne jossa pelaaja B vastaa eri tavoin pelaajan C lyöntiin.



Ylläolevasta graafista nähdään että pokeri on selkeästi monimutkaisempi peli kuin aikaisemmin tutkitut kolikonheitto ja "kivi, sakset ja paperi". Graafissa käytiin läpi hypoteettinen tilanne ja pokerissa samankaltaisia tilanteita jotka ovat kuitenkin täysin erilaisia, on lukematon määrä. Graafista nähdään että paras ratkaisu pelkkien payouttien perusteella pelaajalle B olisi luovuttaa, mutta tilanne tarvisi tarkempaa tutkiskelua jotta voitaisiin olla varmoja. Pelkkien payouttien perusteella emme voi tietää esimerkiksi millä todennäköisyydellä pelaaja C luovuttaa pelaajan B korotukseen.

Pokeripelejä on myös keskenään hyvinkin erilaisia. Tässä kappaleessa esimerkkinä käytettiin no limit Texas holdemia, joka on suosituin, pelatuin ja tunnetuin pokeripeli. Käytetyt termit ovat kuitenkin käytössä jokaisessa pokeripelissä.

3.7 Sekastrategia

Kappaleessa 2.2 käytiin läpi peli, josta löytyy satulapiste. Puhdas strategia on sellaisessa pelissä strategisesti oikea valinta. Peleissä, joista ei satulapistettä löydy, täytyy käyttää ensimmäisen periaatteen ohjaamia strategioita. Nämä strategiat eivät kuitenkaa ole tasapainossa. Ongelmaksi jää siis määritellä strategiat, jotka toteuttavat perusperiaatteet ja niiden olemassaolo ja kuinka ne tunnistaa.

Esimerkiksi voidaan ottaa kappaleessa 3.4 tutkittu kolikonheitto.

Kruuna	1, -1
klaava	-1, 1

Taulukko 13: Kolikonheitto-pelin payout-taulukko

Vaikka pelaajilla on vain kaksi vaihtoehtoa, on selkeästi nähtävillä että pelaajat valitsisivat toisen strategioista yhtäsuurella todennäköisyydellä, ja tavalla jolla ei paljasta päätöstään vastustajalle. Joten pelaaja 1 valitsee satunnaisesti strategioista r_1 ja r_2. Strategiaa r_1 pelaaja 1 pelaa todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ ja strategiaa r_2 todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$. Tätä strategiakonseptia kutsutaan sekastrategiaksi.

Määritelmä 13. Sekastrategia pelaajalle 1 on vektori $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$. Vektori muodostuu ei-negatiivisista reaaliluvuista niin että $x_1 + x_2 +, , , +x_m = 1$.

Pelaaja 2 sekastrategia $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ määritellään samalla tavalla. Puhdas strategia on myös erikoistapaus sekastrategioiden joukossa. Esimerkiksi $x = (1, 0, ...0)$ on sekastrategia jossa pelaaja pelaa aina strategiaa r_1.

Sekastrategian käsite kuvastaa ideaa, jota pelaaja voi realistisesti käyttää pelissään. Täytyy kehittää keino, jolla pelin lopputulos saadaan selville, kun on käytetty sekastrategiaa. Käytetään tähän odotusarvoa todennäköisyyslaskennasta. Odotusarvo on summa jokaisen tapahtuman arvosta kerrottuna todennäköisyydellä. Peleille joissa on tuottomatriisi A ja pelaajat käyttävät strategioita x ja Y, lopputulos a_{ij} tulee todennäköisyydellä $x_i y_j$. Joten odotusarvo tälläiselle pelille on

$$\sum_i \sum_j x_i a_{ij} y_j$$

Määritelmä 14. Odotusarvo pelille jossa on tuottomatriisi $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, ja jossa pelaaja 1 käyttää strategiaa $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ ja pelaaja 2 käyttää strategiaa $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$on

$$XAY^t = \sum_i \sum_j x_i a_{ij} y_j$$

Esimerkki 7. Tutkitaan nollasummapeliä jossa tuottomatriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Tässä tuottomatriisissa $u_1 = 1$, joten pelaaja 1 voi varmistaa tuoton 1 pelaamalla aina strategiaa r_1. Tutkitaan tilannetta jossa pelaaja 1 kuitenkin pelaisi sekastrategiaa $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Jos pelaaja 2 vastaisi strategialla s_1, odotusarvo pelille olisi $1(\frac{1}{2}) + 4(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$. Jos pelaaja 2 vastaisi strategialla s_2, odotusarvo pelille olisi $3(\frac{1}{2}) + 0(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$. Jos pelaaja 2 käyttää strategiaa $Y = (y_1, y_2)$, odotusarvo pelille on

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{5}{2} y_1 + \frac{3}{2} y_2 \\
&\geq \frac{3}{2} y_1 + \frac{3}{2} y_2 \\
&= \frac{3}{2}(y_1 + y_2) \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Joten käyttämällä strategiaa $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pelaaja 1 voi aina varmistaa tuoton $\frac{3}{2}$ koska mitä vain pelaaja 2 pelaa, pelaaja 1 saa $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})AY^t \geq \frac{3}{2}$.

Määritelmä 15. Pelille jossa on tuottomatriisi A, pelaajan 1 turvataso sekastrategialle X_1 on

$$\min_{Y \in T} X_1 A Y^t.$$

Turvataso pelaajalle 2 strategialle Y_1 on

$$\max_{X \in S} X A Y_1^t$$

Lauseesta seuraa että huonoin lopputulos, jonka pelaaja 1 voi saavuttaa pelaamalla strategiaa X_1, mikäli pelaajalla 2 on käytössään täydellinen joukko sekastrategioita T. Pelaajan 1 tulisi ensimmäisen periaatteen mukaan tavoitella strategiaa, jolla on maksimi turvataso, eli maksimimäärä taattuja minimituottoja. Seuraavaksi määritellään turvataso

Määritelmä 16. Pelille, jossa on tuottomatriisi A, määritellään pelaajalle 1 ja pelaajalle 2 optimaaliset turvatasot, jotka nimetään v_1 ja v_2.

$$\begin{aligned} v_1 &= \max_{X \in S}\{turvataso\ X\} \\ &= \max_{X \in S} \min_{Y \in T} X A Y^t \\ &= \max_{X \in S} \min_{Y \in T} X A^{(j)} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} v_2 = &= \min_{X \in S}\{turvataso\ Y\} \\ &= \min_{X \in S} \max_{Y \in T} X A Y^t \\ &= \min_{X \in S} \max_{Y \in T} A_i Y^t \end{aligned}$$

Termit v_1 ja v_2 ovat vain yleistyksiä edellisen kappaleen termeistä u_1 ja u_2. Myös mikä vain strategia X_0 vertautuu edellisen kappaleen strategiaan r_k ja strategia Y_0 edellisen kappaleen strategiaan s_k.

Lause 3. *Mille vain pelille jossa tuottomatriisi A, on olemassa Strategiat X_0 pelaajalle 1 ja Y_0 pelaajalle 2, niin että*

$$v_1 = \max_{X \in S} \min_{1 \le j \le n} X A^{(j)} = \min_{1 \le j \le n} X_0 A^{(j)}$$

ja

$$v_2 = \min_{Y \in T} \max_{1 \le j \le m} A_i Y^t = \max_{1 \le j \le m} A_i Y_0^t$$

Josta seuraa

$$v_1 = v_2$$

Todistus. Lauseen 3 todistus löytyy kirjasta *An introduction to Linear programming and game theory* [2] □

Määritelmä 17. Pelille, jossa on tuottomatriisi A, strategiapari X_1, Y_1, jossa $X_1 \in S$ ja $Y_1 \in T$m ovat tasapainopari, jos

$$XAY_1^t \leq X_1AY_1^t, \ kaikilla \ X \in S$$

ja

$$X_1AY_1^t \leq X_1AY^t \ kaikillaY \in T$$

Seuraus 4. *Oletetaan että pelille, jossa tuottomatriisi A, pelaajalle 1 on strategia X_0 turvatasolla v_1 ja pelaajalle 2 strategia Y_0 turvatasolla v_2. Strategiapari (X_0, Y_0) on tällöin tasapainopari.*

Todistus. Määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} v_1 &= \min_{Y \in T} X_0AY^t \\ &\leq X_0AY_0^t \\ &\leq \max_{X \in S} XAY_0^t = v_2 \end{aligned}$$

Mutta $v_1 = v_2$. Joten seuraa

$$\max_{X \in S} XAY_0^t = X_0AY_0^t = \min_{Y \in T} X_0AY^t$$

joten,

$$XAY_0^t \leq X_0AY_0^t \text{ kaikilla } X \in S$$

ja

$$X_0AY_0^t \leq X_0AY^t \text{ kaikilla } Y \in T$$

□

Määritelmä 18. Pelille, jossa on tuottomatriisi A, arvoa $v = v_1 = v_2$ kutsutaan pelin *arvoksi*. Strategia X_0 pelaajalle 1 turvatasolla v on optimaali strategia pelaajalle 1, ja strategia Y_0 pelaajalle 2 turvatasolla v on optimaali strategia pelaajalle 2. Sellaista strategiaparia (X_0, Y_0) ja pelin arvoa $v = X_0AY_0^t$ kutsutaan pelin ratkaisuksi.

Pelin arvo selviää optimaalisesta turvatasosta molemmille pelaajille ja odotetusta tuotosta pelille, jos molemmat pelaajat käyttävät suositeltuja strategioita. Matriisipelille on mahdollista kehittää täydellinen malli, joka pohjautuu perusperiaatteisiin. Mallia voidaan käyttää kuitenkin vain, mikäli molemmat pelaajat pohjaavat pelinsä näihin periaatteisiin. Kahden hengen nollasummapeleissä tasapaino yksinään riittää pelin ratkaisun selvittämiseen.

Lause 4. *Pelille, jossa on matriisi A, oletetaan että strategiapari (X_1, Y_1) on tasapaino. Silloin X_1 ja Y_1 ovat optimaaleja strategioita, ja $X_1AY_1^t$ on pelin arvo.*

Todistus. Tasapainon määritelmän mukaan, mille vain $X \in S$ ja $Y \in T$,

$$XAY_1^t \leq X_1AY_1^t \leq X_1AY^t$$

Merkitään pelin arvoksi v, seuraa

$$\begin{aligned} v = v_1 &= \max_{X \in S} \min_{Y \in T} XAY^t \\ &\geq \min_{Y \in T} X_1 AY^t = X_1 AY_1^t \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} v = v_2 &= \min_{Y \in T} \max_{X \in S} XAY^t \\ &\leq \max_{X \in S} XAY_1^t = X_1 AY_1^t \end{aligned}$$

Seuraa $v = X_1 AY_1^t$ ja $\min_{y \in T} X_1 AY^t = v$, määritelmän mukaan X_1 on optimaalinen strategia pelaajalle 1, samoin $\max_{X \in S} XAY_1^t = v$implikoi että Y_1 on optimaalinen strategia pelaajalle 2. □

Ratkaisun löytäminen peleihin, joiden tuottomatriisista löytyy satulapiste on helppoa ja suoraviivaista, ja satulapisteen määrittäminen on myös helppoa.

3.8 Von Neumannin Minimax-teoreema

Olkoon A $m \times n$ matriisi, joka kuvastaa kahden hengen nollasummapelin tuottoja. Pelillä on tällöin arvo ja pelistä löytyy sekastrategiapari joka on optimaali molemmille pelaajille.

Aikaisemmin määriteltiin jo sekastrategiapari V

$$V(x, y) := \sum_i \sum_j y_i a_{ij} x_j$$

Määritelmä 19. Sekastragiaparin (x^*, y^*) sanotaan olevan tasapainopiste kahden hengen nollasummapelissä, mikäli:

$$V(x, y^*) \leq V(x^*, y^*) \text{ kaikilla } x \in X_m, \text{ ja } V(x^*, y^*) \leq V(x^*, y) \text{ kaikilla } y \in Y_n,$$

$$\text{jossa } X_m \text{ ja } Y_n \text{ovat kaikkien mahdollisten valintojen joukot.}$$

Tämä on ekvivalentti seuraavan lauseen kanssa

Lause 5. *(Minimax-teoreema)*

$$\max_{x \in X_m} V(x, y^*) = V(x^*, y^*) = \min_{y \in Y_n} V(x^*, y).$$

Kaikki seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:

(a) Tasapainopari löytyy

(b)
$$v_A := \max_{x \in X_m} \min_{y \in Y_n} V(x, y) = \min_{y \in Y_n} \max_{x \in X_m} V(x, y) := v_B.$$

(c) On olemassa $v \in \mathbf{R}$ ja $x^{(o)} \in X_m, y^{(o)} \in Y_n$ niin että

$$\text{(i)} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^{(o)} \geq \mathbf{v},\ j = 1, 2, ..., n,$$

$$\text{(ii)} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^{(o)} \leq \mathbf{v},\ i = 1, 2, ..., m,$$

Todistus. Jotta nähdään päteekö (a) $\Longrightarrow$ (b), tutkitaan tasapainoparia (x^*, y^*). Tällöin

$$\begin{aligned} v_B \ :=& \min_{y \in Y_n} \max_{x \in X_m} V(x, y) \leq \max_{x \in X_m} V(x, y^*) = V(x^*, y^*) \\ =& \min_{y \in Y_n} V(x^*, y) \leq \max_{x \in X_m} \min_{y \in Y_n} V(x, y) \end{aligned}$$

Koska aina pätee $v_A \leq v_B$, yhtäsuuruuden pitää päteä kokoajan.
Nähdäksemme, että (b) $\Longrightarrow$ (c), oletetaan, että $\mathbf{v} = v_A = v_B$. Olkoon $x^{(o)}$ maksiminimoija ja $y^{(o)}$ minimaksimoija. Siten kaikilla $j = 1, 2, ..., n$ ja kaikilla $i = 1, 2, ..., m$ saamme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} x_i^{(o)} &= V(x^{(o)}, \beta_j) \geq \min_{y \in Y_n} V(x^{(o),y}) = \max_{x \in X_m} \min_{y \in Y_n} V(x, y) \\ &= \mathbf{v} = \min_{y \in Y_n} \max_{x \in X_m} V(x, y) = \max_{x \in X_m} V(x, y^{(o)}) \\ &\geq V(\alpha_i, y^{(o)}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j^{(o)}. \end{aligned}$$

Lopuksi, nähdäksemme, että (c) $\Longrightarrow$ (a) nähdään (i) ja (ii) avulla että,

$$V(x^{(o)}, y) \geq \mathbf{v} \geq V(x, y^{(o)}) \text{ kaikilla } x \in X_m \text{ja } y \in Y_n.$$

Kun sijoitetaan $x = x^{(o)}$ ja $y = y^{(o)}$ aikaisempaan epäyhtälöön, nähdään, että $\mathbf{v} = V(x^{(o)}, y^{(o)})$ ja siten $((x^{(o)}, y^{(o)}))$ on taspainopari. $\square$

4 Lineaarinen optimointi ja simplex-menetelmä

Perusongelmat, joita ratkotaan lineaarisella optimoinnilla, ovat usein lineaarisen funktion optimaalisen arvon määrittäminen, kun on olemassa tietynlaisia rajoituksia.

Monet ongelmat, jotka esiintyvät esimerkiksi liiketaloudessa, teollisuudessa, sodankäynnissä ja taloudessa voidaan muokata lineaarisiksi ongelmiksi, eli ongelmaksi, jossa koitetaan löytää jonkun annetun lineaarisen yhtälön optimaalinen arvo, kun funktion määrittelyjoukko on rajattu lineaarisilla yhtälöillä tai epäyhtälöillä. Suurin ongelma näissä tilanteissa ei ole selvittää onko sellaista optimaalista arvoa olemassa, vaan tärkeämpää olisi kehittää tekniikka tai keino, jolla voidaan helposti ja nopeasti määrittää kyseinen optimi ja missä se sijaitsee. Joten matemaattisesta näkökulmasta haluaisimme kehittää keinon lineaaristen ongelmien selvittämiseen, jota käytettäisiin ratkaisun löytämiseen matemaattisessa ongelmassa. Useimmiten komplekseista tilanteista muodostettavilla realistisilla ongelmilla on monia muuttujia sekä rajoitteita. Tämän vuoksi tarvitsemme laskennallisesti tehokkaan ratkaisumetodin. Kehitetyn tekniikan tarvitsee myös olla sellainen, joka toimii tilanteesta riippumatta, joten ratkaisutekniikan yleistettävyys pitää myös ottaa huomioon.[2]

4.1 Määritelmä

Lineaarista optimointiaa käytetään selvittämään ongelmia, jotka pystytään esittämään lineaarisessa muodossa. Lineaarinen ongelma pystytään aina muokkaamaan seuraavaan muotoon:

Määritelmä 20. Standardi muoto lineaarisen optimoinnin ongelmalle on määrittää ratkaisu yhtälöjoukolle,

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \\
x_1, & & x_2, & & ..., & & x_n & \geq & 0.
\end{array}$$

joka minimoi funktion

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n - z_0$$

Lineaarisessa optimoinnissa z kutsutaan tavoitefunktioksi($objective function$). Muuttujia $x_1, x_2, ..., x_n$ kutsutaan päätösmuuttujiksi , ja niiden arvot kuuluvat $m+1$ rajoihin(jokainen rivi päättyy b_i, ja epänegatiivisuus rajoitus). Joukkoa $x_1, x_2, ..., x_n$, joka toteuttaa kaikki rajoitukset, kutsutaan toteuttaniskelpoiseksi pisteeksi($feasible\ point$) ja tällaisten pisteiden joukkoa kutsutaan toteuttamiskelpoiseksi alueeksi($feasible\ region$). Lineaarisen ongelman ratkaisun tulee olla piste$(x_1, x_2, ..., x_n)$ toteuttamiskelpoisessa alueessa, muuten kaikki rajoitukset eivät toteudu.

Esimerkki 8.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Erään pelin tuottomatriisista A on muodostettu lineaarinen ongelma, jolloin pelaajan 1 tehtävänä on minimoida

$$x_1 + x_2 + x_3$$

ja rajoituksina ovat

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_1 + 3x_3 + 2x_3 \geq 1$$

ja

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Esimerkki 9. Tässä esimerkissä käydään läpi muutamia teorioita jotka ovat implisiittisiä lineaarisen optimoinnin ongelmissa.

1. **Verrannollisuus**
Muuttujan suhde tavoitefunktioon tai rajoituksiin on aina suoraan verrannollinen kyseiseen muuttujaan. Esimerkiksi $6x_1$ on kaksi kertaa $3x_1$, ei enempää muttei myöskään vähempää.

2. **Lisättävyys**
Muuttujan vaikutus tavoitefunktioon tai rajoituksiin on itsenäinen muista muuttujista. Eli muut muuttujat eivät vaikuta toisiin muuttujiin.

3. **Jaollisuus**
Päätösmuuttujat voivat olla murtolukuja.

4. **Varmuus**
Tätä olettamusta kutsutaan myös deterministiseksi oletukseksi. Kaikki parametrit tunnetaan varmuudella.

4.2 Lineaarisen optimoinnin algebra

Kappaleessa 4.1 esitettiin lineaarisen optimoinnin ongelman kanoninen muoto. Tässä kappaleessa muokataan kanoninen tulkinta lineaarisen algebran tulkinnaksi.

$$\begin{array}{lccccccccc}
\text{Minimize} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & ... & + & c_nx_n & = & \text{z} \\
\text{Subject to} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \\
 & x_1, & & x_2, & & ..., & & x_n & \geq & 0.
\end{array}$$

Kanoninen muoto saadaan muokattua muotoon:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$$

$$x_j \quad \geq \quad 0 \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Josta päästään vielä kompaktimpaan muotoon:

$$\text{Minimize} \quad \mathbf{cx} = z$$

$$\text{Subject to} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\overline{x} \quad \geq \quad \overline{0},$$

jossa $\mathbf{A}$ on mxn matriisi jossa $j : s$ sarake on $\mathbf{a}_j$. Tämä matriisi vastaa koeffisienttejä $x_1, x_2, ..., x_n$ lineaarisen ongelman rajojen sisällä. Vektori $\mathbf{x}$ on vektoriratkaisu ongelmaan, $\mathbf{b}$ on oikeanpuoleinen vektori ja $\mathbf{c}$ on niin kutsuttu hinta koeffisientti vektori. [10]

4.3 Lineaarisen ongelman muodostaminen

Dieettiongelma on yksi klassisimmista esimerkeistä ongelmasta, jota voidaan ratkaista lineaarisen optimoinnin mallilla. Ongelma tarkoituksena on selvittää mahdollisimman pieni hinta ruokavaliosta, joka on riittävä henkilölle itselleen. Yksinkertaisesti, mikä on halvin tapa yhdistellä erilaisia tarjolla olevia ruokia ruokavaliossa niin että henkilä saa kaikki tarpeelliset ainesosat.

Jotta ongelmalle voitaisiin kehittää ratkaisumalli, tarvitsee ensin tarkastella muutamia oleellisia aihealueita. Ongelman ratkaisumallin tarvitsee olla samanaikaisesti tarpeeksi realistinen että yksinkertaistettu jotta siitä olisi mitään hyötyä. Esimerkiksi miten voidaan määritellä ravintoaineiden tarve? Siihen vaikuttaa ikä, sukupuoli, koko ja henkilön aktiivisuus. Tarvitsee määritellä kaikki ravintoaineet kuten kalorit, proteiinit ja vitamiinit ja selvittää onko näistä mahdollista löytää henkilön tarvitsema kombinaatio.

Toinen ongelma ravintoaineita määritellessä on ruuat joita on tarjolla. Onko henkilölle tarjolla kaikki maailman ruuat vai vain omasta lähimarketista löytyvät tuotteet? Kun on määritelty tuotteet joita on tarjolla, tarvitsee vielä määritellä kuinka paljon mitäkin ravintoainetta on kussakin tuotteessa. Ja vielä tämänkin lisäksi on oleellista ottaa huomioon tuotteiden hintojen vaihtelu.

Kun on löydetty sopiva tarpeet tutkittavalle henkilölle ja tarjolla olevien tuotteiden hinta ja ravintosisältö, voidaan tiedoista tuottaa ratkaisu jolla haetaan lineaarisen funktion minimiä. Oletetaan että halutaan minimoida hinta jolla saadaan täyteen päivän tarpeet proteiineista, C-vitamiinista ja raudasta, kun tarjolla on ainoastaan omenoita, banaaneja, porkkanoita, luumuja ja kananmunia. Alla olevaan taulukkoon on listattu kaikkien ravintosisällöt sekä yhden annoksen koko.

Tuote	Annos	Proteiinit (g/annos)	C-vitamiini (mg/annos)	Rauta (mg/annos)	Hinta (sentit/annos)
Omena	1 kpl	0.5	7	0.5	9
Banaani	1 kpl	1.3	11	0.7	11
Porkkana	1 kpl	0.7	4	0.5	4
Luumu	1 dl	0.7	2	0.3	21
Kananmuna	2 kpl	12.3	0	2.7	17

Tutkittavan henkilön päivittäinen saantitarve on: proteiinille 70g, C-vitamiinille 50mg ja raudalle 12mg. Oletetaan myös että kaikkia saatavilla olevia tuotteita on rajattomasti saatavilla. Kun tehdään tämä oletus, nähdään selvästi että on mahdollista löytää ruokavalio joka täyttää nämä vaatimukset. Esimerkiksi ruokavalio jossa on 6 kappaletta kananmunia ja 5 kappaletta banaaneja, nämä määrät tuottaisivat helposti tarvittavat aineet, mutta ongelmana ei ollutkaan selvittää sitä vaan selvittää halvin tapa saada kaikki saantisuosituksen rajat täyteen. Lopputulos siis todennäköisesti pitää sisällään jokaista viittä tuotetta jonkun tietyn annosmäärän. Kun muutamme tämän ongelman matemaattiseen muotoon käytämme viittä eri muuttujaa, x_1, x_2, x_3, x_4 ja x_5. Näistä muuttujista A kuvaa päivässä syötävien omena-annosten määrää, B kuvaa päivässä syötävien banaaniannosten määrää, C kuvaa päivässä syötävien porkkana-annosten määrää, D kuvaa päivässä syötävien luumuannosten määrää ja E kuvaa päivässä syötävien kananmunien annosmäärää. Näiden tuotteiden hinta senteissä saadaan aikaan seuraavalla funktiolla

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 8x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 20x_4 + 15x_5$$

Kertoimet jokaiselle muuttujalle saatiin taulukosta hintasarakkeesta. Ja tämä on funktio jonka haluamme minimoida.

Tässä kohtaa pitää kuitenkin ottaa huomioon rajoitukset joita muuttujilla ja funktioilla on. Ensimmäisenä ja selkeimpänä, kaikkien muuttujien tulee olla positiivisia. Ja jotta päivittäiset saantisuositukset ravintoaineille täyttyvät, alla esitettyjen epäyhtälöiden tulee täyttyä.

Ensin vähimmäismäärä jota tarvitaan proteiineja:

$$0.5x_1 + 1.3x_2 + 0.7x_3 + 0.7x_4 + 12.3x_5 \geq 70$$

Sitten vähimmäismäärä C-vitamiineja:

$$7x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 50$$

Ja vielä vähimmäismäärä rautaa:

$$0.5x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 + 0.3x_4 + 2.7x_5 \geq 12$$

Esimerkiksi näistä yhtälöistä nähdään että koska yksi annos omenaa sisältää 0.5g proteiineja, x_1 annosta omenoita sisältää $0.4x_1$ g proteiineja. Samalla tavalla näämme että x_2 annosta banaaneja sisältää $1.3x_2$ g proteiineja ja x_3 annosta porkkanaa sisältää $0.7x_3$ g proteiineja ja niin edelleen. Kun kaikki viisi summataan yhteen saadaan päivän proteiinin saantimäärä selville. Koska päivässä tarvitaan vähintään 70g proteiineja ja suurempi määrä on sallittu, saadaan ensimmäinen epäyhtälö selville. Seuraavat kaksi epäyhtälöä muodostuvat samalla tavalla.

Lopputuloksena saadaan ongelma joka on löytää minimiarvo funktiolle:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 8x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 20x_4 + 15x_5$$

Niin että seuraavata ehdot muuttujille x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 toteutuvat:

$$0.5x_1 + 1.3x_2 + 0.7x_3 + 0.7x_4 + 12.3x_5 \geq 70$$

$$7x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 50$$

$$0.5x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 + 0.3x_4 + 2.7x_5 \geq 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Tämä on hyvä esimerkki lineaarisen optimoinnin ongelmasta jossa tarvitsee sekoittaa tai yhdistää useita eri muuttujia. Koska tiesimme kaikkien tuotteiden sisältämät ravintoaineet, oli tästä helppo muodostaa matemaattinen malli. Usein ei kuitenkaan ole selvillä joko kaikkia tuotteiden sisältöjä tai kaikkia rajoituksia joita tarvitaan. Tätäkin esimerkkiä on yksinkertaistettu paljon, jotta mallin muodostaminen olisi selkeää.

Lineaarisen optimoinnin ongelman muodostamisen tavoite on aina sama; kehittää malli jolla voidaan ratkaista jonkin lineaarisen funktion minimi tai maksimi annettujen rajojen sisällä. Toisin sanoen lineaarisen funktion optimointi annettujen lineaaristen rajojen sisällä.

Jotta lineaarinen ongelma voidaan muodostaa oikean maailman optimointiongelmalle, täytyy tutkittavan operaation sisältää joitain oletuksia. Ensin operaatio pitää pystyä pilkkomaan alkeisoperaatioihin, joita kutsutaan aktiviteeteiksi. Aktiviteetti on usein tapahtuma, joka muuttaa tiettyjä operaation palasia operaation tuotteeksi. Esimerkiksi, jos tutkitaan tehtaan toimintaa, muutetaan työmäärä ja raaka-aine materiaalit tuotetuksi lopputuotteeksi. Tässä ravintoaineongelmassa aktiviteetit ovat ruoka-aineiden muuttaminen ihmiselle oleellisiksi ravintoaineiksi. Määrä tai tahti, jolla aktiviteetti operoi tai toimii, kutsutaan ativiteetti tasoksi.

Toiseksi, koko operaation tavoite, kun sitä mitataan aktiviteetti tason avulla, täytyy olla lineaarinen yhtälö. Joka tarkoittaa sitä, että jos x_j mittaa aktiviteetin j tasoa, on olemassa sellasia vakioita a_j, että tuote a_jx_j mittaa alkuperäisen ongelman tavoitteen saavuttamista aktiviteetin j operaatiosta. Lopullinen muoto tulee vielä muodostaa niin, että operaation lopullinen tulos, jos oletetaan että operaatio sisältää n kappaletta aktiviteettejä, voidaan antaa summana:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

Eli tutkittava tavoitefunktio on lineaarinen funktio, joka muodostuu muuttujista x_j. Kolmanneksi, kaikkien ongelman osasten vaatimusten ja rajoitteiden tulee olla lineaarisessa muodossa, eli ne pitää pystyä muodostamaan, joko lineaarisina yhtälöinä tai epäyhtälöinä muuttujilla x_j. Tämä johtaa siihen, että prosessien ja aktiviteettien täytyy myös olla lineaarisia, joten esimerkiksi, jos kaksinkertaistetaan kaikkien prosessin lähtöaktiviteettien tuotteiden määrä, täytyy sen näkyä myös lopputuotteiden kaksinkertaistumisena.

Monesti oikean elämän ongelmat eivät täytä kaikkia vaatimuksi eikä oletuksia, ylhäällä listattuja tai esimerkki 9, mutta niihin voidaan silti usein soveltaa lineaarisen optimoinnin malleja, jotka tarjoavat tarkkaa ja käytännöllistä informaatiota. Tärkeä yksinkertaistamisen pointti on unohtaa oheisyksityiskohdat. Esimerkiksi ruokavalio-ongelmassa ei oteta huomioon raaka-aineiden pieniä koko eroja. Lineaariset rajoitteet ovat myös aina vain tilanteen aproksimaatioita, mutta silti ne johtavat silti usein hyvään halutun ratkaisun ensimmäiseen estimaattiin.

Oikeasti matemaattisen mallin muodostaminen oikean elämän ongelmasta pitää sisällään useita askelia. Ensin koko operaatio pitää jakaa tutkittaviin aktiviteetteihin. Sitten pitää määritellä aktiviteetin mittaamiseen tarvittavat tuotteet ja mittayksiköt. Näiden aktiviteettien suhde on kuitenkin tutkinnan alla oleva asia, ja joita ongelmassa esitetään muuttujilla. Ja vielä lopuksi tavoitefunktio pitää optimoida ja rajoitteet tunnistaa ja määritellä. Monesti oikean elämän ongelmissa systeemin rajoitukset määritellään vertailemalla alku- ja lopputuotteiden rajoitteita ja niiden suhdetta keskenään. Näiden vaiheiden avulla tutkittavan aihealueen tunteva henkilö pystyy muodostamaan mallin jolla ratkaista ongelma.

4.4 Simplex-menetelmä

Aikaisemmassa kappaleessa esitettiin, miten matemaattisesta ongelmasta muodostetaan lineaarinen funktio ja sille rajoitukset. Tässä kappaleessa kerrotaan, miten yksinkertaisia lineaarisen optimoinnin ongelmia ratkaistaan.

Optimointi ongelmat voivat olla monenlaisia, joissakin tarvitsee maksimoida, toisissa minimoida. Joskus rajoitukset ovat epäyhtälöitä molempiin suuntiin, toisinaan yhtälöitä joissa haetaan yhtäsuuruutta. Nämä ongelmat voidaan kuitenkin ratkaista melko helposti sillä kaikki lineaarisen optimoinnin ongelmat voidaan muokata ekvivalenteiksi ongelmiksi, joita kutsutaan normaalimuotoisiksi. Tämä muoto esitettiinkin jo aiemmin.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\text{Minimize} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & ... & + & c_nx_n & = & \text{z} \\
\text{Subject to} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \\
 & x_1, & & x_2, & & ..., & & x_n & \geq & 0.
\end{array}
$$

Tätä muotoa käytetään, kun halutaan ratkaista lineaarisen optimoinnin ongelmat. Ensin pitää kuitenkin näyttää, että kaikki lineaarisen optimoinnin ongelmat voidaan formuloida normaalimuotoon, jossa yhtäsuuruuksien määrä m ja muuttujien määrä n on määritelty ongelmassa.

Tutkitaan lineaarisen optimoinnin ongelmaa, jonka rajoitteet sisältävät epäyhtälöitä. Otetaan esimerkiksi ravintoaineongelma, josta muodostettiin lineaarisen optimoinnin ongelma.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 8x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 20x_4 + 15x_5$$

Niin että seuraavat ehdot muuttujille x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 toteutuvat:

$$0.5x_1 + 1.3x_2 + 0.7x_3 + 0.7x_4 + 12.3x_5 \geq 70$$

$$7x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 50$$

$$0.5x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 + 0.3x_4 + 2.7x_5 \geq 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Määritelmä 21. Lineaarisen optimoinnin minimointi ongelma on *kanonisessa muodossa*, jos se on seuraavaa muotoa:

$$\min c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Missä $A = (a_{ij})$ on tuottomatriisi.

Lineaarisen optimoinnin maksimointi ongelma, on *kanonisessa muodossa*, jos se on seuraavaa muotoa:

$$\max c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

LP tarvitsee aina muokata kanoniseen muotoon jotta voidaan käyttää tässä kappaleessa esitettävää simplex-menetelmää. Tässä ongelmassa yritetään määrittää pienintä mahdollista hintaa ruokavaliolle, joka sisältää tarvittavan määrän proteiinia, C-vitamiinia ja rautaa. Tästä ongelmasta muodostetaan kanoninen muoto, joissa on vain yhtäsuuruksia, lisäämällä kolme uutta ei-negatiivista muuttujaa s_1, s_2 ja s_3.

Minimize $8x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 20x_4 + 15x_5$
subject to
$0.5x_1 + 1.3x_2 + 0.7x_3 + 0.7x_4 + 12.3x_5 - s_1 = 70$
$7x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 2x_4 - s_2 = 50$
$0.5x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 + 0.3x_4 + 2.7x_5 - s_3 = 12$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Tästä huomataan, että jos $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, s_1^*, s_2^*, s_3^*)$ on ratkaisuna uusiin muodostettuihin rajoituksiin, seuraa että

$$\begin{aligned}0.5x_1 + 1.3x_3 + 0.7x_3 + 0.7x_4 + 12.3x_5 - s_1^* &= 70\\ 0.5x_1 + 1.3x_3 + 0.7x_3 + 0.7x_4 + 12.3x_5 \ &= 70 + s_1^* \geq 70\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 2x_4 - s_2^* &= 50\\ 7x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 50 + s_2^* \geq 50\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0.5x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 + 0.3x_4 + 2.7x_5 - s_3^* &= 12\\ 0.5x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 + 0.3x_4 + 2.7x_5 &= 12 + s_3^* \geq 12\end{aligned}$$

Joten $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)$ ovat ratkaisut alkuperäisiin rajoituksiin. Samoin seuraa että jos $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)$ ovat ratkaisut uusiin muodostettuihin rajoituksiin, on olemassa s_1^*, s_2^* ja s_3^* jotka ovat ei-negatiivisia. Näin ollen uusien muodostettujen rajoitusten ratkaisut ovat $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, s_1^*, s_2^*, s_3^*)$. Molempien rajoitusten ratkaisut vastaavat toisiaan, koska molempien viisi ensimmäistä termiä ovat samat. Alkuperäinen yhtälö, $8x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 20x_4 + 15x_5$ jota haluttiin minimoida riippuu ainoastaan viidestä ensimmäisestä termistä. On siis selvää että lineaarisen funktion minimi on molemmilla rajoituksilla ratkaistuna sama, ja myös arvot joilla minimi saavutetaan ovat samat.

Selvästi nähdään myös että tämä tekniikka on yleistettävissä. Mikä vain ongelma jossa on rajoituksina epäyhtälöitä, voidaan muuttaa yhtälöiksi, lisäämällä epänegatiivisia muuttujia. Lisättävien muuttujien määrä on aina sama kuin tutkittavan ongelman epäyhtälörajoitusten määrä. Näitä lisättyjä muuttujia voidaan monesti miettiä ongelman kannalta oleellisten tuotteiden vajeena tai ylijäämänä. Esimerkiksi, tässä monessa kohtaa esimerkkinä käytetyssä ravintoaineongelmassa ensimmäiseen rajoitteeseen lisätty x voidaan miettiä proteiinin ylijäämänä verrattuna päivän minimitarpeeseen.

Voidaan myös miettiä tilannetta jossa haluammekin maksimoida lineaarisen funktion $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + c_nx_n$. Tämän funktion maksimointi on ekvivalentti funktion negatiivin kanssa: $-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n$. Joten maksimointiongelma on aina helpp formuloida minimointiongelmaksi kertomalla funktio (-1).

Rajoituksena normaalimuotoiselle lineaarisen optimoinnin ongelmalle on myös kaikkien muuttujien ei-negatiivisuus. Suurimmalle osalle ongelmista tämä tulee luonnostaan koska monesti tutkitaan kappalemääriä tai muuta vastaavaa. Joissakin monimutkaisemmissa ongelmissa voi tulla vastaan tilanne jossa jokin muuttuja voi olla myös negatiivista. Negatiivinen luku voidaan kuitenkin aina kirjoitta kahden positiivisen luvun erotuksena(esimerkiksi, $6 = 7 - 1, -6 = 1 - 7$). Joten kaikki muuttujat voidaan aina esittää positiivisena vähintään esittämällä ne useamman muuttujan funktioina.

Näiden keinojen avulla kaikki lineaariset ongelmat voidaan aina esittää normaalimuodossa.

Funktio jota haluamme optimoida kutsutaan $tavoitefunktioksi$. Aina kun löydetään jokin ratkaisu $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ei-negatiivisilla funktioilla joka toteuttaa rajoitukset, se on *mahdollinen ratkaisu* tutkittavalle ongelmalle. Tavoite on kehittää algoritmi jolla mahdollinen ratkaisu on helppo löytää ja sitä kautta minimoida alkuperäinen tavoitefunktio. Metodi jolla yksinkertaisia lineaarisen optimoinnin ongelmia ratkotaan kutsutaan *simplex*-metodiksi. Sen kehitti George Dantzig[7], ja metodi on pääkeino lineaaristen ongelmien ratkaisemiseen. Metodilla pystytään myös selvittämään onko ongelmalla olemassa mahdollisia ratkaisuja.

4.5 Duaalisuus

Jokaiselle lineaariongelmalle on olemassa *duaali* lineaariongelma, johon se on vahvasti yhteydessä. Ensin pitää määritellä standardiongelman duaalisuus. Kuten aiemminkin, $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{c}$ ovat rivipelaajan strategia ja rajoitusten oikea puoli, kun taas $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{y}$ ovat samat sarakepelaajalle. A on myös edelleen pelin tuottomatriisi.

Määritelmä 22. Standardin maksimointiongelman

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

duaaliksi määritellään standardi minimointiongelma

$$\begin{aligned} \min y^T b \\ y^T A \geq c^T \\ y \geq 0. \end{aligned}$$

Lause 6. *Jos $\boldsymbol{x}$ on mahdollinen ratkaisu standardille maksimointiongelmalle ja $\boldsymbol{y}$ on mahdollinen ratkaisu sen duaalille, niin*

$$c^T x \leq y^T b$$

Todistus.

$$c^T x \leq y^T Ax \leq y^T b$$

Ensimmäinen epäyhtäö seuraa $x \geq 0$ ja $c^T \leq y^T A$. Toinen epäyhtälö seuraa $y \geq 0$ ja $Ax \leq b$. □

Seuraus 5. *Jos standardiongelma ja sen duaali ovat molemmat mahdollisia, niin molemmat on rajoitettu mahdollisiksi.*

Todistus. Jos y on mahdollinen ratkaisu minimointiongelmalle, niin lause 5 näyttää että $y^T b$ on yläraja $c^T x$ arvoille kun x on mahdollinen ratkaisu maksimointiongelmalle, sama myös toisinpäin. □

Seuraus 6. *Jos on olemassa mahdolliset ratkaisut x^* ja y^* standardille maksimointiongelmalle ja sen duaalille, niin että*

$$c^T x^* = y^{*T} b$$

niin molemmat ratkaisut ovat optimaaleja omiin ongelmiinsa.

Todistus. Jos x on mahdollinen ratkaisu ongelmaansa, niin $c^T x \leq y^{*T} b = c^T x^*$, josta nähdään, että x^* on optimaali. Symmetrinen osoitus toimii myös y^*. □

Lause 7. ***Duaalisuus teoreema****(duality theorem)*
Jos standardin lineaarioptimoinnin ongelma on rajoitettu mahdolliseksi, niin on myös sen duaali, jolloin niiden arvot ovat yhtäsuuret ja molemmille on olemassa optimaali ratkaisu.

Todistus. Lauseen 6 todistus löytyy luentomonisteesta *LINEAR PROGRAMMING A Concise Introduction* [9]. □

Esimerkki 10. Ratkaistaan optimaalinen sekastrategia seuraavasta tuottomatriisista, muodostaen matriisista duaalisuus teoreeman(duality theorem) avulla duaalisen LP:n

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Koska ensimmäisen rivin molemmat alkiot ovat positiivset, v_1 on myös positiivinen, joten ei tarvitse lisätä muuttujia matriisin alkioiden lisäksi. Matriisista voidaan muodostaa kaksi lineaarisen optimoinnin ongelmaa:

$$\begin{aligned}
&Minimize\ x_1^{'} + x_2^{'} \\
&subject\ to \\
&x_1^{'} + 4x_2^{'} \geq 1 \\
&3x_1^{'} \geq 1 \\
&x_1^{'}, x_2^{'} \geq 0
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
&Maximize\ y_1^{'} + y_2^{'} \\
&subject\ to \\
&y_1^{'} + 3y_2^{'} \leq 1 \\
&4y_1^{'} \leq 1 \\
&y_1^{'}, y_2^{'} \geq 0
\end{aligned}$$

Ratkaistaan ongelmat käyttäen simplex-metodia. Pelaajan 2 turvatason selvittämisen maksimointiongelma voidaan suorittaa. Lisätään muuttujat $y_3^{'}$ ja $y_4^{'}$, jolloin simplex-metodilla saadaan taulukko. Maksimi yhtälöstä $y_1^{'} + y_2^{'}$ on $\frac{1}{2}$ ja tämä tulos saadaan pisteestä $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Täten $v_2 = 2$ ja strategia pelaajalle 2 turvatasolla 2 on

$$2(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Koska $v_2 = 2$ niin tiedämme myös että $v_1 = 2$. Kun käytämme alkioita taulukon alarivin lisämuuttuja sarakkeista saamme pelaajalle 1 strategiaksi

$$2(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

Käyttämämme peliesimerkin matriisi on 2×2 matriisi. On kuitenkin selvää että simplex-metodia voi käyttää mihin vain matriisi peliin.

	y_1'	y_2'	y_3'	y_4'	
y_3'	1	3	1	0	1
y_4'	4	0	0	1	1
	-1	-1	0	0	0
y_2'	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
y_4'	4	0	0	1	1
	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
y_2'	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
y_1'	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Ensimmäisen periaatteen mukaan pelaajien tulee aina pyrkiä maksimoimaan oma turavatasonsa ja lause 10 takaa että se on aina mahdollista, joten on aina olemassa strategia X_0 pelaajalle 1 turvatasolla v_1 ja strategia Y_0 pelaajalle 2 turvatasolla v_2. Periaatteen 2 mukaan pelaajat käyttävät tasapainossa olevia strategioita.

5 Nollasummapelien ratkaiseminen

Tässä kappaleessa käydään tapoja joilla ratkaista nollasummapelejä LP esimerkkien avulla.

5.1 Pivot-menetelmä

Pivot-menetelmä on käytännössä simplex-metodi, jolla voidaan ratkaista äärellisiä pelejä.

1. vaihe Jos kaikki matriisin alkiot eivät ole positiivisia, pitää kaikkiin alkioihin lisätä vakio, joka muuttaa ne ei-negatiivisiksi(Jos tämä vaihe tehdään, pitää lisätty summa muistaa vähentää lopuksi pelin arvosta).

2. vaihe Muodostetaan matriisista taulukko. Nimetään rivit pelaajan 1 strategioiksi $x_1, ..., x_m$. ja sarakkeet pelaaja kahden strategioiksi $y_1, ..., y_n$. Sarakkeiden alle raja -1 ja rivien perään 1, 0 oikeaan alakulmaan.

3. vaihe Valitaan jokin alkioista muokattavaksi, riviltä p ja sarakkeesta q, niin että alkio täyttää seuraavat ehdot: sarakkeen rajanumeron, $a(m+1,q)$ pitää olla negatiivinen, alkion, $a(p,q)$ pitää olla positiivinen ja valittavan pivotin suhde,$a(p,n+1)/a(p,q)$ oman rivinsä rajanumeroon pitää olla pienin mahdollinen kun käydään läpi kaikki sarakkeen alkiot.

4. vaihe a)Korvataan kaikki alkiot, $a(i,j)$, jotka eivät ole samassa sarakkeessa tai rivissä kuin pivot-alkio arvolla $a(i,j) - a(p,j) \cdot a(i,q)/a(p,q)$.

b) korvataan jokainen alkio pivot-alkion rivistä valittua alkiota lukuunottamatta, alkion arvolla jaettuna pivot-alkion arvolla.

c) Korvataan jokainen alkio pivot-alkion sarakkeessa lukuunottamatta pivot-alkiota, alkion vastaluvulla jaettuna pivot-alkion arvolla.

d) korvaa pivot-alkio sen käänteisluvulla.

otetaan esimerkkinä seuraava matriisi niin että valitaan p pivot-alkioksi:

$$\begin{bmatrix} p & r \\ c & q \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/p & r/p \\ -c/p & q-(rc/p) \end{bmatrix}$$

5. vaihe Vaihdetaan pivot-alkion rivin ja sarakkeen nimien paikkaa

6. vaihe Jos alarajanumeroiden joukossa on vielä negatiivisia arvoja toistetaan vaiheesta 3 lähtien.

7. vaihe Muussa tapauksessa pelille on löydettu ratkaisu:

a) pelin arvo, v, on alaoikealla taulukossa olevan arvon käänteisluku.

b) Pelaajan 1 optimaali strategia saadaan seuraavasti. Muuttujat jotka päätyivät vasempaan reunaan saavat todennäköisyydeb 0, ne jotka päätyivät ylös saavat arvon saman sarakkeen alaraja jaettuna oikean alareunan arvolla.

c) Pelaajan 2 optimaali strategia saadaan seuraavasti. muuttujat jotka päätyivät ylös saavat todennäköisyyden 0, muuttujat jotka päätyivät vasemmalle saavat oikean reunan arvon jaettuna oikealla alakulmalla.

Esimerkki 11. Tutkitaan ensimmäisenä esimerkkinä peliä jonka tuottomatriisi on

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriisissa ei ole satulapistettä, eikä matriisissa ole dominoituja strategioita. Matriisin arvon tulee olla positiivinen. Tästä matriisista ei päällisin puolin kuitenkaan suoraan näe onko arvo positiivinen. Voimme muokata matriisia niin että sen arvo on varmasti positiivinen lisäämällä 2 jokaiseen matriisin alkioon:

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Nyt pelin arvo on vähintään 1, koska pelaaja 1 voi varmistaa 1 pelaamalla vain ensimmäistä tai toista riviä. Kun saamme pelin arvon laskettua pitää muistaa vain vähentää 2 A' arvosta, jotta saamme A arvon selville.

	y_1	y_2	y_3	
x_1	4	1	8	1
x_2	2	3	1	1
x_3	0	4	3	1
	-1	-1	-1	0

Seuraavassa vaiheessa täytyy päättää mikä alkio valitaan pivot-alkioksi. Koska kaikissa sarakkeissa on negatiivinen luku alareunassa, voidaan valita mikä vain. Valitaan siis ensimmäinen sarake. Muokkausta ei voida aloittaa alimmasta rivistä koska siellä on 0. Vielä pitää päättää kumman rivin valitsemme ensimmäiseltä sarakkeelta. Rajanumeron suhde pivot-alkioon määrää valinnan. Ensimmäiselle riville se on $\frac{1}{4}$; toiselle riville se on $\frac{1}{2}$. Ensimmäinen on pienempi joten valitaan se. Pivot-alkio tässä tilanteessa on siis vasemman yläkulman 4.

Seuraavaksi lähdetään muokkaamaan taulukkoa. Pivot-alkio korvataan sen käänteisluvulla. Loput alkiot pivot-alkion rivillä jaetaan pivot-alkiolla. Loput alkiot pivot-alkion sarakkeelta jaetaan pivot-alkiolla ja muutetaan etumerkki. Jäljelle jäävät yhdeksän alkiota muokataan vähentämällä $r \cdot c/p$ vastaavalla r ja c. Esimerkiksi toiselta riviltä alkio 1 vähennetään $8 \cdot 2/4 = 4$, jäljelle jää -3. Loput muokkaukset suoraan taulukkoon:

	y_1	y_2	y_3	
x_1	4	1	8	1
x_2	2	3	1	1
x_3	0	4	3	1
	-1	-1	-1	0

$\rightarrow$

	x_1	y_2	y_3	
y_1	1/4	1/4	2	1/4
x_2	-1/2	5/2	-3	1/2
x_3	0	4	3	1
	1/4	-3/4	1	1/4

Vaihdettiin vielä pivot-alkion rivin ja sarakkeen nimienx_1 ja y_1 paikat. Seuraavaksi tarkistetaan onko alarajoissa vielä negatiivisia alkioita. Koska niitä on jäljellä yksi, pitää suorittaa vielä toinen muokkauskierros. Tällä kierroksella pitää valita alkio toisesta sarakkeesta, koska ainoa negatiivinen luku löytyy siltä riviltä. Lasketaan rajanumeron suhde pivot-alkioon. Suhteet ovat 1, $\frac{1}{5}$ ja $\frac{1}{4}$. Pienin arvo on toisella rivillä, joten pivot-alkioksi valitaan $\frac{5}{2}$, toiselta riviltä toisesta sarakkeesta. Kun suoritetaan muokkaukset saadaan:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & y_2 & y_3 & \\
\hline
y_1 & 1/4 & 1/4 & 2 & 1/4 \\
x_2 & -1/2 & 5/2 & -3 & 1/2 \\
x_3 & 0 & 4 & 3 & 1 \\
\hline
 & 1/4 & -3/4 & 1 & 1/4
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & y_3 & \\
\hline
y_1 & 0.3 & -0.1 & 2.3 & 0.2 \\
y_2 & -0.2 & 0.4 & -1.2 & 0.2 \\
x_3 & 0.8 & -1.6 & 7.8 & 0.2 \\
\hline
 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.4
\end{array}
$$

Nyt kaikki arvot alarajalla ovat ei-negatiivisia, joten peli arvo on nyt selvillä. Arvo on käänteisluku luvulle 0.4, eli $\frac{5}{2}$. Koska x_3 jäi taulun vasemmalle on sen optimaalinen pelimäärä 0. Optimaaliset määrät $x_1 = \frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4}$ ja $x_2 = \frac{0.3}{0.4} = \frac{3}{4}$. Pelaajalle 1 optimaalinen sekastrategia on siis $(x_1, x_2, x_3) = (0.25, 0.75, 0)$.

y_3 jäi ylös taulukkoon, joten sen optimaalinen määrä on 0. Optimaaliset määrät $y_1 = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}$ ja $y_2 = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}$. Optimaalinen strategia pelaajalle 2 on siis $(y_1, y_2, y_3) = (0.5, 0.5, 0)$

Vielä pitää muistaa vähentää alussa lisätty 2 pelin arvosta. Sekastrategiat pysyvät samana mutta arvoksi tulee $\frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$.

5.2 Ratkaisu MATLABIN avulla

Tässä kappaleessa ratkaistaan nollasummapeli MATLAB-ohjelman avulla.

Esimerkki 12. Tutkitaan nollasummapeliä, jonka tuottomatriisi A on seuraavanlainen:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Tuottomatriisissa A ei ole dominoituja strategioita, eikä satulapistettä.

Muodostetaan pelistä LP.

$$
\begin{aligned}
&Minimize\ x_1^{'} + x_2^{'} + x'_3 \\
&subject\ to \\
&-x_1^{'} + 2x_2^{'} + 3x_3^{'} \geq 1 \\
&3x_1^{'} - x_2^{'} - 4x_3^{'} \geq 1 \\
&2x_1^{'} - 3x_3^{'} \geq 1 \\
&x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'} \geq 0
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
&Maximize\ y_1^{'} + y_2^{'} + y_3^{'}\\
&subject\ to\\
&-y_1^{'} + 3y_2^{'} + 2y_3^{'} \leq 1\\
&2y_1^{'} - y_2^{'} \leq 1\\
&3y_1^{'} - 4y_2^{'} - 3y_3^{'} \leq 1\\
&y_1^{'}, y_2^{'}, y_3^{'} \geq 0
\end{aligned}
$$

MATLAB-komennolla **[x fval]=linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)** saadaan optimaalinen strategia selville. Kyseinen komento käyttää ratkaisussaan dual-simplex menetelmää, joka on sama jota käytimme edeltävän esimerkin 11 ratkaisussa. **linprog** komento etsii minimin ongelmalle, joka on muotoa:

$$
\min_x f^T x \text{ niin, että } \begin{cases} Ax \leq b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \leq x \leq ub \end{cases}
$$

Komento tulostaa vektorin **x**, joka on optimaalinen strategia toiselle pelaajalle. Pelin arvo tulostuu komennolla **fval**. **f** on vektori, muotoa $[-1\ -1\ -1]$, joka on kerroinvektori, joka kuvastaa tavoitefunktiota. **A** on matriisi, jossa epäyhtälörajoitteiden kertoimet. **b** on epäyhtälörajoitusten rajat, epäyhtälöt ovat muotoa $Ax \leq b$. **Aeq** ja **beq** ovat samat kuin **A** ja **b**, mutta yhtälörajoituksille. Muuttujien alaraja määritellään **lb** ja yläraja **ub**. Tavoitefunktio pelaajalle 2 on alunperin muotoa $y_1^{'} + y_2^{'} + y'_3$, mutta koska komento **linprog** ratkaisee ongelmat, joiden rajoitteet ovat muotoa $Ax \leq b$, tarvii meidän muokata tavoitefunktio niin, että rajoitteet ovat tätä muotoa.

$$
\begin{aligned}
&Maximize\ y_1^{'} + y_2^{'} + y_3^{'}\\
&subject\ to\\
&-y_1^{'} + 3y_2^{'} + 2y_3^{'} \leq 1\\
&2y_1^{'} - y_2^{'} \leq 1\\
&3y_1^{'} - 4y_2^{'} - 3y_3^{'} \leq 1\\
&y_1^{'}, y_2^{'}, y_3^{'} \geq 0
\end{aligned}
$$

Tämä muoto on yhtäpitävä seuraavan ongelman kanssa:

$$
\begin{aligned}
&Minimize\ -y_1^{'} - y_2^{'} - y_3^{'}\\
&subject\ to\\
&-y_1^{'} + 3y_2^{'} + 2y_3^{'} \leq 1\\
&2y_1^{'} - y_2^{'} \leq 1\\
&3y_1^{'} - 4y_2^{'} - 3y_3^{'} \leq 1\\
&y_1^{'}, y_2^{'}, y_3^{'} \geq 0
\end{aligned}
$$

Nyt ongelmamme on muodossa, joka voidaan ratkaista **linprog** komennon avulla. Komento tulostaa ratkaisuvektorin ja pelin arvon pelaajalle 2

$$\mathbf{x} = [0.6667, 0.3333, 0] \text{ ja } \mathbf{fval} = -1.$$

Pelaajalle 2 optimaalinen strategia on siis pelata ensimmäistä saraketta todennäköisyydellä $\frac{2}{3}$ ja toista saraketta todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$. Kolmatta saraketta ei siis kannata pelata lainkaan.

6 Johtopäätökset

Nollasummapelit voidaan ratkaista monella tapaa. Kahden hengen nollasummapeleillä ja lineaarisella optimoinnilla on selkeä yhteys. Nollasummapelit voidaan aina muokata lineaarisen optimoinnin ongelmaksi ja monet nollasummapelit voidaan ratkaista lineaarisen optimoinnin avulla. Esimerkiksi, joko käsin laskemalla, tai erilaisten ohjelmistojen avulla, kuten kappaleessa 5.2 MATLABIN avulla. Ratkaistaessa pitää muistaa esimerkiksi ottaa huomioon muodostettujen ongelmien muoto.

Nollasummapelejä ja niiden ratkaisemista käsiteltiin tässä tutkielmassa vain yksinkertaisten esimerkkien avulla. Ensinnäkin vain kahden hengen nollasummapelejä. Aihe on laajennettavissa ja peliteoria tarjoaakin työkaluja monien eri aiheiden ongelmien tutkintaan, kuten jo johdantokappaleessa kerrottiin.

Viitteet

[1] Von Neumann, John ja Morgenstern, Oskar: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1944, kolmas painos, 1953

[2] Thie, Paul R. ja Keough, Gerard E.: *An introduction to Linear programming and game theory*. A John Wiley Sons, 1979

[3] O'neil Evans, Wayne: *Two-person zero-sum game theory.* B.A., Kansas state University 1964

[4] Nousiainen Henri: *Johdatus peliteoriaan - Kahden pelaajan nollasummapelien ratkaiseminen ja Nashin tasapainojen olemassaolo usean pelaajan yleisessä summapelissä*, pro gradu, Jyväskylän yliopisto, 2013

[5] Griffin, Cristopher: *Game theory*: Penn State Math 486 Lecture Notes 2010

[6] Lopez, Antonio ja Martinez, Saul ja Coello, Carlos A.: *An Introduction to Multiobjective Optimization techniques. Departemento de computacion*, Nova Science Publishers Inc 2009

[7] Dantzig, George: *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 1963, Yhdestoista painos, 1998

[8] Barron, E.N.: *Game theory an introduction* A John Wiley Sons, toinen painos, 2013

[9] Ferguson. Thomas S.: *LINEAR PROGRAMMING A Concise Introduction* icar aieea Mathematics, Lectury notes 2017

[10] Vanderbei, Robert J.: *Linear Programming Foundations and Extensions*Springer International Publishing, 5. painos, 2020