



HYPERBOLISEN GEOMETRIAN PERUSTEET

Katri Hellman

Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2022

Tarkastajat:
Dos. Ilkka Törmä
Prof. Jarkko Kari

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

KATRI HELLMAN: Hyperbolisen geometrian perusteet
Pro gradu -tutkielma, 63 s.
Matematiikka
Huhtikuu 2022

Hyperbolinen geometria on osa epäeuklidista geometriaa, eli siinä ei päde paralleeli-postulaatti. Paralleelipostulaatti on yksi euklidisen geometrian postulaateista, ja sen mukaan suoralla on olemassa tietyn pisteen kautta vain yksi yhdensuuntainen suora. Hyperbolinen geometria löytyikin sen pohjalta, että pystyttiin osoittamaan, että yhdensuuntaisia suoria voi olla useampia. Hyperbolista geometriaa ilmenee luonnossa ja sitä hyödynnetään niin fysiikassa kuin tietotekniikassa.

Tutkielmassa esitetään hyperbolisen geometrian perustuloksia Poincarén kiekkomallissa ja verrataan niitä vastaaviin euklidisen geometrian perustuloksiin. Lisäksi tehdään lyhyt katsaus epäeuklidisen ja hyperbolisen geometrian historiaan. Hyperbolisesta geometriasta esitellään tuloksia liittyen esimerkiksi yhdensuuntaisiin suoriin, kolmion kulmien summaan sekä pinta-alaan, pisteiden välisen etäisyyden määrittämiseen ja kuvauksiin. Näiden saamiseksi esitellään inversio, Möbius-kuvaus sekä laajennettu kompleksitaso.

Asiasanat: hyperbolinen geometria, Poincaré, kiekkomalli, Möbius-kuvaus.

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Historia	3
2.1	Epäeuklidisen geometrian löytäminen	3
2.2	Erilaiset mallit	5
2.2.1	Beltramin-Kleinin malli	5
2.2.2	Poincarén mallit	6
2.2.3	Hyperboloidimalli	7
3	Inversio ja laajennettu kompleksitaso	8
3.1	Inversio	8
3.2	Laajennettu kompleksitaso	13
4	Poincarén kiekkomalli	19
4.1	Kiekkomalli ja hyperbolinen suora	19
4.2	Hyperbolisia kuvauksia	25
4.2.1	Hyperbolinen kuvaus inversiona	25
4.2.2	Hyperbolinen kuvaus Möbius-kuvauksena	29
4.3	Pisteiden välinen etäisyys ja hyperbolinen ympyrä	36
4.4	Hyperbolisen geometrian kolmiot	45
4.4.1	Hyperbolinen kolmio	45
4.4.2	Hyperbolisen kolmion pinta-ala	54

1 Johdanto

Hyperbolinen geometria on yksi geometrian haaroista ja osa epäeuklidista geometriaa. Epäeuklidisen geometrian ero niin sanottuun koulugeometriaan eli euklidiseen geometriaan on, että siinä ei päde paralleelipostulaatti, eli suoralla ei ole vain yhtä yhdensuuntaista suoraa annetun pisteen kautta. Itse asiassa hyperbolisessa geometriassa näitä yhdensuuntaisia suoria tietyn pisteen kautta on ääretön määrä. Se eroaa siis joiltain osin euklidisestä geometriasta. Hyperbolisessa geometriassa voidaan ilmaista euklidisestä geometriasta tuttuja käsitteitä, kuten kolmio ja sen pinta-alan laskeminen, Pythagoraan lause sekä suoran normaali. Hyperbolisessa ja euklidisessä geometriassa on myös yhtäläisyyksiä. Esimerkiksi kaksi pistettä määräävät suoran yksikäsitteisesti ja suorien välinen euklidinen sekä hyperbolinen kulma tietyissä malleissa ovat samat.

Euklidisen geometrian perusteet kehitettiin n. 300 eaa., kun taas hyperbolinen geometria löydettiin vasta noin 2000 vuotta tämän jälkeen. Tässä välissä useat matemaatikot yrittivät todistaa, että on olemassa vain yksi yhdensuuntainen suora, joka kulkee annetun pisteen kautta. Tässä he eivät kuitenkaan onnistuneet, vaan 1700-luvun matemaatikot havaitsivat, että voi olla sellaistaakin geometriaa, jossa yhdensuuntaisuus ei päde. Tätä kautta löytyi epäeuklidinen geometria. Epäeuklidista geometriaa tutkineet matemaatikot löysivät myös hyperboliseen geometriaan liittyviä tuloksia. 1800-luvulla matemaatikot Beltrami, Klein ja Poincaré loivat ensimmäiset hyperbolisen geometrian mallit, jotka ovat pohjimmiltaan samoja, mutta eri tavalla esitettyjä.

Hyperbolista geometriaa löytyy luonnosta ja sitä hyödynnetään esimerkiksi tietotekniikassa sekä fysiikassa. Luonnossa muun muassa koralliriuttojen muoto näyttää ilmentävän hyperbolista pintaa [9]. Hyperbolinen geometria luo kilpailevan mahdollisuuden universumin muodolle yhdessä pallomaisen ja tasomaisen muodon kanssa [8, s. 33]. Hyperbolista geometriaa hyödynnetään ja suunnitellaan käytettäväksi tietotekniikassa. Esimerkiksi tietorakenteissa sitä voitaisiin hyödyntää linkkien ja solmujen välisissä puurakenteissa sekä etsimään vääriä ja puuttuvia linkkejä, jotka yhdistävät solmuja toisiinsa [12] [11]. Lisäksi sitä sovelletaan fysiikassa, kuten erityisessä suhteellisuusteoriassa sekä tilastollisessa fysiikassa [10, s. 45]. Hyperbolista geometriaa on käytetty myös taiteessa. Tällainen taiteilija on esimerkiksi M. C. Escher, joka on käyttänyt töissään muun muassa hyperbolisesti yhteneviä kappaleita.

Tässä tutkielmassa luodaan katsaus hyperbolisen geometrian perustuloksiin ja verrataan, miten ne eroavat euklidisen geometrian vastaavista tuloksista. Lisäksi käydään lyhyesti läpi epäeuklidisen geometrian ja hyperbolisen geometrian historiaa. Hyperbolisesta geometriasta esitellään tuloksia liittyen esimerkiksi yhdensuuntaisiin suoriin, kolmion kulmien summaan sekä pinta-alaan, pisteiden välisen etäisyyden määrittämiseen sekä kuvauksiin. Näiden todistamiseksi tulee euklidisen geometrian perustuloksien lisäksi ymmärtää kompleksilukuja sekä matriisilaskentaa. Tämä tutkielma perustuu pääasiassa Brannanin, Esplenin ja Grayn kirjan Geometry [3] lukuihin 5 ja 6.

Toisessa luvussa esitellään epäeuklidisen geometrian ja sitä kautta hyperbolisen geometrian löytäminen. Samalla tutustutaan, miten matemaatikot Saccheri, Lam-

bert, Bolyai, Lobatševski sekä Gauss liittyvät epäeuklidisen ja hyperbolisen geometrian löytymiseen. Lisäksi esitellään eri hyperbolisen geometrian malleista Beltramin-Kleinin malli, Poincarén kiekko- ja puolitasomalli sekä hyperboloidimalli.

Kolmannessa luvussa määritellään inversio ja laajennettu kompleksitaso, joita hyödynnetään neljännessä luvussa. Inversiota tarvitaan käsiteltäessä hyperbolisia peilauksia, sillä osa suorista on euklidisen geometrian ympyrän kaaren osia, ja inversio on peilausta ympyrän suhteen. Laajennettua kompleksitasoa taas käytetään hyperbolisten kuvausten määrittämässä.

Neljännessä luvussa käydään tarkemmin läpi hyperbolista geometriaa käyttäen Poincarén mallia. Malli havainnoi helposti ymmärrettävästi, miltä näyttävät esimerkiksi hyperbolisen geometrian suorat ja kolmiot verrattuna euklidisen geometrian suoriin ja kolmioihin. Samalla tarkastellaan, millaisia euklidisestä geometriasta tutut ominaisuudet ovat hyperbolisessa geometriassa. Esimerkiksi kun euklidisessä geometriassa kolmion kulmien summa on 180° , hyperbolisessa geometriassa se on alle 180° .

2 Historia

2.1 Epäeuklidisen geometrian löytäminen

Eukleides Aleksandrialaisen tunnetuin teos *Alkeet* (n. 300 eaa.) sisältää 13 kirjaa, joissa käsitellään muun muassa geometriaa ja lukuteoriaa [6, s. 8]. Tämä teos sisältää viisi keskeistä postulaattia, jotka ovat euklidisen geometrian perusta. Nämä postulaatit ovat seuraavat:

1. Jokaiselle pisteparille P ja Q , missä $P \neq Q$, on olemassa yksikäsitteinen suora, joka kulkee pisteiden P ja Q kautta.
2. Olkoon janat AB ja CD . Suoralla AB on olemassa sellainen piste E , että piste B sijaitsee pisteiden A ja E välissä ja janat CD ja BE ovat yhtä pitkät.
3. Kaikkien eri pisteiden O ja A kautta voidaan piirtää ympyrä, jonka keskipiste on O ja säde OA .
4. Kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuria.
5. Olkoon l suora ja P piste, joka ei sijaitse suoralla l . Tällöin on olemassa yksikäsitteinen suora m , joka kulkee pisteen P kautta ja on yhdensuuntainen suoran l kanssa. [6, s. 15-21]

Kaksi ensimmäistä postulaattia juontavat juurensa kokemuksesta piirtää viivaimella, kun taas kolmas postulaatti liittyy taitoon piirtää harpilla. Neljäs postulaatti pohjautuu esimerkiksi kulmien mittaamiseen astelevyn avulla tai vieruskulmien summaan, sillä samansuuruiset vieruskulmat ovat suoraa kulmia. Viides postulaatti on näihin verrattuna erilainen, koska sitä ei voida tarkistaa empiirisesti. Kahta suoraa ei voida jatkaa niin pitkälle, että nähtäisiin leikkaavatko ne toisiaan. [6, s. 21-22] Tästä viidennestä postulaatista käytetään nimitystä *paralleelipostulaatti* [4, s. 2].

Paralleelipostulaattia yritettiin todistaa noin 2000 vuoden ajan esimerkiksi muiden postulaattien kautta [6, s. 209]. Tämä ei kuitenkaan onnistunut, vaan sadat matemaatikot päätyivät korvaamaan sen vastaavilla olettamuksilla, esimerkiksi seuraavilla:

1. Yhdensuuntaiset suorat ovat yhtä kaukana toisistaan (Poseidonios, n. 100 eaa.).
2. Jos suora leikkaa toisen yhdensuuntaisista suorista, se leikkaa niin ikään toisen (Proklos, 410-485).
3. Kun annetaan kolmio ja jana, voidaan konstruoida toinen kolmio, jonka yhtenä sivuna on annettu jana ja joka on yhdenmuotoinen alkuperäisen kolmion kanssa (Wallis, 1616-1703).
4. Kolmion kulmien summa vastaa kahta suoraa kulmaa (Legendre, 1752-1833). [4, s. 2]

Vasta 1800-luvulla löydettiin epäeuklidinen geometria [6, s. 239]. Esimerkiksi Saccheri, Bolyai, Lobatševski sekä Gauss olivat merkittäviä epäeuklidisen geometrian tutkijoita.

Gerolamo Saccheri (1667-1733) oli italialainen matemaatikko [10, s. 24]. Hän oli ensimmäinen, joka harkitsi tapausta, jossa paralleelipostulaatti ei toimi [13, s. 32]. Elinaikanaan hän julkaisi kaksi tutkimusta, joista toinen käsitteli paralleelipostulaattia ja toisessa hän löysi epäeuklidisen geometrian. Paralleelipostulaatin todistuksen hän pyrki tekemään epäsuorasti. Sen sijaan, että hän olisi päätenyt ristiriitaan, hän löysikin elliptisen geometrian perusteet. Todistuksessaan hän lähti liikkeelle nelikulmiosta, jossa kantaa vasten on kohtisuorasti kaksi yhtä pitkää sivua. Tällöin kannan vastakkaisen sivun ja yhtä pitkien sivujen väliin muodostuneet kulmat ovat saman suuruiset. Hänen tarkoituksenaan oli osoittaa, että nämä kulmat eivät voi olla teräviä tai tylppiä, jolloin ainoaksi mahdollisuudeksi jää, että ne ovat suorat. [10, s. 24] Tylpän kulman tapauksen hän onnistui todistamaan vääräksi, mutta terävän kulman tapaus oli vaativampi. Kun hän yritti todistaa ristiriitaa, hän tuli lopulta päätelmään, että terävän kulman hypoteesi on väärä, sillä se on vastoin suoran viivan määritelmää. Näin hän löysi epäeuklidisen geometrian perusosan. [6, s. 218]

Johann Lambert (1728-1777) tutki miltei samanlaista nelikulmiota kuin Saccheri. Lambertin nelikulmiossa on vähintään kolme suoraa kulmaa. Kun peilataan tämä nelikulmio sellaisen sivun suhteen, jossa molemmat kulmat ovat suoria, saadaan Saccherin nelikulmio. [6, s. 223] Samoin kun Saccheri myös Lambert hylkäsi tylpän kulman hypoteesin. Hän kuitenkin jatkoi terävän kulman hypoteesia pidemmälle määrittelemällä monikulmion poikkeaman kulmien summan sekä sivujen määrän avulla. [4, s. 6] Hän muistutti, että euklidisessa avaruudessa kolmion, jonka sivut muodostuvat isoympyrän kaarista, kulmien summa on suurempi kuin 180° , ja 180° ylitys kolmion kulmien summassa on verrannollinen sen pinta-alaan. Tällöin verrannollisuuskerroin on pallopinnan säteen neliö r^2 . [6, s. 224] Näin ollen terävän kulman hypoteesi pätee tapauksessa, jossa pallopinnan säde on imaginäärinen $i = \sqrt{-1}$. [4, s. 6]

János Bolyai (1802-1860) oli unkarilainen matemaatikko [10, s. 3], jota pidetään epäeuklidisen geometrian löytäjänä [6, s. 239]. Hän siirsi geometrian konkreettiselta tasolta abstraktille osoittamalla, että loogisesti on olemassa enemmän kuin vain yksi mahdollinen geometria [10, s. 29-30]. Hän aloitti tarkastelemalla suoraa l ja pistettä P , joka ei sijaitse suoralla l . Tämän jälkeen piirretään puolisuora pisteestä P niin, että se leikkaa suoran l toisella puolella pistettä P . Kun siirretään leikkauspistettä äärettömään, on olemassa rajapaikka, jossa puolisuora ei enää leikkaa suoraa l . Sama voidaan tehdä myös toiseen suuntaan. Näin saadaan kaksi suoraa, jotka molemmat ovat yhdensuuntaisia suoralle l . Jos ne ovat eri suoria, niiden välissä on olemassa ääretön määrä suoria, jotka eivät leikkaa suoraa l . Jokaisella näistä suorista on olemassa yksi yhteinen kohtisuora suoran l kanssa. Näin hän löysi hyperbolisen geometrian. Lisäksi hän kehitti myös hyperbolisen trigonometrian. [10, s. 31-33] Bolyai julkaisi löytönsä 26-sivuisena liitteenä isänsä tutkielmassa [6, s. 240].

Nikolai Lobatševski (1792-1856) oli venäläinen matemaatikko. Hän oli ensimmäinen, joka julkaisi selvityksen epäeuklidisestä geometriasta. Hän ei kuitenkaan julkaisullaan saavuttanut merkittävää huomiota, sillä se julkaistiin venäjäksi. [6, s. 245] Bolyai ja Lobatševski löysivät samoihin aikoihin 1829 ja 1832 toisistaan riippumatta,

että on mahdollista olla ristiriidaton geometria, jossa paralleelipostulaatti ei ole tosi. Heidän työnsä osoitti, että euklidinen geometria, jonka nähtiin kuvaavan arkipäivän kokemuksia avaruudesta, perustuu olettamukseen siitä, että suoralla on aina olemassa yksikäsitteinen yhdensuuntainen suora. Pikemminkin tämä on aksiooma eikä olettamus, joka voidaan olettaa joko oikeaksi tai vääräksi. [5, s. 77] Lobatševskin ja Bolyain työt erosivat siinä, että Lobatševski käsitteli hyperbolista geometriaa yksityiskohtaisemmin. Myöhemmin hän myös kehitti laskutavan hyperbolisen tetraedrin tilavuudelle. [10, s. 34]

Carl Gauss (1777-1855) oli saksalainen matemaatikko. Hän oli ensimmäinen, joka tarkasteli geometriaa modernista näkökulmasta, johon ei kuulunut paralleelipostulaatti. Hänen mukaansa tällainen geometria tulisi kehittää mielenkiinnon vuoksi ja olettaen, ettei syntyisi ristiriitoja. Vuodet 1792-1813 hän yritti todistaa paralleelipostulaattia ja loi "antieuklidisen" geometrian, joka itse asiassa on Saccherin terävän kulman hypoteesiin liittyvä geometria. [4, s. 7] Gauss ei uskaltanut julkaista omia epäeuklidiseen geometriaan liittyviä tuloksiaan, jotka olivat vaillinaisia verrattuna Bolyain tuloksiin [10, s.29-30]. Hänen tuotantoaan on rekonstruoitu perinnöstä sekä kirjeenvaihdoista. Gaussin 200-vuotissyntymäpäivän kunniaksi tehdyt kirjat sekä paperit jättivät Bolyain ja Lobatševskin Gaussin varjoon. Monet pitävät nykyäänkin Gaussia epäeuklidisen geometrian todellisena löytäjänä. Hänen perintönänsä saatiin noin 12 sivua geometrian ja/tai epäeuklidisen geometrian perusteisiin liittyvää kirjoitusta, joissa hän esimerkiksi antoi ylärajan hyperbolisen kolmion pinta-alalle, tosin ilman todistusta. [10, s. 27-28]

Epäeuklidinen geometria jakautuu kahteen geometriaan: hyperboliseen ja elliptiseen geometriaan. Hyperbolisessa geometriassa Eukleideen postulaateista toteutuvat kaikki muut paitsi paralleelipostulaatti. Tällöin suora voi leikata toisen yhdensuuntaisista suorista, vaikka se ei leikkaisi toista. Elliptisessä geometriassa taas viides ja toinen postulaateista eivät toteudu. Näin ollen kaksi samassa tasossa olevaa suoraa leikkaavat aina toisensa. [4, s. 4]

2.2 Erilaiset mallit

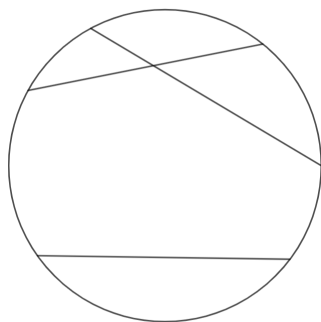
2.2.1 Beltramin-Kleinin malli

Eugenio Beltrami (1835-1900) julkaisi vuonna 1868 kaksi artikkelia, joista toinen käsitteli hyperbolista geometriaa ja toinen pinnan negatiivista kaarevuutta. Ensimmäiseksi hän kuvasi, kuinka Lobatševskin geometria voidaan toteuttaa negatiivisesti kaarevalla pinnalla. [5, s. 168] Beltrami osoitti, että hyperbolisessa geometriassa tasoa voidaan tarkastella kaksiulotteisena pintana, jossa on jatkuva negatiivinen kaarevuus [14, s. 72]. Hän julkaisi vuonna 1868 kaksi artikkelia koskien hyperbolista geometriaa ja negatiivista kaarevuutta. Itse asiassa Lambertin hyperbolinen trigonometria osoittautui avaintekijäksi, joka johti Beltramin ensimmäiseen hyperbolisten trigonometrinen funktioiden teoriaan. [5, s. 268]

Felix Klein (1849-1925) esitteli Beltramin kiekkomallin projektiivisen geometrian kautta. Hänen ilmaisutapansa oli yksinkertaisempi, yleisempi ja laajalti tunnettu, joten malli on nimetty myös hänen mukaansa. [6, s. 209] Beltramin ja Kleinin mallit erosivat toisistaan vähän. Beltrami osoitti, että hyperbolinen geometria on ristiriidaton, jos euklidinen geometria on ristiriidaton. Klein taas osoitti, että pallomai-

nen, euklidinen ja hyperbolinen geometria ovat ristiriidattomia, jos projektiivinen geometria on ristiriidaton. [14, s. 64]

Beltramin-Kleinin mallissa koko reaalin hyperbolinen taso esitetään kiekossa \mathbb{R}^2 , jossa hyperbolinen suora on euklidisen ympyrän jänne. Tässä mallissa etäisyys sekä kulmien suuruudet eivät vastaa euklidista etäisyyttä tai kulmien suuruutta. [6, s. 293]



Kuva 1: Beltramin-Klein malli.

Kuvassa 1 on esitetty Beltramin-Kleinin mallia kuvaava ympyrä sekä ympyrän sisällä suoria.

2.2.2 Poincarén mallit

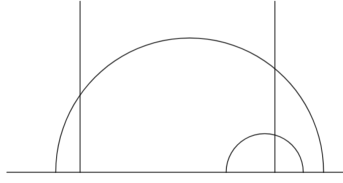
Hyperbolinen geometria otti uuden suunnan Henri Poincarén (1854-1912) myötä. Beltrami ja Klein tutkivat ennen kaikkea geometriaa ja he käyttivät tunnettua geometriaa mallintaakseen tuntematonta geometriaa. Poincaré taas aloitti muilla alueilla ja teki yllättävän löydön. Hyperbolinen geometria esiintyi jo matematiikan muilla alueilla. Tämä löytö sai hyperbolisen geometrian täysin uuteen valoon, sillä sitä ei enää voitu nähdä vain loogisesti käypänä, vaan myös luonnollisena, tuttuna ja mahdollisesti käyttökelpoisena. Poincaré osoitti, kuinka sitä voidaan hyödyntää esimerkiksi kompleksianalyysin, lukuteorian ja topologian sovelluksissa. [14, s. 113-114]

Poincaré kehitti kiekkomallin, joka muistuttaa Beltramin-Kleinin mallia. Tässä mallissa suorat ovat kuitenkin eri tavalla määritelty, sillä ne ovat joko euklidisen suoran tai ympyrän osia. Saman pituisten janojen määritelmä on tässä mallissa vaikea, sillä se perustuu euklidisesta tavasta poikkeavaan pituuden mittaamiseen, kuten Beltramin-Kleinin mallissakin. Tässä mallissa samankokoisten kulmien yhtäsuuruus on sama kuin euklidisessa geometriassa, sillä kulma on määritelty samoin. [6, s. 302]

Poincarén malli voidaan esittää myös euklidisen puolitasomallin avulla. Puolitasomallia kuvaa joukko

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}. [1, s.2]$$

Hyperboliset suorat esitetään tässä mallissa kahdella tavalla: kohtisuorina x-akselille tai puoliympyröinä, joiden keskukset sijaitsevat x-akselilla. [6, s. 307] Tämä malli on esitetty kuvassa 2.



Kuva 2: Poincarén puolitasomalli.

Beltramin-Kleinin ja Poincarén mallit ovat isomorfisia keskenään, jolloin voidaan luoda vastaavuus pisteiden ja suorien välille eri malleissa. Itse asiassa isomorfia voidaan esittää kaikkien mahdollisten reaalisten mallien välille. [6, s. 306]

2.2.3 Hyperboloidimalli

Hyperboloidimallin pohjautuu erityiseen suhteellisuusteoriaan. Tämä malli esitetään karteesisessa kolmiulotteisessa avaruudessa \mathbb{R}^3 , jossa koordinaatit ovat x , y ja t (aika). Tässä etäisyys mitataan Minkowskin metriikkana

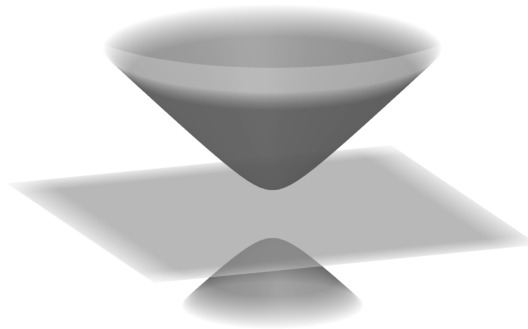
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2,$$

jolloin hyperboloidin yhtälö on

$$x^2 + y^2 - t^2 = -1.$$

Tällöin keskipiste on origossa $O = (0, 0, 0)$ ja säde on imaginäärinen $i = \sqrt{-1}$. [6, s. 311-312]

Syntynyttä kuviota kutsutaan kaksivaippaiseksi hyperboloidiksi. Tämä pinta saadaan, kun kierretään hyperbeliä $t^2 - x^2 = 1$ t -akselin ympäri. Pinta on esitetty kuvassa 3. Hyperboloidin mallissa tutkittava geometria toteutetaan ylemmällä vaipalla. Tässä mallissa suora on hyperboloidin vaipalla oleva hyperbeli. [6, s. 312]



Kuva 3: Hyperboloidimalli.

3 Inversio ja laajennettu kompleksitaso

3.1 Inversio

Tässä luvussa esitellään inversio, joka sananmukaisesti tarkoittaa käänteistä. Tämä kuvaus vaihtaa ympyrän ulkopuolisen alueen ja sisäpuolisen alueen keskenään. Inversiota tullaan käyttämään hyperbolisessa geometriassa, kun määritellään hyperbolisia kuvauksia.

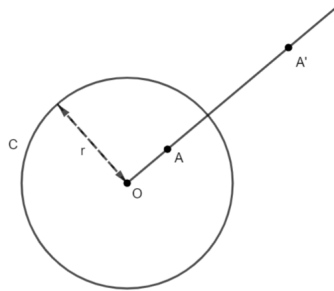
Määritelmä 1. Olkoon C ympyrä, jonka keskipiste on O ja säde r . Olkoon piste $A \neq O$ toinen piste. Jos piste A' sijaitsee pisteestä O alkavalla puolisuoralla OA ja toteuttaa yhtälön

$$OA \cdot OA' = r^2, \quad (1)$$

niin pistettä A' kutsutaan pisteen A inversion kuvaksi ympyrän C suhteen. Pistettä O kutsutaan inversiokeskukseksi ja ympyrää C inversioympyräksi. Tällöin kuvausta

$$t(A) = A' \quad (A \in \mathbb{R}^2 - \{O\})$$

kutsutaan inversioksi ympyrän C suhteen.



Kuva 4: Inversioympyrä C ja pisteen A inversio.

Kuvassa 4 on esitetty inversioympyrä C , joka kuvaa ympyrän sisällä olevan pisteen A ympyrän ulkopuoliseksi pisteeksi A' . Vastaavasti inversio kuvaa pisteen A' pisteeksi A , eli kuvaa inversioympyrän ulkopuolisen pisteen ympyrän sisälle. Jos piste A sijaitsee inversioympyrän kehällä, niin yhtälöstä (1) nähdään, että tällöin piste A kuvautuu itselleen. Inversiokeskus O ei kuulu kuvauksen t arvojoukkoon, sillä ei ole olemassa sellaista pistettä, joksi se kuvautuisi. Seuraava lause kertoo pisteiden koordinaatit inversiossa.

Lemma 1. *Inversiota yksikköympyrän \mathcal{C} suhteen kuvaa funktio*

$$t : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R} - \{O\}).$$

Todistus. Olkoon pisteen A koordinaatit $(x, y) \in \mathbb{R} - \{O\}$. Olkoon piste A' pisteen A inversion kuva ympyrän \mathcal{C} suhteen. Koska piste A' sijaitsee samalla pisteestä O lähtevällä puolisuoralla kuin piste A , niin pisteen A' koordinaatit ovat (kx, ky) , missä vakio $k > 0$. Koska inversioympyrä \mathcal{C} on yksikköympyrä, sen säteen arvo on 1. Tällöin määritelmästä 1 saadaan pituuksille OA ja OA' yhtälö $OA \cdot OA' = 1$. Korotetaan molemmat puolet toiseen potenssiin, jolloin yhtälö tulee muotoon $OA^2 \cdot OA'^2 = 1$. Sijoitetaan janojen OA ja OA' koordinaatit janan pituuden kaavaan $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, jolloin saadaan

$$(x^2 + y^2) \cdot (k^2x^2 + k^2y^2) = 1.$$

Lasketaan edellisestä yhtälöstä vakio k , joksi saadaan

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)k^2x^2 + (x^2 + y^2)k^2y^2 &= 1 \\ k^2((x^2 + y^2)(x^2 + y^2)) &= 1 \\ k &= \frac{1}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Kun vakion k lauseke sijoitetaan pisteen A' koordinaatteihin (kx, ky) , saadaan

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

□

Näiden koordinaattien avulla saadaan näytettyä, millaiset yhtälöt inversiossa syntyy kuvattaville suorille ja ympyröille riippuen siitä, kulkevatko ne inversiokeskuksen läpi.

Lemma 2. *Inversio origokeskeisen ympyrän suhteen kuvaa*

1. *suoran, joka ei kulje origon O kautta, ympyräksi, joka kulkee origon O kautta, mutta johon origo ei kuulu, ja*
2. *origon kautta kulkevan suoran itselleen.*

Todistus. Valitaan inversioympyrän säteen pituudeksi yksi. Tällöin inversioympyrä on yksikköympyrä \mathcal{C} .

1. Tutkitaan ensin suoraa, joka ei kulje pisteen O kautta. Sen yhtälö on muotoa

$$ax + by + c = 0, \tag{2}$$

missä vakio $c \neq 0$.

Lemman 1 mukaan inversiossa koordinaatit (x, y) kuvautuu koordinaateiksi $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$. Sijoitetaan nämä koordinaatit suoran yhtälöön (2), jolloin se tulee muotoon

$$\frac{ax}{x^2 + y^2} + \frac{by}{x^2 + y^2} + c = 0.$$

Koska $c \neq 0$, edellä oleva yhtälö voidaan jakaa vakiolla c , jolloin saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{ax}{x^2 + y^2} + \frac{by}{x^2 + y^2} + c &= 0 & \parallel \cdot (x^2 + y^2) \\ ax + by + c(x^2 + y^2) &= 0 & \parallel : c \\ x^2 + y^2 + \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y &= 0. \end{aligned}$$

Kun saatuun yhtälöön sijoitetaan koordinaatti $(0, 0)$, huomataan, että saatu ympyrä kulkee pisteen O kautta.

2. Tutkitaan seuraavaksi suoraa, joka kulkee pisteen O kautta. Inversion määritelmän 1 mukaan, jos suora l kulkee origon O kautta, niin jokainen suoran l piste inversioympyrän \mathcal{C} sisällä kuvautuu suoran l pisteeksi inversioympyrän ulkopuolelle. Samoin jokainen suoran l inversioympyrän \mathcal{C} ulkopuolella oleva piste kuvautuu suoralle l inversioympyrän sisäpuolelle. Lisäksi inversioympyrän kehällä \mathcal{C} oleva suoran l piste kuvautuu itselleen. Näin ollen suora l , joka kulkee origon O kautta, kuvautuu itselleen.

□

Lemma 3. *Inversio origokeskeisen ympyrän suhteen kuvaa*

1. *ympyrän, joka ei kulje origon kautta, ympyräksi ja*
2. *origon kautta kulkevan ympyrän suoraksi, joka ei kulje origon kautta.*

Todistus. Valitaan inversioympyrän säteen pituudeksi yksi. Tällöin inversioympyrä on yksikköympyrä \mathcal{C} .

Olkoon C jokin mielivaltainen ympyrä, jonka keskipiste on (a, b) ja säde r . Tällöin sen yhtälö on muotoa

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \quad (3)$$

missä vakio $c = a^2 + b^2 - r^2$.

Lemman 1 mukaan inversiossa piste (x, y) kuvautuu pisteeksi $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$. Tällöin inversion jälkeen ympyrän C x- ja y-koordinaatit ovat muotoa $\frac{x}{x^2+y^2}$ ja $\frac{y}{x^2+y^2}$. Kun nämä sijoitetaan yhtälöön (3), saadaan se muotoon

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 - \frac{2ax}{x^2 + y^2} - \frac{2by}{x^2 + y^2} + c = 0.$$

Lasketaan kaksi ensimmäistä termiä yhteen ja kerrotaan yhtälö termillä $(x^2 + y^2)$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2ax}{x^2 + y^2} - \frac{2by}{x^2 + y^2} + c &= 0 \\ \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2ax}{x^2 + y^2} - \frac{2by}{x^2 + y^2} + c &= 0 & \parallel \cdot (x^2 + y^2) \\ 1 - 2ax - 2by + c(x^2 + y^2) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Saatu yhtälö on joko suoran tai ympyrän yhtälö riippuen siitä, kulkeeko ympyrä C pisteen O kautta. Käydään nämä kaksi tapausta läpi erikseen.

1. Oletetaan, että ympyrä C ei kulje pisteen O kautta. Tällöin vakio $c \neq 0$ ja yhtälö (4) voidaan jakaa vakiolla c , jolloin se tulee muotoon

$$x^2 + y^2 - \frac{2a}{c}x - \frac{2b}{c}y + \frac{1}{c} = 0.$$

Näin ollen ympyrä, joka ei kulje pisteen O kautta, kuvautuu ympyräksi.

2. Oletetaan, että ympyrä C kulkee pisteen O kautta. Tällöin vakio $c = 0$ ja yhtälö (4) tulee muotoon

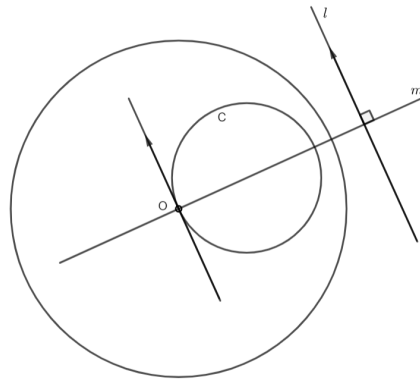
$$1 - 2ax - 2by = 0.$$

Näin ollen ympyrä, joka kulkee pisteen O kautta, kuvautuu suoraksi, joka ei kulje pisteen O kautta.

□

Nyt kun tiedetään, millaisiksi ympyrät ja suorat kuvautuvat, voidaan tarkemmin tutkia inversion ominaisuuksia.

Lemma 4 (Symmetrialemma). *Olkoon l suora, joka ei kulje inversiokeskuksen O kautta. Tällöin suora l kuvautuu inversiossa ympyräksi C , jonka tangenti pisteessä O on yhdensuuntainen suoran l kanssa.*



Kuva 5: Suora l ja ympyrän tangenti ovat yhdensuuntaisia.

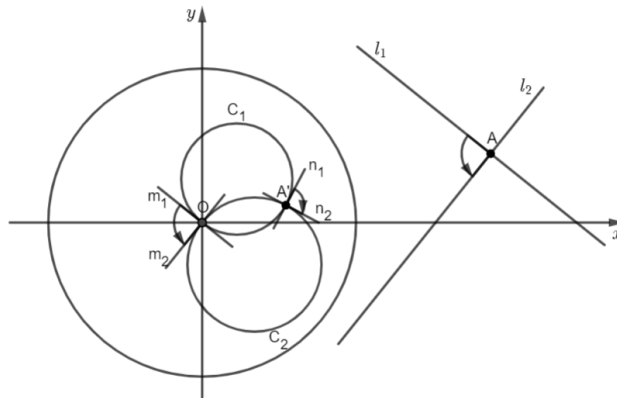
Todistus. Olkoon m suora, joka kulkee pisteen O kautta ja on kohtisuorassa suoraa l vastaan. Tällöin suora l on symmetrinen suoran m suhteen, joka on inversiorympyrän halkaisija. Olkoon piste P jokin suoran l piste ja P' sen inversiokuva. Olkoon piste Q pisteen P peilikuva suoran m suhteen ja piste Q' pisteen Q inversiokuva. Koska pisteet P ja Q sijaitsevat yhtä kaukana inversiokeskuksesta O , niin yhtälön (1) mukaan pisteet P' ja Q' sijaitsevat myös yhtä kaukana pisteestä O . Koska nämä pisteet ovat peilikuvia suoran m suhteen, ne sijaitsevat yhtä kaukana siitä. Näin ollen suoran l pisteet kuvautuvat symmetrisesti suoran m suhteen, jolloin ympyrä

C on symmetrinen suoran m suhteen. Tällöin pisteen O kautta piirretty ympyrän C tangentti on yhdensuuntainen suoran l kanssa. Tämä kuvio on esitetty Kuvassa 5. \square

Määritelmä 2. Olkoon c_1 ja c_2 kaksi käyrää, jotka leikkaavat toisensa pisteessä A . Olkoon l_1 käyrän c_1 tangentti pisteessä A ja l_2 käyrän c_2 tangentti pisteessä A . Tällöin käyrien välinen kulma saadaan tangenttien välisestä kulmasta.

Seuraava lemma tutkii, mitä inversiossa tapahtuu ympyröiden kaarien väliselle kulmalle. Tämän osoittamiseksi tarvitaan edellä olevaa määritelmää sekä symmetrialemmaa.

Lemma 5. *Minkä tahansa ympyrän inversio säilyttää kaarien välisen kulman suuruuden, mutta vaihtaa suunnan.*



Kuva 6: Inversio säilyttää kulmien suuruuden.

Todistus. Oletetaan, että suorat l_1 ja l_2 leikkaavat pisteessä A , joka ei sijaitse inversiokeskuksessa O . Oletetaan lisäksi, että kumpikaan suorista ei kulje pisteen O kautta, jolloin inversiossa suora l_1 kuvautuu ympyräksi C_1 ja suora l_2 kuvautuu ympyräksi C_2 . Molemmat ympyrät kulkevat pisteen O kautta, mutta piste O ei sisälly kumpaankaan ympyrään. Nämä ympyrät leikkaavat toisensa myös pisteessä A' , joka on pisteen A kuva. Tarkoituksena on saada vertailtua ympyröiden C_1 ja C_2 välistä kulmaa pisteessä A' . Sitä ennen on vertailtava näiden ympyröiden kulmia pisteessä O .

Lemman 4 mukaan suora l_1 on yhdensuuntainen ympyrän C_1 pisteen O kautta piirretyn tangentin m_1 kanssa. Vastaavasti suora l_2 on yhdensuuntainen ympyrän C_2 pisteen O kautta kulkevan tangentin m_2 kanssa. Tällöin tangenttien m_1 ja m_2 välisen kulman tulee olla suuruudeltaan ja suunnaltaan sama kuin suorien l_1 ja l_2 välinen kulma. Tämä on esitetty Kuvassa 6, jossa näkyvät nämä tangentit sekä ympyröiden inversioiden kuvat.

Kun ympyröiden C_1 ja C_2 keskipisteiden kautta kulkevan suoran suhteen peilataan piste O ja tangentit m_1 ja m_2 , saadaan piste A' ja tangentit n_1 ja n_2 . Koska

peilaus säilyttää kulmien suuruuden, mutta vaihtaa suunnan, voidaan päätellä, että tangenttien n_1 ja n_2 välinen kulma on suuruudeltaan sama kuin suorien m_1 ja m_2 välinen kulma, mutta vastakkaissuuntainen. Näin ollen ympyröiden C_1 ja C_2 välisen kulman suuruus pisteessä A' on sama kuin suorien l_1 ja l_2 välisen kulman suuruus pisteessä A , mutta vastakkaissuuntainen. \square

3.2 Laajennettu kompleksitaso

Tässä luvussa esitellään ensin isometrioiden (siirto, peilaus, kierto) ja skaalauksen yhtälöt. Tämän jälkeen esitellään kaksi funktiota, jotka muodostuvat edellisten yhtälöistä sekä konjugaatin ottamisesta. Luvun lopussa käydään läpi laajennettua kompleksitasoa sekä inversiota siinä. Jatkossa reaalitasoa \mathbb{R}^2 ja kompleksitasoa \mathbb{C} tullaan käyttämään sekaisin riippuen siitä, kumpi tasoista on milloinkin kätevämpi.

Siirtoa vastaa funktio

$$t(z) = z + c \quad (z \in \mathbb{C}), \quad (5)$$

missä $c = a + ib$. Tämä vastaa siirtoa vektorin (a, b) suuntaisesti.

Peilausta x-akselin suhteen vastaa funktio

$$t(z) = \bar{z} \quad (z \in \mathbb{C}). \quad (6)$$

Kiertoa origon ympäri vastaa funktio

$$t(z) = az \quad (z \in \mathbb{C}), \quad (7)$$

missä $|a| = 1$. Koska $|a| = 1$, voidaan kirjoittaa $a = \cos \theta_0 + i \sin \theta_0$, missä $\theta_0 = \text{Arg } a$.

Skaalausta vastaa funktio

$$t(z) = kz \quad (z \in \mathbb{C}),$$

missä k on reaalinen ja positiivinen. Tämä funktio kertoo jokaisen pituuden itseisarvon arvolla k .

Näistä tullaan käyttämään hyperbolisia kuvauksia määriteltäessä nimiä euklidinen kierto, euklidinen peilaus ja euklidinen siirto erottamaan ne vastaavista hyperbolisista kuvauksista. Käydään läpi kaksi funktiota, lineaarinen funktio sekä käänteislukufunktio. Nämä funktiot koostuvat isometrioista, skaalauksesta tai konjugaatin ottamisesta.

Lineaarista funktiota esittää funktio

$$t(z) = az + b \quad (z \in \mathbb{C}),$$

missä $a, b \in \mathbb{C}$ ja $a \neq 0$. Lineaarinen funktio voidaan esittää yhdistettynä kuvauksena $t_2 \circ t_1$, missä t_1 on skaalaus $t_1(z) = |a|z$ ja t_2 on isometria $t_2(z) = \frac{a}{|a|}z + b$.

Käänteislukufunktion esittää funktio

$$t(z) = \frac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{C} - \{O\}).$$

Tämä voidaan esittää yhdistettynä kuvauksena $t_2 \circ t_1$, missä t_1 on inversio $t_1(z) = \frac{1}{z}$ ja $t_2(z) = \bar{z}$ ottaa konjugaatin luvusta z .

Lemma 6. Jokainen kompleksitason isometria voidaan esittää funktiona

$$t(z) = az + b \text{ tai } t(z) = a\bar{z} + b,$$

missä $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$. Kääntäen kaikki tällaiset funktiot esittävät isometrioita.

Todistus. Isometrioita ovat myös yhtälöistä (5), (6) ja (7) muodostetut yhdistetyt kuvaukset. Tällöin funktiot $t(z) = az + b$ ja $t(z) = a\bar{z} + b$ ovat kiertojen, peilausten ja siirtojen yhdistettyinä kuvauksina isometrioita.

Olkoon t kompleksitason isometria ja olkoon $t(0) = b$ sekä $t(1) = c$. Jos merkitään $a = c - b$, niin $|a|$ on pisteiden $t(0)$ ja $t(1)$ välinen etäisyys. Koska t on isometria, niin $|a| = 1$.

Olkoon s isometria ja $s(z) = az + b$. Tällöin

$$s(0) = b = t(0) \text{ ja } s(1) = a + b = c = t(1).$$

Yhdistetty kuvaus $s^{-1} \circ t$ on isometria, joka pitää paikallaan pisteet 0 ja 1. Koska se on isometria, se pitää myös kaikki x-akselin pisteet paikallaan. Tällöin yhdistetty kuvaus $s^{-1} \circ t$ on joko identiteettikuvaus tai peilaus x-akselin suhteen. Jos kuvaus on identiteettikuvaus, niin $s^{-1} \circ t(z) = z$, jolloin $t(z) = s(z) = az + b$. Jos kuvaus on peilaus, niin $s^{-1} \circ t(z) = \bar{z}$, jolloin $t(z) = s(z) = a\bar{z} + b$. \square

Seuraava todistus osoittaa, että isometrioista kierto ja siirto voidaan esittää kahden peilausten yhdistettynä kuvauksena. Tällöin saadaan sekä kierto, siirto sekä peilaus esitettyä peilausten yhdistettynä kuvauksina.

Lemma 7. Kierto ja siirto voidaan esittää kahden peilausten yhdistettynä kuvauksena.

Todistus. Kierto origon O ympäri voidaan esittää kahden peilausten yhdistettynä kuvauksena, missä molemmat suorat, joiden suhteen peilataan, kulkevat origon O kautta. Tässä suorien välinen kulma on puolet halutusta kulmasta.

Samoin siirto voidaan esittää kahden peilausten yhdistettynä kuvauksena. Siinä suorat, joiden suhteen peilataan, ovat kohtisuorassa siirron suuntaan nähden. Näiden suorien välinen etäisyys on puolet halutusta siirron matkasta. \square

Seuraava lemma antaa tarkemman yhtälön inversiolle isometrioiden ja skaalauksen avulla.

Lemma 8. Inversio ympyrän C suhteen voidaan kuvata kompleksiavaruudessa kuvauksella

$$t(z) = \frac{r^2}{z - c} + c \quad (z \in \mathbb{C} - \{c\}),$$

missä r on ympyrän C säde ja $c = a + ib$ ympyrän keskipiste (a, b) .

Todistus. Ensin käydään läpi tapaus, missä C on yksikköympyrä. Tällöin lemmän 1 mukaan inversiokuvauksessa piste (x, y) kuvautuu pisteeksi $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Kompleksiluvun $z = a + ib$ itseisarvo $|z|$ toteuttaa yhtälön

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}.$$

Pisteen $z = x + iy$ inversion kuva on tällöin piste

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2} &= \frac{x + iy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Seuraavaksi käydään läpi tapaus, jossa ympyrän C säde on r ja keskipiste (a, b) . Tällöin inversio ympyrän C suhteen voidaan esittää yhdistettynä kuvauksena $t = t_3 \circ t_2 \circ t_1$, missä

$t_1(z) = \frac{z-c}{r}$ vastaa siirtoa ja skaalausta, jotka kuvaavat ympyrän C yksikköympyräksi,

$t_2(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ vastaa inversiota yksikköympyrässä ja

$t_3(z) = rz + c$ on kuvauksen t_1 käänteiskuvaus, joka kuvaa yksikköympyrän takaisin ympyräksi C .

Tällöin

$$t(z) = t_3 \circ t_2 \circ t_1(z) = \frac{r^2}{z - c} + c.$$

□

Huomautus 1. Jos lemmän 8 tapauksessa ympyrä C on yksikköympyrä, niin yhtälössä $r = 1$ ja $c = 0$, jolloin inversion yhtälö supistuu muotoon

$$t(z) = \frac{1}{\bar{z}} \quad (\bar{z} \in \mathbb{C} - \{O\}).$$

Määritellään seuraavaksi laajennettu kompleksitaso. Tätä laajennettua kompleksitasoa tarvitaan Möbius-kuvauksissa, joiden avulla saadaan muodostettua kaavat hyperbolisille kuvauksille.

Määritelmä 3. Laajennettu taso on unioni euklidisesta tasosta \mathbb{R}^2 ja äärettömyyspisteestä ∞ . Kompleksitasosta \mathbb{C} laajennettua tasoa kutsutaan laajennetuksi kompleksitasoksi ja sitä merkitään symbolilla $\hat{\mathbb{C}}$, missä $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Määritelmä 4. Laajennetun tason suora on muotoa $l \cup \{\infty\}$ oleva joukko, missä l on tason \mathbb{R}^2 suora.

Käytetään laajennetussa kompleksitasossa $\hat{\mathbb{C}}$ tapahtuvasta inversiofunktiosta merkintää \hat{t} . Määritellään seuraavaksi inversio laajennetussa kompleksitasossa $\hat{\mathbb{C}}$.

Määritelmä 5. Olkoon C ympyrä tai suora laajennetussa kompleksitasossa.

- (a) Jos C on ympyrä, jolla on säde r ja origo O , niin inversiota ympyrän C suhteen kuvaa funktio

$$\hat{t}(A) = \begin{cases} A' \text{ (määritelmän 1 mukainen),} & \text{jos } A \in \mathbb{C} - \{O\} \\ \infty, & \text{jos } A = O \\ O, & \text{jos } A = \infty. \end{cases}$$

- (b) Jos C on suora $l \cup \{\infty\}$, niin inversiota suoran C suhteen kuvaa funktio

$$\hat{t}(A) = \begin{cases} \text{peilaus suoran } l \text{ suhteen,} & \text{jos } A \in \mathbb{C} \\ \infty, & \text{jos } A = \infty. \end{cases}$$

Lemma 9. *Laajennetussa tasossa inversio kuvaa ympyrän ja suoran ympyräksi tai suoraksi.*

Todistus. Lemman 2 mukaan origokeskeisen ympyrän suhteen suora, joka ei kulje origon kautta, kuvautuu inversiossa ympyräksi. Vastaavasti suora, joka kulkee origon kautta, kuvautuu inversiossa itselleen. Tällöin origo kuvautuu äärettömyyspisteeksi ja äärettömyyspiste origoksi.

Lemman 3 mukaan origokeskeisen ympyrän suhteen ympyrä, joka ei kulje origon kautta, kuvautuu ympyräksi. Vastaavasti ympyrä, joka kulkee origon kautta, kuvautuu suoraksi, joka ei kulje origon kautta. Myös tässä äärettömyyspiste kuvautuu origoon.

Määritelmän 5 perusteella suoran $l \cup \{\infty\}$ suhteen suora kuvautuu aina suoraksi ja ympyrä ympyräksi. Näissä tapauksissa ei ole merkitystä sillä kulkeeko suora tai ympyrä origon kautta. \square

Määritellään seuraavaksi lineaarisen funktion ja käänteislukufunktion yhtälöt laajennetussa kompleksitasossa $\hat{\mathbb{C}}$. Tämän jälkeen osoitetaan, että nämä funktiot voidaan esittää inversioiden avulla.

Määritelmä 6. (a) Funktiota $\hat{t} : \hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$, missä

$$\hat{t}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{jos } z \in \mathbb{C} - \{O\}, \\ \infty, & \text{jos } z = 0 \\ 0, & \text{jos } z = \infty, \end{cases}$$

kutsutaan laajennetuksi käänteislukufunktioksi.

(b) Funktiota $\hat{t} : \hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$, missä

$$\hat{t}(z) = \begin{cases} az + b, & \text{jos } z \in \mathbb{C} \\ \infty, & \text{jos } z = \infty, \end{cases}$$

missä $a, b \in \mathbb{C}$ ja $a \neq 0$, kutsutaan laajennetuksi lineaariseksi funktioksi.

Lemma 10. *Laajennettu käänteislukufunktio ja laajennettu lineaarinen funktio voidaan esittää inversioiden yhdistettynä kuvauksena.*

Todistus. Käänteislukufunktio voidaan esittää yhdistettynä kuvauksena $t = t_2 \circ t_1$, missä t_1 on inversio yksikkökierokossa C ja t_2 ottaa luvusta konjugaatin.

Jokainen lineaarinen funktio $t \circ s$ on skaalauksen s ja isometrian t yhdistetty kuvaus. Koska isometria on lemmän 7 mukaan peilauksien yhdistetty kuvaus, niin lineaarinen funktio voidaan esittää yhdistettynä kuvauksena $r_n \circ \dots \circ r_2 \circ r_1 \circ s$, missä r_i ($i = 1, \dots, n$) on peilaus.

Ainoa ero lineaarisen ja laajennetun lineaarisen funktion välillä on äärettömyyspiste ∞ . Koska tämä piste kuvautuu itselleen, laajennettu lineaarinen funktio on yhdistetty kuvaus, joka koostuu skaalauksesta ja äärellisestä määrästä peilauksia, jotka kiinnittävät äärettömyyspisteen ∞ . Peilaus, joka kiinnittää äärettömyyspisteen ∞ , on inversio suoran $l \cup \{\infty\}$ suhteen.

Todistetaan, että skaalaus on kahden inversion yhdistetty kuvaus $\hat{t} = \hat{t}_1 \circ \hat{t}_2$, missä \hat{t}_1 on inversio yksikköympyrän suhteen ja \hat{t}_2 inversio origokeskeisen \sqrt{k} -säteisen ympyrän suhteen. Tällöin \hat{t}_1 ja \hat{t}_2 ovat

$$\hat{t}_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{z}}, & \text{jos } z \in \mathbb{C} - \{O\} \\ \infty, & \text{jos } z = 0 \\ 0, & \text{jos } z = \infty \end{cases} \quad \text{ja} \quad \hat{t}_2(z) = \begin{cases} \frac{k}{\bar{z}}, & \text{jos } z \in \mathbb{C} - \{O\} \\ 0, & \text{jos } z = \infty \\ \infty, & \text{jos } z = 0. \end{cases}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \hat{t}(\infty) &= \hat{t}_2 \circ \hat{t}_1(\infty) = \hat{t}_2(0) = \infty \text{ ja} \\ \hat{t}(0) &= \hat{t}_2 \circ \hat{t}_1(0) = \hat{t}_2(\infty) = 0. \end{aligned}$$

Muilla arvoilla saadaan

$$\hat{t}(z) = t_2 \circ t_1(z) = t_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{k}{\frac{1}{\bar{z}}} = kz.$$

Näin ollen skaalaus on inversioiden yhdistetty kuvaus.

Todistetaan, että käänteislukufunktio on inversion ja konjugaatin ottamisen yhdistetty kuvaus $\hat{t} = \hat{t}_1 \circ \hat{t}_2$, missä \hat{t}_1 ja \hat{t}_2 ovat

$$\hat{t}_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{z}}, & \text{jos } z \in \mathbb{C} - \{O\} \\ \infty, & \text{jos } z = 0 \\ 0, & \text{jos } z = \infty \end{cases} \quad \text{ja} \quad \hat{t}_2 = \begin{cases} \bar{z}, & \text{jos } z \in \mathbb{C} \\ \infty, & \text{jos } z = \infty. \end{cases}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \hat{t}(\infty) &= \hat{t}_2 \circ \hat{t}_1(\infty) = \hat{t}_2(0) = 0 \text{ ja} \\ \hat{t}(0) &= \hat{t}_2 \circ \hat{t}_1(0) = \hat{t}_2(\infty) = \infty. \end{aligned}$$

Muilla arvoilla $z \in \mathbb{C} - \{O\}$ saadaan

$$\hat{t}(z) = t_2 \circ t_1(z) = t_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \frac{1}{z}.$$

Näin ollen laajennettu käänteislukufunktio on inversion ja konjugaatin ottamisen yhdistetty kuvaus. \square

Määritelmä 7. Kuvausta $\hat{t} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ kutsutaan inversiiviseksi kuvaukseksi, jos se voidaan esittää inversioiden yhdistettynä kuvauksena.

4 Poincarén kiekkomalli

4.1 Kiekkomalli ja hyperbolinen suora

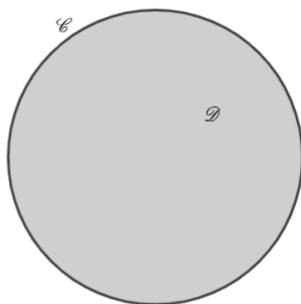
Poincarén kiekkomallissa hyperbolinen geometria määritellään koostuvan niistä pisteistä, jotka sijaitsevat yksikkökiekossa

$$\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Tässä keskipiste sijaitsee origossa ja sitä merkitään kirjaimella O . Jotta kiekon alue olisi helpompi hahmottaa, käytetään rajana kehää

$$\mathcal{C} = \{z : |z| = 1\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\},$$

jonka pisteet eivät kuulu hyperboliseen geometriaan. Sekä kiekko \mathcal{D} että kehä \mathcal{C} ovat esitetty Kuvassa 7.



Kuva 7: Kiekko \mathcal{D} ja kehä \mathcal{C} .

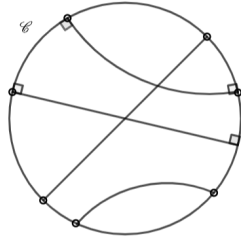
Seuraavaksi määritellään hyperbolisen geometrian suorat, joita on kahden tyyppisiä: euklidisen ympyrän kaaresta ja euklidisestä suorasta koostuvat. Tämä eroaa siis olennaisesti euklidisestä geometriasta, jossa kaikki suorat ovat saman tyyppisiä.

Määritelmä 8. Hyperbolinen suora on kiekossa \mathcal{D} sellainen euklidisen ympyrän kaaren osa tai euklidinen suora, joka leikkaa kiekon kehän \mathcal{C} suorassa kulmassa.

Euklidisestä suoran osasta muodostuva hyperbolinen suora voi olla ainoastaan kiekon \mathcal{D} halkaisija, sillä se on ainoa suora, joka voi kohdata kehän \mathcal{C} suorassa kulmassa. Euklidisen ympyrän kaaren osa ei voi kulkea origon kautta. Jos tällainen hyperbolinen suora leikkaisi kehän \mathcal{C} pisteessä P , niin hyperbolisen suoran l tangentti l' pisteessä P olisi kiekon \mathcal{D} säde ja kuljisi näin ollen origon kautta. Koska hyperbolinen suora l sijaitsee tangentin l' toisella puolella, se ei kohtaa sitä missään muussa pisteessä kuin pisteessä P . Näin ollen se ei voi kulkea origon kautta. Hyperbolisista suorista voidaan käyttää myös nimitystä geodeesi [17].

Hyperbolisen suoran ja kiekon kehän \mathcal{C} leikkauspisteitä kutsutaan reunapisteiksi. Nämä reunapisteet eivät kuitenkaan kuulu hyperboliseen suoraan, sillä ne eivät ole kiekon \mathcal{D} pisteitä. Kuvaan 8 on havainnollistettu nämä kaksi erityyppistä hyperbolista suoraa. Jatkossa reunapisteitä ei merkitä palloilla.

Jotta voidaan muodostaa hyperbolisille suorille yhtälöt, täytyy määritellä, milloin kaksi ympyrää leikkaavat toisensa kohtisuorasti.



Kuva 8: Hyperbolisia suoria.

Määritelmä 9. Kaksi toisensa leikkaavaa ympyrää ovat ortogonaaliset, jos ne leikkaavat toisensa suorassa kulmassa. [15, s. 353]

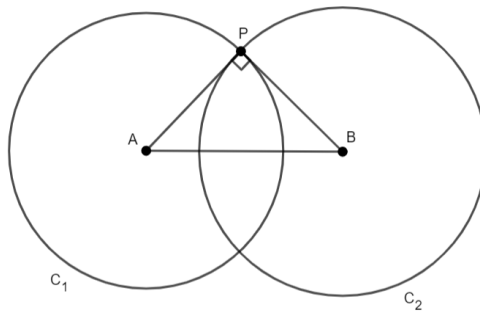
Seuraava lemma antaa tavan tutkia, milloin kaksi ympyrää leikkaavat toisensa suorassa kulmassa. Todistuksessa käytetään ympyrän yhtälön $x^2 + y^2 + fx + gy + h = 0$ muotoa $(x + \frac{1}{2}f)^2 + (y + \frac{1}{2}g)^2 = \frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{4}g^2 - h$.

Lemma 11. Kaksi toisensa leikkaavaa ympyrää C_1 ja C_2 , joiden yhtälöt ovat muotoa

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + f_1x + g_1y + h_1 &= 0 \text{ ja} \\ x^2 + y^2 + f_2x + g_2y + h_2 &= 0, \end{aligned}$$

ovat ortogonaaliset jos ja vain jos

$$f_1f_2 + g_1g_2 = 2(h_1 + h_2).$$



Kuva 9: Ortogonaaliset ympyrät.

Todistus. Ympyrällä C_1 on keskipiste $A = (-\frac{1}{2}f_1, -\frac{1}{2}g_1)$ ja säde $r_1 = \sqrt{\frac{1}{4}f_1^2 + \frac{1}{4}g_1^2 - h_1}$. Ympyrällä C_2 on vastaavasti keskipiste $B = (-\frac{1}{2}f_2, -\frac{1}{2}g_2)$ ja säde $\sqrt{\frac{1}{4}f_2^2 + \frac{1}{4}g_2^2 - h_2}$.

Olkoon P ympyröiden C_1 ja C_2 leikkauspiste. Jos ympyrät leikkaavat toisensa suorassa kulmassa, niin pisteiden A , B ja P välille muodostuu suorakulmainen kolmio $\triangle ABP$, jossa suora kulma sijaitsee pisteessä P . Tämä ympyröiden välillä oleva kolmio on esitetty Kuvassa 9.

Pythagoraan lauseella saadaan kolmion $\triangle ABP$ sivuille yhtälö

$$AP^2 + BP^2 = AB^2. \quad (8)$$

Käytetään tätä yhtälöä käänteisesti: jos tämä Pythagoraan lauseen yhtälö pitää paikkaansa, niin kolmio $\triangle ABP$ on suorakulmainen kolmio ja ympyrät leikkaavat toisensa suorassa kulmassa.

Säteiden AP ja BP neliöt ovat

$$\begin{aligned} AP^2 &= r_1^2 = \frac{1}{4}f_1^2 + \frac{1}{4}g_1^2 - h_1 \text{ ja} \\ BP^2 &= r_2^2 = \frac{1}{4}f_2^2 + \frac{1}{4}g_2^2 - h_2, \end{aligned}$$

ja pisteiden A ja B välisen etäisyyden neliö on

$$\begin{aligned} AB^2 &= \left(\frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}g_1 - \frac{1}{2}g_2\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4}f_1^2 - \frac{1}{2}f_1f_2 + \frac{1}{4}f_2^2\right) + \left(\frac{1}{4}g_1^2 - \frac{1}{2}g_1g_2 + \frac{1}{4}g_2^2\right). \end{aligned}$$

Kun näiden yhtälöiden lausekkeet sijoitetaan yhtälöön (8), saadaan yhtälö

$$-h_1 - h_2 = -\frac{1}{2}f_1f_2 - \frac{1}{2}g_1g_2,$$

joka voidaan esittää myös muodossa

$$f_1f_2 + g_1g_2 = 2(h_1 + h_2).$$

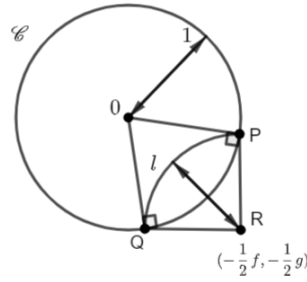
□

Koska hyperboliset suorat kohtaavat kiekon kehän \mathcal{C} kohtisuorasti, niin edellä saatua lemmaa hyödyntämällä saadaan määriteltyä hyperbolisten suorien yhtälöt. Seuraavaksi osoitetaan, millaiset yhtälöt ovat niillä euklidisilla ympyröillä ja suorilla, joiden osia hyperboliset suora ovat.

Lemma 12. *Hyperbolisen suoran l yhtälö on joko muotoa $ax + by = 0$, missä $a \neq 0$ tai $b \neq 0$, tai $x^2 + y^2 + fx + gy + 1 = 0$, missä $f^2 + g^2 > 4$.*

Todistus. Jos hyperbolinen suora l on osa euklidista suoraa, se kulkee origon O kautta. Tällöin sen yhtälö on muotoa $ax + by = 0$, missä $a \neq 0$ tai $b \neq 0$.

Toinen vaihtoehto on, että hyperbolinen suora l on osa euklidisen ympyrän C kaarta. Tällöin ympyrän C yhtälö on muotoa $x^2 + y^2 + fx + gy + h = 0$ jollain reaalityyppisillä f , g ja h . Kehän \mathcal{C} yhtälö on $x^2 + y^2 - 1 = 0$, sillä se on yksikköympyrä. Koska hyperbolinen suora l on kohtisuorassa kiekon kehän \mathcal{C} vastaan, lemmän 11



Kuva 10: Euklidisen ympyrän kaaresta muodostuneen hyperbolisen suoran l keskipisteen tulee sijaita kehän \mathcal{C} ulkopuolella.

mukaan ympyröiden C ja \mathcal{C} kehät leikkaavat toisensa suorassa kulmassa jos ja vain jos

$$f \cdot 0 + g \cdot 0 = 2(h + (-1)).$$

Tämä yhtälö on tosi silloin ja vain silloin kun $h = 1$. Tällöin ympyrän C yhtälö on muotoa

$$x^2 + y^2 + fx + gy + 1 = 0.$$

Ympyrän yhtälö voidaan esittää myös keskipistemuodossa $(x + \frac{1}{2}f)^2 + (y + \frac{1}{2}g)^2 = \frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{4}g^2 - 1$. Tästä muodosta nähdään, että ympyrän keskipiste on $(-\frac{1}{2}f, -\frac{1}{2}g)$ ja säde $\sqrt{\frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{4}g^2 - 1}$. Koska ympyrä C leikkaa kehän \mathcal{C} kohtisuorasti, tulee ympyrän C keskipisteen sijaita kehän \mathcal{C} ulkopuolella. Tämä on nähtävissä Kuvassa 10. Jotta ympyrän C keskipiste sijaitsee ympyrän kehän \mathcal{C} ulkopuolella, niin etäisyys kiekon \mathcal{D} keskipisteestä O tulee olla suurempi kuin 1. Tästä saadaan muodostettua ympyrän C ja kiekon kehän \mathcal{C} keskipisteiden väliselle pituudelle sekä kiekon \mathcal{D} säteelle epäyhtälö

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(-\frac{1}{2}f - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}g - 0\right)^2} &> 1 && \parallel (\)^2 \\ \frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{4}g^2 &> 1 && \parallel \cdot 4 \\ f^2 + g^2 &> 4. \end{aligned}$$

Enää täytyy osoittaa, että osa ympyrän C kehästä sijaitsee kiekossa \mathcal{D} . Tämä tapahtuu silloin ja vain silloin kun ympyrän C ja kiekon \mathcal{D} keskipisteiden välinen etäisyys on pienempi kuin kiekon \mathcal{D} ja ympyrän C säteiden summa, eli kun

$$1 + \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{4}g^2 - 1} > \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{4}g^2}. \quad (9)$$

Koska ympyrän C keskipiste sijaitsee kiekon kehän \mathcal{C} ulkopuolella, näiden pisteiden välinen etäisyys on suurempi kuin 1. Merkitään $\frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{4}g^2 = t$. Tällöin saadaan epäyhtälö (9) muotoon

$$1 + \sqrt{t - 1} > \sqrt{t}, \text{ kun } t > 1. \quad (10)$$

Jotta saadaan selvitettyä, pitääkö tämä yhtälö paikkaansa, muodostetaan siitä funktio

$$F(t) = 1 + \sqrt{t-1} - \sqrt{t}.$$

Tämän funktion arvo pitää olla kaikilla $t > 1$ arvoilla suurempi kuin nolla, jotta epäyhtälö toteutuu. Tämä saadaan selvittämällä funktion arvo kohdassa $t = 1$. Mikäli se on suurempi tai yhtä suuri kuin 0 ja muuttujan $t > 1$ muilla arvoilla funktion arvot ovat positiivisia, niin epäyhtälö toteutuu.

Lasketaan ensin funktion arvo kohdassa $t = 1$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 + \sqrt{0} - \sqrt{1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jotta saadaan selvitettyä, onko funktion arvo aina positiivinen, tutkitaan funktion derivaattaa. Mikäli funktion derivaatta on suurempi kuin nolla kaikilla muuttujan t arvoilla, epäyhtälö (10) on tosi. Funktion derivaataksi saadaan

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t-1}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t-1}}{2\sqrt{t-1}\sqrt{t}} > 0. \end{aligned}$$

Näin ollen epäyhtälö toteutuu, ja osa ympyrän C kehästä sijaitsee kiekossa \mathcal{D} . \square

Hyperbolisen geometrian merkittävä ero euklidiseen geometriaan tulee esille yhdensuuntaisissa suorissa. Kun euklidisessa geometriassa mielivaltaisen pisteen kautta kulkevia yhdensuuntaisia suoria on olemassa vain yksi, niin hyperbolisessa geometriassa tällaisia mielivaltaisen pisteen kautta kulkevia yhdensuuntaisia suoria on enemmän kuin yksi. Määritellään seuraavaksi, mitä tarkoittaa yhdensuuntaisuus hyperbolisessa geometriassa.

Määritelmä 10. Kaksi hyperbolista suoraa, jotka eivät leikkaa toisiaan kiekossa \mathcal{D} , ovat

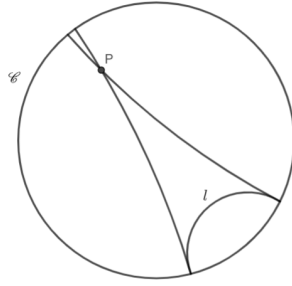
yhdensuuntaisia, jos nämä suorat sivuavat toisiaan kiekon kehällä \mathcal{C} ja

ultrayhdensuuntaisia, jos nämä suorat eivät edes sivua toisiaan kiekon kehällä \mathcal{C} .

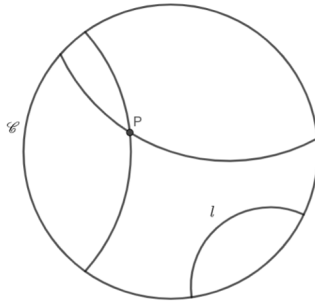
Hyperbolisella suoralla l on olemassa kaksi yhdensuuntaista hyperbolista suoraa, jotka kulkevat mielivaltaisen pisteen P kautta. Kuvassa 11 on esitetty nämä pisteen P kautta kulkevat hyperbolisen suoran l kanssa yhdensuuntaiset suorat.

Hyperboliselle suoralle l taas on olemassa ääretön määrä ultrayhdensuuntaisia suoria, jotka kulkevat pisteen P kautta. Kuvassa 12 on esitetty pari tällaista ultrayhdensuuntaista suoraa.

Hyperbolisessa geometriassa osa hyperbolisista suorista vastaa euklidisen ympyrän kaaria. Näin ollen tällaisten hyperbolisten suorien välisen kulman määrittämiseksi voidaan soveltaa määritelmää 2, jonka mukaan kaarien välisen kulman suuruus



Kuva 11: Yhdensuuntaiset suorat suoralle l .



Kuva 12: Ultrayhdensuuntaisia suorilla l .

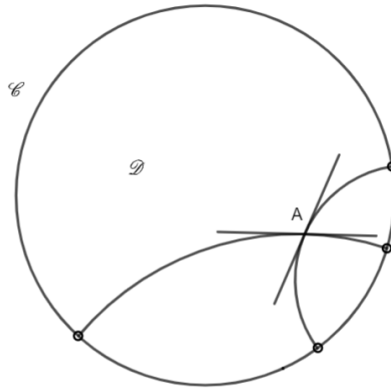
pisteessä $A \in \mathcal{D}$ on sama kuin kaarien tangenttien välisen euklidisen geometrian kulman suuruus pisteessä A . Kaarien välinen kulma euklidisessa ja hyperbolisessa geometriassa määritetään siis samoin. Kuvassa 13 on esitetty hyperbolisten suorien välinen kulma tangenttien avulla.

Luvussa 3.1 määritettyjä inversion lemmoja voidaan hyödyntää hyperbolisessa geometriassa. Ensimmäiseksi hyödynnetään niitä tutkimalla, mitä tapahtuu kiekolle \mathcal{D} ja sen kehälle \mathcal{C} , kun ne peilataan euklidisen ympyrän kaaresta muodostuneen hyperbolisen suoran suhteen.

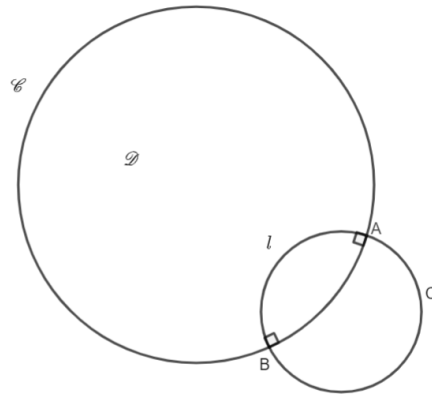
Lemma 13. *Olkoon l hyperbolinen suora, joka on osa euklidisen ympyrän C kaarta. Inversio ympyrän C suhteen kuvaa kehän \mathcal{C} itselleen kehäksi \mathcal{C} ja kiekon \mathcal{D} itselleen kiekoksi \mathcal{D} .*

Todistus. Oletetaan, että ympyrä C leikkaa kehän \mathcal{C} pisteissä A ja B . Tämä on havainnollistettu Kuvassa 14. Tällöin inversion määritelmästä seuraa, että pisteet A ja B kuvautuvat itselleen. Koska lemmän 5 mukaan inversio säilyttää kulmien suuruuden, kehä \mathcal{C} kuvautuu kehäksi, joka leikkaa ympyrän C suorassa kulmassa pisteissä A ja B . Tällaisia kehiä on olemassa vain yksi, kehä \mathcal{C} itse. Näin ollen inversio ympyrän C suhteen kuvaa kehän \mathcal{C} itselleen.

Koska kiekko \mathcal{D} sijaitsee kehän \mathcal{C} sisällä, se kuvautuu inversiossa joko kehän \mathcal{C} ulkopuolelle tai sisäpuolelle. Koska suoran l pisteet kuvautuvat inversiossa itselleen, niin kiekon \mathcal{D} täytyy kuvautua itselleen kiekoksi \mathcal{D} . \square



Kuva 13: Hyperbolisten suorien välinen kulma pisteessä A .



Kuva 14: Kiekkon \mathcal{D} ja kehän \mathcal{C} inversioiden kuvat.

4.2 Hyperbolisia kuvauksia

4.2.1 Hyperbolinen kuvaus inversiona

Tässä luvussa määritellään hyperbolisia kuvauksia inversion avulla. Aluksi esitellään hyperbolisen geometrian peilaus, kierto ja siirto. Tämän jälkeen määritellään kuvaus, joka siirtää mielivaltaisen kiekon \mathcal{D} pisteen origoon. Näitä tuloksia hyödynnetään, kun tutkitaan tarkemmin hyperbolisia suoria, esimerkiksi kuinka hyperbolista suoraa voidaan kuvata toiseksi ja kuinka kaksi pistettä määrittelevät hyperbolisen suoran.

Määritelmä 11. Hyperbolinen peilaus hyperbolisen suoran l suhteen on kiekkoon \mathcal{D} rajautuva inversio hyperbolisen suoran l muodostaman ympyrän suhteen tai euklidinen peilaus kiekon \mathcal{D} halkaisijan suhteen.

Olkoon r_1 hyperbolinen peilaus suoran l_1 suhteen ja r_2 hyperbolinen peilaus suoran l_2 suhteen. Näiden avulla saadaan määriteltä hyperbolinen kierto ja siirto.

Oletetaan, että hyperboliset suorat l_1 ja l_2 leikkaavat toisensa pisteessä A . Tällöin hyperbolisten peilausten yhdistetty kuvaus $r_2 \circ r_1$ jättää pisteen A paikalleen, mutta

siirtää kiekon \mathcal{D} kaikkia muita pisteitä pisteen A ympäri. Tätä yhdistettyä kuvausta kutsutaan **hyperboliseksi kierroksi**.

Oletetaan, että hyperboliset suorat l_1 ja l_2 ovat ultrayhdensuuntaisia, jolloin ne eivät leikkaa toisiaan. Tällöin hyperbolisten peilausten yhdistetty kuvaus $r_2 \circ r_1$ siirtää kaikkia kiekon \mathcal{D} pisteitä samaan suuntaan. Tätä hyperbolista kuvausta kutsutaan **hyperboliseksi siirroksi**.

Nämä hyperboliset kuvaukset eivät vastaa ominaisuuksiltaan tarkasti vastaavia euklidisia kuvauksia. Esimerkiksi euklidisessa geometriassa ei ole väliä kumman kahdesta siirrosta tekee ensin, sillä ne johtavat samaan loppupisteeseen. Hyperbolisessa geometriassa taas peräkkäin suoritettut siirrot voivat päätyä eri loppupisteeseen riippuen siitä, kumpi siirroista suoritetaan ensin.

Määritelmä 12. Kuvaus on hyperbolinen kuvaus, jos se voidaan esittää yhdistettynä kuvauksena, jossa on äärellinen määrä hyperbolisia peilauksia.

Huomautus 2. Hyperbolisella kuvauksella on aina olemassa käänteiskuvaus, sillä se koostuu inversiokuvauksista ja/tai euklidisista peilauksista, joilla molemmilla on olemassa käänteiskuvaukset.

Osoitetaan seuraavaksi, mitä hyperboliselle suoralle tapahtuu hyperbolisessa kuvauksessa.

Lause 1. *Hyperbolinen kuvaus kuvaa hyperbolisen suoran hyperboliseksi suoraksi ja säilyttää kulmien suuruudet.*

Todistus. Koska euklidinen peilaus ja inversio säilyttävät kulmien väliset suuruudet, hyperbolinen kuvaus, joka koostuu näiden kuvausten yhdistetyistä kuvaksista, säilyttää myös kulmien suuruudet. Euklidinen peilaus säilyttää kappaleen muodon ja lemموjen 2 ja 3 mukaan suora tai ympyrä kuvautuu inversiossa aina suoraksi tai ympyräksi. Lisäksi lemموjen 13 ja 5 mukaan kiekon kehä \mathcal{C} kuvautuu itselleen ja sen sekä hyperbolisten suorien väliset kulmien suuruudet säilyvät inversiossa. Näistä edellisistä seuraa, että hyperbolinen suora kuvautuu hyperboliseksi suoraksi. Myös äärellinen määrä tällaisia kuvauksia kuvaa hyperbolisen suoran hyperboliseksi suoraksi. \square

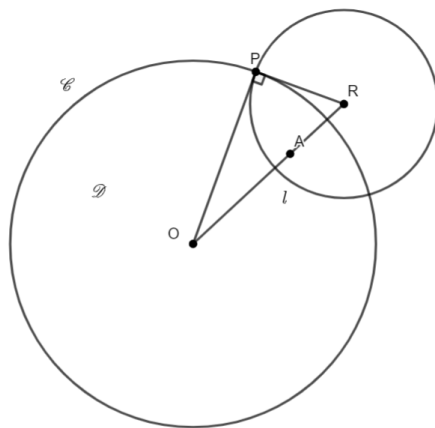
Seuraavaksi määritellään, miten saadaan jokin mielivaltainen piste kuvattua origoon. Origossa on se hyvä ominaisuus, että sen läpi kulkevat hyperboliset suorat ovat euklidisia suoria, jolloin niitä on helppo tutkia.

Lemma 14. *Olko A jokin kiekon \mathcal{D} piste, jolla $A \neq O$. On olemassa sellainen hyperbolinen suora l , että hyperbolinen peilaus suoran l suhteen kuvaa pisteen A pisteeksi O .*

Todistus. Olkoon C ympyrä, jonka keskipiste R sijaitsee puolisuoralla OA . Olkoon $OR = \frac{1}{OA}$ ja ympyrän C säde RP , missä P on kehän \mathcal{C} tangenttipiste.

Koska $OR = \frac{1}{OA}$, saadaan yhtälö $OR \cdot OA = 1$. Pisteiden P , O ja R välille voidaan piirtää suorakulmainen kolmio $\triangle RPO$, jossa suora kulma sijaitsee pisteessä P . Tällöin Pythagoraan lauseen mukaan

$$RP^2 + OP^2 = OR^2. \quad (11)$$



Kuva 15: Inversio suoran l suhteen kuvaa pisteen A pisteeksi O .

Tämä kuvio on esitetty Kuvassa 15. Janalla OA voidaan muodostaa yhtälö $OR - AR = OA$. Kun sijoitetaan tämä yhtälö yhtälöön $OR \cdot OA = 1$, saadaan

$$\begin{aligned}(OR - AR)OR &= 1 \\ OR^2 - OR \cdot AR &= 1.\end{aligned}$$

Sijoitetaan tähän yhtälöön yhtälö (11) sekä $OP = 1$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}RP^2 + OP^2 - AR \cdot OR &= 1 \\ AR \cdot OR &= RP^2.\end{aligned}$$

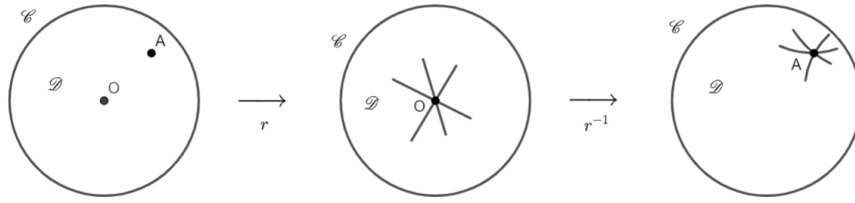
Näin ollen ympyrän C kehän osa, joka sijaitsee kiekossa \mathcal{D} on haluttu hyperbolinen suora l . □

Nyt tiedetään, että piste voidaan aina kuvata origoon. Tämän avulla saadaan esimerkiksi osoitettua, että jokaisen kiekon \mathcal{D} pisteen kautta kulkee ääretön määrä hyperbolisia suoria.

Lause 2. *Olkoon piste A jokin kiekon \mathcal{D} piste. On olemassa ääretön määrä hyperbolisia suoria, jotka kulkevat pisteen A kautta.*

Todistus. Oletetaan, että piste A sijaitsee origossa O . Tällöin sen läpi kulkee ääretön määrä kiekon \mathcal{D} halkaisijoita, jotka ovat hyperbolisia suoria.

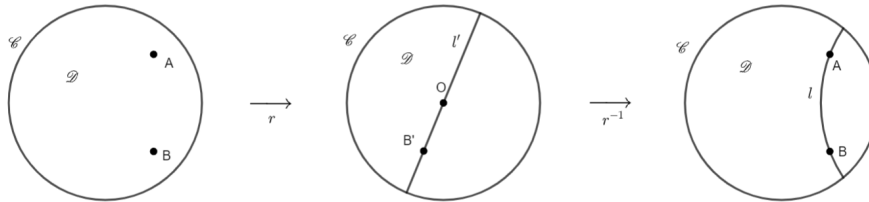
Oletetaan, että piste A ei sijaitse origossa. Tällöin lemmän 14 mukaan on olemassa hyperbolinen kuvaus r , joka kuvaa pisteen A origoon O . Tässä pisteessä hyperbolisia suoria on ääretön määrä. Huomautuksen 2 mukaan hyperbolisella kuvauksella r on aina olemassa käänteiskuvaus r^{-1} . Tämä kuvaus kuvaa pisteen O takaisin pisteeksi A ja pisteen O kautta kulkevat halkaisijat hyperbolisiksi suoriksi, jotka kulkevat pisteen A kautta. Näin ollen pisteen A kautta kulkee ääretön määrä hyperbolisia suoria. Molemmat kuvaukset on esitetty Kuvassa 16. □



Kuva 16: Kuvaus r , joka kuvaa pisteen A origoon O ja käänteiskuvaus r^{-1} , joka kuvaa pisteen O takaisin pisteeksi A .

Euklidisessa geometriassa kaksi pistettä määrittää suoran. Seuraava lause osoittaa, että kaksi pistettä määrittävät myös hyperbolisen suoran yksikäsitteisesti.

Lause 3. *Olkoon pisteet A ja B kiekon \mathcal{D} pisteitä, joille pätee $A \neq B$. On olemassa yksikäsitteinen hyperbolinen suora l , joka kulkee pisteiden A ja B kautta.*



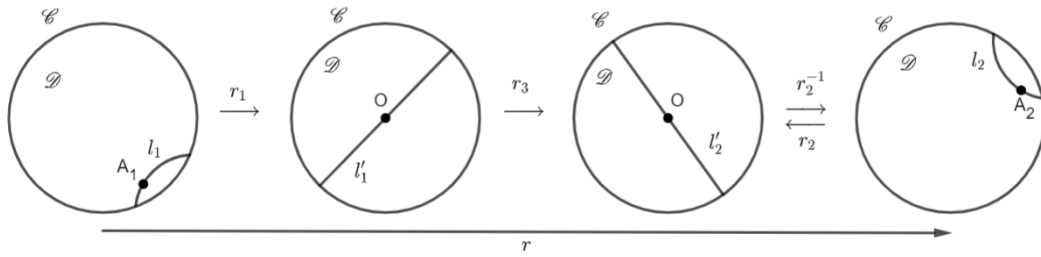
Kuva 17: Kaksi eri pistettä määrittävät hyperbolisen suoran.

Todistus. Lemman 14 mukaan on olemassa sellainen hyperbolinen kuvaus r , joka kuvaa pisteen A origoon O . Olkoon piste B' pisteen B kuva hyperbolisen kuvauksen r jälkeen. Tällöin pisteiden O ja B' kautta kulkee yksikäsitteinen euklidinen suora l' . Koska tämä suora on kiekon \mathcal{D} halkaisija, se on myös hyperbolinen suora. Huomautuksen 2 mukaan hyperbolisen kuvauksen r käänteiskuvaus r^{-1} on myös hyperbolinen kuvaus. Tällöin suora $l = r^{-1}(l')$, ja lauseen 1 mukaan l on hyperbolinen suora, joka kulkee pisteiden A ja B kautta. Nämä tehdyt kuvaukset on esitetty Kuvassa 17.

Vielä pitää näyttää, että suora l on yksikäsitteinen. Oletetaan, että l_1 on toinen hyperbolinen suora, joka kulkee pisteiden A ja B kautta. Tällöin $r(l_1)$ on hyperbolinen suora, joka kulkee pisteiden O ja B' kautta. Näin ollen $r(l_1) = l'$, jolloin hyperboliset suorat l_1 ja $r^{-1}(l') = l$ ovat samoja. Siis pisteiden A ja B kautta kulkeva suora on yksikäsitteinen. \square

Näytetään vielä, kuinka kahden hyperbolisen suoran välillä on olemassa hyperbolinen kuvaus, joka kuvaa toisen hyperbolisista suorista toiseksi.

Lause 4. *Olkoon A_1 ja A_2 kaksi kiekon \mathcal{D} pistettä, joille pätee $A_1 \neq A_2$. Oletetaan, että pisteen A_1 kautta kulkee hyperbolinen suora l_1 ja pisteen A_2 kautta kulkee hyperbolinen suora l_2 . On olemassa hyperbolinen kuvaus, joka kuvaa pisteen A_1 pisteeksi A_2 ja suoran l_1 suoraksi l_2 .*



Kuva 18: Kuvaus, joka kuvaa suoran l_1 suoraksi l_2 .

Todistus. Lemman 14 mukaan on olemassa sellaiset hyperboliset kuvaukset r_1 ja r_2 , että kuvaus r_1 kuvaa pisteen A_1 origoon O ja r_2 kuvaa pisteen A_2 origoon O . Olkoon näiden hyperbolisten suorien kuvat l'_1 ja l'_2 . On olemassa sellainen hyperbolinen kuvaus r_3 , joka kiertää suoran l'_1 origon ympäri suoraksi l'_2 . Olkoon hyperbolinen kuvaus r edellisten kuvausten yhdistetty kuvaus

$$r = r_2^{-1} \circ r_3 \circ r_1.$$

Kuten Kuvasta 18 nähdään hyperbolinen kuvaus r kuvaa pisteen A_1 pisteeksi A_2 ja suoran l_1 suoraksi l_2 . \square

4.2.2 Hyperbolinen kuvaus Möbius-kuvauksena

Tässä luvussa muodostetaan edellisessä luvussa käytetyille hyperbolisille kuvauksille lausekkeet kompleksiluvuilla. Tätä varten määritellään Möbius-kuvaus, sillä hyperbolisen kuvauksen lauseke perustuu tähän kuvaukseen. Möbius-kuvaukset kuvautuvat laajennetussa kompleksitasossa, jolloin hyödynnetään luvussa 3.2 määriteltyä laajennettua kompleksitasoa. Luvussa esitellään ensin yleisesti Möbius-kuvaus ja sen jälkeen muodostetaan Möbius-kuvausten avulla hyperbolisille kuvaksille lausekkeet. Määritellään ensin, millainen kuvaus Möbius-kuvaus on.

Määritelmä 13. Möbius-kuvaus $M : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ on muotoa

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (12)$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ja $ad - bc \neq 0$. Jos $c = 0$, niin $M(\infty) = \infty$. Muulloin $M(-\frac{d}{c}) = \infty$ ja $M(\infty) = \frac{a}{c}$.

Seuraavaksi osoitetaan, että Möbius-kuvaus on inversiokuvausten yhdistetty kuvaus eli inversiivinen kuvaus.

Lause 5. Jokainen Möbius-kuvaus on inversiivinen kuvaus.

Todistus. Olkoon M yhtälön (12) mukainen Möbius-kuvaus.

Jos $c = 0$, niin yhtälö (12) supistuu muotoon $M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Tämä on laajennettu lineaarinen funktio ja näin ollen lemmän 10 mukaan inversiivinen kuvaus.

Jos $c \neq 0$ ja $z \in \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$, voidaan yhtälö (12) kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{-ad + bc + a(cz + d)}{c(cz + d)} \\ &= -\left(\frac{ad - bc}{c}\right) \cdot \left(\frac{1}{cz + d}\right) + \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Tällöin Möbius-kuvaus M voidaan esittää yhdistettynä kuvauksena $\hat{t}_3 \circ \hat{t}_2 \circ \hat{t}_1$, missä \hat{t}_2 on laajennettu käänteislukufunktio $\hat{t}_2(z) = \frac{1}{z}$ ja \hat{t}_1 ja \hat{t}_3 ovat paloittain määritellyt funktiot

$$\hat{t}_1(z) = \begin{cases} cz + d, & \text{jos } z \neq \infty \\ \infty, & \text{jos } z = \infty \end{cases}$$

ja

$$\hat{t}_3(z) = \begin{cases} -\frac{ad-bc}{c}z + \frac{a}{c}, & \text{jos } z \neq \infty \\ \infty, & \text{jos } z = \infty. \end{cases}$$

Lemman 10 mukaan nämä kuvaukset \hat{t}_1 ja \hat{t}_3 ovat inversiivisiä.

Tarkistetaan, että yhdistetyn kuvauksen $\hat{t}_3 \circ \hat{t}_2 \circ \hat{t}_1$ ja Möbius-kuvauksen arvot ovat samat myös pisteissä ∞ ja $-\frac{d}{c}$. Koska

$$\begin{aligned} \hat{t}(\infty) &= \hat{t}_3 \circ \hat{t}_2 \circ \hat{t}_1(\infty) = \hat{t}_3 \circ \hat{t}_2(\infty) = \hat{t}_3(0) = \frac{a}{c} = M(\infty) \text{ ja} \\ \hat{t}\left(-\frac{d}{c}\right) &= \hat{t}_3 \circ \hat{t}_2 \circ \hat{t}_1\left(-\frac{d}{c}\right) = \hat{t}_3 \circ \hat{t}_2(0) = \hat{t}_3(\infty) = \infty = M\left(-\frac{d}{c}\right), \end{aligned}$$

kuvaukset vastaavat toisiaan kaikissa tason $\hat{\mathbb{C}}$ pisteissä. Näin ollen yhdistetty kuvaus $\hat{t}_3 \circ \hat{t}_2 \circ \hat{t}_1$ on inversioiden yhdistetty kuvaus, jolloin Möbius-kuvaus on inversiivinen kuvaus. \square

Osoitetaan seuraavaksi, että hyperbolisista kuvauksista tutut kulman suuruuden säilyminen sekä ympyrän ja suoran kuvautuminen pätevät myös Möbius-kuvauksilla.

Lause 6. *Möbius-kuvaus kuvaa ympyrän ja suoran ympyräksi tai suoraksi sekä säilyttää kulmien suuruuden ja kierto suunnan.*

Todistus. Lauseen 5 mukaan Möbius-kuvaus on inversiivinen kuvaus. Näin ollen se säilyttää kulmien suuruuden ja kuvaa ympyrän ja suoran ympyräksi tai suoraksi. Lisäksi samaisessa lauseessa näytettiin, että Möbius-kuvaus voidaan esittää joko laajennettuna lineaarisena funktiona tai yhdistettynä kuvauksena laajennetuista lineaarisista funktioista ja laajennetusta käänteislukufunktiosta. Koska sekä laajennettu lineaarinen funktio että laajennettu käänteislukufunktio säilyttävät kulmien kierto suunnan, niin myös Möbius-kuvauskin säilyttää. \square

Joidenkin Möbius-kuvausten ominaisuuksien tutkimista helpottaa, että se voidaan esittää matriisimuodossa. Määritellään seuraavaksi Möbius-kuvauksen vakioille matriisimuoto.

Määritelmä 14. Olkoon M yhtälön (12) mukainen Möbius-kuvaus missä $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Tällöin sen matriisimuoto on

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Lause 7. Olkoon M_1 ja M_2 kaksi Möbius-kuvausta, joiden matriisit ovat A_1 ja A_2 . Tällöin yhdistetty kuvaus $M_1 \circ M_2$ on Möbius-kuvaus, jonka matriisi on $A_1 A_2$.

Todistus. Olkoon Möbius-kuvaukset M_1 ja M_2 muotoa

$$M_1(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ ja } M_2(z) = \frac{ez + f}{gz + h}.$$

Tällöin yhdistetyn kuvauksen $M_1 \circ M_2(z)$ yhtälö on

$$\begin{aligned} M_1 \circ M_2(z) &= M_1\left(\frac{ez + f}{gz + h}\right) \\ &= \frac{a\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) + b}{c\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) + d} \\ &= \frac{a(ez + f) + b(gz + h)}{c(ez + f) + d(gz + h)} \\ &= \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)}, \end{aligned}$$

jossa $(ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) = (ad - bc)(eh - fg) \neq 0$. Saatu yhtälö on Möbius-kuvaus ja sen matriisi on

$$\begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix},$$

joka saadaan, kun kerrotaan Möbius-kuvausten M_1 ja M_2 matriisit

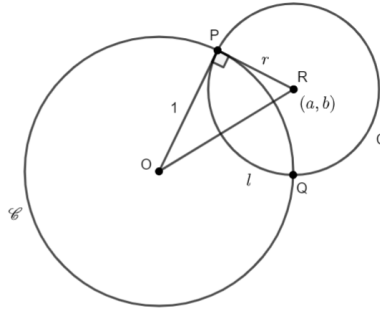
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

□

Möbius-kuvausten avulla voidaan esittää hyperbolisia kuvauksia. Tämän osoittamista ennen muodostetaan hyperboliselle peilaukselle sekä kahden peilauksen yhdistetylle kuvaukselle yhtälöt. Samalla tämä antaa yhtälöt kierrolle sekä siirrolle, sillä ne ovat kahden hyperbolisen peilauksen yhdistettyjä kuvauksia.

Lemma 15. *Hyperbolinen peilaus ρ hyperbolisen suoran l suhteen, jota kuvaavan ympyrän keskipiste on α , on hyperbolinen kuvaus*

$$\rho(z) = \frac{\alpha\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\alpha}} \quad (z \in \mathcal{D}).$$



Kuva 19: Keskipisteiden ja kehän \mathcal{C} leikkauspisteistä muodostuu suorakulmainen kolmio.

Todistus. Hyperbolinen suora l on osa euklidista ympyrää C , jolla on keskipiste $R = \alpha$ ja säde r . Ilmaistaan keskipiste $R(a, b)$ kompleksilukuna $a + ib = \alpha$, jossa $|\alpha| > 1$. Olkoon ympyrän C ja kiekon kehän \mathcal{C} leikkauspisteet P ja Q . Pisteiden O , P ja R kautta voidaan piirtää suorakulmainen kolmio $\triangle RPO$, jossa suora kulma sijaitsee pisteessä P . Tämä kolmio on havainnollistettu Kuvassa 19.

Pythagoraan lauseella saadaan kolmiolle $\triangle RPO$ yhtälö $RP^2 + PO^2 = RO^2$. Sijoitetaan tähän yhtälöön ympyrän C säde r ja keskipiste (a, b) sekä kiekon \mathcal{D} säde 1, jolloin se saadaan muotoon

$$\begin{aligned} r^2 + 1^2 &= (\sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2})^2 \\ r^2 + 1 &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Käytetään tietoa $a^2 + b^2 = |\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha}$, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{aligned} r^2 + 1 &= \alpha\bar{\alpha} \\ r^2 - \alpha\bar{\alpha} &= -1. \end{aligned} \tag{13}$$

Lemman 8 mukaan inversio t ympyrän C suhteen voidaan esittää yhtälöllä $t(z) = \frac{r^2}{z-c} + c$. Käytetään tähän yhtälöön yhtälöä (13), jolloin se tulee muotoon

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \frac{r^2}{z-\alpha} + \alpha \quad (z \in \mathbb{C} - \{\alpha\}) \\ &= \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{\alpha}} + \frac{\alpha(\bar{z}-\bar{\alpha})}{\bar{z}-\bar{\alpha}} \\ &= \frac{r^2 + \alpha\bar{z} - \alpha\bar{\alpha}}{\bar{z}-\bar{\alpha}} \\ &= \frac{\alpha\bar{z} - 1}{\bar{z}-\bar{\alpha}} \quad (z \in \mathcal{D}), \end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen. □

Hyperbolinen peilaus voidaan esittää myös yhdistettynä kuvauksena

$$\rho(z) = (M \circ B)(z), \text{ kaikilla } z \in \mathcal{D},$$

missä $M(z) = \frac{\alpha z - 1}{z - \bar{\alpha}}$ on Möbius-kuvaus ja $B(z) = \bar{z}$ muodostaa kompleksiluvusta z kompleksikonjugaatin.

Lause 8. *Hyperbolisten peilausten*

$$\rho(z) = \frac{\alpha\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\alpha}} \text{ ja } \sigma = \frac{\beta\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\beta}} \quad (z \in \mathcal{D})$$

yhdistetty kuvaus on hyperbolinen kuvaus

$$(\sigma \circ \rho)(z) = \frac{(\bar{\alpha}\beta - 1)z + \alpha - \beta}{(\bar{\alpha} - \bar{\beta})z + \alpha\bar{\beta} - 1} \quad (z \in \mathcal{D}).$$

Todistus. Lemmasta 15 saadaan peilauksille yhtälöt

$$\rho(z) = \frac{\alpha\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\alpha}} = (M \circ B)(z)$$

ja

$$\sigma(z) = \frac{\beta\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\beta}} = (M' \circ B)(z),$$

missä $M'(z) = \frac{\beta z - 1}{z - \beta}$ on Möbius-kuvaus. Näiden peilausten yhdistetyn kuvauksen yhtälö on

$$(\sigma \circ \rho)(z) = (M' \circ B \circ M \circ B)(z). \quad (14)$$

Yhdistetty kuvaus $(B \circ M)$ voidaan ilmaista muodossa

$$(B \circ M)(z) = \frac{\bar{\alpha}\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\alpha}} = (\widetilde{M} \circ B)(z),$$

missä $\widetilde{M}(z)$ on Möbius-kuvaus $\widetilde{M} = \frac{\bar{\alpha}z - 1}{z - \bar{\alpha}}$. Sijoitetaan tämä yhtälöön (14), jolloin saadaan

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \rho)(z) &= (M' \circ \widetilde{M} \circ B \circ B)(z) \\ &= (M' \circ \widetilde{M})(z), \end{aligned}$$

sillä $(B \circ B)(z) = z$.

Möbius-kuvausten M' ja \widetilde{M} matriisit ovat $M' = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & -\bar{\beta} \end{pmatrix}$ ja $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$,

jolloin yhdistetyn kuvauksen $M' \circ \widetilde{M}$ matriisi on

$$\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & -\bar{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}\beta - 1 & \alpha - \beta \\ \bar{\alpha} - \bar{\beta} & \alpha\bar{\beta} - 1 \end{pmatrix}.$$

Hyperbolisten peilausten σ ja ρ yhdistetty kuvaus $\sigma \circ \rho$ on hyperbolinen kuvaus, jonka yhtälö on

$$(\sigma \circ \rho)(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}},$$

missä $a = \bar{\alpha}\beta - 1$ ja $b = \alpha - \beta$. □

Edellä saadusta tuloksesta voidaan päätellä, että parillinen määrä yhdistettyjä hyperbolisia kuvauksia voidaan esittää Möbius-kuvauksena

$$M(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \quad (z \in \mathcal{D}). \quad (15)$$

Voitaisiin myös osoittaa, että pariton määrä yhdistettyjä hyperbolisia kuvauksia voidaan esittää Möbius-kuvauksella sekä kompleksikonjugaatin avulla. Näin ollen jokainen hyperbolinen kuvaus, joka koostuu äärellisestä määrästä yhdistettyjä hyperbolisia peilauksia, voidaan ilmaista muodossa $z \mapsto M(z)$ tai $z \mapsto M(\bar{z})$, missä Möbius-kuvaus M on yhtälön (15) mukainen.

Koska $M(0) = \frac{b}{\bar{a}}$ ja hyperbolisessa kuvauksessa pisteen 0 kuvan tulee sijaita kiekossa \mathcal{D} , niin Möbius-kuvauksen M tulee toteuttaa epäyhtälö $|b| < |a|$. Seuraava lause näyttää, että kaikki tätä muotoa olevat Möbius-kuvaukset ovat hyperbolisia kuvauksia.

Lause 9. *Jokainen Möbius-kuvaus, joka on muotoa $M(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$, missä $|b| < |a|$, on kahden peilauksen yhdistetty kuvaus ja näin ollen hyperbolinen kuvaus, joka rajoittuu kiekkoon \mathcal{D} .*

Todistus. Käydään läpi kaksi eri tapausta.

1. Möbius-kuvaus $M(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$ kuvaa origon itselleen.

Jotta origo kuvautuu itselleen, niin $M(0) = 0$. Tämä toteutuu, kun $b = 0$, jolloin Möbius-kuvauksen yhtälö sievenee muotoon $M(z) = \frac{a}{\bar{a}}z$, joka vastaa kiertoa origon ympäri. Valitaan $a = re^{i\theta}$, jolloin

$$\frac{a}{\bar{a}} = e^{2i\theta}.$$

Määritellään σ_1 ja σ_2 kaavoilla

$$\sigma_1(z) = \bar{z}, \quad z \in \mathcal{D}, \quad \text{ja} \quad \sigma_2(z) = e^{2i\theta}\bar{z}, \quad z \in \mathcal{D},$$

jolloin yhdistetyksi kuvaukseksi saadaan

$$\sigma_2 \circ \sigma_1(z) = e^{2i\theta}\overline{\bar{z}} = e^{2i\theta}z.$$

Koska kuvaukset σ_1 ja σ_2 ovat peilauksia kiekon \mathcal{D} halkaisijan suhteen, niin Möbius-kuvaus $M = \sigma_2 \circ \sigma_1$ on kahden peilauksen yhdistetty kuvaus.

2. Möbius-kuvaus $M(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$ ei kuvaa origoa itselleen.

Tarkastellaan hyperbolista kuvausta $\rho(z) = (M' \circ B)(z)$, missä $M'(z) = \frac{\alpha z - 1}{z - \bar{\alpha}}$ on Möbius-kuvaus ja $B(z) = \bar{z}$. Valitaan α niin, että kuvaukset ρ ja $M \circ \rho$ ovat hyperbolisia peilauksia. Tällöin kuvaus $M = (M \circ \rho) \circ \rho^{-1}$ on kahden peilauksen yhdistetty kuvaus.

Möbius-kuvausten M ja M' matriisit ovat

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -\bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Tällöin yhdistetyn kuvauksen $M \circ M'$ matriisi on

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -\bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + b & -(\bar{\alpha} b + a) \\ \alpha \bar{b} + \bar{\alpha} & -\bar{b} - \bar{\alpha} \bar{a} \end{pmatrix},$$

jolloin yhdistetyn kuvauksen $(M \circ M' \circ B)$ yhtälö on

$$(M \circ M' \circ B)(z) = \frac{(a\alpha + b)\bar{z} - (\bar{\alpha}b + a)}{(\alpha\bar{b} + \bar{\alpha})\bar{z} - \bar{b} - \bar{\alpha}\bar{a}}.$$

Koska origo ei kuvaudu itselleen, niin $M(0) \neq 0$, jolloin $b \neq 0$. Valitaan $\alpha = -\frac{a}{\bar{b}}$. Tällöin

$$\bar{\alpha}b + a = -\frac{a}{b}b + a = 0.$$

Koska $|b| < |a|$, voidaan päätellä, että $|\alpha| = \frac{|a|}{|b|} > 1$. Näin ollen piste α sijaitsee kiekon \mathcal{D} ulkopuolella, jolloin kuvaus $\rho = M' \circ B$ on lemmän 15 mukaan hyperbolinen peilaus. Lisäksi yhtälö

$$(M \circ \rho)(z) = (M \circ M' \circ B)(z) = \frac{(a\alpha + b)\bar{z}}{-\bar{b} - \bar{\alpha}\bar{a}}$$

on muotoa $-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\bar{z}$, missä $\gamma = a\alpha + b$, joten se on myös hyperbolinen peilaus. Tällöin Möbius-kuvaus M on kahden hyperbolisen peilauksen $M \circ \rho$ ja ρ^{-1} yhdistetty kuvaus. □

Seuraava lause antaa käyttökelpoisen Möbius-kuvauksen hyperbolisille kuvauksille. Se myös osoittaa, kuinka mielivaltainen piste m voidaan kuvata Möbius-kuvauksella origoon.

Lause 10. *Hyperbolinen kuvaus M voidaan kirjoittaa muodossa*

$$M(z) = K \frac{z - m}{1 - \bar{m}z},$$

missä vakiot K ja m ovat kompleksilukuja, joilla $|K| = 1$ ja $m \in \mathcal{D}$.

Todistus. Hyperbolinen kuvaus voidaan lauseen 8 jälkeisen kappaleen perusteella kirjoittaa aina muodossa

$$M(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}},$$

missä $|b| < |a|$. Jaetaan tämä yhtälö termillä \bar{a} , jolloin saadaan

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{\frac{a}{\bar{a}}z + \frac{b}{\bar{a}}}{\frac{\bar{b}}{\bar{a}}z + \frac{\bar{a}}{\bar{a}}} \\ &= \frac{\frac{a}{\bar{a}}z + \frac{ba}{\bar{a}a}}{1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}z} \\ &= \frac{a}{\bar{a}} \left(\frac{z - \frac{-b}{\bar{a}}}{1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}z} \right) \\ &= K \frac{z - m}{1 - \bar{m}z}, \end{aligned}$$

missä $K = \frac{a}{\bar{a}}$ ja $m = -\frac{b}{\bar{a}}$. Koska $|a| = |\bar{a}|$ ja $|b| < |a|$, niin $|K| = 1$ ja $|m| < 1$. \square

Nyt voidaan löytää jokainen hyperbolinen kuvaus, joka kuvaa pisteen m origoon. Tiedetään, että sen tulee olla muotoa

$$M(z) = K \frac{z - m'}{1 - \overline{m'}z},$$

missä $|K| = 1$ ja $|m'| < 1$. Jotta $M(m) = 0$, niin $m = m'$, jolloin jokainen muotoa

$$M(z) = K \frac{z - m}{1 - \overline{m}z} \quad (16)$$

oleva hyperbolinen kuvaus kuvaa pisteen m origoon. Hyperboliset kuvaukset, jotka kuvaavat origon itselleen, toteuttavat ehdon $m = 0$, jolloin yhtälö (16) tulee muotoon $M(z) = Kz$, missä $|K| = 1$ ja $K = \cos \theta + i \sin \theta$. Tämä vastaa kiekossa \mathcal{D} tapahtuvaa kiertoa origon ympäri kulman θ verran. Jos vaaditaan vain yksi hyperbolinen kuvaus, joka kuvaa pisteen m origoon, voidaan valita $K = 1$, ja käyttää muotoa $\frac{z-m}{1-\overline{m}z}$.

Muotoa $K \frac{z-m}{1-\overline{m}z}$ oleva kuvaus on hyperbolinen kuvaus, sillä $|K| = 1 = \frac{|a|}{|\bar{a}|}$ ja m voidaan kirjoittaa muodossa $m = -\frac{b}{\bar{a}}$, jolloin saadaan

$$\frac{Kz - Km}{1 - \overline{m}z} = \frac{\frac{a}{\bar{a}}z + \frac{a}{\bar{a}}\frac{b}{\bar{a}}}{1 + \frac{\bar{b}}{\bar{a}}z} = \frac{az + b}{\bar{a} + \bar{b}z}.$$

Koska $m \in \mathcal{D}$, niin $|m| < 1$ eli $|\frac{b}{\bar{a}}| < 1$, jolloin saadaan $|b| < |a|$. Tämä on lauseen 9 mukaan hyperbolinen kuvaus.

4.3 Pisteiden välinen etäisyys ja hyperbolinen ympyrä

Tässä luvussa esitetään kaava pisteiden väliselle hyperboliselle etäisyydelle sekä hyperboliset funktiot hyperbolisini, -kosini ja -tangentti. Lisäksi esitetään hyperboliselle ympyrälle yhtälö.

Euklidisessa geometriassa kahden pisteen välinen etäisyys voidaan laskea kaavalla

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Ennen kuin esitetään vastaava kaava kahden pisteen väliselle hyperboliselle etäisyydelle kiekossa \mathcal{D} , käydään läpi etäisyysfunktion d ominaisuuksia, jotka ovat voimassa eri geometrioiden kompleksitasoissa.

Etäisyysfunktion d ominaisuudet:

1. $d(z_1, z_2) \geq 0$ kaikilla z_1 ja z_2
 $d(z_1, z_2) = 0$ jos ja vain jos $z_1 = z_2$
2. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ kaikilla z_1 ja z_2
3. $d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2) \geq d(z_1, z_2)$ kaikilla z_1, z_2 ja z_3
4. $d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2) = d(z_1, z_2)$ jos ja vain jos pisteet z_1, z_3 ja z_2 ovat suoralla tässä järjestyksessä.

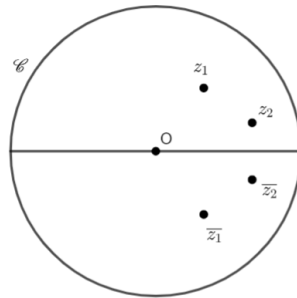
Etäisyysfunktion d lisäominaisuudet hyperbolisessa geometriassa:

5. $d(z_1, z_2) = d(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ kaikilla $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$
6. $d(z_1, z_2) = d(M(z_1), M(z_2))$ kaikilla $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ ja kaikilla hyperbolisilla kuvauksilla M

Ensimmäisen ominaisuuden mukaan kahden pisteen välinen etäisyys on positiivinen. Poikkeuksena tästä on kaksi samaa pistettä, jolloin niiden välinen etäisyys on 0. Toisen ominaisuuden mukaan kahden pisteen välinen etäisyys on sama riippumatta siitä, kummasta pisteestä lähdetään liikkeelle.

Kolmannelta ominaisuudesta käytetään nimitystä kolmioepäyhtälö, ja se osoittaa, kuinka kolmion sivun pituus on enintään kahden muun sivun pituuden summa. Neljäs ominaisuus on kolmannen ominaisuuden erityistapaus. Kun yhtäsuuruus on voimassa, verrataan samalla suoralla olevien pisteiden välistä etäisyyttä.

Ominaisuudet 5 ja 6 yhdessä näyttävät, kuinka yksikkökiekossa \mathcal{D} tehtävät hyperboliset kuvaukset eivät muuta pisteiden välisiä etäisyyksiä. Ominaisuuden 5 mukaan kahden pisteen välinen etäisyys säilyy, kun niistä otetaan kompleksikonjugaatit. Tämän voi havaita myös Kuvasta 20. Ominaisuuden 6 mukaan hyperboliset kuvaukset säilyttävät pisteiden välisen etäisyyden.



Kuva 20: Pisteet ja niiden kompleksikonjugaatit.

Ennen kuin määritellään hyperbolinen etäisyys, palautetaan mieleen hyperbolisin ja -kosinin yhtälöt

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \text{ ja } \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

sillä hyperbolinen etäisyys perustuu hyperbolitangenttiin. Hyperbolitangentille voidaan muodostaa seuraava lemmän mukainen yhtälö.

Lemma 16. *Hyperbolitangentille pätee yhtälö*

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Todistus. Merkitään $y = \tanh^{-1} x$. Koska $\tanh y = \frac{\sinh y}{\cosh y}$, saadaan

$$\begin{aligned} x &= \tanh y \\ &= \frac{\sinh y}{\cosh y} \\ &= \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}. \end{aligned}$$

Kun tästä yhtälöstä ratkaistaan y , saadaan yhtälö muotoon

$$\begin{aligned} e^{2y} &= \frac{1+x}{1-x} \\ y &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \end{aligned}$$

Koska aluksi valittiin, että $y = \tanh^{-1} x$, saadaan

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

□

Nyt voidaan määritellä hyperbolisen etäisyyden funktio.

Määritelmä 15. Pisteiden z_1 ja z_2 välinen hyperbolinen etäisyys $d(z_1, z_2)$ yksikkökiekossa \mathcal{D} määritellään seuraavasti:

$$d(z_1, z_2) = \tanh^{-1} \left(\left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| \right).$$

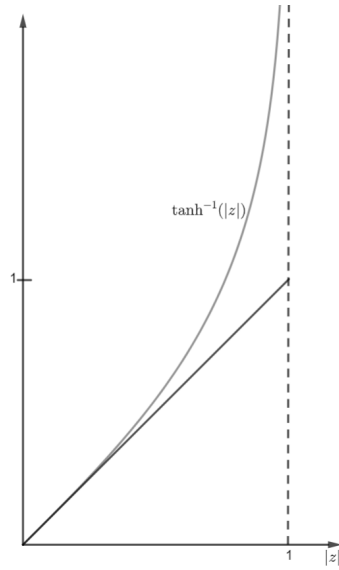
Tästä määritelmästä saadaan myös yhtälö, jolla voidaan laskea kiekon \mathcal{D} keskipisteen ja kiekossa \mathcal{D} sijaitsevan mielivaltaisen pisteen välinen etäisyys.

Seuraus 1. Pisteiden 0 ja $z \in \mathcal{D}$ välinen hyperbolinen etäisyys on

$$d(0, z) = \tanh^{-1}(|z|).$$

Tämä etäisyys voidaan ilmaista myös lemmän 16 mukaisesti luonnollisen logaritmin avulla muodossa $d(0, z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}$. Verrataan seuraavaksi, miten euklidinen ja hyperbolinen etäisyys eroavat toisistaan. Kuvassa 21 on esitetty, miten nämä etäisyysfunktiot käyttäytyvät välillä $[0, 1)$. Kuvasta nähdään, että lähellä origoa olevan pisteen euklidinen sekä hyperbolinen etäisyys ovat miltei samat, kun taas lähestyttäessä pistettä 1 hyperbolisen etäisyyden arvo lähestyy ääretöntä. Näin ollen yksikkökiekossa \mathcal{D} pisteen etäisyys origosta kasvaa kohti ääretöntä, mitä lähemmäksi tullaan kiekon kehää \mathcal{C} .

Osoitetaan seuraavaksi, että hyperbolisen etäisyyden funktio toteuttaa ominaisuuden 6. Luvun lopussa näytetään, että funktio toteuttaa myös ominaisuudet 1-5.



Kuva 21: Funktion $\tanh^{-1}(|z|)$ kuvaaja suhteessa funktion $|z|$ kuvaajaan.

Lemma 17. Määritelmän 15 funktio toteuttaa ominaisuuden 6 yhtälön

$$d(z_1, z_2) = d(M(z_1), M(z_2))$$

kaikilla pisteillä $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ ja kaikilla hyperbolisilla kuvauksilla M .

Todistus. Määritellään $R(z_1, z_2)$ kaavalla

$$R(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|, \quad (17)$$

missä pisteet $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$. Tällöin kahden pisteen välinen etäisyys on

$$d(z_1, z_2) = \tanh^{-1}(R(z_1, z_2)).$$

Tällöin riittää todistaa, että yhtälö

$$R(z_1, z_2) = R(M(z_1), M(z_2))$$

toteutuu kaikilla pisteillä $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ ja kaikilla hyperbolisilla kuvauksilla M .

Olkoon z_1 ja z_2 kaksi kiekon \mathcal{D} pistettä ja M jokin hyperbolinen kuvaus. Määritellään seuraavaksi lauseen 10 mukaiset hyperboliset kuvaukset M_1 ja M_2 . Olkoon M_1 hyperbolinen kuvaus

$$M_1(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}, \quad z \in \mathcal{D},$$

joka kuvaa pisteen z_1 pisteeksi 0 ja pisteen z_2 pisteeksi $\frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2}$. Olkoon M_2 hyperbolinen kuvaus

$$M_2(z) = \frac{z - M(z_1)}{1 - \overline{M(z_1)} z},$$

missä piste $z \in \mathcal{D}$ ja $|M(z_1)| < 1$. Tämä kuvaus kuvaa pisteen $M(z_1)$ pisteeksi 0 ja pisteen $M(z_2)$ pisteeksi $\frac{M(z_2) - M(z_1)}{1 - \overline{M(z_1)}M(z_2)}$.

Hyperbolisista kuvauksista M_1 , M ja M_2 muodostettu yhdistetty kuvaus $M_2 \circ M \circ M_1^{-1}$ on hyperbolinen kuvaus, joka kuvaa kiekon \mathcal{D} itselleen ja pisteen $\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1}z_2}$ pisteeksi $\frac{M(z_2) - M(z_1)}{1 - \overline{M(z_1)}M(z_2)}$. Yhdistetty kuvaus $M_2 \circ M \circ M_1^{-1}$ kuvaa pisteen 0 itselleen, sillä

$$M_2 \circ M \circ M_1^{-1}(0) = M_2 \circ M(z_1) = M_2(M(z_1)) = 0.$$

Lauseen 9 todistuksen kohdan 1 mukaan jokainen hyperbolinen kuvaus, jossa origo kuvautuu itselleen, vastaa euklidista kiertoa. Tällöin

$$\left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1}z_2} \right| = \left| \frac{M(z_2) - M(z_1)}{1 - \overline{M(z_1)}M(z_2)} \right|,$$

joka voidaan yhtälön (17) perusteella kirjoittaa muodossa

$$R(z_1, z_2) = R(M(z_1), M(z_2)).$$

□

Määritellään seuravaksi hyperbolinen keskipiste ja hyperbolinen ympyrä.

Määritelmä 16. Piste m on hyperbolisen janan ab hyperbolinen keskipiste, jos se sijaitsee janalla ab ja toteuttaa yhtälön

$$d(a, m) = d(m, b) = \frac{1}{2}d(a, b).$$

Määritelmä 17. Hyperbolinen ympyrä määritellään joukkona

$$\{z : d(c, z) = r, z \in \mathcal{D}\},$$

jossa r on hyperbolinen säde ja c hyperbolinen keskipiste.

Lause 11. *Jokainen hyperbolinen ympyrä on euklidinen ympyrä ja päinvastoin.*

Todistus. Osoitetaan, että hyperbolinen ympyrä, jolla on keskipiste origossa, vastaa euklidista ympyrää ja päinvastoin. Olkoon C hyperbolinen ympyrä, jonka keskipiste on origossa. Tällöin se käsittää joukon

$$\{z : d(0, z) = r, z \in \mathcal{D}\},$$

joka voidaan esittää myös muodossa

$$\{z : \tanh^{-1}(|z|) = r, z \in \mathcal{D}\}$$

tai

$$\{z : |z| = \tanh r, z \in \mathcal{D}\}.$$

Tämä vastaa euklidista ympyrää, jolla on säde r ja keskipiste origossa.

Osoitetaan, että hyperbolinen ympyrä, jonka keskipiste ei sijaitse origossa, vastaa euklidista ympyrää ja päinvastoin. Olkoon C jokin hyperbolinen ympyrä, jolla on keskipiste $m \neq 0$. Kiekolla \mathcal{D} on olemassa sellainen halkaisija, joka kulkee ympyrän C keskipisteen m ja origon kautta. Olkoon halkaisija ja ympyrän C leikkauspisteet a ja b . Olkoon K sellainen euklidinen ympyrä, jolla on halkaisija ab ja keskipiste p .

Osoitetaan, että hyperbolinen ympyrä C on euklidinen ympyrä. Tämä tapahtuu osoittamalla, että ympyrä $C = K$. Olkoon M hyperbolinen kuvaus

$$M(z) = \frac{z - m}{1 - \bar{m}z},$$

missä $z \in \mathcal{D}$. Tämä kuvaus kuvaa pisteen m origoon O . Olkoon a' pisteen a kuva ja b' pisteen b kuva. Koska hyperbolinen kuvaus säilyttää hyperbolisen etäisyyden, saadaan uusi ympyrä C' , jonka keskipiste on origossa. Tämä ympyrä on a-kohdan perusteella euklidinen ympyrä.

Koska halkaisija ab leikkaa ympyrän K kehän suorassa kulmassa, hyperbolinen kuvaus kuvaa ympyrän K ympyräksi K' , joka kohtaa janan $a'b'$ suorassa kulmassa. Tällöin $a'b'$ on sekä ympyrän C' että ympyrän K' halkaisija. Näin ollen ympyrä $C' = K'$, jolloin ympyrä $C = K$.

Todistetaan, että euklidinen ympyrä vastaa hyperbolista ympyrää. Olkoon K jokin euklidinen ympyrä kiekossa \mathcal{D} , jolla on keskipiste $p \neq 0$. Kiekolla \mathcal{D} on olemassa halkaisija, joka kulkee origon ja pisteen p kautta. Tämä halkaisija leikkaa ympyrän K pisteissä a ja b . Olkoon C hyperbolinen ympyrä, joka kulkee pisteiden a ja b kautta, ja jolla on keskipiste janan ab hyperbolisessa keskipisteessä. Olkoon tämä keskipiste m . Kun ympyröille tehdään vastaavat kuvaukset kuin toiseen suuntaan todistaessa, saadaan, että euklidinen ympyrä K vastaa hyperbolista ympyrää C . \square

Vaikka hyperbolinen ja euklidinen ympyrä ovat samoja hyperbolisessa geometriassa, niin niillä on eri keskipisteet sekä eri säteet. Näin ollen hyperbolisen ympyrän pinta-ala sekä piiri ovat eri suuruksia kuin euklidisella ympyrällä. [2, s. 314]

Seuraavaksi todistetaan, että määritelmän 15 funktio toteuttaa etäisyysfunktion d ominaisuudet 1-6.

Lause 12. *Määritelmän 15 funktio toteuttaa etäisyysfunktion ominaisuudet 1-6.*

Todistus. Määritelmän 15 yhtälö toteuttaa selvästi ominaisuudet 1, 2 ja 5.

Todistetaan ensin ominaisuudesta 4, että pisteet, jotka sijaitsevat samalla suoralla, toteuttavat yhtälön $d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2) = d(z_1, z_2)$. Oletetaan, että pisteet a , b ja c sijaitsevat kiekon \mathcal{D} halkaisijalla, ja piste c sijaitsee origossa, $c = 0$. Osoitetaan, että tällöin on voimassa yhtälö

$$d(a, 0) + d(0, b) = d(a, b).$$

Lemman 16 avulla saadaan

$$\begin{aligned} d(a, b) &= \tanh^{-1} \left(\left| \frac{b-a}{1-ab} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \left| \frac{b-a}{1-ab} \right|}{1 - \left| \frac{b-a}{1-ab} \right|} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{|1-ab| + |b-a|}{|1-ab| - |b-a|}. \end{aligned}$$

Koska $b < 0$ ja $0 < a$, saadaan $b-a < 0$ ja $1-ab > 0$. Kun itseisarvot poistetaan, saadaan edellinen yhtälö muotoon

$$d(a, b) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-ab+a-b}{1-a+b-ba}.$$

Kun tämän yhtälön termeistä otetaan itseisarvot, saadaan yhtälö

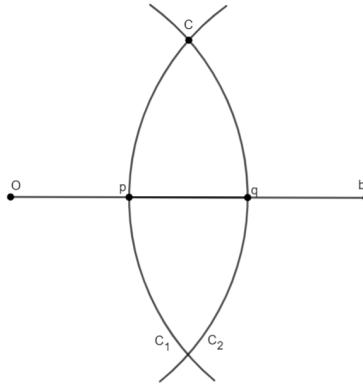
$$\begin{aligned} d(a, b) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+|a|+|b|+|a||b|}{1-|a|-|b|+|a||b|} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+|a|}{1-|a|} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+|b|}{1-|b|} \\ &= \tanh^{-1}(|a|) + \tanh^{-1}(|b|) \\ &= d(a, 0) + d(b, 0). \end{aligned}$$

Kuvataan nämä pisteet hyperbolisella kuvauksella M , joka kuvaa pisteet samalle hyperboliselle suoralle. Tällöin ominaisuuden 6 mukaan pisteet säilyttävät hyperboliset etäisyytensä, jolloin on voimassa

$$d(a, c) + d(c, b) = d(a, b).$$

Todistetaan ominaisuus 3. Olkoon M hyperbolinen kuvaus, joka kuvaa pisteen z_1 origoon, pisteen z_2 pisteeksi $M(z_2) = b$ ja pisteen z_3 pisteeksi $M(z_3) = c$. Tällöin jana Ob on euklidinen jana. Piirretään hyperbolinen origokeskeinen ympyrä C_2 , joka kulkee pisteen c kautta. Tällöin se leikkaa puolisuoran Ob pisteessä q , jolloin etäisyys $d(O, q) = d(O, c)$. Vastaavasti otetaan piste b hyperbolisen ympyrän C_1 keskustaksi ja piirretään se kulkemaan pisteen c kautta. Näin ollen se leikkaa puolisuoran bO pisteessä p , jolloin etäisyys $d(b, p) = d(b, c)$. Kuvassa 22 pisteet p ja q sijaitsevat janalla Ob , mutta ne voivat sijaita myös janalla Ob ulkopuolella. Ympyrät C_1 ja C_2 ovat lauseen 11 mukaan euklidisia ympyröitä, joilla on keskipisteet janalla Ob . Jos tällöin pisteiden A ja B euklidisille etäisyyksille pätee $OA \geq OB$, niin hyperbolisille etäisyyksille pätee $d(O, A) \geq d(O, B)$. Näistä sekä ominaisuuden 3 avulla saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} d(O, c) + d(c, b) &= d(O, q) + d(p, b) \\ &\geq d(O, q) + d(q, b) \\ &= d(O, b). \end{aligned} \tag{18}$$



Kuva 22: Pisteet p ja q esitetty janalla O ja b .

Koska hyperbolinen kuvaus M säilyttää ominaisuuden 6 mukaan hyperbolisen etäisyyden, saadaan

$$d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2) \geq d(z_1, z_2).$$

Todistetaan ominaisuuden 4 toinen suunta. Ominaisuuden 3 tapauksessa, jos $p = q$, niin yhtälössä (18) pätee yhtäsuuruus. Näin ollen pätee $c = p$, jolloin pisteet O , c ja b sijaitsevat samalla suoralla tässä järjestyksessä. Koska pisteet sijaitsevat kiekon \mathcal{D} halkaisijalla, ne sijaitsevat samalla hyperbolisella suoralla.

Ominaisuus 6 on todistettu lemmassa 17. □

Todistetaan seuraavaksi, että ominaisuudet 1-6 toteuttava funktio on hyperbolitangentti.

Lause 13. *Olkoon hyperbolinen etäisyys d jokin funktio, joka toteuttaa ominaisuudet 1-6, ja jolla funktio $f(x) = d(0, x)$ on derivoituva janalla $[0, 1) \subset \mathcal{D}$. Tällöin*

$$d(z_1, z_2) = K \tanh^{-1} \left(\left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| \right),$$

jollain vakiolla $K > 0$ ja kaikilla $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$.

Todistus. Olkoon pisteet $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$. Ominaisuuden 6 mukaan hyperboliset kuvaukset säilyttävät hyperbolisen etäisyyden $d(z_1, z_2)$, joten piste z_1 voidaan kuvata origoon lauseen 10 hyperbolisella kuvauksella, jossa

$$z \mapsto \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2}.$$

Hyperbolinen etäisyys säilyy myös kieossa \mathcal{D} tehtävässä hyperbolisessa kierrossa, sillä se on hyperbolinen kuvaus. Voidaan siis olettaa, että piste z_2 sijaitsee positiivisella reaaliakselilla.

Todistettavana on, että

$$d(0, z) = K \tanh^{-1}(z), \text{ jollain } K > 0 \text{ ja kaikilla } z \in (0, 1).$$

Olkoon $0 < a$ ja $c < 1$. Tällöin hyperbolinen kuvaus

$$M(z) = \frac{z + a}{1 + az}, \quad z \in \mathcal{D}$$

kuvaa pisteen 0 pisteeksi a ja pisteen c pisteeksi $b = \frac{c+a}{1+ac}$. Koska hyperbolinen kuvaus M kuvaa välin $[0, 1)$ pisteet välin $[a, 1)$ pisteiksi, niin $a < b < 1$. Tästä saadaan ominaisuudella 4 yhtälö

$$d(0, b) = d(0, a) + d(a, b). \quad (19)$$

Koska ominaisuuden 6 mukaan hyperbolinen kuvaus säilyttää hyperbolisen etäisyyden, saadaan

$$d(a, b) = d(0, c),$$

jolloin yhtälö (19) tulee muotoon

$$d\left(0, \frac{c+a}{1+ac}\right) = d(0, a) + d(0, c). \quad (20)$$

Oletuksen mukaan $f(x) = d(0, x)$ ja $f(x)$ on derivoituva janalla $[0, 1)$. Derivoidaan yhtälön (20) molemmat puolet muuttujan c suhteen, jolloin saadaan

$$D_c \left(f \left(\frac{c+a}{1+ac} \right) \right) = f' \left(\frac{c+a}{1+ac} \right) \cdot \frac{(1+ac) \cdot 1 - (c+a) \cdot a}{(1+ac)^2} = 0 + f'(c),$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$f' \left(\frac{c+a}{1+ac} \right) = \frac{(1+ac)^2}{1-a^2} \cdot f'(c).$$

Sijoitetaan muuttujan c paikalle 0 , jolloin saadaan

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f'(0)}{1-a^2} \\ &= \frac{K}{1-a^2} \end{aligned} \quad (21)$$

jollain $K \in \mathbb{R}$. Koska funktion d tulee olla kasvava välillä $[0, 1)$, vakion K tulee olla epänegatiivinen. Jos $K = 0$, niin $f'(a) = 0$ kaikilla välin $[0, 1)$ pisteillä. Näin ollen vakio $K > 0$. Integroidaan yhtälö (21), jolloin saadaan

$$f(z) = K \tanh^{-1}(z),$$

jollain $K > 0$ ja kaikilla $z \in [0, 1)$. □

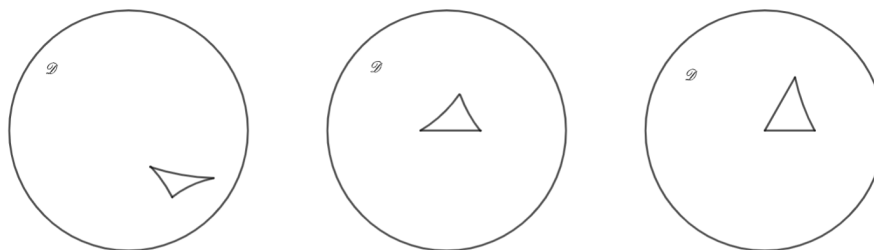
Yleensä hyperbolisessa geometriassa liikutaan lähellä origoa, jolloin voidaan valita, että $K = 1$.

4.4 Hyperbolisen geometrian kolmiot

4.4.1 Hyperbolinen kolmio

Tässä luvussa määritellään hyperbolisen geometrian kolmiot sekä nelikulmio. Lisäksi näytetään, millaisia ovat yhtenevät kolmiot, suorien välinen normaali sekä Pythagoraan lause hyperbolisessa geometriassa.

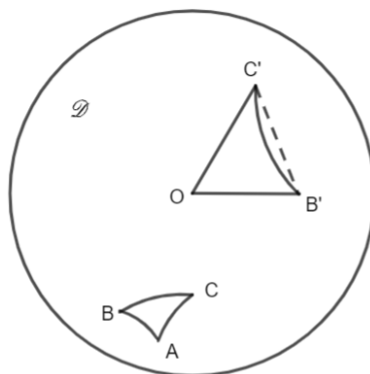
Hyperbolinen kolmio muodostuu kolmesta kiekon \mathcal{D} pisteestä, jotka eivät sijaitse samalla hyperbolisella suoralla. Nämä pisteet yhdistetään hyperbolisilla janoilla, jolloin saadaan hyperbolinen kolmio. Kuvassa 23 on esitetty kolme mahdollista hyperbolista kolmiota. Ensimmäisessä kuvassa kolmio muodostuu kolmesta hyperbolisesta suorasta, jotka kaikki ovat euklidisten ympyröiden osia. Toisessa kuvassa yksi sivuista sijaitsee halkaisijalla, eli on osa euklidista suoraa, kun taas kaksi muuta sivua ovat euklidisten ympyröiden osia. Kolmannessa kuvassa kaksi sivua ovat euklidisten suorien osia ja kolmas sivu on osa euklidista ympyrää.



Kuva 23: Hyperbolisia kolmioita.

Seuraava todistus koskee hyperbolisen kolmion kulmien summaa. Euklidisessa geometriassa kolmioiden kulmien summa on aina 180° eli π . Hyperbolisilla kolmioilla taas kolmion kulmien summa on alle 180° .

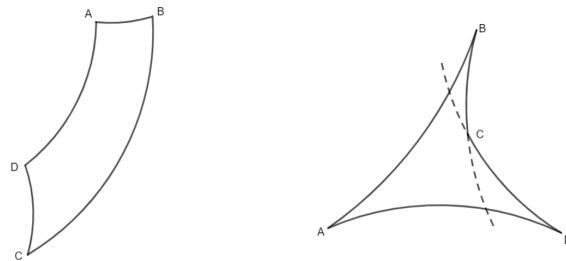
Lause 14. *Hyperbolisen kolmion kulmien summa on alle π .*



Kuva 24: Hyperbolinen kolmio verrattuna euklidiseen kolmioon.

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ jokin hyperbolinen kolmio. Lemman 14 mukaan tämä hyperbolinen kolmio voidaan kuvata hyperboliseksi kolmioksi $\triangle OB'C'$ jollain hyperbolisella kuvauksella, joka siirtää kulmapisteen A origoon O . Koska hyperboliset kuvaukset säilyttävät kulmien suuruudet, niin hyperbolisilla kolmioilla $\triangle OB'C'$ ja $\triangle ABC$ kulmien suuruudet ovat samat.

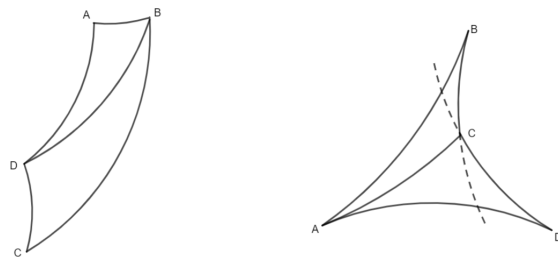
Hyperbolisessa kolmiossa $\triangle OB'C'$ sivut OB' ja OC' ovat euklidisia suoria ja sivu $B'C'$ on osa euklidisen ympyrän kehää, joka taipuu kohti origoa. Verrataan hyperbolista kolmiota $OB'C'$ vastaavaan euklidiseen kolmioon. Kuten kuvasta 24 nähdään, kärkien B' ja C' kulmien suuruudet ovat hyperbolisessa kolmiossa pienempiä kuin vastaavat kulmat euklidisessä kolmiossa. Pisteessä O molempien kolmioiden kulmat ovat samat. Koska euklidisen kolmion kulmien summa on π , niin hyperbolisen kolmion kulmien summan on oltava alle π . \square



Kuva 25: Hyperbolisia nelikulmioita.

Kuvassa 25 on esitetty hyperbolisia nelikulmiota. Kun nelikulmioiden kulmien summa euklidisessa geometriassa on 360° eli 2π , niin hyperbolisessa geometriassa se on tätä pienempi.

Lause 15. *Hyperbolisen nelikulmion kulmien summa on alle 2π .*



Kuva 26: Hyperboliset nelikulmiot voidaan jakaa kahteen kolmioon.

Todistus. Jokainen hyperbolinen nelikulmio voidaan jakaa kahteen hyperboliseen kolmioon, kuten Kuvassa 26. Kolmioiden kulmat ovat tällöin koko nelikulmion kulma tai osa nelikulmion kulmaa. Jos kulma on osa nelikulmion kulmasta, niin molemmat kolmiot jakavat sen. Tällöin nelikulmion kulmien suuruus saadaan laskemalla

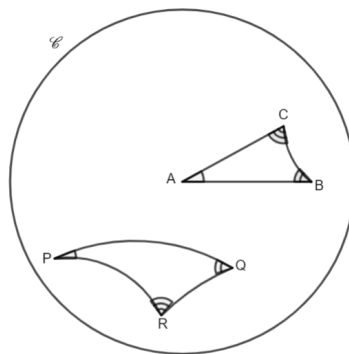
molempien kolmioiden kulmat yhteen. Lauseen 14 mukaan jokaisen hyperbolisen kolmion kulmien summa on alle π , jolloin nelikulmion kulmien summan täytyy olla alle 2π . \square

Määritellään seuraavaksi hyperbolisten kolmioiden yhtenevyys.

Määritelmä 18. Kiekkossa \mathcal{D} kaksi kuviota ovat hyperbolisesti yhteneviä, jos on olemassa sellainen hyperbolinen kuvaus, joka kuvaa toisen kuvion toiseksi.

Hyperbolisessa geometriassa ja euklidisessa geometriassa yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus määritellään eri tavalla. Euklidisessa geometriassa kolmiot ovat yhdenmuotoisia, jos vastaavat kulmat ovat saman suuruiset ja sivut verrannolliset. Yhtenevyys taas tarkoittaa, että kulmien lisäksi vastaavien sivujen tulee olla yhtä pitkät. [7] Hyperbolisessa geometriassa kolmion kulmien suuruudet riippuvat vain sen sivujen pituuksista ja päinvastoin [16]. Näin ollen yhdenmuotoisuus ja yhtenevyys ovat hyperbolisilla kolmioilla sama asia.

Lause 16. Jos kahden hyperbolisen kolmion vastinkulmat ovat yhtä suuret, niin ne ovat hyperbolisesti yhtenevät.



Kuva 27: Yhtenevät kolmiot.

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ ja $\triangle PQR$ kaksi hyperbolista kolmiota, jossa kulmat A ja P ovat yhtä suuret, samoin kulmat B ja Q sekä C ja R . Nämä kolmiot ovat esitetty Kuvassa 27.

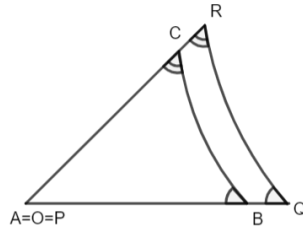
Käytetään sellaista hyperbolista kuvausta, joka kuvaa pisteen A origoon O . Tämä kuvaus säilyttää kolmion kulmien suuruudet. Käytetään tästä muodostuneesta kolmiosta myös nimitystä $\triangle ABC$.

Kuvataan kolmio $\triangle PQR$ kuvauksella, joka kuvaa sen pisteen P origoon O . Jotta kolmioita $\triangle ABC$ ja $\triangle PQR$ voidaan helposti vertailla, niiden tulee olla päällekkäin, eli pisteen B ja Q tulee sijaita keskenään samalla kiekon \mathcal{D} säteellä, samoin kuin pisteiden C ja R . Käytetään ensin hyperbolista kuvausta, joka kiertää hyperbolisen kolmion $\triangle PQR$ origon O ympäri niin, että pisteet B ja Q ovat samalla kiekon \mathcal{D} säteellä. Mikäli piste R ei sijaitse samalla kiekon \mathcal{D} säteellä kuin piste C , peilataan hyperbolinen kolmio $\triangle PQR$ pisteiden O ja B kautta kulkevan hyperbolisen suoran

suhteen. Nyt pisteet R ja C sijaitsevat samalla kiekon \mathcal{D} säteellä. Käytetään tästä hyperbolisesta kolmiosta myös nimitystä $\triangle PQR$.

Osoitetaan, että pisteet $B = Q$ ja $C = R$. Jos näin ei olisi, joko molemmat pisteet ovat eri pisteitä tai vain toinen pisteistä on eri.

- (a) Sivun BC on lähempänä origoa kuin sivu RQ (tai toisin päin), kuten Kuvassa 28.



Kuva 28: Sivun BC on lähempänä origoa kuin sivu RQ .

Koska kahden hyperbolisen suoran välisen kulman suuruus saadaan määritelmän 2 mukaan siinä pisteessä olevien tangenttien välisenä kulmana, niin euklidisella suoralla vieruskulmien summa on π . Tällöin kulmien $\angle RCB$ ja $\angle CBQ$ yhtälöt ovat

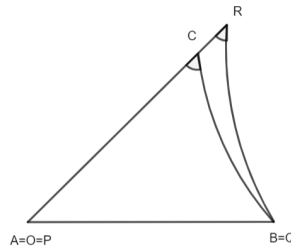
$$\angle RCB = \pi - \angle OCB \text{ ja } \angle CBQ = \pi - \angle OBC.$$

Lasketaan muodostuneen hyperbolisen nelikulmion $\square CBQR$ kulmien summa, jolloin saadaan

$$(\pi - \angle OCB) + (\pi - \angle OBC) + \angle OQR + \angle OQR = 2\pi$$

Lauseen 15 mukaan hyperbolisen nelikulmion kulmien summa on alle 2π , joten syntyy ristiriita.

- (b) Pisteet $B = Q$, mutta pisteet $C \neq R$ (tai toisin päin), kuten Kuvassa 29.



Kuva 29: Pisteet C ja R eivät ole samat.

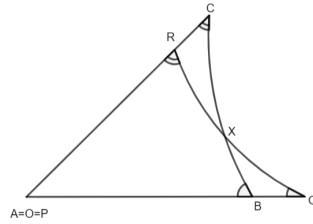
Jos piste C sijaitsee pisteiden O ja R välissä, niin kulma $\angle C$ on pienempi tai yhtä suuri kuin hyperbolisessa kolmiossa $\triangle BCR$ olevien kulmien $\angle B$ ja $\angle R$

summa. Vieruskulmista saadaan yhtälö $\angle BCR + \angle OCB = \pi$. Koska hyperbolisessa kuvauksessa kulmien suuruudet säilyivät, niin $\angle CRB = \angle OCB$, jolloin saadaan

$$\angle BCR + \angle CRB + \angle RBC = \pi - \angle CRB + \angle CRB + \angle RBC > \pi.$$

Näin ollen kolmion kulmien summa on suurempi kuin π , mistä seuraa lauseen 14 mukaan ristiriita.

(c) Sivut BC ja QR leikkaavat toisensa, kuten Kuvassa 30.



Kuva 30: Sivut BC ja QR leikkaavat toisensa.

Olkoon sivujen BC ja QR leikkauspiste piste X . Tällöin kolmion kulma $\angle B$ on pienempi tai yhtä suuri kuin hyperbolisen kolmion $\triangle XBQ$ kulmien $\angle X$ ja $\angle Q$ summa, mistä seuraa b-kohdan tavoin ristiriita.

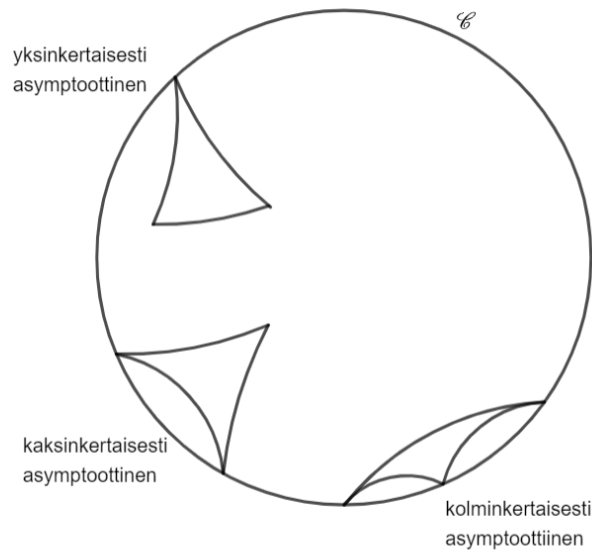
□

Hyperbolisten kolmioiden kulmat sijaitsevat kiekossa \mathcal{D} . Osa kulmista voi kuitenkin sijaita myös kiekon kehällä \mathcal{C} . Tällaista kolmiota, jossa osa kulmista sijaitsee kiekon kehällä \mathcal{C} , kutsutaan asymptoottiseksi kolmioksi.

Kiekon kehällä \mathcal{C} sijaitsevien kulmien määrän perusteella asymptoottiset kolmiot voidaan jakaa kolmeen ryhmään: yksinkertaisesti asymptoottisiin, kaksinkertaisesti asymptoottisiin ja kolminkertaisesti asymptoottisiin hyperbolisiin kolmioihin. Kuvassa 31 on esitetty nämä kaikki erilaiset asymptoottiset hyperboliset kolmiot. Yksinkertaisesti asymptoottisella hyperbolisella kolmiolla vain yksi kulma, kaksinkertaisesti asymptoottisella kaksi ja kolminkertaisesti asymptoottisella kaikki kolme kulmaa sijaitsevat kehällä \mathcal{C} . Kiekon kehän \mathcal{C} pisteitä ei voi kuvata millään kuvauksella kiekkoon \mathcal{D} , joten nämä kolmiot eroavat muista hyperbolisista kolmioista. Seuraava lause kertoo asymptoottisten hyperbolisten kolmioiden kulmien summan.

Lause 17. *Yksinkertaisesti ja kaksinkertaisesti asymptoottisten hyperbolisten kolmioiden kulmien summa on alle π ja kolminkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion kulmien summa on 0.*

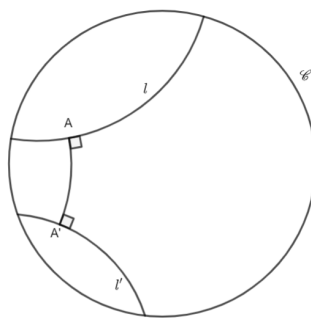
Todistus. Yksinkertaisesti ja kaksinkertaisesti asymptoottisten kolmioiden kulmien suuruuden todistaminen menee samalla tavalla kuin lauseen 14 todistus. Kolminkertaisesti asymptoottisessa hyperbolisessa kolmiossa kulmien suuruudet ovat 0, sillä molemmat kyljet ovat kohtisuorassa kiekon kehää \mathcal{C} kohtaan. □



Kuva 31: Asymptoottiset kolmiot.

Euklidisessa geometriassa kahdella suoralla on olemassa sama normaali jos ja vain jos suorat ovat yhdensuuntaisia. Hyperbolisessa geometriassa hyperbolisten suorien välillä voi olla yhteinen normaali, joskin erilainen kuin euklidisessa geometriassa. Seuraava määritelmä ja lause käsittelevät tätä normaalia.

Määritelmä 19. Olkoon l ja l' kaksi hyperbolista suoraa. Oletetaan, että suoralla l on olemassa sellainen piste A ja suoralla l' piste A' , että jana AA' leikkaa suorat l ja l' suorassa kulmassa. Tällöin jana AA' on hyperbolisten suorien yhteinen normaali.



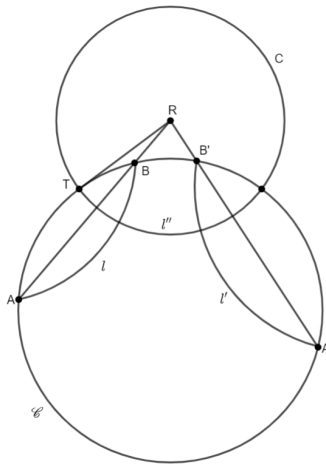
Kuva 32: Kahden hyperbolisen suoran yhteinen normaali AA' .

Kuvassa 32 on esitetty kaksi hyperbolista suoraa, joilla on yhteinen normaali AA' .

Lause 18. *Kahdella hyperbolisella suoralla on yhteinen normaali jos ja vain jos suorat ovat ultrayhdensuuntaiset. Tämä normaali on yksikäsitteinen.*

Todistus. (\Rightarrow) Ensin osoitetaan, että jos kahdella hyperbolisella suoralla l ja l' on yhteinen normaali, niin suorat ovat ultrayhdensuuntaisia. Oletetaan, että suorat l ja l' ovat yhdensuuntaiset. Tällöin ne kohtaavat toisensa kiekon kehällä \mathcal{C} . Olkoon tämä piste P . Piste P ja yhteinen normaali AA' muodostavat yhdessä yksinkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion, jossa on kaksi suoraa kulmaa. Tämän kolmion kulmien summa on π , josta lauseen 17 mukaan seuraa ristiriita.

Oletetaan, että suorat l ja l' leikkaavat toisensa pisteessä P . Tällöin normaalin ja leikkauspisteen välille muodostuu kolmio, jossa on kaksi suoraa kulmaa. Näin ollen sen kulmien summa on $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \angle P > \pi$, josta lauseen 14 mukaan seuraa ristiriita. Näin ollen suorat ovat ultrayhdensuuntaisia.

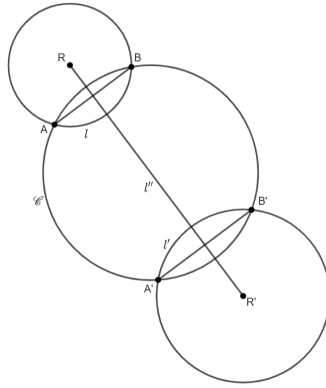


Kuva 33: Janojen AB ja $A'B'$ leikkauspiste syntyy kiekon ulkopuolelle.

(\Leftarrow) Olkoon A ja B hyperbolisen suoran l ja kiekon kehän \mathcal{C} leikkauspisteet, ja vastaavasti olkoon A' ja B' hyperbolisen suoran l' ja kiekon kehän \mathcal{C} leikkauspisteet. Jos euklidiset janat AB ja $A'B'$ eivät ole yhdensuuntaisia, niiden jatkettua suoraa leikkaavat kiekon \mathcal{D} ulkopuolella pisteessä R . Olkoon jana RT kehän \mathcal{C} tangentti.

Tarkastellaan ympyrää C , jonka keskipiste on R ja säde RT . Tämä ympyrä kohtaa kehän \mathcal{C} suorassa kulmassa. Käytetään tästä syntyneestä hyperbolisesta suorasta nimitystä l'' . Tämä kuvio on esitetty Kuvassa 33. Koska pisteet B , A ja T sijaitsevat kiekon kehällä \mathcal{C} ja pisteet R ja T sijaitsevat samalla suoralla samoin pisteet R , A ja B sekä R , A' ja B' , niin pisteen potenssin mukaan sivuille pätee $RA \times RB = RT^2 = RA' \times RB'$. Toisin sanoen inversio ympyrän C suhteen vaihtaa pisteet A ja B sekä A' ja B' päittäin, joten se kuvaa hyperboliset suorat l ja l' itselleen. Tällöin l'' leikkaa suorat l ja l' suorassa kulmassa ja on hyperbolisten suorien yhteinen normaali.

Jos euklidiset janat AB ja $A'B'$ ovat yhdensuuntaisia, kiekolla \mathcal{D} on olemassa halkaisija l'' , joka puolittaa janat AB ja $A'B'$ kohtisuorasti, kuten Kuvassa 34. Tällöin se kulkee euklidisten ympyröiden keskipisteiden R ja R' kautta, joiden kehien osia hyperboliset suorat l ja l' ovat. Näin ollen se leikkaa suorat l ja l' kohtisuorasti. Koska suora l'' on kiekon \mathcal{D} halkaisija, se on hyperbolinen suora ja suorien l ja l' yhteinen normaali.



Kuva 34: Janat AB ja $A'B'$ ovat yhdensuuntaiset.

Enää on todistettava, että normaali on yksikäsitteinen. Oletetaan, että normaaleja on kaksi ja ne eivät leikkaa toisiaan. Tällöin normaalien sekä hyperbolisten suorien l ja l' väliin muodostuu hyperbolinen nelikulmio, jossa kaikki kulmat ovat suorita. Tällöin hyperbolisen nelikulmion kulmien summa on 2π , josta lauseen 15 perusteella seuraa ristiriita. Jos normaalit leikkaavat toisensa, muodostuu hyperbolinen kolmio, jossa on kaksi suoraa kulmaa. Tällöin sen kulmien summa on suurempi kuin π , josta seuraa ristiriita. Näin ollen normaali on yksikäsitteinen. \square

Euklidisen geometrian keskeisimpiä lauseita on Pythagoraan lause. Sitä varten muodostetaan hyperbolikosinin ja -tangentin välille yhtälö.

Lemma 18. *Hyperbolikosinille pätee yhtälö*

$$\cosh(2 \tanh^{-1} x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}.$$

Todistus. Hyperbolikosini $\cosh 2y$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\cosh 2y = \frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y}).$$

Sijoitetaan yhtälöön $y = \tanh^{-1} x$, jolloin yhtälö tulee muotoon

$$\cosh(2 \tanh^{-1} x) = \frac{1}{2}(e^{2 \tanh^{-1} x} + e^{-2 \tanh^{-1} x}).$$

Käytetään yhtälön oikealle puolelle lemmän 16 yhtälöä, jolloin saadaan se muotoon

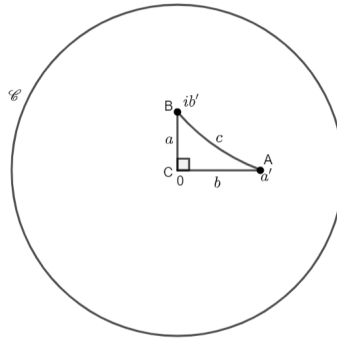
$$\begin{aligned} \cosh(2 \tanh^{-1} x) &= \frac{1}{2} \left(e^{2 \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}} + e^{-2 \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}} \right) \\ &= \frac{1 + x^2}{1 - x^2}. \end{aligned}$$

\square

Lause 19 (Hyperbolisen geometrian Pythagoraan lause). *Olkoon $\triangle ABC$ hyperbolinen kolmio, jossa kulma C on suora. Jos a , b ja c ovat sivujen BC , CA ja BA hyperboliset pituudet, niin pituuksille on voimassa*

$$\cosh 2c = \cosh 2a \times \cosh 2b.$$

Todistus. Oletetaan, että kulma C sijaitsee origossa O , piste A kiekon \mathcal{D} vaakasuoralla halkaisijalla paikassa a' ja piste B sijaitsee pystysuoralla halkaisijalla paikassa ib' . Tässä a' ja b' ovat positiivisia reaalityyppisiä lukuja. Tämä hyperbolinen kolmio on esitetty Kuvassa 35.



Kuva 35: Hyperbolinen suorakulmainen kolmio, jonka kulma sijaitsee origossa.

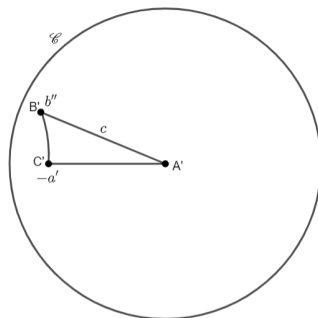
Seurauksen 1 yhtälöstä saadaan pituudet

$$a = \tanh^{-1} b' \text{ ja } b = \tanh^{-1} a'. \quad (22)$$

Selvitetään seuraavaksi sivun AB pituus. Tätä varten tarvitaan Möbius-kuvausta

$$M(z) = \frac{z - a'}{1 - a'z}, \quad (23)$$

joka kuvaa kiekon \mathcal{D} itselleen ja pisteen A origoon pisteeksi A' , pisteen B pisteeksi B' ja pisteen C pisteeksi C' , kuten Kuvassa 36.



Kuva 36: Hyperbolisella kuvauksella saatu hyperbolinen kolmio.

Yhtälöllä (23) pisteen B' sijainniksi b'' saadaan

$$b'' = \frac{ib' - a'}{1 - ia'b'}. \quad (24)$$

Koska hyperbolinen kuvaus säilyttää etäisyydet, sivun $A'B'$ hyperbolinen pituus on sama kuin sivun AB . Tällöin sivun c pituus on $c = \tanh^{-1} |b''|$.

Sijoitetaan lemmän 18 yhtälöön sivujen a ja b pituudet yhtälöstä (22) ja sivun c pituus, jolloin saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} \cosh 2a &= \cosh(2 \tanh^{-1} b') = \frac{1 + (b')^2}{1 - (b')^2}, \\ \cosh 2b &= \cosh(2 \tanh^{-1} a') = \frac{1 + (a')^2}{1 - (a')^2} \text{ ja} \\ \cosh 2c &= \cosh(\tanh^{-1} |b''|) = \frac{1 + |b''|^2}{1 - |b''|^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Yhtälöstä (24) saadaan selvitettyä pisteen b'' itseisarvon toinen potenssi $|b''|^2$, joka on

$$|b''|^2 = \frac{|ib' - a'|^2}{|1 - ia'b'|^2} = \frac{(a')^2 + (b')^2}{1 + (a')^2(b')^2}.$$

Sijoitetaan tämä yhtälö yhtälöön (25), jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \cosh 2c &= \frac{1 + |b''|^2}{1 - |b''|^2} = \frac{1 + \frac{(a')^2 + (b')^2}{1 + (a')^2(b')^2}}{1 - \frac{(a')^2 + (b')^2}{1 + (a')^2(b')^2}} \\ &= \frac{1 + (a')^2 + (b')^2 + (a')^2(b')^2}{1 - (a')^2 - (b')^2 + (a')^2(b')^2} \\ &= \frac{1 + (b')^2}{1 - (b')^2} \times \frac{1 + (a')^2}{1 - (a')^2} \\ &= \cosh(2 \tanh^{-1} b') \times \cosh(2 \tanh^{-1} a') \\ &= \cosh 2a \times \cosh 2b. \end{aligned}$$

□

4.4.2 Hyperbolisen kolmion pinta-ala

Euklidisessa geometriassa kolmion pinta-alan laskemiseksi tarvitaan tietoa kolmion kannasta sekä korkeudesta. Sen sijaan hyperbolisessa geometriassa kolmion pinta-ala lasketaan hyperbolisen kolmion kulmien avulla.

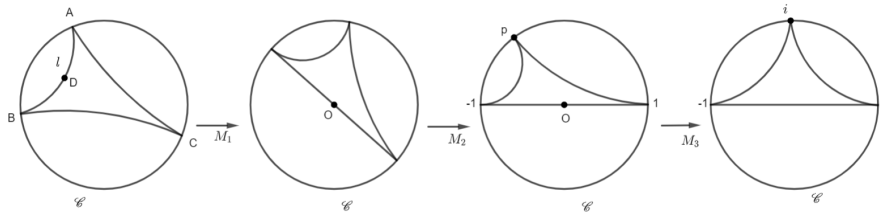
Oletetaan seuraavien pinta-alojen ominaisuuksien pitävän paikkaansa hyperbolisessa geometriassa ilman todistuksia:

- hyperbolisen kolmion pinta-ala on epänegatiivinen ja se on 0 silloin ja vain silloin kun euklidinen pinta-ala on 0
- hyperbolisesti yhtenevillä hyperbolisilla kolmioilla on sama pinta-ala

- hyperbolisesti yhtenevillä asymptoottisilla kolmioilla on sama pinta-ala
- jos hyperbolinen kolmio voidaan sijoittaa toisen hyperbolisen kolmion sisälle, sen pinta-ala on pienempi kuin toisen hyperbolisen kolmion pinta-ala
- pinta-ala on additiivinen, eli toisiaan sivuavien alojen summa on yhtä suuri kuin koko kuvion pinta-ala.

Osoitetaan ensimmäiseksi, että kaikki kolminkertaisesti asymptoottiset hyperboliset kolmiot ovat yhteneviä. Tämän jälkeen osoitetaan, että hyperbolisen kolmion ympärille voidaan piirtää kolminkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio.

Lause 20. *Kaikki kolminkertaisesti asymptoottiset hyperboliset kolmiot ovat hyperbolisesti yhteneviä keskenään.*



Kuva 37: Möbius-kuvaukset, jolla kuvataan kolminkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio.

Todistus. Riittää todistaa, että kolminkertaisesti asymptoottiset hyperboliset kolmiot ovat hyperbolisesti yhteneviä, kun kärkinä on -1 , 1 ja i . Olkoon kolmio $\triangle ABC$ jokin kolminkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio, jolla on kärkipisteet A , B ja C . Olkoon hyperbolinen suora l hyperbolisen kolmion sivu AB , ja olkoon D jokin suoran l piste, joka sijaitsee kiekossa \mathcal{D} .

Lemman 14 mukaan on olemassa sellainen hyperbolinen kuvaus M_1 , joka kuvaa pisteen D origoon O . Tämä hyperbolinen kuvaus M_1 kuvaa sivun AB kiekon \mathcal{D} halkaisijaksi.

Olkoon hyperbolinen kuvaus M_2 kierto origon O ympäri, joka kuvaa pisteen A kuvan pisteeseen -1 ja pisteen B kuvan pisteeseen 1 . Olkoon pisteen C kuva kuvauksessa $M_2 \circ M_1$ piste p , joka sijaitsee kehällä \mathcal{E} kiekon yläosassa. Kaikilla reaalityyppisillä $m \in (-1, 1)$ hyperbolinen kuvaus

$$M_3(z) = \frac{z - m}{1 - mz}$$

kuvaa kiekon \mathcal{D} itselleen ja kehän \mathcal{E} itselleen. Samoin se kuvaa pisteen -1 ja 1 itselleen. Tällöin pisteen p kuva on

$$M_3(p) = \frac{p - m}{1 - mp}.$$

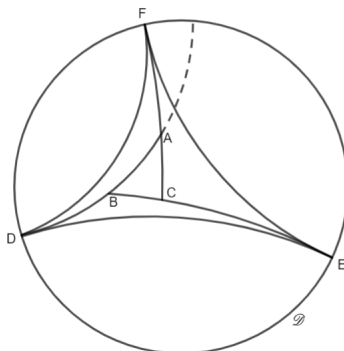
Valitaan

$$m = \frac{p - i}{1 - pi}, \quad (26)$$

jolloin piste p kuvautuu pisteeseen i . Koska $|p| = 1$ ja $\text{Im } p > 0$, voidaan osoittaa, että yhtälöllä (26) saatu vakion m arvo on reaalinen ja se sijaitsee pisteiden -1 ja 1 välissä.

Yhdistetään kaikki kolme hyperbolista kuvausta yhdistetyksi kuvaukseksi $M_3 \circ M_2 \circ M_1$. Tämä kuvaus kuvaa kolminkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion $\triangle ABC$ kolminkertaisesti asymptoottiseksi hyperboliseksi kolmioksi, jonka kärjet ovat pisteissä -1 , 1 ja i . Nämä hyperboliset kuvaukset ovat esitetty Kuvassa 37. Kaikille kolminkertaisesti asymptoottiselle hyperboliselle kolmiolle voidaan tehdä vastaavanlaiset hyperboliset kuvaukset, jolloin kaikki kolminkertaisesti asymptoottiset hyperboliset kolmiot voidaan kuvata kolmioksi, jossa kärjet ovat pisteissä -1 , 1 ja i . Näin ollen kaikki kolminkertaisesti asymptoottiset hyperboliset kolmiot ovat yhteneviä keskenään. \square

Lause 21. *Olkkoon $\triangle ABC$ hyperbolinen kolmio. On olemassa kolminkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio $\triangle DEF$, jonka sisällä on hyperbolinen kolmio $\triangle ABC$.*



Kuva 38: Hyperbolinen kolmio $\triangle ABC$ kolmion $\triangle DEF$ sisällä.

Todistus. Ensin konstruoidaan kolminkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio $\triangle DEF$ seuraavasti: Jatketaan janaa AB pisteestä B leikkaamaan kehä \mathcal{C} pisteessä D , janaa BC pisteestä C kehälle \mathcal{C} pisteeseen E ja janaa CA pisteestä A kehälle \mathcal{C} pisteeseen F . Yhdistetään nyt kehän \mathcal{C} pisteet D , E ja F kolminkertaisesti asymptoottiseksi hyperboliseksi kolmioksi $\triangle DEF$. Nämä kolmiot on esitetty Kuvassa 38.

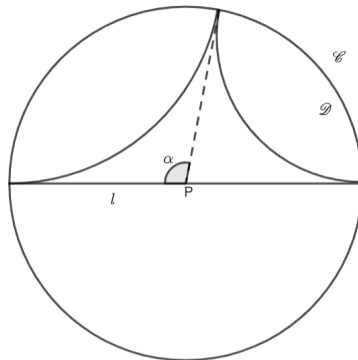
Yhdistetään pisteet A , B ja D hyperbolisella suoralla, joka jatkuu kehälle \mathcal{C} . Tällöin suoran toiselle puolelle jää hyperbolinen kolmio $\triangle ABC$ ja toiselle puolelle hyperbolinen kolmio $\triangle DAF$. Näin ollen ne eivät leikkaa toisiaan. Tehdään kahdelle muulle hyperbolisen kolmion $\triangle ABC$ sivuille samoin. Tällöin saadaan, että hyperboliset kolmiot $\triangle EBD$ ja $\triangle ABC$ eivät ole päällekkäin. Vastaavasti hyperboliset

kolmiot $\triangle FCE$ ja $\triangle ABC$ eivät ole päällekkäin. Lisäksi mitkään hyperbolisista kolmioista $\triangle DAF$, $\triangle EBD$ ja $\triangle FCE$ eivät ole päällekkäin, jolloin hyperbolinen kolmio $\triangle ABC$ sisältyy hyperboliseen kolmioon $\triangle DEF$. \square

Osoitetaan seuraavissa lauseissa, että kolminkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion pinta-ala on äärellinen ja muiden hyperbolisten kolmioiden pinta-ala riippuu ainoastaan kiekossa \mathcal{D} olevista kulmista.

Lause 22. *Kaikkien kolminkertaisesti asymptoottisten hyperbolisten kolmioiden pinta-ala on sama ja se on äärellinen.*

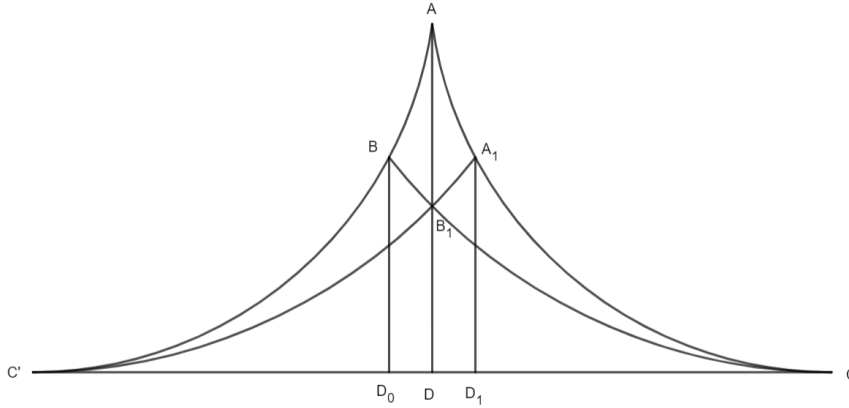
Todistus. Todistetaan ensin, että kolminkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio voidaan jakaa kahteen kaksinkertaisesti asymptoottiseen suorakulmaiseen hyperboliseen kolmioon. Olkoon l kolminkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion sivu, joka on kiekon \mathcal{D} halkaisija. Olkoon P jokin suoran l piste, josta piirretään jana sivun l vastaiseen kulmaan. Tällöin kolminkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio on saatu jaettua kahteen kaksinkertaisesti asymptoottiseen hyperboliseen kolmioon, kuten Kuvassa 39. Kun pistettä P liikutetaan sivua l pitkin, saadaan kulman α suuruutta muutettua $\pi \rightarrow 0$. Tällöin täytyy olla kohta, jossa kulman suuruus on $\frac{\pi}{2}$. Näin ollen kun jokaiselta kolminkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion sivulta etsitään tällainen piste, jossa janan ja sivun välinen kulma on suora, jانات jakavat kolmion kuuteen yksinkertaisesti asymptoottiseen hyperboliseen kolmioon. Tällöin riittää todistaa, että yksinkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion pinta-ala on äärellinen.



Kuva 39: Kolminkertaisesti asymptoottinen kolmio, joka voidaan jakaa kahteen hyperboliseen kolmioon.

Olkoon kolmio $\triangle ABC$ yksinkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio, jonka kärki C sijaitsee kehällä \mathcal{E} . Jatketaan kolmion sivua AB kiekon kehälle \mathcal{E} , jonka se leikkaa pisteessä C' , ja puolitetaan kulma $\angle BAC$ janalla AD , missä piste D sijaitsee janalla CC' . Tällöin kaksinkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio $\triangle AC'C$ saadaan jaettua kahdeksi suorakulmaiseksi hyperboliseksi kolmioksi. Seuraavaksi peilataan kolmio $\triangle BAC$ janan AD suhteen. Koska sivu AB on äärellisen pituinen ja jana AC on äärettömän pituinen, niin peilaus kuvaa pisteen B sivun AC

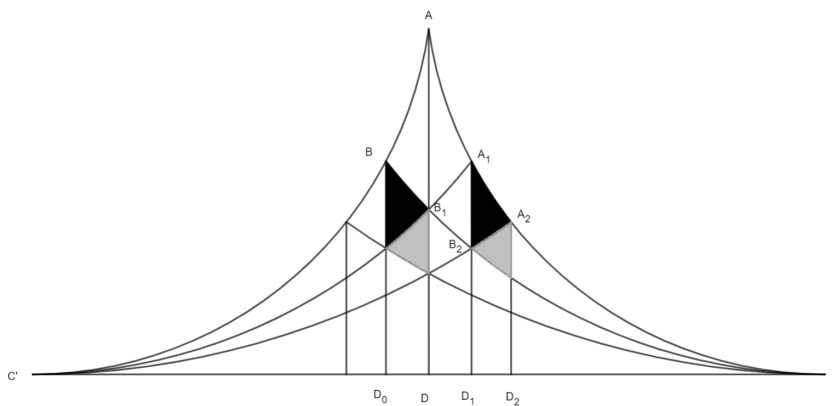
pisteeksi A_1 . Peilaus kuvaa myös janan BC janaksi A_1C' . Nämä janat BC ja A_1C' leikkaavat toisensa pisteessä B_1 , joka sijaitsee janalla AD . Muodostunut kuvio on esitetty Kuvassa 40.



Kuva 40: Hyperbolinen viisikulmio kaksinkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion sisällä.

Puolitetaan kulma $\angle C'BC$ janalla BD_0 , missä piste D_0 sijaitsee janalla $C'C$. Puolitetaan myös kulma $\angle C'A_1C$ janalla A_1D_1 , missä piste D_1 sijaitsee janalla $C'C$. Tällöin kaksinkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion sisälle on muodostunut hyperbolinen viisikulmio $AA_1D_1D_0B$, jonka piiri sijaitsee kiekossa \mathcal{D} . Tämä muodostunut viisikulmio voidaan havaita myös Kuvasta 40. Lisäämällä janat B_1D_0 ja B_1D_1 voidaan hyperbolinen viisikulmio jakaa kahdeksaan hyperboliseen kolmioon, joilla kaikilla on äärellinen pinta-ala.

Osoitetaan, että yksinkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio $\triangle BAC$ voidaan hajottaa ja koota hyperbolisen viisikulmion sisälle. Tällöin sen pinta-ala on pienempi tai yhtä suuri kuin viisikulmion pinta-ala, eli äärellisen kokoinen.



Kuva 41: Yhteneviä hyperbolisia kolmioita kaksinkertaisesti asymptoottisessa kolmiossa.

Peilataan ensin hyperbolinen kolmio $\triangle B_1A_1C$ janan A_1D_1 suhteen. Tällöin piste B_1 kuvautuu pisteeksi A_2 , joka sijaitsee janalla A_1C , ja sivu B_1C kuvautuu janaksi A_2C' , joka leikkaa janat B_1C ja A_1D_1 pisteessä B_2 . Kolmio $\triangle B_2A_1A_2$ on yhtenevä usean viisikulmiossa olevan kolmion kanssa. Helppouden vuoksi valitaan käsiteltäviksi kolmioiksi Kuvassa 41 näkyvät mustat kolmiot. Toistetaan sama kolmiolle $\triangle B_2A_2C$, eli jaetaan kolmio $\triangle B_2A_2C$ janalla A_2D_2 , jossa piste D_2 sijaitsee janalla $C'C$. Harmaat kolmiot Kuvassa 41 kuvastavat saatuja yhteneviä kolmioita, joista toinen sijaitsee kolmiossa $\triangle ABC$ ja toinen hyperbolisessa viisikulmiossa. Jos tätä edellä kuvattua jatkettaisiin äärellisen monta kertaa, saataisiin kolmio $\triangle B_{n+1}A_{n+1}C$, joka on saatu kolmiosta B_nA_nC . Jokaisesta hyperbolisessa peilauksessa saadaan kaksi uutta kolmiota, joista toinen sijaitsee hyperbolisen kolmion $\triangle ABC$ sisällä ja toinen hyperbolisen viisikulmion sisällä. Nämä kolmiot ovat yhteneviä, sillä ne on saatu peräkkäisillä hyperbolisilla peilauksilla janoille $A_{n+1}D_{n+1}$, A_nD_n , ..., A_1D_1 ja AD .

Tällä tavalla on saatu koottua yksinkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio hyperbolisen viisikulmion sisälle, jolloin yksinkertaisesti asymptoottisella hyperbolisella kolmiolla $\triangle ABC$ täytyy olla äärellinen pinta-ala. Koska lauseen 20 perusteella kaikki kolminkertaisesti asymptoottiset hyperboliset kolmiot ovat yhteneviä ja yhtenevillä hyperbolisilla kolmioilla on sama pinta-ala, niin kaikilla kolminkertaisesti asymptoottisilla hyperbolisilla kolmioilla on äärellinen pinta-ala, joka on kaikilla sama. \square

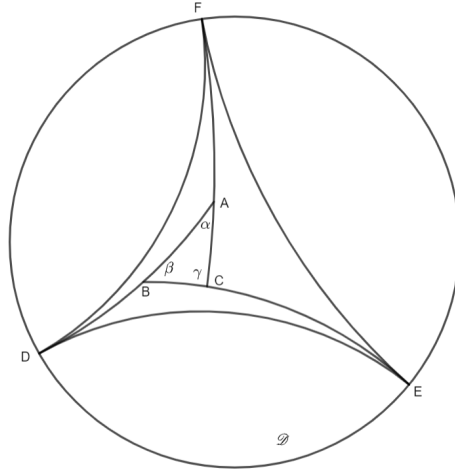
Lemma 19. *Kaksinkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion pinta-ala riippuu ainoastaan kulmasta, joka sijaitsee kiekossa \mathcal{D} .*

Todistus. Olkoon kolmio $\triangle ABC$ kaksinkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio, jossa A on kulma, joka ei sijaitse kehällä \mathcal{C} . Olkoon $\alpha = \angle BAC$. Tällöin lemmän 13 mukaan on olemassa hyperbolinen kuvaus, joka kuvaa kiekon \mathcal{D} ja kehän \mathcal{C} itselleen, pisteen A origoon O , pisteen B pisteeksi B' ja pisteen C pisteeksi C' . Möbius-kuvaus kuvaa tällöin kaksinkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion toiseksi kaksinkertaisesti asymptoottiseksi hyperboliseksi kolmioksi $\triangle OB'C'$. Koska hyperbolinen kuvaus säilyttää kulmien väliset suuruudet, niin kulma $\angle B'OC' = \alpha$.

Oletetaan, että on toinen kaksinkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio, joka kuvautuu sopivalla hyperbolisella kuvauksella toiseksi kaksinkertaisesti asymptoottiseksi hyperboliseksi kolmioksi, jonka kulma origossa on α . Tämä hyperbolinen kolmio saada hyperboliseksi kolmioksi $\triangle OB'C'$ sopivalla hyperbolisella kierroilla. Näin ollen jokainen kaksinkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio, jolla on kiekossa \mathcal{D} kulma α , on hyperbolisesti yhtenevä kolmion $\triangle OB'C'$ kanssa, jolloin niillä on sama pinta-ala kuin kolmiolla $\triangle OB'C'$. Siis kaksinkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion pinta-ala riippuu ainoastaan kulmasta, joka sijaitsee kiekossa \mathcal{D} . \square

Euklidisessa geometriassa kolmion pinta-ala voidaan laskea kaavalla $\text{ala}(\Delta) = \frac{1}{2}ab$, missä a ja b ovat kolmion kanta ja korkeus. Seuraavaksi osoitetaan, että hyperbolisen kolmion pinta-ala lasketaan kulmista ja sen kaava on $\text{ala}(\Delta) = K(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$, missä Δ on hyperbolinen kolmio.

Lause 23. *Hyperbolisen kolmion, jonka kulmat ovat α , β ja γ , pinta-ala voidaan laskea kaavalla $\text{ala}(\Delta) = K(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$, missä vakio K on sama kaikille hyperbolisille kolmioille.*



Kuva 42: Hyperbolinen kolmio $\triangle ABC$ ja kolminkertaisesti asymptoottinen kolmio $\triangle DEF$.

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ hyperbolinen kolmio, jonka kulma α sijaitsee kärjessä A , β kärjessä B ja γ kärjessä C . Jatketaan janaa AB pisteeseen D , joka sijaitsee kehällä \mathcal{C} . Jatketaan vastaavasti janaa BC pisteeseen E ja janaa CA pisteeseen F . Pisteet E ja F sijaitsevat myös kehällä \mathcal{C} . Tämä kuvio on esitetty Kuvassa 42. Koska hyperbolinen kolmio $\triangle DEF$ on kolminkertaisesti asymptoottinen, lauseen 22 mukaan sen pinta-ala on äärellinen.

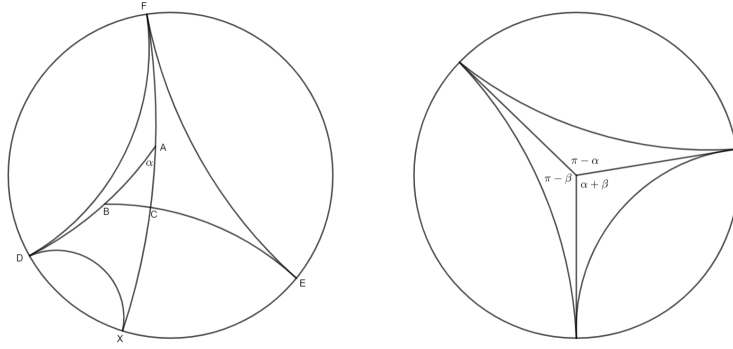
Lemman 19 mukaan kaksinkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion pinta-ala riippuu ainoastaan sen kulman suuruudesta, joka sijaitsee kiekossa \mathcal{D} . Määritellään seuraavaksi funktio f , joka on kaksinkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion pinta-ala kiekossa \mathcal{D} sijaitsevan kulman vieruskulman θ funktiona, jolloin kaksinkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion pinta-ala on $f(\theta)$. Kuvan 43 vasemmanpuolisesta kuvasta nähdään, että kaksinkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion $\triangle FAD$ vieruskulmaa vastaa kulma α , jolloin sen pinta-ala on $f(\alpha)$.

Jatketaan janaa FAC kiekon kehälle \mathcal{C} pisteeseen X . Tällöin kolmio $\triangle DXF$ on kolminkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio, joka koostuu kahdesta kaksinkertaisesti asymptoottisesta hyperbolisesta kolmiosta $\triangle FAD$ ja $\triangle DAX$. Merkitään jokaista kolminkertaisesti asymptoottisen kolmion pinta-alaa kirjaimella k , sillä lauseen 22 mukaan kaikkien kolminkertaisesti asymptoottisten kolmioiden pinta-alat ovat samat. Näin ollen kolmion $\triangle DAX$ pinta-ala on $f(\pi - \alpha)$, sillä pisteessä A olevan kulman vieruskulma on $\pi - \alpha$, jolloin saadaan hyperbolisen kolmion $\triangle DXF$ pinta-alalle yhtälö

$$k = f(\alpha) + f(\pi - \alpha), \quad (27)$$

joka siis vastaa kaikkien kolminkertaisesti asymptoottisten hyperbolisten kolmioiden pinta-alaa.

Seuraava tavoite on löytää funktiolle f tarkka kaava. Piirretään kiekolle \mathcal{D} säde keskipisteestä johonkin kehällä \mathcal{C} sijaitsevaan kulmaan. Tällöin kolminkertaisesti asymptoottinen hyperbolinen kolmio voidaan jakaa kolmeen kaksinkertaisesti



Kuva 43: Kolminkertaisesti asymptoottiset kolmiot sekä niiden kulma origossa.

asymptoottiseen hyperboliseen kolmioon. Tämä on esitetty Kuvan 43 oikealla puolella. Merkitään pisteeseen O muodostuneiden kulmien suuruuksia $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ ja $\alpha + \beta$, jolloin yhtälö (27) tulee muotoon

$$k = f(\alpha) + f(\beta) + f(\pi - (\alpha + \beta)). \quad (28)$$

Sijoitetaan yhtälöön (27) kulman α paikalle $\alpha + \beta$, jolloin se tulee muotoon $f(\pi - (\alpha + \beta)) = k - f(\alpha + \beta)$. Kun tämä yhtälö sijoitetaan yhtälöön (28), saadaan

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) + k - f(\alpha + \beta) &= k \\ f(\alpha) + f(\beta) &= f(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Koska funktio f on jatkuva, se on lineaarinen, jolloin $f(\alpha) = \lambda\alpha$ jollain vakiolla λ . Sijoitetaan tämä yhtälöön (27), jolloin se tulee muotoon

$$\lambda(\alpha) + \lambda(\pi - \alpha) = k,$$

missä $\lambda = \frac{k}{\pi}$. Tällöin $f(\alpha) = \frac{k}{\pi}\alpha$.

Hyperbolisen kolmion $\triangle ABC$ pinta-ala saadaan nyt vähentämällä kolminkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion $\triangle DEF$ pinta-alasta kolmen kaksinkertaisesti asymptoottisen hyperbolisen kolmion pinta-alojen summa. Koska nämä neljä pinta-alaa ovat k , $f(\alpha)$, $f(\beta)$ ja $f(\gamma)$, saadaan

$$\begin{aligned} \text{ala}(\triangle ABC) &= k - (f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)) \\ &= k - \left(\frac{k}{\pi}\alpha + \frac{k}{\pi}\beta + \frac{k}{\pi}\gamma \right) \\ &= K(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)), \end{aligned}$$

missä $K = \frac{k}{\pi}$. □

Tämän yhtälön kaava tunnetaan myös nimellä Gaussin-Bonnet'n kaava [1, s. 172]. Samassa lähteessä on esitetty vastaavia hyperbolisen geometrian perustuloksia kuin tässä työssä, mutta käyttäen Poincarén puolitasomallia.

Viitteet

- [1] J. Anderson: *Hyperbolic Geometry, 2. painos*, Springer, London, 2005
- [2] A. F. Beardon: *Algebra and Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005
- [3] D. Brannan, M. Esplen & J. Gray: *Geometry, 2. painos*, Cambridge University Press, New York, 2011
- [4] H. S. M. Coxeter: *Non-Euclidean Geometry*, Mathematical Association of America, Washington, 1998
- [5] M. Dillon: *Geometry Through History: Euclidean, Hyperbolic, and Projective Geometries*, Springer, Cham, 2018
- [6] M. J. Greenberg: *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History, 4. painos*, W. H. Freeman and Company., New York, 2008
- [7] D. E. Joyce (toim.): Euclid's elements, nettisivusto. Saatavilla osoitteessa:
<https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html>, luettu 21.2.2022
- [8] A. Liddle: *An introduction to Modern Cosmology*, Wiley, England, 2015
- [9] S. Paulson, S. J. Gates & M. Wertheim: *The mystery of our mathematical universe*, Annals of the New York Academy of Sciences Vol.1458(1), 2019
- [10] A. Perkopa & E. Molnar: *Non-Euclidean Geometries: Janos Bolyai Memorial Volume*, Springer US, Boston, 2005
- [11] P. Pirolli, S. Card & M. Van Der Wege: *The effect of information scent on visual search in the hyperbolic tree browser*, ACM transactions on computer-human interaction Vol.10(1), 2003
- [12] Z. Sameil & J. Mahdi: *Application of hyperbolic geometry in link prediction of multiplex networks*, Scientific reports Vol.9(1), Nature Publishing Group, England, 2019
- [13] D. Simic, F. Maric & P. Boutru: *Formalization of the Poincaré Disc Model of Hyperbolic Geometry*, Journal of automated reasoning Vol.65(1), Springer Netherlands, Dordrecht, 2020
- [14] J. Stillwell: *Sources of Hyperbolic Geometry*, American Mathematical Society, London, 1996
- [15] I. E. Leonard, J. E. Lewis, A. C. F. Liu, G. W. Tokarsky & E. Leonard: *Classical Geometry: euclidean, transformational, inversive and projective, 1. painos*, Wiley, New Jersey, 2014
- [16] M. Trnkova: *Hyperbolic flowers*, Journal of mathematics and the arts Vol.14(3), Taylor & Francis, 2020

[17] C. Walkden: *Hyperbolic geometry*, luentomoniste, The University of Manchester, 2019. Saatavilla osoitteessa:

https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/charles.walkden/hyperbolic-geometry/hyperbolic_geometry_1920.pdf luettu: 21.2.2022