TURUN YLIOPISTO

Virhekäsityksiä yläkoulun algebrassa

Rasmus Rouvali

Pro gradu -tutkielma

Huhtikuu 2022

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Rouvali Rasmus Pro gradu -tutkielma, 32 sivua
Matematiikka
Huhtikuu 2022

Pro gradu -tutkielma on kirjallisuuskatsaus, jossa tarkastellaan oppilaiden yleisempiä virhekäsityksiä yläkoulun algebrassa. Tutkielman tavoitteena on selvittää, mitkä ovat yleisimmät yläkoulun oppilailla esiintyvät virhekäsitykset yläkoulun algebrassa sekä millä tavoilla näitä virhekäsityksiä voidaan ennaltaehkäistä opetuksessa ja kuinka näitä virhekäsityksiä voidaan korjata. Yläkoulussa algebraan siirryttäessä matematiikasta tulee abstraktimpaa verrattuna oppilaiden aikaisempiin kokemuksiin matematiikasta. Monet sanovatkin pudonneensa kärryiltä matematiikan opinnoissa kirjainmuuttujien jälkeen, joka on monelle oppilaalle ensimmäinen konkreettinen kokemus algebrasta. Algebraa pidetäänkin portinvartijana muihin matematiikan opintoihin.

Virhekäsitysten syntymistä voidaan lähestyä muutosvastaisuus näkökulman avulla, jonka mukaan väärin ymmärretty tieto tai vajaaksi jäänyt ymmärrys aiheesta ovat uuden oppimisen esteenä. Virhekäsityksien ymmärtämiseksi tulisi opettajan myös ymmärtää oppilaan algebrallisen ajattelun taso. Algebrallisella ajattelulla kuvataan oppilaan kykyä ilmaista algebran abstrakteja käsitteitä matemaattisten symbolien avulla.

Tutkielmassa käsitellään virhekäsityksiä viidestä aiheesta, jotka ovat sulkeet ja laskujärjestys, yhtäsuuruus, peruslaskutoimitusten symbolit, muuttuja ja funktion käsite. Kirjallisuuden ja tutkimuksien avulla esitellään näihin aiheisiin liittyviä virhekäsityksiä ja yleisimpiä oppilaiden virheitä, joina nämä virhekäsitykset yleensä oppilaan vastauksissa esiintyvät. Opettaja voi huomioida virhekäsitykset opetuksessaan valmistelemalla oppituntinsa niin, että opetuksessa ennaltaehkäistään kyseisten virhekäsitysten syntymistä. Jos virhekäsitysten ennaltaehkäiseminen ei onnistu, tutkielmaan on koottu erilaisia tehtävätyyppejä, joiden tarkoituksena on kehittää oppilaan algebrallista ajattelua ja korjata oppilaiden virhekäsityksiä. Opettaja saa oman harkinnan mukaan hyödyntää näitä esimerkkejä opetuksessaan haluamallansa tavalla.

Opettajan työaika on rajallinen, siksi näen itse tärkeä tutustua yleisimpiin virhekäsityksiin. Oman ja muiden matematiikan opettajien työskentelyn tehostamiseksi uskon, että yleisimpien virhekäsitysten tuntemisesta on hyötyä opetuksen suunnittelussa ja tuntityöskentelyn organisoinnissa. Keskeinen opettajan rooli luokassa on luoda ympäristö, jossa oppilaat uskaltavat yrittää ja oppivat omista virheistään. Näin opettajan on helpompaa myös ohjata oppilaan algebrallista ajattelua keskustelemalla oikeaan suuntaan. Opettajan tuntiessa yleisimmät virhekäsitykset myös oppilaiden auttaminen tuntityöskentelyn aikana on helpompaa. Virhekäsityksen korjaaminen on lopulta oppilaan oman ajattelun ja ymmärryksen kehittämistä.

Avainsanat: virhekäsitys, algebra, yläkoulu, muutosvastaisuus, algebrallinen ajattelu

Sisällys

1 Johdanto

Tutkielma on kirjallisuuskatsaus, jossa perehdytään oppilaiden virhekäsityksiin yläasteen algebrassa. Tutkielman tavoitteena on selvittää tyypillisimmät yläkoulun algebrassa esiintyvät virhekäsitykset ja kuinka näitä virhekäsityksiä voidaan ennalta ehkäistä ja korjata oppitunneilla. Monissa opettajien ammattiliiton kyselyissä opettajat ovat ilmaisseet työn uuvuttavuuden. Tämän takia oman ja muiden opettajien jaksamisen sekä rajallisten työtuntien tehostamisen kannalta opettajan on hyvä tiedostaa yleisimmät yläkoulun algebrassa esiintyvät virhekäsitykset. Näin hän pystyy suunnittelemaan opetustaan niin että se ennaltaehkäisee ja korjaa oppilaiden virhekäsityksiä mahdollisimman tehokkaasti, parhaillaan tietämättään.

Yläkoulussa matematiikan luonne muuttuukin alakoulun mekaanisesta laskennasta algebraan (Ryan & Williams 2007), jossa oppilaan käsitteiden ymmärtäminen ja matemaattisen ajattelun kehittäminen korostuu. Monet yksinkertaistukset ja hartaasti harjoitellut taidot eivät enää riitäkään siirryttäessä yläkouluun. Monta vuotta samanlaisena pysyneet käsitteet laajenevat merkittävästi, kuten yhtäsuuruus. Alakoulussa oppilaalle riittää yhtäsuuruudesta käsitys symbolina, joka erottaa laskun vastauksesta. Yläkoulussa tämä käsitys yhtäsuuruudesta ei enää riitä esimerkiksi yhtälön ratkaisussa. Tätä erityistä haastetta oppilaan oppimisessa voidaan pyrkiä tulkitsemaan muutosvastaisuus näkökulman avulla. Muutosvastaisuus näkökulman mukaan oppilaan virheellisen käsityksen muuttaminen on hankalaa, koska oppilaalla on jo vakiintunut ymmärrys käsitteestä (Welder 2012). Virhekäsitteen korjaamiseksi tulee ensisijaisesti kehittää oppilaan algebrallista ajattelua. Algebrallisen ajattelun kehittyessä oppilas kykenee itse havaitsemaan oman ajattelun ristiriitoja ja opettaja pystyy ohjaamaan oppilaan ajattelua oppimisen kannalta oikeaan suuntaan (Wilkie 2016).

Yläkoulun algebrassa keskeisiä uusia käsitteitä on muuttuja ja funktio. Lisäksi harjoitellaan muuttujan arvon laskemista ja polynomien sieventämistä (OPS 2014). Nämä uudet käsitteet ja laskutoimitukset ovat abstrakteja ja tämän takia haastavat oppilaan ajattelua uudella tavalla. Alakoulussa oppilas tottuu ajatukseen, jossa matematiikka on laskujen suorittamista ja loppujen lopuksi vastaukseksi jää yksi luku (Ryan & Williams 2007). Polynomilaskennassa oppilaalle aikaisempaan opittuun verrattuna tilanne muuttuu huomattavasti. Vain saman asteen omaavat termit voidaan laskea yhteen tai vähentää toisistaan. Näin tehtävästä riippuen vastauksessa voi olla useampia termejä. Oppilaan aikaisempi käsitys vastauksesta yhtenä lukuna tai terminä aiheuttaa ristiriidan oppilaan ajattelussa aiemmin opitun ja uuden asian välillä. Muutosvastaisuus näkökulman mukaan ristiriita tilanteessa tai epäselvässä tilanteessa oppilas turvautuu aikaisemmin toimivaksi osoitettuun ajatteluun. Polynomilaskennan tapauksessa oppilas toimisi joko yhdistämällä tai poistamalla termejä polynomilaskennan sääntöjen vastaisesti, jolloin vastauksena jäisi yksi termi.

Moni oppilas kokee putoavansa kärryiltä, kun kirjaimet tulevat mukaan matematiikassa (Ryan & Williams 2007). Kirjaimien esiintyminen matematiikassa on oppilaille ensimmäinen havainto algebrasta. Algebrallista ajattelua ja näin oppilaan valmiuksia oppia uusia algebrallisia konsepteja voidaan harjoitella jo alakoulussa. Tätä kutsutaan varhaisalgebraksi (Ryan & Williams 2007). Varhaisalgebran avulla voidaan kehittää oppilaan käsityksiä alakoulussa käytettävistä matemaattisista käsitteistä ja symboleista, niin että ne ovat paremmin yhdistettävissä yläkoulun algebran kanssa. Tärkeää on kehittää oppilaan kykyä hahmottaa, koska se auttaa abstraktien käsitteiden ymmärtämiseen. Varhaisalgebran avulla voidaan tuoda oppilaan tietoisuuteen malleja ja konsepteja, joita hyödynnetään yläkoulun algebrassa. Näistä esimerkkejä ovat vaakamalli, lukusuora, tai kahden suureen taulukointi sekä suureiden suhteen vertaaminen toisiinsa. Uusien asioiden oppiminen on helpompaa, jos niiden havainnollistamiseksi käytetään ennalta tuttuja tapoja ja tekniikoita.

Algebraa voidaan pitää portinvartijana muihin matematiikan opintoihin (Dougherty & muut 2015). Ilman algebran osaamista on hankalaa edetä matematiikan opinnoissa yläkoulussa tai yläkoulun jälkeisissä matematiikan opinnoissa (Woong & Mao 2020). Yläkoulun algebra ei ole ainoa matematiikan kompastuskivi oppilaan oppimispolulla, mutta oppilaan tulevaisuuden mahdollisuuksien kannalta yksi merkittävimmistä. Algebran osaamattomuus yläkoulussa saattaakin johtaa siihen, että oppilas hylkää kokonaan matemaattisille aloille suuntautumisen. Suomessa kaikkia matemaattisten alojen korkeakoulu aloituspaikkoja ei saada täytettyä ja samaan aikaan näiden alojen osaamisen kysyntä on kasvanut. Näiden alojen opetuspaikkojen lisääminen, tai opiskelu paikan saamisen yksinkertaistaminen ei auta, jos opiskelijoilla ei ole valmiuksia opiskella matemaattisilla aloilla. Näin algebran osaaminen ja sen opettaminen yläkoulussa tulee osaksi niin vihreää siirtymää kuin digitalisaatiota.

Virhekäsityksiä yläkoulunalgebrassa voi esiintyä ainakin sulkeissa ja laskujärjestyksessä, yhtäsuuruudessa, peruslaskutoimitusten symboleissa, muuttujassa ja funktion käsitteessä (Welder 2012 ; Wilkie & muut 2018). Sulkeet ja laskujärjestys on yläkoulun matematiikan aloittaessa ensimmäisiä opeteltavia asioita. Tämä tarjoaa tilaisuuden myös harjoituttaa algebrallista ajattelua ja virheellisten käsitysten korjaamiseen esimerkiksi yhtäsuuruuden osalta ennen varsinaisten uusien algebrallisten käsitteiden esittelyä. Yhtäsuuruuden oikeanlainen ymmärrys on keskeistä muuttujan ja funktion käsitteen ymmärtämiseen. Lisäksi yhtälön ratkaiseminen oikein on mahdotonta ilman oikeanlaista käsitystä yhtäsuuruudesta. Peruslaskutoimitusten symbolien virheellinen käsitys aiheuttaa ongelmia muuttujien lukujen kanssa toimiessa. Parhaiten tämä tulee esiin polynomilaskennan yhteydessä. Funktion käsitteessä ymmärtämiseksi oppilaan tulee hallita erityisesti yhtäsuuruuden ja muuttujan käsitteet. Funktion käsite on erittäin abstrakti ja näin haastaakin oppilaan algebrallista ajattelua uudella tavalla.

Kirjallisuutta on etsitty Turun yliopiston kirjaston Volter tietokantaa. Hakusanoina on käytetty muun muassa virhekäsitys (misconception), muutosvastaisuus (change-resistance) ja algebra. Tutkielman kolmannessa kappaleessa esitellään yleisimpiä yläkoulun algebrassa esiintyviä virhekäsityksiä ja neljännessä kappaleessa annetaan neuvoja opettajalle, kuinka näitä virhekäsityksiä voisi opetuksessa ennalta ehkäistä ja korjata. Ennen yleisempien virhekäsitysten esittelyä toisessa kappaleessa käsitellään virhekäsityksen muodostumisen ymmärtämiseen liittyviä keskeisiä käsitteitä.

2 Virhekäsityksen taustat

Kappaleessa käsitellään taustoja, jotka helpottavat ymmärtämään virhekäsitysten syntyä. Virheen syynä ei välttämättä ole virhekäsitys. Virhekäsityksestä johtuvat virheet vaativat aina opettajalta erityistä huomiota. Oppilaan virhekäsityksen ymmärtämiksi opettajan on keskusteltava oppilaan kanssa. Opettajan on ymmärrettävä, miten oppilas ajattelee ja kuinka hän ymmärtää tehtävän ratkaisussa tarvittavia käsitteitä. Virhekäsityksien muodostumista voidaan lähestyä muutosvastaisuusnäkökulman avulla (Welder 2012). Aikaisemmin tutut ja vakiintuneet käsitteet eivät enää sovellu sellaisenaan yläkoulun algebrassa.

Oppilaan kykyä ilmaista omaa ajatteluaan symboleilla kutsutaan algebralliseksi ajatteluksi (Wilkie 2016). Algebrallisessa ajattelun avulla oppilas tulkitsee erilaisia sääntöjä ja systeemejä kaavioiden kuvaajien ja funktioiden avulla. Oppilaan algebrallista ajattelua kehittämällä helpotetaan oppilaan kykyä omaksua algebran abstrakteja käsitteitä. Algebrallista ajattelua voidaan lähteä kehittämään varhaisalgebran avulla jo alakoulussa (Ryan & Williams 2007). Varhaisalgebran avulla voidaan esitellä ja harjoitella yläkoulun algebran opiskeluun tarvittavia työtapoja. Algebrallisen ajattelun harjoittelu jo varhaisessa vaiheessa parantaa oppilaan matemaattisia valmiuksia yläkoulusta valmistuttuaan (Woong & Mao 2020). Algebraa pidetään portinvartijana matemaattisille aloille (Dougherty & muut 2015), koska ilman algebran hallintaa oppilaalle tulee suuria hankaluuksia myöhemmissä matematiikan opinnoissa. Tämän takia algebrallisen ajattelun kehittämiseen ja näin oppilaan algebran osaamiseen tulisi kiinnittää erityistä huomiota.

2.1 Virhe ja virhekäsitys

Virhekäsitys ilmenee yleensä virheenä, mutta kaikki virheet eivät johdu virhekäsityksestä. Virhe voi tapahtua asian väärin lukemisen, faktan väärin muistamisen, huolimattomuuden tai piittaamattomuuden takia. Ihmiset keskittymisen taso riippuu siitä, kuinka tärkeä asia on hänelle (Ryan & Williams 2007). Mitä tärkeämmäksi ihminen kokee asian itselleen, sitä keskittyneempi hän on. Liika jännitys saattaa johtaa paniikkiin ja näin hätäisiin vastauksiin sekä huolimattomuuteen vastauksissa. Virhekäsitys menee syvemmälle. Oppilaan käsitys tai ymmärrys matematiikasta on virheellinen. Virhekäsitys on väärä tai vääristynyt ymmärrys tai mielipide asiasta, joka perustuu vialliseen ajatteluun tai päättelyyn (Welder 2012). Kaikki virheet eivät johdu virhekäsityksestä. Tämän takia syy oppilaan virheelliselle vastaukselle tai päätelmälle on tarpeen tullen selvitettävä. Opettaja voi pyrkiä korjaamaan virhekäsitystä keskustelemalla asiasta oppilaan kanssa tai käymällä läpi tarkentavan esimerkin.

Havainnot oppilaan osaamisesta voidaan jakaa kahteen tasoon, jotka ovat pintataso ja syvempi taso (Ryan & Williams 2007). Tätä jakoa on esitelty taulukossa 1. Pintatason havainnot oppilaasta opettaja kerää kokeista tai testeistä ja ne ovat oppilaan tekemiä virheitä. Syvemmän tason havainnot saadaan keskustelemalla tai muuten selvittämällä oppilaan perustelu vastauksesta. Syvemmällä tasolla käsitellään oppilaan virhekäsityksiä. Pintatason havainnot oppilaista ovat kokeneelle opettajalle helposti tunnistettavissa, vaikka heillä ei olisi tarkkaa teoriaa selittämään heidän kykyään (Ryan & Williams 2007). Näin kokenut opettaja pystyy myös ennustamaan ja ennaltaehkäisemään tyypillisiä virheitä. Vastausstrategian merkityksen korostamisella voidaan ennaltaehkäistä huolimattomuusvirheitä, kuten kehottamalla oppilaita pohtimaan vastauksen mielekkyyttä reaalimaailmassa tai vastauksen tarkistaminen välivaiheittain. Syvemmällä tasolla myös kokeneilla opettajilla on hankaluuksia ymmärtää virhekäsityksen taustoja ilman teoreettista pohjaa (Ryan & Williams 2007). Virhekäsityksen muuttamiseksi on ehdotonta ymmärtää, miten oppilas ajattelee. Opettajan tulisi selvittää, minkälaisia puutteita oppilaan matemaattisissa valmiuksissa on. Virhekäsityksen taustojen selvittäminen voi olla aikaa vievää, mutta niiden oikominen on suuri tekijä opetuksen onnistumisessa (Ryan & Williams 2007).

Taulukko 1 Pinta- ja Syvemmän tason erottelu (Ryan & Williams 2007)

	Oppilaan tieto	Havainto	Pedagogia
Pintataso: Oppilaan vastaus	Virhe	Koe tai testi	Virheen korjaus
Syvempitaso: Oppilaan perustelu, selitys, tai ymmärrys	Virhekäsitys	Selitys ja ymmärrys	Vuorovaikutus ja ristiriita

Monille henkilöille, niin oppilaille kuin opettajille virheiden myöntäminen on hankalaa. Virheitä pyritään välttämään ja niitä jopa pelätään (Eggleton & Moldavan 2001). Tämän takia opettajan tulisi pyrkiä luomaan virheisiin positiivisesti suhtautuva ilmapiiri. Osa opettajista antaa esimerkkejä tyypillisistä virheistä tai varoittelee niistä etukäteen. Kuitenkaan varoittelun ei kuitenkaan ole havaittu vähentävän näiden virheiden tekoa (Eggleton & Moldavan 2001). Oppilaat eivät välttämättä ymmärrä matematiikkaa loogisena ja deduktiivisena tieteenä. Tämän takia oppilaat eivät näe samoja loogisia ristiriitoja, joita virheellisillä esimerkeillä pyritään esittämään. Opettajan tulisi mieluummin antaa oppilaiden kehittää omaa matemaattista ajattelua yritys ja erehdys periaatteella, jossa opettajan roolina olisi mahdollisimman vähän ohjata oppilaiden ajattelua (Eggleton & Moldavan 2001). Tällainen työskentely sopisi esimerkiksi uuden asian johdattelussa.

Opettajajohtoinen opetus toimii matematiikan opetuksessa hyvin uuden asian opettamiseen, mutta se ei anna oikeanlaista kuvaa matemaattisten ongelmien ratkaisemisesta ja tiedon tuottamisesta. Oppikirjan tehtävät ovat usein suljettuja tehtäviä, joihin on vain yksi oikea vastaus ja vastaustapaa ohjaa oppitunnin aihe. Oppilaille jääkin virhekäsitys matematiikan hyödystä käytännön ongelmien ratkaisuihin (Eggleton & Moldavan 2001). Tehtävien ratkaisuihin avoimuutta voidaan tuoda esimerkiksi projekteilla, joissa voidaan myös yhdistää muiden aineiden osaamista. Oppilaat oppivatkin paremmin silloin kun, heidän ponnistelunsa johtavat konkreettisen ongelman ratkaisuun ja tiedon tuottamiseen (Eggleton & Moldavan 2001).

Virheitä ei pysty välttämään matematiikassa ja niihin oikeinlaista suhtautumista on hyvä harjoitella matematiikan tunneilla. Oppilaiden tekemät virheet ovat usein opettajan ensimmäinen mahdollisuus tunnistaa oppilaiden virhekäsityksiä (Welder 2012). Virheistä oppiminen ja oman ajattelun reflektointi on tärkeä osa oppimisen konstruktiivista näkökulmaa (Eggleton & Moldavan 2001). Opettaja voi rohkaista luokassa tätä luomalla keskustelevan ilmapiirin, jossa otetaan huomioon useampia mahdollisia ratkaisu tapoja.

2.2 Muutosvastaisuus

Muutosvastaisuus näkökulma (Change resistance approach) helpottaa ymmärtämään algebran virhekäsityksiä ja niistä seuraavia oppimisvaikeuksia (Welder 2012). Näkökulman mukaan väärin ymmärretty tieto tai vajaaksi jäänyt ymmärrys aiheesta ovat uuden oppimisen esteenä (Carey 2000). Tätä näkökulmaa voikin hyvin soveltaa algebran opetukseen matematiikan kumulatiivisuuden vuoksi. Algebran oppimista voidaankin edistää tunnistamalla ja estämällä oppilaiden väärinkäsityksiä algebran eri aiheista (Welder 2012). Täten opettajien kaikilla oppimisen asteilla on hyvä ymmärtää kuinka pienilläkin muutoksilla voi olla suuria vaikutuksia oppilaiden ymmärrykseen algebrasta ja näin mahdollisuuksiin edetä seuraavaan aiheeseen. Suurimmat haasteet tulevat nivelvaiheissa esimerkiksi siirryttäessä alakoulusta yläkouluun, jolloin luvuilla laskemisesta siirrytään työskentelemään muuttujilla, yhtälöillä ja funktioilla. Tässä kohtaa alakoulussa opitut yksinkertaistukset laskemisessa saattavatkin olla suuri este algebran oppimisessa yläasteella (Welder 2012). Tämän takia opettajien on hyvä tietää yleisimmistä virhekäsityksiä algebrassa ja miten opetustaan muuttamalla opettajat välttävät virhekäsityksien syntymistä.

Pienet virhekäsitykset eivät alakoulun matematiikassa välttämättä vaikuta ratkaisevasti oppilaan pärjäämiseen, mutta yläkoulun algebraan siirtyessä samat virhekäsitykset ovatkin oppimisen esteenä (McNeil 2014). Erityisesti aritmetiikassa tehdyt yksinkertaistukset ovat algebran opintojen alussa esiintyvien virhekäsityksien syynä (Welder 2012). Oppilaiden ymmärrys matematiikan käsitteistä jää suppeaksi tai virheelliseksi, jolloin laajempien algebrallisten käsitteiden ymmärtäminen on hankalampaa. Tämä haittaa myös algebrallisen ajattelun kehittymistä, koska virheellisillä käsityksiin pohjautuva ajattelu tuottaa virheellisiä tai puutteellisia päätelmiä. Matematiikassa muutosvastaisuus näkökulma on ristiriidassa näkemyksen kanssa, jonka mukaan pelkällä aritmetiikan harjoittelu parantaisi oppilaan mahdollisuuksia oppia algebraa (McNeil 2014). Ilman vaihtelevia työtapoja ja poikkeamista rutiininomaisista tehtävistä, oppilaan ymmärrys matematiikasta jää liian yksipuoliseksi. Myöhemmin tämä aiheuttaa oppilaissa turhautumista. Turhautuneista oppilaista moni luovuttaakin matematiikan suhteen, mikä on ongelmallista, koska ilman algebran hallintaa toimiminen matemaattisilla aloilla on lähes mahdotonta (Dougherty & muut 2015).

Oppilaan ajattelun muuttamiseksi ei riitä kertoa, että hän on väärässä, vaan opettajan tulisi ohjata oppilasta näkemään ajatustensa ristiriitaisuus (Zielinski & Glazner 2019). Tämän takia opettajan on ymmärrettävä, mikä on oppilaan käsitys ja kuinka hän ajattelee. Uuden asian opettamisessa onkin hyvä lähteä johdattelemaan keräämällä tietoa, mitä oppilaat aikaisemmin tietävät aiheesta. Johdattelun voi aloittaa esimerkeillä, jotka ovat valmiiksi ristiriidoissa oppilaan aikaisemman tiedon kanssa. Tärkeintä olisi korostaa kuinka oppilaiden aikaisempi ajattelu ei toimi enää laajemmassa kontekstissa (Zielinski & Glazner 2019). Aikaisemmin opittujen asioiden ja käsitteiden yhteys uuteen tulisi käydä läpi uuteen asiaan tutustuttaessa. Esimerkiksi epäyhtälöiden opettamisen aikana on hyvä käydä läpi yhteneväisyyksiä yhtälön ratkaisuun. Myöhemmin uuden opitun asian ymmärryksen vahvistamiseksi voidaan etsiä eroavaisuuksia muihin opittuihin käsitteisiin ja rakenteisiin, kuten epäyhtälön ja vastaavan yhtälön ratkaisujen lukumäärä ja niiden havainnollistus lukusuoralla tai koordinaatistossa. Näin oppilaat pystyvät rakentamaan matematiikan käsitystään määritelmien sekä niiden yhteyksien kautta. Opettajan on pyrittävä tekemään ero ymmärryksen ja ulkoa muistamisen välillä (Zielinski & Glazner 2019).

2.3 Algebrallinen ajattelu

Algebrallinen ajattelu on analyyttistä ja siinä asioita tai ilmiöitä ilmaistaan symboleilla. Algebrallisessa ajattelussa yhdistetään reaalimaailman ilmiöitä matemaattisiin malleihin, kuten funktioihin. Algebrallisen ajattelun kehittyminen voidaan jakaa neljään tasoon. Algebrallisen ajattelun lähtötasolla oppilas kykenee näkemään aritmeettisen näkökulman. Oppilas tunnistaa matemaattisia yhteneväisyyksiä ja rakenteita ilman, että pystyy tuottamaan vastaavat rakenteet itsenäisesti. Toisella tasolla oppilas tuottaa algebralliset yleistykset epäsuorasti esimerkiksi sanallisesti tai eleiden avulla, kuten taputtamalla. Seuraavalla tasolla näkee yhteneväisyyksiä ja kykenee ilmaisemaan niitä matemaattisten symbolien ja äidinkielensä yhdistelmänä. Algebrallista ajattelun korkeimmalla tasolla oppilas kykenee yleistämään ajattelunsa symbolien avulla, kuten numeroiden ja kirjaimien. Algebrallisen ajattelun tason on koottu taulukkoon 2. (Wilkie 2016)

Taulukko 2 Algebrallisen ajattelun tasot (Wilkie 2016)

Taso	Esimerkki
Aritmeettinen näkökulma	Vierekkäisten numeroiden erotus on 3.
Epäsuora algebrallinen yleistäminen	Lukujonon seuraava jäsen saadaan, kun lukujonon edelliseen jäseneen lisätään 3.
Tuettu symbolinen yleistäminen	Lukujonon jäsen = 3·(lukujonon järjestysnumero) -1
Täsmällinen symbolinen yleistäminen	$a_n = 3n - 1 \mid n = 1,2,3,4 \ldots$

Algebrallisen ajattelun kehittymistä voidaankin arvioida, kuinka hyvin oppilas tulkitsee erilaisten sääntöjä ja systeemejä kaavioiden, kuvaajien ja funktioiden avulla (Wilkie 2016). Matemaattista havainnollistamista ei varsinaisesti voi itsessään hyödyntää, vaan se vaati aina kontekstin. Algebrallista ajattelua voikin kuvailla oppilaan kyvyksi ymmärtää matematiikan rakenteita. Pelkkien laskujen ja algoritmien toteuttamisen sijaan oppilas kykenee analysoimaan määrällisiä suhteita, yleistämään, mallintamaan, osoittamaan tai todistamaan, ongelma ratkaisuun ja näkemään erilaisia rakenteita (Dougherty & muut 2015).

Konteksti antaa algebralliselle ajattelulle merkityksen ja motiivin. Oppilaan visualisoinnin kehittäminen tukee oppilaan algebrallisen ajattelun kehittymistä. Algebrallisessa ajattelussa yhdistyy sekä käsitteiden ja määritelmien pukeminen sanoiksi että samalla näiden käsitteiden hahmottaminen ja ymmärtäminen. Tämä vaatii molempien aivopuoliskojen toimintaa. Malleilla voidaan auttaa oppilasta kehittämään omaa hahmotuskykyään. Esimerkiksi mallien avulla voidaan havainnollistaa lukusuoralla eri lukujen suhteita toisiinsa, lukuparien taulukoimista funktion havainnollistamiseksi, Venn-diagrammeilla havainnollistetaan lukujoukkojen unioneja ja leikkauksia. Matemaattinen ongelmaratkaisu vaatiikin usein kykyä hahmottaa ongelma abstraktisti. Oppilaan mahdolliset ongelmaratkaisustrategiat riippuvat oppilaan matemaattisesta osaamisesta. Tämä sisäinen konteksti määritteleekin, miten oppilas päätyy ratkaisuun. Näistä ratkaisuista voidaan arvioida oppilaan algebrallisen ajattelun puutteita. Kuitenkin mitä tutumpi ongelman konteksti oppilaalle on, sitä helpompaa oppilaalle on soveltaa algebrallista ajatteluaan. Tällaisia tuttuja konsepteja ovat esimerkiksi arkiset asiat, kuten harrastukset tai ruokakaupassa asioiminen. Vastaavasti vieraampiin konteksteihin oppilaiden on hankalampaa soveltaa jopa tuttuja algebrallisia konsepteja. (Ryan & Williams 2007)

2.4 Alakoulun laskennasta yläkoulun algebraan

Siirryttäessä alakoulusta yläkouluun matematiikan luonne muuttuu. Matemaattiset käsitteistä tulee abstrakteja, eikä niitä voi yhtä helposti yhdistää reaalimaailmaan, kuin alakoulussa. Monien jo tutuksi tulleiden merkintöjen ja käsitteiden merkitys laajenee. Tämän takia yksinkertaistukset ja muistisäännöt, joiden avulla oppilas on pärjännyt alakoulun matematiikassa ei välttämättä päde enää yläkoulun matematiikassa. Algebran alkaessa monella oppilaalla katoaakin kiinnostus matematiikkaa kohtaan, koska algebran luonne eroaa radikaalisti oppilaan aikaisempiin käsityksiin matematiikasta (Ryan & Williams 2007). Opettajan pedagogian epäonnistuessa oppilaat turvautuvat selviytymismenetelmään, jossa he käyttävät ulkoa opeteltuja rutiineja. Näin opitun asian ymmärrys jää puutteelliseksi ja uuden asian soveltaminen on hankalaa.

Algebran opettaminen ja oppiminen on erityisesti käsitteiden ymmärtämistä. Keskiössä on, kuinka oppilas löytää yhteyksiä algebran, numerojen, muotojen ja tilan välillä. Algebrassa ajattelua ilmaistaan symbolien avulla, joiden avulla liikutaan reaalimaailman ilmiöiden ja algebrallisen ajattelun välillä. Yläkoulussa algebran opiskelu näkyy oppilaalle muuttujakirjainten manipuloimisena, kuten samanlaisten termien laskeminen yhteen, lausekkeen sieventämisenä ja yhtälön ratkaisuna. Varsinainen pohja algebralliselle ajattelulle luodaan jo alakoulussa aritmetiikassa. Isona erona alakoulun ja yläkoulun välillä on yleistyksen käsite. Yleistyksillä siirrytäänkin aritmeettisesta näkökulmasta eteenpäin algebrallisessa ajattelussa. Alakoulussa oppilaiden tulisi harjoitella erilaisten sääntöjen ja kuvioiden etsimistä sekä tunnistamista. Yläkoulussa sääntöjen yleistämiseen on intuitiivisempaa symboleilla, jos sitä on sanallisesti harjoiteltu alakoulussa. Yleistyksen lisäksi myös vaihtelevuuden käsite on keskeinen algebrallisen ajattelun kehityksessä. Yleistys ja vaihtelevuuden käsitteitä ilmaistaan muuttujan avulla. (Ryan & Williams 2007)

Alakoulussa tapahtuvaa algebrallisen ajattelun harjoittamista kutsutaan varhaisalgebraksi (Pre-algebra). Parhaimmassa tilanteessa varhaisalgebra tukee alakoulun aritmetiikan opiskelua. Varhaisalgebra ilmenee esimerkiksi aritmetiikan sääntöjen havainnointina ja niiden sääntöjen yleistämisenä. Tämä voi olla muun muassa kertotaulun tai luonnollisten lukujen ominaisuuksien tarkastelua. Alussa on tärkeää, että oppilas ilmaisee yleistyksiä omin sanoin ja termien matemaattisella täsmällisyydellä ei ole merkitystä. Iän karttuessa, kielen kehittyessä ja matemaattisten valmiuksien parantuessa oppilaan yleistyksistä tulee tarkempaa ja tätä luokanopettajan tulisi myös vaatia. Kuvauksien matemaattinen tarkentuminen on merkittävää edistystä oppilaan algebrallisessa ajattelussa. (Ryan & Williams 2007)

Yläkoulussa oppilaat tarvitsevat tueksi kontekstin, mallin tai muita havainnollistuksia algebrallisen ajattelun kehittämiseen. Uudet taidot ja tiedot rakentuvat vanhan tiedon pohjalle. Vanhan tiedon pohjalta liittäminen uuteen antaakin oppilaalle vankemman pohjan asian ymmärtämiseen (Dougherty & muut 2015). Alakoulussa jo varhainen algebrallisen ajattelun harjoittelu antaa paremmat edellytykset oppilaalle yläkoulun opintoja aloittaessa (Ryan & Williams 2007). Ajattelua voidaan kehittää tehtävillä, joissa oppilaan on perusteltava vastauksensa matemaattisen tietämyksensä pohjalta. Liian moni oppilas näkee matematiikan tietyssä järjestyksessä tehtyinä toimintoja, joiden jälkeen saadaan vastaus. Jos tehtävälle ei ole annettu valmista esimerkkiä, useimmilla oppilailla katoaa kiinnostus tehtävää kohtaan (Dougherty & muut 2015). Oppilaiden ajattelua voidaan kehittää tehtävillä, joissa on useampi oikea vastaus ja jonka voi ratkaista useammalla eri tavalla.

2.5 Algebra portinvartijana

Algebran ajatellaan toimivan portinvartijana matemaattisille aloille (Dougherty & muut 2015). Algebran osaamista vaaditaan erityisesti STEM-aloilla, eli toimittaessa tieteen, teknologian, insinööritieteiden ja matematiikan aloilla. Oppilaan yläkoulun algebran osaamisen on havaittu ennustavan yläkoulun jälkeisissä matematiikan opinnoissa menestymistä (Woong & Mao 2020). Algebran opinnoissa heikommin pärjänneillä oppilailla onkin huomattavan paljon kirittävää lukiossa ja matematiikan kumulatiivisuuden vuoksi yläkoulun jälkeen tämä on hankalampaa verrattuna muihin oppiaineisiin. Algebran heikko osaaminen hankaloittaa myös kemian ja fysiikan opiskelua. Erilaiset tilastolliset havainnollistus- ja tutkimusmenetelmät ovat yhä enemmän käytössä muillakin kuin luonnontieteellisillä aloilla. Lisäksi Suomessa korkeakouluhaussa pitkästä matematiikasta saa pisteitä suhteessa muihin oppiaineisiin enemmän.

Algebrallisen ajattelun harjoittelun varhain on havaittu vaikuttavan positiivisesti oppilaan matemaattisiin valmiuksiin yläkoulusta valmistuttua (Woong & Mao 2020). Tämän takia yläkoulun matematiikan opettajien on hyvä tiedostaa, kuinka kriittisiä oppilaan kannalta yläkoulun algebran opinnot ovat oppilaan tulevaisuuden kannalta. Yläkoulun opettajalle on keskeistä tietää, miten algebrallista ajattelua vahvistetaan. Kaikissa yläkoulun matematiikan sisällöissä on mahdollista vahvistaa algebrallista ajattelua. Alakoulun luokanopettajien on hyvä ymmärtää, kuinka algebrallisen ajattelun harjoittaminen helpottaa yläkoulun algebran omaksumista (Woong & Mao 2020).

3 Yleisiä virhekäsityksiä

Tyypillisiä virhekäsityksiä esiintyy yläkoulun oppilaalla sulkeiden käytössä, laskujärjestyksestä, yhtäsuuruuden ymmärtämisessä, muuttujan käytössä, matemaattisten symbolien kanssa (Welder 2012) ja funktion käsitteessä (Wilkie & muut 2018). Nämä virhekäsitykset liittyvät keskeisesti peruskoulun opetussuunnitelman vuosiluokille 7-9 sisältöalueisiin S3 Algebra ja S4 Funktiot (OPS 2014). Esimerkiksi algebran sisällössä perehdytään muuttujan käsitteeseen ja harjoitellaan polynomien eri laskutoimituksia. Funktion käsitteen merkityksestä kertoo, että se erikseen mainitaan opetussuunnitelmaan keskeisissä sisältö alueissa. Yläkoulun matematiikassa esitellään paljon uusia käsitteitä, kuten muuttuja, polynomi, funktio ja verrannollisuus. Näitä käsitteitä ja monia muita oppilaan tulisi osata käyttää ja yhdistää muihin matemaattisiin käsitteisiin, sekä reaalimaailman ilmiöihin (OPS 2014).

Kappaleessa esitellään keskeisiin algebran aiheisiin liittyviä tyypillisinä virhekäsityksiä ja esimerkkejä, miten nämä virhekäsitykset näkyvät oppilaan vastauksissa. Lisäksi keskeisissä aiheissa määritellään sopivalla tavalla oppilaan algebrallisen ajattelun taso, jota havainnollistetaan esimerkeillä. Tarkoituksena on antaa opettajalle enemmän työkaluja ymmärtää oppilaan ajattelua. Aiheittain yleisimpien virhekäsitysten esittelyn lisäksi tarkastellaan hieman oppikirjojen mahdollisesti aiheuttamia virhekäsityksiä, sekä opettajan roolia yleisimmin virhekäsityksien luojana ja ehkäisijänä.

3.1 Sulkeet ja laskujärjestys

Sulkeet ovat keskeinen matemaattinen notaatio algebrassa. Sulkeet kertovat, mitkä laskutoimitukset tehdään ensimmäisenä. Suomalaisissa oppikirjoissa käytetään kolmenlaisia sulkeita aalto-, kaari-, ja hakasulkeita. Ensimmäisenä lasketaan aaltosulkeiden sisällä oleva lasku, tämän jälkeen hakasulkeiden sisällä oleva lasku ja lopuksi kaarisulkeiden sisällä oleva lasku, kuten alla olevassa esimerkissä.

$$\{-12:2+[-12\cdot(16-3\cdot 4)]\}=\{-6+[-12\cdot 4]\}\cdot(-1)=\{-6-48\}\cdot(-1)=-54\cdot(-1)=54$$

Kyseinen tapa on tyypillinen tapa laskea aritmeettisia laskua. Puhtaasti vasemmalta oikealle ja samalle riville suoritettava lasku, jossa yhtäsuuruuksia on useampi peräkkäin saattaa aiheuttaa opintojen edetessä hankaluuksia oppilaalle yhtälön ratkaisussa tai funktion käsitteessä (Welder 2012).

Sulkeita voidaan myös käyttää jakamaan tai luokittelemaan lausekkeen osia. Esimerkiksi tehtävässä ”Laske polynomien $P(x)=x+1$ ja $Q(x)=2x-3$ erotus” polynomit voidaan erotella toisistaan sulkeiden avulla $P(x)-Q(x)=(x+1)-(2x-3)$. Sulkeiden oikeanlaisen käytön yhdistäminen muiden laskujärjestyssääntöjen kanssa on havaittu olevan hankalaa kaiken ikäisille oppilaille (Welder 2012). Yleensä oppilaat osaavatkin luetella oikein laskujärjestyksen, mutta käytännössä laskut suoritetaan vain oikealta vasemmalle. Länsimäisessä kulttuurissa kirjoitetaan ja luetaan vasemmalta oikealle, joka edes auttaa tällaisen virhekäsityksen syntymisen. Tämän takia laskujärjestyssäännöt ovat ristiriidassa oppilaiden aikaisempaan tapaan tekstin luvusta ja tiedon käsittelystä (Welder 2012). Oppilaille yleensä opetetaan laskujärjestyssäännöt muistisääntöjen avulla, jotka eivät korosta, mikä operaatio on tehtävä ennen toista operaatiota (Tabak 2019). Tämän takia osalle oppilaista jää irrallinen käsitys laskujärjestyksen tärkeydestä matematiikassa. Laskujärjestyksen heikko ymmärrys peruslaskutoimitusten yhteydessä onkin suuri este myös algebran oppimisessa, kun siirrytään luvuista muuttujiin ja vakiokirjaimiin. Myös myöhemmin esiintyvä virheellinen sulkeiden käyttö selittyy yleensä oppilaan virheellisestä käsityksestä laskujärjestyksestä (Tabak 2019).

Laskujärjestystä harjoitellaan myös alakoulussa. Alakoulussa tulisi luoda pohja oppilaalle laskea rationaaliluvuilla. Erityisesti tulisi harjoittaa oppilaiden kykyä operoida sekä murto- ja desimaaliluvuilla että negatiivisilla luvuilla (Dougherty & muut 2015). Esimerkiksi keskustelut oppilaiden kanssa, miksi kahden positiivisen luvun summa on suurempi kuin kumpikaan summattavista luvuista, kun taas kahden negatiivisen luvun summa on pienempi kuin kumpikaan summattavista luvuista. Kahden murtoluvun tulo taas on pienempi kuin tulojensa tekijät. Tällaisten sääntöjen löytäminen ja niiden matemaattinen määrittäminen kehittää myös algebrallista ajattelua (Dougherty & muut 2015). Lisäksi eri lukujen merkitsemistä lukusuoralla ja lukujen etäisyyden määrittämistä toisiinsa lukusuoralla tulisi harjoitella oppilaiden kanssa.

Yläkoulun oppilaiden virhekäsityksiä tutkittiin 240 oppilaan osalta tutkimuksessa, jossa niitä selvitettiin oppilaiden vastauksien perusteella (Tabak 2019). Tutkimuksessa havaittiin, että oppilaiden vastauksista merkittävästi enemmän oikein oli, kun lasku pystyttiin laskemaan suoraan vasemmalta oikealle ilman, että laskujärjestyssääntöjä tarvitsi soveltaa. Esimerkiksi laskun $60 \div 4 + 23 =$ sai oikein 93% oppilaista, kun taas laskun $89 - 60 \div 3 =$ sai oikein 19% oppilaista. Suurin osa oppilaista osasi laskea sulkeiden sisällä olevan laskun ensin, mutta jatkoi tämän jälkeen laskua vasemmalta oikealle välittämättä muista laskujärjestyssäännöistä. Avoimissa kysymyksissä tuli oppilaan tiettyjen laskutoimitusten avulla muodostaa lasku, jonka vastaus oli ennalta määritetty luku. Esimerkiksi muodosta yhteen ja kertolaskun avulla lasku, jonka vastaus on 24. Vastauksista 37% oli oikein, 67% virheellisiä ja loput eivät vastanneet. Tyypillisissä puutteellisissa vastauksissa lasku oli laskettu vaiheittain, eli ensin yhteenlasku $3 + 1 = 4$ ja lopuksi kertolasku $4 \cdot 6 = 24$. Tässä tapauksessa oikeassa vastauksessa olisi pitänyt hyödyntää sulkeita, jotta lasku olisi yksi lauseke, eli $(3 + 1) \cdot 6 =$24. Suurin osa oppilaista, 45% ei vastannut avoimeen kysymykseen, jossa heidän piti keksiä valmiiksi laskettuun laskuun tehtävän anto. Virheellisissä vastauksissa oli 31%, joissa korostui, että oppilaat eivät kyenneet keksimään tehtävää jossa on useampaa eri laskutoimitusta. Tutkimuksessa kuitenkin suurin osa osasi nimetä laskujärjestyksen, kuitenkin hankaluuksia osoittautui käytännössä. (Tabak 2019)

3.2 Yhtäsuuruus

Yhtäsuuruudella on kolme oleellista merkitystä algebrassa. Yhtäsuuruus ilmaisee kahden suureen yhtäsuuruutta, jakaa yhtälön kahteen eri puoleen ja se on suhdetta kuvaava symboli (Welder 2012). Aritmetiikassa harvoin painotetaan yhtäsuuruusmerkkiä yhtäsuuruuden ilmaisemiseen. Yhtäsuuruusmerkki ilmaisee enemmän jakoa, jossa lasku on merkin vasemmalla puolella ja vastaus oikealla puolella. Lisäksi yhtäsuuruutta käytetään ilmaisemaan useampaa välivaihetta laskussa vaakasuoraan peräkkäin. Oppilas tottuu käyttämään yhtäsuuruutta alakoulussa kapeassa kontekstissa. Muutosvastaisuus näkökulman mukaan oppilaan kapeasta käsityksestä yhtäsuuruudesta on hankala laajentaa sopimaan algebran opettamiseen (Chesney & muut 2018). Yhtäsuuruuden ymmärtäminen voidaan jakaa neljään tasoon (Cornelis & Bronwin 2017):

- Taso 1: Jäykkä toiminta. Oppilas näkee yhtäsuuruuden operaationa, jossa lasku tapahtuu yhtäsuuruuden vasemmalla puolella ja vastaus annetaan oikealla puolella.
- Taso 2: Joustava toiminta. Oppilas kokee, että yhtäsuuruuden tarkoituksena on ilmaista laskun vastausta molemmilta puolilta yhtälöä. Oppilas pystyy tarkastelemaan yhtälön käänteisesti, kuten $21 = x + 8$ tai $x + 8 = 21$.
- Taso 3: Yhtälön suhteellisuuden tiedostaminen. Oppilas tunnistaa yhtäsuuruuden suhteellisen merkityksen. Näin oppilas ymmärtää, miksi yhtäsuuruus säilyy vain, jos laskutoimitus tehdään molemmille puolille yhtälöä.
- Taso 4: Yhtälön suhteellisuuden vertaileminen. Oppilas tunnistaa yhtälön kahden eri puolen suhteita ja käyttää monipuolisia tekniikoita niiden ratkaisemiseen. Esimerkiksi tehtävässä: Ilman laskutoimituksia perustele yhtäsuuruus $56 + 80 = 55 + 81$.

Yhtäsuuruuden virhekäsityksiä esiintyy kaikilla koulutuksen tasoilla ja jopa yliopisto oppilaat kuvaavat yhtäsuuruutta operaationa (Welder 2012). Useammassa tutkimuksessa onkin todettu, että oppilaiden ymmärrys yhtäsuuruudesta on pinnallinen (Cornelis & Bronwin 2017). Alakoulussa yleensä oppilas käyttää yhtäsuuruusmerkkiä tilanteessa, jossa se jakaa laskun lasku osuuden ja vastauksen välillä. Tämä johtaakin oppilaiden osalta käsitykseen yhtäsuuruudesta operaationa, jonka jälkeen suoritetaan lasku tai jonka jälkeen esitetään vastaus (Cornelis & Bronwin 2017). Tämä käsitys yhtäsuuruudesta riittääkin peruslaskutoimitusten kanssa, kuten $4 + 3 = 7$. Kuitenkin yhtäsuuruutta lausekkeessa $5 + 2 = 3 + 4$ oppilaiden on hankala nähdä, vaan oppilaat erottavat ne kahdeksi lausekkeeksi $5 + 2 = 7$ ja $3 + 4 = 7$. Myös laskimien ”=” -nappi, joka suorittaa laskimeen syötetyn laskutoimituksen vahvistaa oppilaiden virhekäsitystä yhtäsuuruudesta laskuoperaation suorittamisen symbolina. Tasolle 1 jäänyt ymmärrys tuottaa hankaluuksia ratkaistaessa yhtälöitä. Oppilaiden tulisikin ymmärtää yhtäsuuruus kahden puolen suhteena, jossa kaksi puolta ovat yhtä suuria (Cornelis & Bronwin 2017).

Yhtäsuuruuden ymmärrystä tutkittiin 57 oppilaan osalta tutkimuksessa, jossa luokiteltiin oppilaiden vastaukset ja niissä esiintyvät virhekäsitykset neljään kategoriaan. Päättäminen, kaikkien numeroiden käyttäminen, yhtäsuuruus jono ja kyvyttömyys kuvailla yhtäsuuruuden merkitys. Päättämisellä tutkimuksessa tarkoitettiin, että kysymykseen $4 + 6 = x + 5$ oppilaan vastaus olisi $x = 10$. Virhekäsityksessä oppilas tulkitsee yhtälöä vasemmalta oikealle ja valitsee muuttujan paikalle luvun, joka saadaan laskemalla yhtälön vasenpuoli. Kaikkien numeroiden käyttämisessä oppilas asettaisi kysymykseen $4 + 6 = x + 5$ muuttujaksi $x = 10$ ja jatkaisi laskutoimitusta $10 + 5 = 15$. Nämä oppilaat uskovat, että yhtäsuuruuden oikealla puolella on oltava vasemmalta puolelta saadun laskun tulos, mutta he ottavat huomioon myös muut oikealla puolella olevat laskut. Yhtäsuuruus jonossa oppilaat laskevat usean putkeen virheellisesti usean välivaiheen kautta vasemmalta oikealle. Esimerkiksi $4 + 6 = x + 2 = 10 + x + 2 = 12 + x$. Tutkimuksessa huomattiin, että samoilla oppilailla oli sekä päättämiseen että kaikkien numeroiden käyttämiseen liittyviä virhekäsityksiä. Näiden virhekäsitysten omaavia oppilaita oli 10%. Neljäsosalla oppilaista havaittiin yhtäsuuruus jonon virhekäsityksiin viittaavia ratkaisuja ja yli puolet oppilaista kuvailivat yhtäsuuruutta virheellisesti. (Cornelis & Bronwin 2017)

Tutkimuksessaan Knuth (2008) kysyi 375 yläkoulu oppilaalta tutkimuksessaan, miten he määrittelisivät yhtäsuuruus symbolin. Enemmistö vastauksissa eli 58% kuvasi yhtäsuuruus merkkiä operaation suorittajana. Pientä parannusta vastauksissa havaittiin siirtyessä 7. luokalta 8.luokalle. Tutkimuksessa myös havaittiin, että oppilaat, jotka kuvailivat yhtäsuuruuden merkityksen kahden puolen yhtäsuuruutena, pystyivät paremmin ratkaisemaan yhtälöitä. Yhtäsuuruuden syvempien tasojen ymmärtäminen helpottaa algebran oppimista yläasteella. Jotta yhtälölle tehtävät operaatiot olisivat sujuvia sitä ratkaistaessa, oppilaan on ymmärrettävä, että yhtäsuuruus jakaa yhtälön kahteen yhtä suureen puoleen. Yhtäsuuruus merkinnän ja käsitteen puutteellinen ymmärrys on yksi isoimpia esteitä algebran oppimiselle.

3.3 Peruslaskutoimitusten symbolit

Symboleilla pyritään algebrassa helpottamaan ja yksinkertaistamaan lausekkeita. Aritmetiikassa ja algebrassa peruslaskutoimitusten symboleilla ei ole täysin sama merkitys. Esimerkiksi aritmetiikassa sekä yhtäsuuruus- että yhteenlaskusymbolin ilmaisevat laskua, joka pitää suorittaa. Yläkoulun alussa yhteenlaskusymbolin avulla voidaan liittää kokonaisluku ja murtoluku yhteen sekaluvuksi, kuten $1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$. Kuitenkaan polynomien yhteenlaskussa tämä ei päde, eli termiä $3 + x$ ei voida yhdistää termiksi $3x$. Yläkoululaisten onkin havaittu tulkitsevan väärin algebrallisia termejä, joissa on sekä numero- että kirjainosa. Esimerkiksi termi $2x$ tulkitaan summana $2 + x$ eikä tulona $2 \cdot x$ (Welder 2012). Aritmetiikassa oppilaat oppivatkin, että vastauksen pitää olla yksi termi. Esimerkiksi $5 + 10$ ei ole hyväksyttävä vastaus. Tämän takia peruslaskutoimituksen symboleista voikin jäädä oppilaille käsitys, että näitä ei voi olla vastauksessa, joka johtaa termien yhdistämiseen symbolien poistamiseksi vastauksesta (Welder 2012). Termien virheellinen yhdistäminen on ymmärrettävissä oppilaan virheellisenä käsityksenä matematiikan laskutoimituksista ja niiden käyttämisestä symbolien kanssa. Oppilaan ymmärtää yhteenlaskusymbolin (+) kahden suureen yhdistävänä operaattorina. Peruslaskutoimitusten symbolien ymmärtämiseksi onkin osattava kuvata tapahtuma, jonka tietty symboli suorittaa (Welder 2012). Oppilaalla voikin olla oikea käsitteellinen ymmärrys yhteenlaskusta, mutta hän ei vielä ymmärrä milloin yhteenlaskun voi suorittaa. Kuitenkin matematiikan vahvuus tulee symboleista, joiden avulla voidaan ilmaista maailmaa lukemattomilla tavoilla (Welder 2012).

Virhekäsityksen symbolien kanssa tuottavat ongelmia erityisesti polynomilaskennan alkaessa. Polynomilaskennassa yhdistyy oppilaan ymmärrys matemaattisista symboleista ja niiden toiminnasta peruslaskutoimitusten symbolien kanssa. Erityisesti oppilaiden tarve laskea tai suorittaa symbolien osoittamat laskutoimitukset (Welder 2012), vaikka kyseisiä laskutoimituksia ei voisi juuri näille polynomin termeille suorittaa, aiheuttaa polynomien opiskelussa hankaluuksia. Oppilaat pyrkivät tällöin väkisin laskemaan yhteen erilaiset termit muista matematiikan säännöistä välittämättä (Zielinski & Glazner 2019). Negaatio sulkeiden edessä tulisi vaikuttaa kaikkiin termeihin sulkeiden sisällä. Osa oppilaista joko huolimattomuuttaan tai virhekäsityksen perusteella ottavat negaation huomioon vain ensimmäiseen sulkeiden sisällä olevista termeistä. Kyseessä voi olla virhekäsitys sulkeiden merkityksestä jakavana symbolina ja negaation yhteys vastaluvun käsitteeseen. Virhekäsitykset on koottu taulukkoon 3 (Zielinski & Glazner 2019).

Taulukko 3 Esimerkkejä virhekäsityksen ilmenemisestä (Zielinski & Glazner 2019)

Kategoria	Negaatio sulkeiden edessä	Kaikkien termien yhdistäminen	Murtolukujen yhteenlasku yhdistämällä	Exponenttien yhdistäminen summassa
Virhe	$-(6x+1)-2$ $= -6x+1-2$ $= -6x-1$	$-3x^2+3x+1$ $= 4x^3$	$\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=\frac{6}{ab}$	$x^5+x^2=x^7$

3.4 Muuttuja

Yläkoulussa siirryttäessä algebraan muuttujalla ja muilla symboleilla kuvataan tuntematonta muuttujaa tai tuntematonta vakiotermiä. Algebran opiskelun alussa oppilailla on hankalaa ymmärtää muuttujien merkitystä, vaan niiden merkitys väärinymmärretään tietyksi esineeksi tai sanaksi (Welder 2012 ; Christou & Vosniadou 2012). Lisäksi oppilaat eivät välttämättä ymmärrä, että saman muuttujan esiintyminen lausekkeessa viittaa samaan numeroon (Kieran 1985). Eri muuttujilla voi myös olla myös sama numeerinen arvo. Näiden ominaisuuksien ymmärtämisen jälkeen oppilaalla tulisi olla kyky ymmärtää muuttujan ilmaisevan tiettyä tuntematonta arvoa, kuten yhtälössä $5 + x = 11$. Tässä yhtälössä muuttujan x arvo voi olla vain 6. Näiden tietojen avulla ymmärrys yhtälöstä, jossa muuttuja voi olla useampi luku on vielä hankalaa. Esimerkiksi suoran yhtälössä $y = 2x + 1$ muuttujilla x ja y ääretön määrä erilaisia vaihtoehtoja. Muuttajan käsite aiheuttaakin hankaluuksia algebran opintojen alussa oppilaalle, koska muuttuja voi kuvata kontekstista riippuen, tuntematonta lukua, mitä tahansa lukua tai tiettyä luku joukkoa (Ryan & Williams 2007).

Muuttujan käsitteen ymmärtäminen ja sen merkitseminen onkin hankalaa, kun tarkastellaan, miten oppilaat ovat kohdanneet kirjaimia matematiikassa aikaisemmin. Esimerkiksi oppikirjoissa tehtävien luokitteleminen alaluokkiin 1a), 1b), 1c), jne. vahvistaa oppilaiden käsitystä, että kirjaimilla on jokin tietty arvo ja ne voidaan laittaa tiettyyn järjestykseen suhteessa toisiinsa (Welder 2012). Ennen algebraa oppilaat ovat kohdanneet kirjaimia matematiikassa yksikköinä, kuten metreinä ”m” ja grammoina ”g”. Yksikön muunnoksissa taas muunnos $1\text{m} = 100\text{cm}$ luettaisiin ”1 metri on 100 senttimetriä”. Tähän aikaisempaan ajatteluun nojaten oppilaat saattaisivat virheellisesti ajatella, että yhtälö $V = 10P$ tarkoittaisi ” yksi valkoinen pallo on yhtä suuri kuin 10 punaista palloa”. Kuitenkin algebrallisesti ajateltuna tilanne on päinvastainen. Tässä ajattelu tavassa oppilas virheellisesti näkee muuttujan tietyn esineen tai asian tunnuksena. Osa oppilaista suoraan jättää kokonaan huomioimatta muuttujan. Esimerkiksi tehtävä tyypissä lisää polynomiin $x + 4$ luku 2. Oikea vastaus olisi $x + 6$ ja muuttujan huomiotta jättäneelle oppilas taas vastaisi 6 (Lucariello, Tine & Ganley 2014).

Eri muuttujan virhekäsitysten yleisyyttä tutkittiin yläkoulun ja lukion 483 oppilaalle. Neljäsosa oppilaista ajatteli muuttujan olevan tietyn esineen tai asian tunnus. Oppilaista 19% ajatteli muuttujan kuvaavan tiettyä muuttujaa ja 13% oppilaista jätti laskuissa muuttujan kokonaan huomioimatta. Tutkimuksessa pääteltiin, että muuttujaan liittyvät virhekäsitykset ovat melko yleisiä. Tutkimukseen osallistuneista oppilaista 28% havaittiin vähintään yhdentyyppistä virhekäsitystä muuttujasta. Lisäksi havaittiin, että virhekäsityksen omaavat oppilaat tukeutuivat oman virheellisen käsityksen pohjalta muotoiltuun selitykseen vahvasti, vaikka se olisi selkeästi ristiriidassa tehtävänannon tai vastauksen järkevyyden kanssa. Tässä tutkimuksessa havaittiin, että virhekäsitysten määrä kasvoi siirryttäessä yläkoulusta lukioon. Tähän ei tutkimuksen perusteella keksitty syytä. (Lucariello, Tine & Ganley 2014)

Oppilaiden käsitys luvuista vaikuttaa oppilaiden ymmärrykseen muuttujasta (Christou & Vosniadou 2012). Muuttujien ja niiden merkintä kirjaimina on suuri muutos siirryttäessä aritmetiikasta algebraan. Moni oppilas kertookin ymmärtävänsä matematiikkaa ennen kirjaimia ja muuttujia (Christou & Vosniadou 2012). Algebra onkin abstraktimpaa ja rakenteellisempaa verrattuna oppilaan aikaisempiin kokemuksiin matematiikasta. Muuttuja on oppilaalle konkreettinen kokemus algebran abstraktiuudesta. Useilla oppilailla on epäselvyyksiä, minkälaisia lukuja muuttujaan voi sijoitta (Christou & Vosniadou 2012). Suurin osa oppilaista ajattelee, että muuttuja ilmaisee vain luonnollisia lukuja. Lisäksi muiden lukujen sijoittamisessa on havaittu tilanteesta riippuvia hankaluuksia. Erityisesti negatiivisen luvun sijoittaminen negatiiviseen muuttujaan tuottaa ongelmia (Zielinski & Glazner 2019). Murtoluvun sijoittaminen on hankalaa nimittäjässä sijaitsevaan muuttujaan ja osa oppilaista pitää sitä mahdottomana (Christou & Vosniadou 2012).

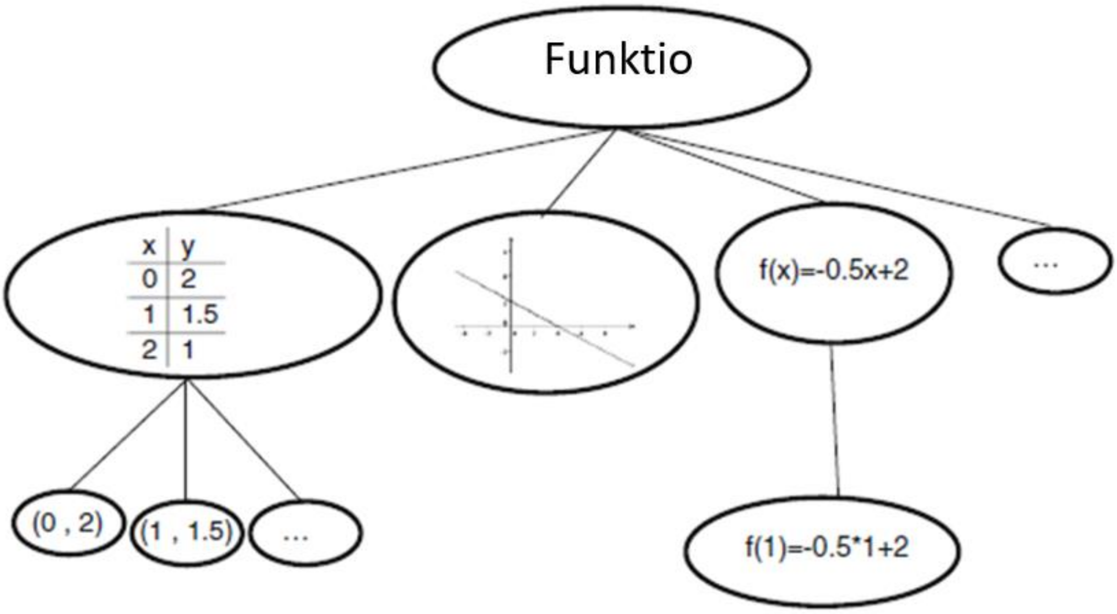
3.5 Funktion käsite

Funktion käsitteen ymmärtämiseksi tulee hallita edellä olevat käsitteet. Funktio kuvaa vähintään kahden suureen yhteyttä. Yläkoulussa tarkastellaan vain kahden suuruuden yhteyttä. Tämän ymmärtämiseksi erityisesti yhtäsuuruuden ja muuttujan käsitteen ymmärtäminen korostuu. Lisäksi funktion käsite haastaa oppilaan kykyä hahmottaa ja ajatella abstraktisti aivan uudella tavalla. Heikko algebrallisten käsitteellinen ymmärtäminen onkin pääsyynä oppilaiden heikkoon funktionaalisten suhteiden hahmottamiseen (Wilkie & muut 2018). Esimerkiksi lineaarisen funktion ymmärrys jää monelle pinnalliseksi (Wilkie & muut 2018). Opettajan kannalta keskeistä on ymmärtää, millä tasolla oppilaan ymmärrys funktion käsitteestä on (Ryan & Williams 2007). Funktion käsitteen ymmärtämistä voi tarkkailla esimerkiksi, kuinka oppilas ymmärtää suoraan ja kääntäen verrannollisuutta. Tarkasteleeko oppilas jokaista kahden joukon verrannollisuutta termi termiltä, vai vertaileeko hän suureita kahtena kokonaisuutena. Kahden joukon suhteesta voi havaita viisi eri kohtaa. Ensimmäisen suuren muutos suhteessa toiseen suureeseen, määrittämällä muutoksen suunnan, määrittämällä muutoksen määrän, määrittämällä keskimääräisen muutosvauhdin funktiossa ja havaitsemalla välittömän muutosvauhdin funktiossa (Wilkie & muut 2018).

Funktion käsityksen ymmärrystä tutkittiin 215 yläkoulun oppilaan osalta. Tutkimuksessa analysoitiin oppilaiden vastauksia funktiota koskeviin kysymyksiin ja heidän perusteluitaan vastauksiin. Tutkimuksessa huomattiin, että yläkoulun ylemmillä luokilla olevat oppilaat hallitsivat funktion käsitettä paremmin nuorempiin oppilaisiin verrattuna. Tämän perusteella pääteltiin, että oppilaiden kyky ymmärtää funktion eri käsitteitä ja tulkintoja kehittyy yläkoulun aikana. Oppilaat osasivat käyttää funktion eri tulkintoja, mutta niiden yhdistäminen tai siirtyminen niiden välillä osoittautui oppilaille hankalaksi. Tämä havainto vahvistaa oletusta, jossa oppilas näkee funktion eri tulkinnat erillisinä toisistaan. Tutkimuksen avulla ei voitu kuitenkaan perustella, miksi oppilailla oli hankalaa yhdistää funktion eri tulkintoja toisiinsa. Tutkimuksessa suositeltiin aloittamaan funktion käsitteen opettaminen mahdollisimman aikaisin. (Wilkie & muut 2018)

Suoran yhtälön avulla voidaan havainnollistaa monia käytännön elämän ilmiötä ja tutustuttaa oppilaita matemaattisiin mallintamiseen. Suoran yhtälön ymmärtäminen ei takaa muiden funktioiden ymmärtämistä, mutta suoran yhtälön avulla voidaan oppilaille esitellä kaikki funktion käsitteen oppimisen kannalta keskeinen sisältö. Funktion tulkitsemisen kannalta keskeisenä funktion arvot taulukoituna kahden muuttujan avulla, itse funktiota kuvaava käyrä ja funktion yhtälö. Oppilaiden tulisi osata tulkita funktioita näiden kolmen tavan avulla. Kuvassa 1 on koottu nämä kolme havainnollistusta esimerkkinä suoran yhtälö funktiona (Tabach & Nachlieli 2015).

Kuva 1 Funktion esitysmuotoja (Tabach & Nachlieli 2015)



Matamatiikassa funktion käsitteeseen viitataan opetuksessa, jollakin kuvan 1 esittämällä tavalla. Näin ne ovat osana niin opettajan ja oppilaan kuin oppilaan ja oppilaan välistä vuorovaikutusta. Opettajan päätehtävänä on saada yhdistettyä aikaisemmat käsitteet, jotta funktion käsitteen oikeanlainen omaksuminen olisi mahdollista. Vaarana on, että oppilaan virhekäsitykseksi jää funktiosta vain merkintä $f(x)$ (Tabach & Nachlieli 2015).

Useilla oppilailla on hankalaa yhdistää funktion eri tulkintoja itse funktion käsitteeseen (Birgin 2012). Lisäksi oppilaan tulisi kyetä muodostamaan annatetun tiedon avulla muut keskeiset tiedot funktiosta. Esimerkiksi suoran piirtäminen sen yhtälön avulla, tai suoran yhtälön muodostaminen muutaman valitun pisteen avulla koordinaatistosta. Näissä siirtymissä ainakin suoran yhtälön kanssa oppilailla on hankaluuksia (Birgin 2012). Yläkoulusta peräisin olevat virhekäsityksen funktiosta aiheuttavat hankaluuksia toisella asteen matematiikan opinnoissa ainakin raja-arvon, derivaatan ja integraalin käsitteissä.

Yläkoulun oppilaille on hankalampaa ymmärtää, miksi tietyt erityistapaukset ovat funktioita. Tällaisia erityistapauksia ovat esimerkiksi vakiofunktiot, paloittain määritellyt funktiot ja diskreettien pisteiden avulla määritellyt funktiot (Tabach & Nachlieli 2015). Lisäksi oppilaille saattaa jäädä virheellinen käsitys, että vain lineaariset funktiot voivat kulkea kahden tietyn pisteen kautta, vaikka vaihtoehtoja tietyn kahden pisteen kautta kulkevista funktioista on lukemattomia. Oppilaat harvoin tukeutuvat funktion määritelmään määritellessään, onko kyseinen kuvaus funktio ja määritelmää hyödyntävät oppilaat taas käyttävät sitä ristiriitaisesti (Tabach & Nachlieli 2015).

3.6 Virhekäsitykset muut tekijät

Virhekäsityksiä voi aiheuttaa myös opettaja niin alakoulussa kuin yläkoulussa. Alakoulun opettajien on havaittu omaavan samanlaisia virhekäsityksiä kuin yläkoulun oppilaidenkin. Tietenkin on ymmärrettävä, että luokanopettajat opettavat useampaa eri ainetta, eikä aineenopettaja tasoista aineen hallintaa voida pitää realistisena vaatimuksena. Kuitenkin usein luokanopettajilla on havaittu erityisesti matematiikan opettamisessa epävarmuutta. Aineenopettajien osalta haasteena saattavat olla haastavat ja ennalta odottamattomat kysymykset. Näissä haasteena on, ettei opettaja yksinkertaista liikaa vastatessaan kysymykseen, koska virhekäsityksiä voi syntyä liiasta yksinkertaistuksesta. Tehokkaana opetus metodina pidetään tapaa, jossa uusi asia yhdistetään jo opittuihin käsitteisiin tai kykyihin. (Ryan & Williams 2007)

Oppikirjat ovat jokaisen matematiikan opettajan apuväline opetuksessa. Matematiikan oppikirjat sisältävät usein opetettavan teorian, esimerkkejä ja tehtävät. Lisäksi opettajan materiaaleissa on saatavilla kirjan tekijöiden mallivastaukset, esimerkkikokeita kurssialueesta ja tuntisuunnitelmia tietyn asian opettamiseen. Oppilaat käyttävät oppikirjoja opiskeluun ja tehtävien tekoon. Oppikirjat ovatkin sekä yläkoulun matematiikan opetuksen kulmakivi että akilleenkantapää (Kajander & Lovric 2009). Suomessa opetusta ohjaa opetussuunnitelma ja oppikirjat perustuvat siihen, mutta oppikirjat ovat aina kuitenkin kirjan tekijöiden tulkinta opetussuunnitelmasta. Harvemmin matematiikan oppikirjoja on tarkastelu, kuinka ne esittävät opittavan asian (Kajander & Lovric 2009).

Opettaja voi hyödyntää oppikirjaa virhekäsityksen torjumiseen antamalla oppilaille tehtäväksi tutustua uuteen asiaan oppikirjan avulla ennen oppituntia. Näin opettaja voi keskittyä tunnilla asioihin, jotka olivat oppilaiden mielestä haastavia tai epäselviä. Näin opetuksesta olisi mahdollista saada enemmän vuorovaikutteisempaa ja aikaa voisi jäädä enemmän muuhun kuin teorian luennoimiseen.

Oppikirja voi aiheuttaa virhekäsityksiä esimerkiksi yksinkertaistamalla käsitteitä liikaa tai käsitettä on yleistetty liian laajaksi. Liian laajalle yleistetty käsite voisi olla esimerkiksi tangentti. Tangentilla on trigonometriassa ja geometriassa erilainen merkitys. Liiallisella yksinkertaistamisella oppikirjoissa yleensä määritellään jo aikaisemmin esitelty käsite uudestaan tavoitteena tehdä siitä oppilaalle ymmärrettävämpi. Esimerkkinä käänteisluvun määritelmä, kaksi lukua, joiden tulo on yksi ovat toistensa käänteisluvut. Yksinkertaistus olisi esimerkiksi käänteisluku saadaan vaihtamalla luvun osoittaja ja nimittäjä keskenään. Liiallinen yksinkertaistus voi olla myös kappaleen lopussa yhteenvedon muodossa. (Kajander & Lovric 2009)

Opettajan tärkeimpänä tehtävänä yläkoulun algebran opinnoissa on esitellä ja havainnollistaa abstrakteja käsitteitä oppilaille. Tässä tehtävässä korostuu opettajan aineosaaminen. Toisena tehtävänä on ohjata ja kannustaa oppilaita. Tässä tehtävässä korostuu opettajan vuorovaikutus taidot ja pedagoginen osaaminen esimerkiksi oppilaiden yksilöllisten virhekäsitysten tunnistamisesta. Virhekäsitysten välttämiseksi opettajan ilmaisu luokassa tulisi olla yhtenäistä ja uusi asia tulisi yhdistää jo opittuun asiaan. Kokemattomalla opettajalla saattaa olla haasteena reagoida oppitunnilla ja muokata tuntisuunnitelmaansa oppitunnin aikana. Kurssisuunnitelman avulla tulee pohtia, mistä aiheesta lähdetään liikkeelle, kuinka se esitellään ja miten se tämä vaikuttaa tulevien aiheiden opettamiseen. Opettajan tulee selvittää oppilaiden aikaisempi ymmärrys algebran opintojen alussa ja pyrkiä korjaamaan mahdollisia virhekäsityksiä heti yläkoulun matematiikan opintojen alussa. (Leinhardt, Zaslavsky & Stein 1990)

Matematiikan oppimisen kannalta on keskeistä, että oppilas muodostaa itse oman käsityksen ja ymmärryksen tietystä matematiikan aiheesta. Opettajan tehtävänä on ohjata oppilaan käsitys mahdollisimman tarkaksi. Oppilaan tulisi osata kertoa aiheesta omin sanoin. Tätä omin sanoin kertomista tulisi jatkuvasti formatiivisesti arvioida. Erityisesti käsitteistä, joilla on eri merkitys matematiikassa ja arkikielessä. Esimerkiksi algebran käsitteillä funktio ja muuttuja on erilainen merkitys arkikielessä. (Leinhardt, Zaslavsky & Stein 1990)

Onnistuneet esimerkit motivoivat oppilaita ja syventävät oppilaiden ymmärrystä. Usein yläkoulun algebrassa esimerkkejä pitää yksinkertaistaa, jotta niihin voidaan soveltaa yläkoulun algebraa. Liiallisissa yleistyksissä on vaarana virhekäsityksien muodostuminen muihin oppiaineisiin, kuten fysiikkaan tai taloustieteeseen. Varsinkin heikommat oppilaat muodostavat käsityksensä mieluummin esimerkkien, kuin tarkkojen määritelmien varaan. Tämän takia olisi hyvä, että ainakin vastauksen perustelu yhdistettäisiin matemaattisiin määritelmiin ja käsitteisiin. (Leinhardt, Zaslavsky & Stein 1990)

Matematiikan opettaminen vaatii oikean sekoituksen pedagogista osaamista ja aineenhallintaa. Paremman aineenhallinnan omatessa opettaja pystyy helpommin kertomaan, miten lasku suoritetaan oikean ja mihin matematiikan sääntöihin tämä perustuu. Tässä yleensä nähdään aineenopettajan ja luokanopettajan ero. Opettajasta riippumatta kuitenkin matematiikkaa opettaessa tulisi pysähtyä pohtimaan sekä tapoja opettaa että perusteluja miksi kyseinen opetustapa on hyväksyttävä matematiikan lakien ja sääntöjen mukaan. (Ryan & Williams 2007)

4 Virhekäsitysten huomioiminen opetuksessa

Tässä kappaleessa esitetään ehdotuksia opetukseen edellisen kappaleen aiheisiin. Nämä ehdotukset on valittu kirjallisuudesta ja niiden avulla pyritään antamaan vinkkejä opetukseen. Vinkkien tarkoituksena on auttaa opettajaa järjestämään opetuksensa virhekäsityksiä ennaltaehkäisevästi ja korjaavasti. Näitä ehdotuksia opettaja voi oman harkinnan mukaan integroida opetukseensa. Kappaleessa esitellään eri virhekäsityksiin liittyviä tehtävätyyppejä, joita voidaan käyttää osana niin diagnostista testiä kuin harjoituksina oppilaille tunneilla. Näin näillä esimerkeillä voidaan sekä ottaa selvää oppilaan algebrallisen ajattelun taso että harjoituttaa oppilaan algebrallista ajattelua. Harjoitteet ja esimerkit eivät pelkästään keskity kyseisen virhekäsityksen harjoitteluun, vaan ne tukevat myös muiden algebran alojen ymmärrystä.

Muutosvastaisuuden pienentämiseksi esiteltäviä esimerkkejä ja tehtäviä voidaan hyödyntää myös uuden asian tai käsitteen johdatteluun. Lisäksi oppitunnilla voi tulla vastaan spontaaneja tilanteita tai kysymyksiä oppilailta, joihin reagoimiseen kyseisten esimerkkien tunteminen voi helpottaa opettajan työtä. Tärkeintä muutosvastaisuuden murtamiseksi on saada oppilas ajattelemaan, joko opettaja johtoisissa keskusteluissa tai oppilaiden kesken pienryhmissä työskennellen. Keskustelu jalostaa oppilaiden algebrallista ajattelua ja antaa myös opettajalle ymmärrystä, kuinka hyvin käsitteet on omaksuttu.

4.1 Sulkeet ja laskujärjestyksen opettaminen

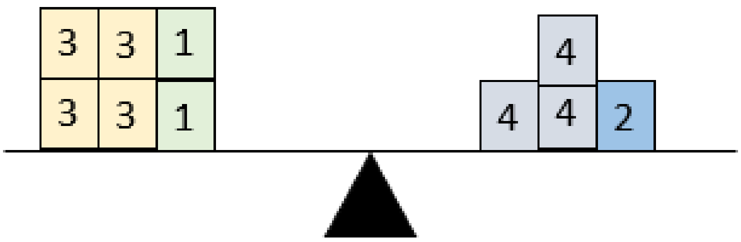
Sulkeiden hyödyllisyys ja tarpeellisuus matematiikassa on tuotava oppilaille esille, niin että ne olisivat tarpeellinen väline matemaattisissa lausekkeissa. Yksi tapa tähän on luoda ristiriita oppilaiden yleiseen ajatteluun lukea lausekkeita vasemmalta oikealla (Welder 2012). Esimerkiksi laskussa $3 \cdot 5 = 15$ korvataan luku 5 lausekkeella $3 + 2$. Nyt ilman sulkeita lauseke $3 \cdot 3 + 2 = 15$ ei olekaan tosi, vaan se vaatii sulkeet. Sulkeiden kanssa yhtälö saadaan taas todeksi $3 \cdot (3 + 2) = 15$. Vastaavilla harjoituksilla, jossa oppilaiden on lisättävä lausekkeeseen sulkeet, jotta yhtälön molemmat puolet olisivat yhtä suuret, perustellaan luonnollisesti sulkeiden merkitys laskujärjestyksessä. Kyseisten tehtävien jälkeen voidaan siirtyä harjoittelemaan laskujärjestystä laskemalla lausekkeita. Kyseinen tehtävä tyyppi sopii hyvin johdatteluna aiheeseen.

Myös muita laskujärjestyksen osia on hyvä tarkastella luonnollisena tapana käyttää lukuja, eikä joukkona sovittuja sääntöjä. Laskujärjestyksen opettamista muistilistana tulisi välttää (Welder 2012; Tabak 2019). Muistilistan tai lorun sijaan laskujärjestys voitaisiin esitellä algoritmin muodossa. Näin saataisiin vahvistettua oppilaiden ymmärrystä laskujärjestyksen toiminnasta. Kuvassa 2 on annettu esimerkki laskujärjestysalgoritmista. Laskujärjestystä opettaessa on hyvä kohta oppilaalle harjoitella tarkastelemaan kriittisesti omia vastauksia (Ryan & Williams 2007), kun oppilaan vastaus on virheellinen. Laskujärjestystä harjoitellessa omien virheiden etsiminen on parhaita tapoja oppia laskujärjestys oikein (Tabak 2019).

- IF sulkeet:
  - Laske kerto- ja jakolaskut sulkeiden sisällä.
  - Laske yhteen- ja vähennyslaskut sulkeiden sisällä.
- IFELSE kertojajako:
  - Laske kerto- ja jakolaskut sulkeiden sisällä.
- ELSE:
  - Laske yhteen ja vähennyslaskut.

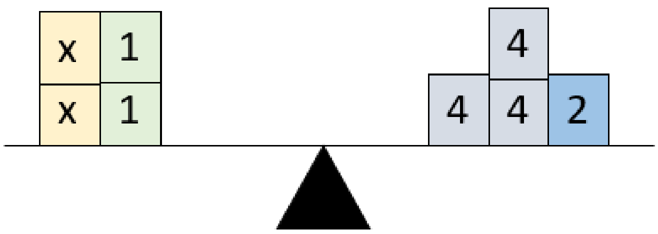
Kuva 2 Laskujärjestysalgoritmi

Laskusääntöjen merkitys olisi hyvä käydä läpi käytännön esimerkkien avulla (Tabak 2019). Esimerkiksi kuvan 3 vaakamallin lauseke voidaan ilmaista monella tavalla. Ilmaisussa voidaan hyödyntää kertolaskua, eli $4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 3 \cdot 4 + 2$ tai se voidaan ilmaista puhtaasti yhteenlaskuna $3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 4 + 4 + 4 + 2$. Esimerkissä on tärkeää löytää eri lausekkeiden laskujärjestys ja vaakamallin välinen yhteys. Vaakamallin avulla saadaan myös esiteltyä ajatus yhtälön kahdesta puolesta.



Kuva 3 Vaakamalli

Vaakamallin avulla voidaan johdatella myös yhtälön ratkaisuun tai vahvistamaan yhtäsuuruuden käsitettä. Kuvan 4 vaakamallin avulla voidaan auttaa oppilasta hahmottamaan ja vastaamaan kysymyksiin, kuten millä muuttujan x arvoilla vaaka olisi tasapainossa, tai millä muuttujan x arvoilla vaaka olisi kallellaan. Näin laskujärjestyksen oppimisen tukemiseen esitelty vaakamalli tuntuu oppilaille tutulta siirryttäessä käsittelemään muuttujaa, yhtäsuuruutta ja yhtälön ratkaisua.



Kuva 4 Vaakamalli muuttujalla

4.2 Yhtäsuuruuden opettaminen

Yhtäsuuruuden virhekäsitysten välttämiseksi tulisi alusta asti korostaa kahden puolen yhtäsuuruutta ja tasapainoa. Yhtäsuuruutta voidaan korostaa esimerkiksi vaakamallin avulla, joka on todettu tehokkaaksi havainnollistuskeinoksi (Welder 2012). Oppilaiden tulisi pystyä tulkitsemaan ja arvioimaan yhtäsuuruutta molempiin suuntiin, eli tarkistamaan onko yhtälön vasen puoli yhtä suuri kuin oikea puoli ja myös päin vastaiseen suuntaan. Vaakamallia ei tulisi esitellä vasta algebraan ja yhtälöjen opetuksessa siirryttäessä, vaan olisi tärkeää, että yhtäsuuruutta olisi havainnollistettu oppilaalle jo aikaisemmissa matematiikan opinnoissa. Yhtäsuuruuden ymmärtäminen algebrassa pitääkin rakentaa oppilaan aikaisemman kokemuksen ja ymmärryksen päälle. Tärkeää onkin, kuinka opettaja puheessaan korostaa yhtäsuuruuden merkitystä. Esimerkiksi pelkästään laskuoperaation tulkintaa kielentävän lauseen ”lukujen yksi ja neljä summa on viisi” sijaan opettaja korostaisi lausekkeen vasemman ja oikean puolen yhtä suuruutta toteamalla ”lukujen yksi ja neljä summa on yhtä suuri kuin viisi”.

Yhtäsuuruus merkki tulee vastaan hyvin varhain opintopolulla alakoulussa. Jo alakoulussa yhtäsuuruus merkin suhdetta symboleihin suurempi kuin ”>”, pienempi kuin ”<” ja epätosi ”≠ ", tulisi korostaa. Esimerkiksi tehtävillä, joissa on annettu lausekkeen vasen ja oikea puoli, jolloin oppilaan tulisi merkitä sopiva symboli, jotta lauseke olisi tosi. Yksinkertaisemmin tehtävän voisi toteuttaa niin, että lauseke on annettu valmiiksi ja oppilaan tulisi todeta, onko lauseke totta vai ei. Kolmantena vaihtoehtona lausekkeesta voisi jättää yhden paikan tyhjäksi ja oppilaan tulisi täydentää yhtälö niin että yhtälö olisi tosi tai epätosi. Tehtävien tulisi sisältää tapauksia, jossa vain yhtälön oikean puolen arvo tiedetään. Näin saataisiin rikottua oppilaiden ennestään oppimaa tapaa tulkita matemaattisia lausekkeita vasemmalta oikealle (Welder 2012). Osan tehtävistä tulisi olla avoimia, eli niissä olisi useampi kuin yksi oikea vastaus. Tehtävät voitaisiin antaa myös sanallisessa muodossa. Tehtävistä on koottu yhteenveto taulukkoon 4.

Taulukko 4 Esimerkki tehtäviä

Tyyppi	Esimerkkitehtäviä
Täydennä lauseke sopivalla merkillä, jotta se olisi tosi.	1) $5\blacksquare 6$ 2) $8+2\blacksquare 10$ 3) $10+2\blacksquare 9$
Onko lauseke tosi vai epätosi?	1) $5>6$ 2) $8+2=10$ 3) $10+2\neq 9$
Täydennä luvulla, niin että lauseke olisi tosi.	1) $5>\blacksquare$ 2) $8+\blacksquare=6+\blacksquare$ 3) $10+\blacksquare\neq 9$
Etsi kolme lukuparia, joiden avulla lauseke on tosi.	1) $\blacksquare+\blacksquare=2$, 2) $5+\blacksquare\neq\blacksquare$, 3) $100-\blacksquare>\blacksquare$
Sanallisia avoimia tehtäviä.	Muodosta lauseke, jossa kahden luvun summa on suurempi kuin luku 4.

Laajempien lausekkeiden sieventämisessä päädytään usein kirjoittamaan monta yhtäsuuruutta peräkkäin. Tällaiset yhtäsuuruus putket eivät toimi yhtälön ratkaisussa, jossa välivaiheet yleensä esitetään allekkain, mikä onkin ristiriidassa oppilaan aikaisempien kokemuksien kanssa. Yhtenä vaihtoehtona olisi opettaa laskemaan useamman välivaiheen vaativat laskut allekkain. Toisena vaihtoehtona olisi käyttää jotain toista merkintää laskettaessa laskutoimituksia peräkkäin. Aikaisemmassa laskuesimerkissä laskun putkeen laskemisen sijaan allekkain laskettuna vältetään monen yhtäsuuruuden putki vierekkäin.

$$\begin{aligned}
&\{-12:2 + [-12 \cdot (16 - 3 \cdot 4)]\} \\
&= \{-6 + [-12 \cdot 4]\} \cdot (-1) \\
&= \{-6 - 48\} \cdot (-1) \\
&= -54 \cdot (-1) \\
&= 54
\end{aligned}$$

Näin usean välivaiheen laskussa merkintä on erilainen verrattuna alkuperäiseen ketjuun. Nyt lasku on lajiteltu selkeämmin vaiheittain, josta eri vaiheiden yhtäsuuruudet ovat helpommin nähtävissä.

Yhtäsuuruuden ymmärtäminen on ehdotonta funktion käsitteen ymmärtämiseen ja yhtälöiden ratkaisemiseen (Chesney & muut 2018). Muita työtapoja, joilla voidaan pyrkiä monipuolistamaan yhtäsuuruuden käsitystä oppilaissa olisi esimerkiksi laskutoimitusten kielentäminen. Tutkimuksissa on havaittu, että oppilaiden käsitys yhtäsuuruudesta oli parempi jo aritmetiikka harjoitellessa, jos oppilaat olivat myös harjoitelleet laskujen kuvausta sanallisesti (Chesney & muut 2018). Opettajan tulisi kiinnittää erityistä huomiota, kuinka oppilaat kuvaavat laskuja sanallisesti. Tässä opettajan tulisi painottaa ”on yhtä suuri kuin” -lausetta. Yhtenä ehdotuksena yhtäsuuruusmerkin käsitteen liittyvien virhekäsityksien välttämiseksi olisi itse yhtäsuuruusmerkin esittely myöhemmin oppilaille. Aritmetiikan harjoittelun alkaessa yhtäsuuruusmerkin sijaan voitaisiin käyttää muuta merkintää. Esimerkiksi osassa Itä- ja Kaakkois- Aasian maista käyttää nuolta (Welder 2012; Chesney & muut 2018). Näin myös useamman välivaiheen laskut voitaisiin laskea peräkkäin ilman ristiriitaista käsitystä yhtälön oikeasta ja vasemmasta puolesta, tai yhtäsuuruusmerkistä pelkkänä suoritetaan lasku symbolina. Näin myös edellä oleva esimerkki saataisiin kirjoitettua tiiviimmin.

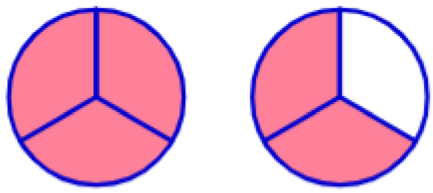
$$\{-12:2 + [-12 \cdot (16 - 3 \cdot 4)]\} \rightarrow \{-6 + [-12 \cdot 4]\} \cdot (-1) \rightarrow -54 \cdot (-1) \rightarrow 54$$

Kiinalaisissa oppikirjoissa (Welder 2012) käytetään nuolia perustelemaan, miksi vaiheittain laskettaessa yhtäsuuruusmerkkien käyttäminen aiheuttaisi ongelmia $12 \cdot 4 \rightarrow 36 \div 3 \rightarrow 12 \cdot 5 \rightarrow 72 \div 8 \rightarrow 9 \cdot 6 \rightarrow 54$. Yhtäsuuruusmerkin ilmaisua suhteena voidaan harjoittaa esimerkiksi yksikön muunnoksina, kuten $100\text{cm} = 1\text{m}$, $1\text{bar} = 100000\ \text{PA}$, tai $1\text{l} = 0{,}001\text{m}^3$. Näin harjoitellaan myös funktionaalista ajattelua. Yksikönmuunnostehtävissä yhtäsuuruusmerkki voitaisiin myös korvata sanallisesti (McNeil 2014) ja näin myös vertailemalla eri yksiköitä toisiinsa. Esimerkiksi kysymyksillä onko $20€$ dollareissa enemmän vai vähemmän kuin $20\$$.

4.3 Peruslaskutoimitusten symbolien opettaminen

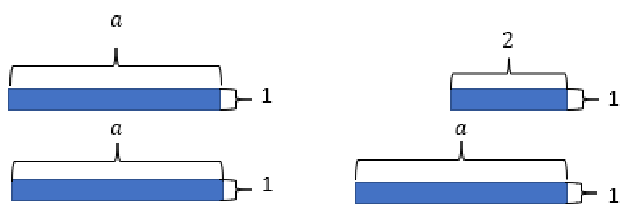
Symbolien opettamisessa tärkeintä on, että oppilas ymmärtää symbolin merkityksen ennen sen käyttämistä (Welder 2012). Sekaluvuissa oppilaan tulisi ymmärtää ensin, mitä yksi kokonainen ja kaksi kolmasosaa tarkoittaa ennen kuin he rupeavat käyttämään merkintää $1\frac{2}{3}$. Samalla tavalla oppilaan tulisi ymmärtää ensin, mitä merkintä $2a$ käytännössä. Tilannetta voidaan tarkastella kuvioiden avulla. Kuvioiden avulla on helpompi oppilaan ymmärtää esimerkiksi, mikä on merkintöjen $2a$ ja $2 + a$ ero.

Kuvassa 5 tilannetta on tarkasteltu pinta-alojen kautta. Ensimmäisenä sekalukua $1\frac{2}{3}$, jota on havainnollistettu kahden ympyrän avulla. Nämä ympyrät on jaettu kolmeen yhtä suureen osaan ja toisesta ympyrä on väritetty kokonaan. Tämä vastaa yhtä kokonaista. Toisesta ympyrästä on väritetty kaksi osuutta kolmesta. Yhteensä väritettynä on yksi kokonainen ympyrä ja toisesta ympyrästä kaksi osuutta kolmesta eli yhteensä yksi kokonainen ja kaksi kolmasosaa.



Kuva 5 Sekaluvun $1\frac{2}{3}$ havainnollistus.

Kuvassa 6 on pyritty havainnollistamaan merkintöjen $2a$ ja $2 + a$ eroa. Ensimmäiseksi kahden palkin pinta-alat ovat $a \cdot 1 = a$ ja näitä palkkeja on kaksi kappaletta, joten niiden pinta-ala yhteensä on $a + a = 2 \cdot a$. Toisessa tilanteessa palkkien pinta-alat ovat $2 \cdot 1 = 2$ sekä $a \cdot 1 = a$. Riippuen muuttujan a arvosta kahden palkin pinta-alat voivat olla eriä, jolloin niiden summa $2 + a$.



Kuva 6 Luvun 2a ja 2+a ero.

4.4 Muuttujan opettaminen

Matematiikassa kirjaimen käytössä on paljon epäsäännöllisyyttä. Tämän takia opettajan tulisi aina korostaa kirjaimen merkitystä kyseisessä tilanteessa (Welder 2012). Esimerkiksi käytetäänkö kirjainta tietyssä tilanteessa lyhenteenä vai muuttujana. Alussa lyhenteet tulisikin ensin kirjoittaa kokonaan näkyviin ennen kuin niitä ruvetaan toistuvasti käyttämään, eli lyhenteen 6 m sijaan kirjoitettaisiin ensin 6 metriä (Welder 2012). Samalla tavalla yhtälöissä oppilaiden tulisi ensin tulkita sanallisesti, mitä yhtälö tarkoittaa. Esimerkiksi yhtälö $V = 10P$ tulisi ensin tulkita sanallisesti ”yksi valkoinen pallo on yhtä suuri kuin kymmenkertainen määrä punaisia palloja”. Yhtälöjen sanallinen tulkinta voi olla aikaa vievää, mutta ne pitkässä juoksussa ne auttavat oppilaita algebran sovelluksissa.

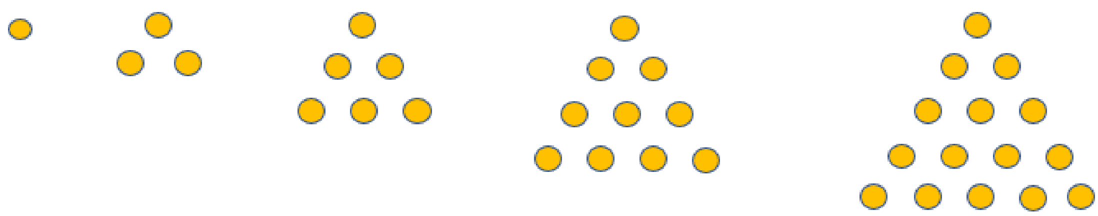
Muuttujan opetuksessa tulisi lähteä sääntöjen etsimestä liikkeelle (Welder 2012). Sääntöjä voitaisiin ensin kirjata sanallisesti ja tämän jälkeen ottaa muuttujan käsite mukaan ilmaisemaan sääntöjä. Sääntöjä voidaan esimerkiksi etsiä lukujonoista. Muuttujan ymmärtämisessä voitaisiin käyttää myös pohdintatehtäviä, kuten millä muuttujan arvoilla yhtälö $h + m + n = h + p + n$ on tosi? (Welder 2012). Kyseinen tehtävä testaa oppilaan ymmärrystä yhtäsuuruudesta ja muuttujasta. Tehtävä on yksinkertainen, jos oppilas ymmärtää, että kahdella eri muuttujalla voi olla sama arvo.

Oppilaiden tulisi nähdä yhteys, kuinka eri asioita tai tavaroita voidaan laskea yhteen lausekkeen avulla ja eritellä eri muuttujiin. Esimerkiksi laatikko, jossa on 5 golfpalloa ja 8 tennispalloa. Yhteensä palloja on $5 + 8 = 13$. Näin pallojen määrä voitaisiin yleisesti laskea yhteen kaavasta $g + t = p$. Tässä kaavassa pallojen määrä p voidaan laskea golfpallojen määrän g ja tennispallojen t avulla. Taulukkoon 5 on koottu eri tehtävätyypit muuttujan opettamiseen.

Taulukko 5 Tehtävätyyppejä muuttujasta

Tyyppi	Tehtävä
Ilmaise sanallisesti yhtälön merkitys.	$V = 10P$
Ilmaise sopivalla säännöllä.	Kuva 7
Milloin yhtälö on tosi?	$h + m + n = h + p + n$
Muodosta lauseke.	Muodosta lauseke, jonka avulla voidaan laskea laatikossa olevien pallojen lukumäärä.

Kuva 7 Millä säännöllä pallojen määrä kasvaa?



Muuttujan tilalle voi sijoittaa minkä tahansa luvun. Useimmille oppilaille tämä voi jäädä epäselväksi (Christou & Vosniadou 2012). Muuttujaan sijoitettavien lukujen epäselvyyksien ja virhekäsityksien välttämiseksi opettajan tulisi käyttää esimerkeissään monipuolisesti erilaisia lukuja. Esimerkiksi yhtälön ratkaisua harjoitellessa ratkaisuiksi tulisi tulla muitakin lukuja, kuin kokonaislukuja. Erilaisilla pohdintatehtävillä voidaan harjoituttaa oppilaan algebrallisella ajattelulla ja estää virhekäsityksien syntymistä. Pohdinta tehtävien ratkaisujen tulisi vaatia oppilailta erityyppisillä luvuilla vastaamista. Samaan tehtävään voidaan mahdollisuuksien mukaan vaatia vastaamaan tietynlaisella luvulla kysymykseen, kuten anna esimerkki desimaaliluvusta d, jolle lauseke $1/d > 10$ on tosi. Tehtävän voi jättää myös avoimemmaksi, jolloin tilaa jää myös oppilaiden väliselle keskustelulle, kuten vastauksien vertailulle. Avoimesta tehtävästä esimerkkinä ”Valitse kaksi reaalilukua a, b niin, että lukujen suhde on pienempi kuin yksi”. Kysymyksestä voidaan muokata vaativammaksi ehdolla $a < b$. Vastaavasti hyvänä pohdinta tehtävänä olisi tilanne, jossa vertaillaan molemmilla puolilla epäyhtälöä, on sama muuttuja, mutta yhdellä puolella muuttuja on nimittäjässä ja toisessa osoittajassa. Esimerkkinä epäyhtälö $4b > 4/b$, jossa haastetaan myös oppilaan funktionaalista ajattelua, koska vertailua pitää tehdä muuttuvaan arvoon, eikä vakioon.

Peruslaskutoimitusten symbolien eroavaisuutta voidaan havainnollistaa, varsinkin vakion summaamista muuttujan kanssa ja vakion kertomista muuttujalla. Kun muuttuja $x = 3$, niin mikä on lausekkeiden $3x$ ja $3 + x$ arvo tapaisella kysymyksellä voidaan havainnollistaa laskemalla näiden lausekkeiden eroa. Termi $3x$ voidaan myös havainnollistaa hajottamalla se termiksi $x + x + x$. Negatiivisen luvun sijoittaminen muuttujaan on oppilaille hankalaa erityisesti, jos muuttujan edessä on miinusmerkki (Zielinski & Glazner 2019). Tämän korjaamiseksi tulisi harjoitella sijoittamista luvulla ja sen vastaluvulla, eli muuttujaan $-b$ sijoitettaisiin ensin luku $+3$ ja seuraavaksi luku -3. Samalla korostettaisiin useammalla välivaiheella sijoitusten eroa. Taulukossa 5 on koottu nämä esimerkit.

Taulukko 6 Esimerkit

Muuttuja(t)	Sijoitus	Välivaiheet
$-b$	$+3$ ja -3	$b = +3 \rightarrow \quad -b = -1 \cdot (b) = -1 \cdot (+3) = -3$ $b = -3 \rightarrow \quad -b = -1 \cdot (b) = -1 \cdot (-3) = 3$
$3x$ $3 + x$ $x + x + x$	3	$3x = 3 \cdot 3 = 9$ $3 + x = 3 + 3 = 6$ $x + x + x = 3 + 3 + 3 = 9$

Niin käsitystä muuttujasta ja funktion käsitteestä voidaan tehostaa tehtävissä, joissa epäyhtälöissä on kahta eri muuttujaa. Haasteetta saadaan erityisesti, jos kaksi eri muuttujaa ovat molemmilla puolilla epäyhtälöä. Esimerkkinä tällaisesta epäyhtälöstä olisi $a + b > a/b$. Vastaaviin tehtäviin voidaan lisätä lukuja, kuten epäyhtälössä $9x < 3 + y/x$. Miinusmerkkisillä muuttujien hyödyntämistä kahden muuttujan epäyhtälössä voidaan edelleen testata oppilaan kykyä sijoittaa lukuja muuttujaan, jonka edessä on miinusmerkki. Epäyhtälöt, kuten $-f > f + g/f$, pakottavat oppilaan toimimaan negatiivisilla luvuilla ratkaistakseen kyseisen tehtävän. Kahden muuttujan sijoittamista vaativat epäyhtälöt testaavat oppilaan ymmärrystä yhtäsuuruuden käsitteestä, laajempaa muuttujan käsitteen ymmärrystä ja johdattelee oppilaalle tarpeellisia abstraktin ajattelun kykyjä funktion käsitteen oppimiseen. Taulukkoon 6 on koottu esimerkkejä epäyhtälöistä.

Taulukko 7 esimerkki epäyhtälöitä

$\frac{a}{b} < -1$	$2x - y < 0$	$-k - l > 2/k$
$a + 1 > 1/a$	$1/d > 10$	$9x < 3 + y/x$
$-y < y + 1/y$	$\frac{a}{b} < 1$	$-f > f + g/f$
$-\frac{a}{b} < b$	$4b > 4/b$	$a + b > a/b$

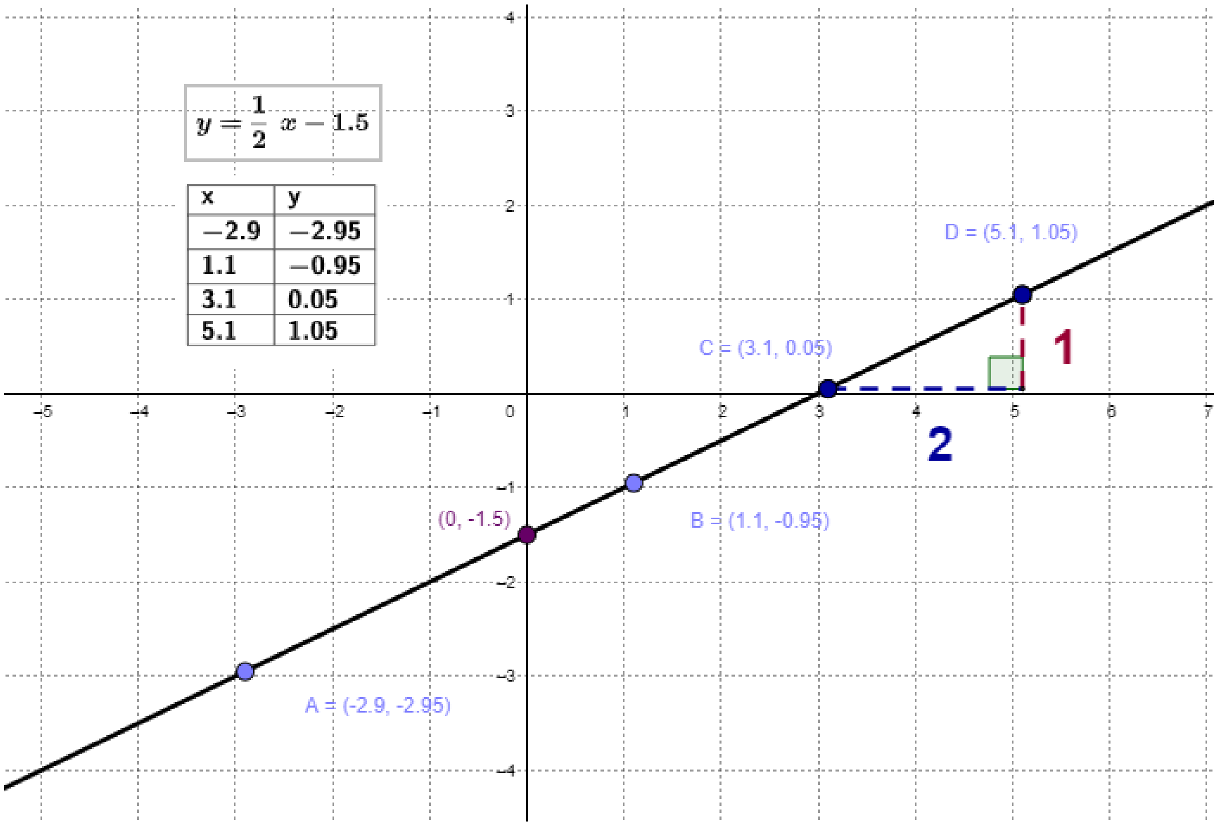
4.5 Funktion käsitteen opettaminen

Yläkoulun algebrassa varsinaisesti funktioista tarkemmin käsitellään lineaarista funktiota. Oppilaiden tulisi ymmärtää kahden taulukoidun arvon suhde, kuinka tämä liittyy suoran kuvaajaan sekä suoran yhtälöön. Erityisesti yhteys yhtälön ja kuvaajan välillä jää monille oppilaille epäselväksi (Wilkie & muut 2018). Hankaluuksia on siis yhtälön perusteella nähdä kuvaaja ja kuvaajan perusteella päätellä yhtälö. Erilaisia näkemyksiä ja käsityksiä siitä, missä järjestyksessä funktion kannalta keskeiset käsitteen tulisi opettaa (Wilkie & muut 2018). Yleistyksenä yhtälö kuvaaja ja siitä taulukoituja arvoja tulisi olla alusta alkaen oppilailla nähtävissä, kun funktioita opetetaan. Erityisesti funktioita opettaessa käyrältä löytyviä tulisi olla havainnollistettuna käyrällä ja taulukoituna, varsinkin jos selkeä sääntö nähtävissä.

Funktion käsitteestä tulisi tehdä ero matemaattisen määritelmän ja muiden arkikielessä esiintyvistä käsitteistä funktiolle, jotta nämä eivät aiheuta turhaa muutosvastaisuutta ja hämmennystä oppilaissa (Tabach & Nachlieli 2015). Opettajan tulisin seurata oppilaiden kielenkäyttöä matemaattisista käytöistä. Tätä voidaan yleisestikin harjoituttaa antamalla oppilaalle käsitteen määritelmä ja tämän jälkeen erilaisilla esityksellä tai tehtävillä voidaan antaa oppilaiden itse pohtimalla selvittää, onko kyseinen esitys määritelmän mukainen. Vastaavanlaisia tehtäviä voidaan funktiosta pitää diagnostisena tehtävänä, jolloin tarkkailtaisiin oppilaan algebrallisen ajattelun tasoa.

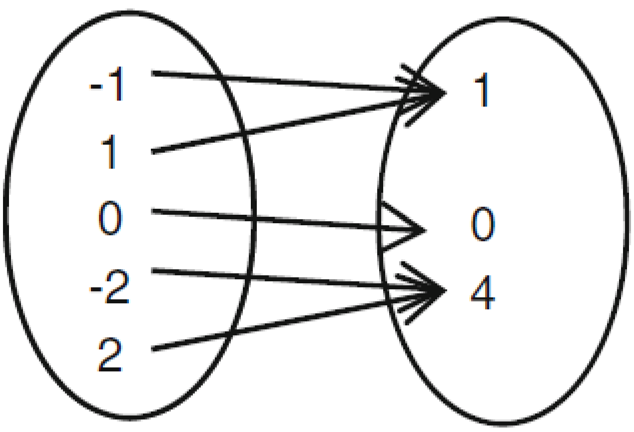
Tehtävissä oppilaiden tulisi harjoituttaa oppilasta itse tuottamaan puuttuva tieto annetun tiedon perusteella. Esimerkiksi suoran yhtälön määrittäminen kuvaajasta ja muutaman pisteen määrittäminen kuvaajan tai suoran yhtälön avulla. Ennen varsinaista funktion käsitteen opettamista oppilaita tulisi mahdollisimman aikaisin havainnoimaan erilaisia muutos suhteita kahden suureen välillä (Welder 2012). Muutoksen havainnointi voidaankin aloittaa jo lukujonoja opiskeltaessa ja esittämällä niitä lukusuoralle. Alussa tulisi lähteä yksinkertaistuksista liikkeelle, kuten vakiolla kertomisella tai vakion lisäämisellä. Lopuksi oppilaat tulisi kyetä ratkaisemaan käytännön ongelmia. Kuva 8 on esimerkki havainnollistuksesta, jossa samaan aikaan on havainnollistettu suoran yhtälöä useammalla tavalla.

Kuva 8 Suoran yhtälön havainnollistus.



Funktion käsitteen ymmärryksen vahvistamiseksi on harjoiteltava oppilaan kykyä päätellä käsitteen perusteella, ovatko eri kuvaukset funktioita. Kuvauksia voidaan esittää diagrammien, taulukoiden tai kuvaajan avulla. Tässä tärkeintä oppilaan omat perustelut ja niiden ilmaiseminen joko suullisesti tai kirjallisesti. Osaa funktiota $f(x) = x^2$ on havainnollistettu diagrammina kuvassa 9, jossa lähtöjoukon alkiot ovat vasemmalla ja maalijoukon alkiot oikealla. Funktion lähtöjoukon alkioiden kuvautumista maalijoukon alkioksi kuvataan nuolella.

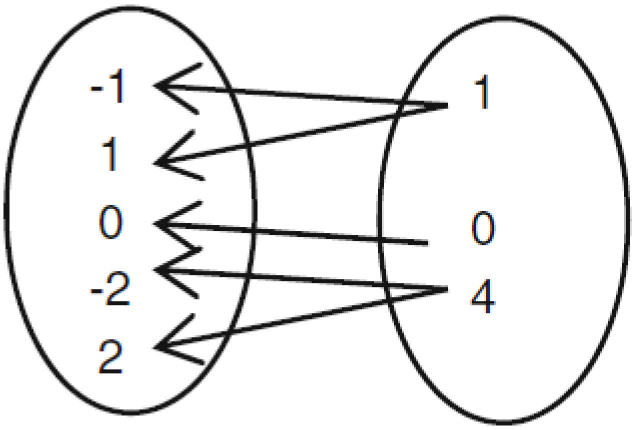
Kuva 9 Kuvausdiagrammi (Tabach & Nachlieli 2015)



Kuvan 9 kaltaisesta diagrammista oppilaan tulisi siis päätellä, onko kyseinen kuvaus funktio funktion määritelmän perusteella. Lisäksi muihin funktion kuvauksiin tätä tulisi yhdistää niin kuvaajiin kuin yhtälöihin. Esimerkiksi useammasta vaihtoehdosta oppilaan tulisi valita paras yhtälö tai kuvaaja, mikä sopii parhaiten yhteen kuvan 9 kaltaisen diagrammin kanssa. Näin saataisiin oppilas ajattelemaan ja toimimaan funktion käsitteen pohjalta sekä yhdistää havaintojaan muihin funktion käsitettä kuvaaviin tapoihin.

Funktion käsitteeseen perustuvissa päättelytehtävissä tulisi olla myös kuvauksia, jotka eivät ole funktioita. Kuvassa 10 on esimerkki samanlaisesta kuvausdiagrammista kuin kuvassa 9, mutta nyt kuvaus ei vastaa funktiota. Lisäksi nyt lähtöjoukko on oikealla ja maalijoukko on vasemmalla. Nuolella havainnollistetaan edelleen lähtöjoukon alkion kuvautumista maalijoukon alkioksi. Kuvaus ei ole funktio, koska osa maalijoukon alkioista kuvantuu useammaksi maalijoukon alkioksi. Tällä tavalla funktion kuvauksia tulisi oppilaan tulkita sekoittaen lähtöjoukon ja maalijoukon paikkaa. Näin oppilasta haastetaan ratkaisemaan tehtävää ulkoa opettelun sijaan, oppilaan tulee turvautua funktion käsitteen ymmärtämiseen.

Kuva 10 Toinen kuvausdiagrammi (Tabach & Nachlieli 2015)



Vastaavasti funktion kuvauksia voidaan esittää taulukoituna ja funktion lähtöjoukon kuvausta maalijoukkoon merkinnällä $f\colon x \to y$ tai $f\colon y \to x$. Näin funktion kuvauksen matemaattisesti oikeanlaista merkintää hyödyntäen oppilaan tulisi määritellä esimerkiksi taulukoiduista muuttujan x ja y arvoja. Näin riippuen kuvauksen suunnasta joko taulukon 7 tai 8 arvot kuvaavat funktiota. Kuvien 9 ja 10 kuvauksista poiketen nyt oppilaan tulee yhdistää osaamistaan matemaattisesta notaatiosta ja funktion käsitteestä.

Taulukko 8

x	y
5	4
1	0
3	2
0	-1
2	

Taulukko 9

x	y
4	5
0	1
2	3
-1	0
	2

Taulukoista 7 ja 8 on tarkoituksella jätetty yksi arvo taulukosta pois. Vastaavasti funktion määrittelystä riippuen joko taulukon 9 tai taulukon 10 kuvaa funktiota. Nyt toisessa sarakkeessa muuttuja on sama luku. Myös nyt oppilaan on turvauduttava ulkoa opettelun sijaan funktion käsitteeseen päätelläkseen kumpi taulukoiduista arvoista kuvaa funktiota. Oppilaan ratkaisua voidaan edes auttaa hahmottelemalla pisteet koordinaatistoon.

Taulukko 10

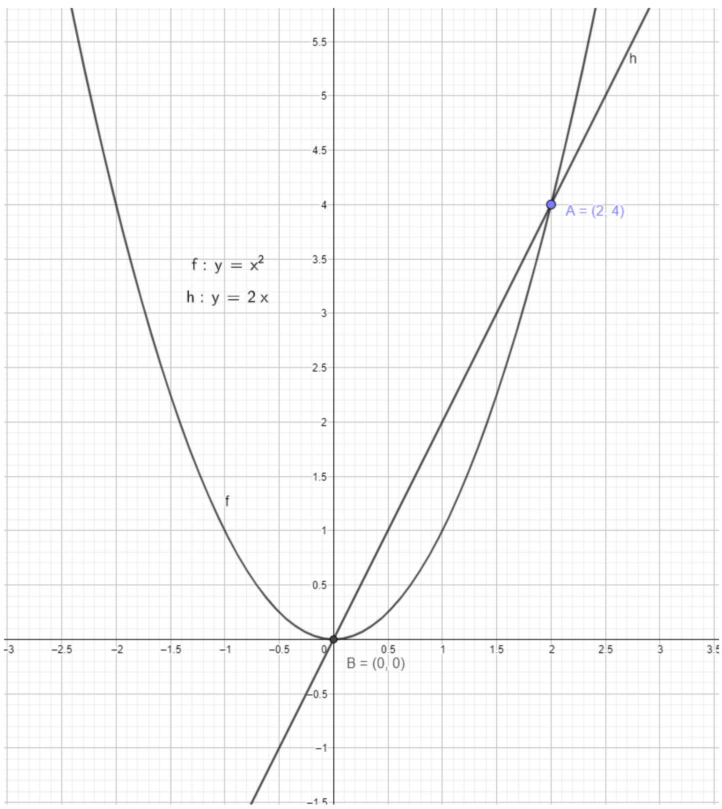
x	y
1	6
2	6
3	6
4	6
5	6

Taulukko 11

x	y
6	1
6	2
6	3
6	4
6	5

Virhekäsityksen välttämiseksi, jossa vain yksi tietty funktio voi kulkea kahden pisteen välillä, voidaan pyrkiä välttämään tai korjaamaan etsimällä leikkauspisteitä kahdelle funktiolle. Esimerkkien ja tehtävien valinnassa on tässä tilanteessa otettava huomioon, että yläkoululainen pystyy ratkaisemaan myös nollakohdat yhtälön ratkaisun keinoin. Kuvassa 11 olevien yhtälöiden leikkauspisteet voidaan ratkaista hyödyntäen tulon nollasääntöä.

Kuva 11 kahden funktion leikkaus



5 Johtopäätökset

Virhekäsitysten huomioiminen opetuksessa jää lopulta opettajan päätettäväksi. Tutkielmassa esiteltiin tapoja opettaa niin, että virhekäsitysten muodostumiselta voitaisiin välttyä. Lisäksi esiteltiin tehtäviä, joiden tavoitteena on vahvistaa sekä oppilaan algebrallista ajattelua että korjata mahdollisia virhekäsityksiä. Jää opettajan arvioitavaksi miten kyseisiä metodeja ja tehtäviä hyödynnetään omassa opetuksessa. Kyseisiä tehtäviä voidaan käyttää niin diagnostisena testinä, formatiivisena testinä tai osana tunti tehtäviä. Vastaavasti tehtäviä voidaan käyttää oppitunnilla johdatteluna uuteen aiheeseen. Tehtävät on kuitenkin valittu tai keksitty sen perusteella, että ne helpottaisivat opettajan työtä kyseisten virhekäsitysten korjaamiseksi.

Tutkielmassa käsiteltiin yleisimpiä yläkoulun algebrassa esiintyviä virhekäsityksiä. Virhekäsityksiä käsiteltiin viitenä kokonaisuutena, jotka olivat sulkeet ja laskujärjestys, yhtäsuuruus, peruslaskutoimitusten symbolit, muuttuja ja funktion käsite. Näissä algebran kokonaisuuksissa esiintyvät virhekäsitykset vaikuttavat myös muiden algebran käsitteiden ja konseptien oppimiseen. Algebrassa esiintyvät virhekäsitykset voivat hankaloittaa myös muiden matematiikan osa-alojen oppimista. Geometriassa Pythagoraan lausetta on hankalaa käyttää oikein, jos muuttujan käsitteen tai yhtäsuuruuden ymmärtämisessä. Funktion käsitettä ja funktion tulkitsemiseen tarvittavia taitoja vaaditaan myös muissa yläkoulun oppiaineissa, joissa tulkitaan dataa, tilastoja tai diagrammeja.

Virhekäsityksiä etsittiin kirjallisuudesta ja tutkimuksista. Sulkeiden ja laskujärjestyksen osalta yleisimpiä virhekäsityksiä ovat kokonaan laskujärjestyksen huomiotta jättäminen eli lasku suoritetaan vasemmalta oikealle. Yhtäsuuruuden osalta yhtäsuuruus merkki nähdään symbolina, jonka jälkeen suoritetaan symbolin vasemmalla puolella oleva lasku. Tämä virhekäsitys tuottaa suuria ongelmia yhtälönratkaisua harjoitellessa. Peruslaskutoimitusten symbolien osalta virhekäsitys liittyy lukujen ja muuttujien lisääminen toisiinsa, mikä hankaloittaa polynomilaskennan oppimista. Muuttuja on abstrakti käsite ja siihen liittyvät virhekäsitykset ovat moninaisia. Virhekäsitykset liittyvät muun muassa siihen minkälaisissa konteksteissa oppilas on aikaisemmin tottunut kirjaimia käyttämään. Lisäksi virhekäsityksiä on muuttujan osalta, mitä lukuja muuttujaan voi sijoittaa. Funktion käsitteen osalta keskeistä on ymmärtää, millä eri tavoilla funktiota voi havainnollistaa.

Eri virhekäsitysten ennalta ehkäisemiseen ja korjaamiseen annettiin monipuolisesti ehdotuksia opetukseen. Laskujärjestystä ei tulisi opettaa muistilistana ja sulkeiden merkitystä voi harjoituttaa tehtävillä, joissa oppilaan tulisi lisätä sulkeet lausekkeeseen. Yhtäsuuruuden osalta sen suhdetta tulisi käsitellä yhdisti suurempi kuin, pienempi kuin ja epätosi käsitteiden kanssa. Pitemmissä laskuissa virhekäsityksen välttäminen välivaiheet tulisi laskea allekkain. Peruslaskutoimitusten symbolien osalta voidaan havainnollistaa geometrian avulla. Muuttujan käsitteen selventämiseksi oppilaan algebrallista ajattelua tulisi vahvistaa. Tähän annettiin useita esimerkkitehtäviä. Funktion käsitteen vahvistamiseksi annettiin esimerkkejä erilaisista pohdintatehtävistä, joissa oppilaan tulisi funktion käsitteeseen perustuen päätellä, onko kysytty esitys funktio. Lisäksi funktion käsitettä opettaessa se tulisi aina mahdollisuuksien tullen liittää useampaan funktion havainnollistus keinoon.

Muutosvastaisuus näkökulma perustelee, miksi virhekäsityksistä tulee ongelma siirryttäessä alakoulun laskennasta yläkoulun algebraan. Alakoulun matematiikassa oppilas pärjää yksinkertaisimmilla käsitteisillä. Yläkoulun algebrassa tutuistakin käsitteistä tulee abstraktimpia. Samalla tutut käsitteet ja konseptit esiintyvät uusissa oppilaille ennestään vieraissa tilanteissa. Jos oppilaan oma ajattelu ja käsitys on ristiriidassa matematiikan sääntöjen kanssa, oppilas helpommin muuttaa matematiikan lakeja omaan ajatteluun sopivaksi kuin muuttaa omaa ajatteluaan matematiikan sääntöihin sopivaksi. Opettajan tehtävänä on tunnistaa ristiriidat ja muokata oppilaan ajattelua matematiikan sääntöihin soveltuviksi.

Matematiikan luonne muuttuu merkittävästi yläkoulun algebran alkaessa. Muutoksen pienentämiseksi algebran opiskelussa käytettäviä havainnollistus ja opiskelu tapoja tulisi esitellä oppilaille ennen algebran opiskelujen avulla. Algebran opiskelu ei tällä tavalla tunnu oppilaalle yhtä vieraalta, jos opiskelutavat ovat oppilaalle tutut. Tätä voidaan tehdä alakoulussa varhaisalgebran keinoin ja 7. luokalla oppilaiden siirtyessä alakoulusta yläkouluun. Yläkoulun matematiikan alussa kerrataan jo alakoulussa opittua aritmetiikkaa, jonka aikana myös yläkoulun opettajalla on mahdollista syventää oppilaiden ymmärrystä algebrassa tarvittavien käsitteiden osalta, kuten yhtäsuuruuden. Yläkoulun matematiikan opettajilla on siis aikaa ennen varsinaisten algebran aiheiden esittelyä vahvistaa oppilaiden algebrallista ajattelua ja abstraktia hahmotuskykyä.

Tutkielman kirjallisuuskatsaus on pääasiassa tehty englanninkielisiä lähteitä hyödyntäen. Lähteissä on tutkimuksia niin Euroopasta, Pohjois-Amerikasta kuin Aasiasta. Näin kirjallisuuskatsaukseen on saatu tuotua monikulttuurista näkökulmaan eri maiden oppilaista. En pidä suomalaisia oppilaita sellaisena erityistapauksina, joka estäisi ulkomaisten tutkimustuloksien huomioon ottamisen opetuksessa.

Opettajan työaika on rajallinen, siksi näen itse tärkeä tutustua yleisimpiin virhekäsityksiin. Oman ja muiden matematiikan opettajien työskentelyn tehostamiseksi uskon, että yleisimpien virhekäsitysten tuntemisesta on hyötyä opetuksen suunnittelussa ja tuntityöskentelyn organisoinnissa. Keskeinen opettajan rooli luokassa on luoda ympäristö, jossa oppilaat uskaltavat yrittää ja oppivat omista virheistään. Näin opettajan on helpompaa myös ohjata oppilaan algebrallista ajattelua keskustelemalla oikeaan suuntaan. Opettajan tuntiessa yleisimmät virhekäsitykset myös oppilaiden auttaminen tuntityöskentelyn aikana on helpompaa. Virhekäsityksen korjaaminen on lopulta oppilaan oman ajattelun ja ymmärryksen kehittämistä. Tämän takia oppilaan algebrallinen ajattelu ja abstrakti hahmotuskyvyn taso vaikuttaa heidän kykyynsä nähdä oman ajattelunsa ristiriitaisuutta.

6 Lähteet

Birgin, Osman. “Investigation of Eighth-Grade Students’ Understanding of the Slope of the Linear Function.” Boletim de educação matemática BOLEMA 26.42 A (2012): 139–162. Web.

Carey, S. (2000). Science education as conceptual change. Journal of Applied Developmental Psychology, 21(1), 13–19.

Cornelis Vermeulen & Bronwin Meyer (2017) The Equal Sign: Teachers’ Knowledge and Students’ Misconceptions, African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 21:2, 136-147

Chazan, D., & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. 123–135). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Chesney, Dana L et al. “Arithmetic Practice That Includes Relational Words Promotes Understanding of Symbolic Equations.” Learning and individual differences 64 (2018): 104–112. Web.

Christou, Konstantinos P, and Stella Vosniadou. “What Kinds of Numbers Do Students Assign to Literal Symbols? Aspects of the Transition from Arithmetic to Algebra.” Mathematical thinking and learning 14.1 (2012): 1–27. Web.

Dougherty, Barbara et al. “Developing Concepts and Generalizations to Build Algebraic Thinking: The Reversibility, Flexibility, and Generalization Approach.” Intervention in school and clinic 50.5 (2015): 273–281. Web.

Kajander, Ann, and Miroslav Lovric. “Mathematics Textbooks and Their Potential Role in Supporting Misconceptions.” International journal of mathematical education in science and technology 40.2 (2009): 173–181. Web.

Knuth E. J., Alibali, M.W., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. Mathematics Teaching in the Middle School, 13(9), 514–519.

Kieran, C. (1985). The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students. Paper presented at the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, The Netherlands.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014

Leinhardt, Gaea, Orit Zaslavsky, and Mary Kay Stein. “Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching.” Review of educational research 60.1 (1990): 1–64. Web.

Lee, Se Woong, and Xinyi Mao. “Algebra by the Eighth Grade: The Association Between Early Study of Algebra I and Students’ Academic Success.” International journal of science and mathematics education 19.6 (2020): 1271–1289. Web.

Lucariello, Joan, Michele T Tine, and Colleen M Ganley. “A Formative Assessment of Students’ Algebraic Variable Misconceptions.” The Journal of mathematical behavior 33.1 (2014): 30–41. Web.

Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., & Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse
measure reveals about children’s understanding of the equal sign as an indicator of mathematics equality.

McNeil, Nicole M. “A Change-Resistance Account of Children’s Difficulties Understanding Mathematical Equivalence.” Child development perspectives 8.1 (2014): 42–47. Web.

Patrick J. Eggleton, and Carla C. Moldavan. “The Value of Mistakes.” Mathematics teaching in the middle school 7.1 (2001): 42–47. Print.

Rivera, Ferdinand D. Teaching and Learning Patterns in School Mathematics : Psychological and Pedagogical Considerations. Dordrecht ;: Springer, 2013. Print.

Ryan, Julie (Julie T.), and Julian Williams. Children’s Mathematics 4-15 Learning from Errors and Misconceptions. Maidenhead: McGraw-Hill/Open University Press, 2007. Print.

Susan F. Zielinski, and Michael Glazner. “The No-to-Yes Project: Conquering Common Algebraic Mistakes That Drive Us and Our Students Crazy.” The Mathematics teacher 112.6 (2019): 432–439. Web.

Tabak, Sanem. “6th, 7th and 8th Grade Students’ Misconceptions About the Order of Operations.” International journal of educational methodology 5.3 (2019): 363–373.

Tabach, Michal, and Talli Nachlieli. “Classroom Engagement Towards Using Definitions for Developing Mathematical Objects: The Case of Function.” Educational studies in mathematics 90.2 (2015): 163–187. Web.

Wilkie, Karina J, and Michal Ayalon. “Investigating Years 7 to 12 Students’ Knowledge of Linear Relationships through Different Contexts and Representations.” Mathematics education research journal 30.4 (2018): 499–523. Web.

Wilkie, Karina J. “Students’ Use of Variables and Multiple Representations in Generalizing Functional Relationships Prior to Secondary School.” Educational studies in mathematics 93.3 (2016): 333–361. Web.

Welder, Rachael M. “Improving Algebra Preparation: Implications From Research on Student Misconceptions and Difficulties: Improving Algebra Preparation.” School science and mathematics 112.4 (2012): 255–264.