Turun yliopisto
University of Turku

Joustava rationaalilukukäsite ja spontaani huomionkiinnittäminen määrällisiin suhteisiin lukiolaisilla

Kasvatustieteen
pro gradu -tutkielma

Laatija:
Pauliina Salonen

Ohjaaja:
Professori Minna Hannula-Sormunen

4.5.2022
Turku

Pro gradu -tutkielma

Oppiaine: Kasvatustiede

Tekijä: Pauliina Salonen

Otsikko: Joustava rationaalilukukäsite ja spontaani huomionkiinnittäminen määrällisiin suhteisiin lukiolaisilla

Ohjaaja: professori Minna Hannula-Sormunen

Sivumäärä: 56 sivua ja kaksi liitesivua

Päivämäärä: 4.5.2022

Tässä tutkimuksessa tutkittiin lukion ensimmäisen vuosikurssin opiskelijoiden joustavia rationaalilukukäsitetaitoja ja spontaania huomionkiinnittämistä määrällisiin suhteisiin. Tarkemmin tutkittiin, millaiset rationaalilukukäsitetaidot ja spontaanit huomionkiinnittämistaipumukset lukiolaisilla on, onko kyseisillä taidoilla yhteyttä toisiinsa ja onko sillä vaikutusta, opiskeleeko vastaaja pitkää vai lyhyttä matematiikkaa. Tutkimus toteutettiin aiempien tutkimusten mukaisilla tehtävillä ja vastaukset pisteytettiin niiden mukaisten pisteytysohjeiden avulla.

Tutkimukseen osallistui 114 lukiolaista kolmesta eri lukiosta ja neljästä eri opetusryhmästä. Testaus suoritettiin suomen kielen tunnilla opettajan ohjeistamana tutkijan lähettämien kirjallisten ohjeiden perusteella. Analysointi tehtiin SPSS-ohjelmalla, jossa käytettiin T-testiä, Mann-Whitneyn U-testiä ja Spearmanin korrelaatiotestiä. Lisäksi tarkasteltiin ohjelman antamia kuvailevia statistiikkoja ja normaalijakautuneisuutta Kolmogorov-Smirnovin testillä.

Tulosten perusteella suurin osa lukiolaisista kiinnitti huomiota määrällisiin suhteisiin, vaikkakin spontaani huomionkiinnittäminen määrällisiin suhteisiin oli kokonaisuudessaan melko vähäistä. Joustavat rationaalilukukäsitetaidot vaihtelivat hyvin paljon yksilökohtaisesti eikä keskiarvo ollut kovin korkea, mutta myös tässäkin osiossa suurin osa sai jonkin verran pisteitä eikä jäänyt kokonaan pisteittä. Joustavilla rationaalilukukäsitetaidoilla huomattiin olevan kohtalainen positiivinen yhteys spontaaniin huomionkiinnittämiseen määrällisiin suhteisiin. Pitkän matematiikan opiskelijoiden joustavat rationaalilukukäsitetaidot olivat tilastollisesti merkitsevästi paremmat kuin lyhyen matematiikan opiskelijoiden taidot. Tutkimus antaa viitteitä siihen suuntaan, että opetuksessa kannattaisi pyrkiä korostamaan spontaaneja huomionkiinnittämistaitoja matemaattisiin piirteisiin, joustavaa osaamista matematiikan suhteen ja matematiikan käyttöä arjessa vielä lukiossakin. Matematiikan opetusta olisi hyvä yleisellä tasolla monipuolistaa ja luoda mahdollisuuksia informaalimpien ja soveltavampien tilanteiden esille tuomiseen sekä niiden liittämiseen osaksi matematiikan maailmaa.

Avainsanat: Spontaani huomionkiinnittäminen määrällisiin suhteisiin (SFOR), joustava asiantuntijuus, joustava rationaalilukukäsite (ARNK), rationaaliluvut, multiplikatiivisuus, osakokonaisuus, murtoluvut ja matemaattinen ajattelu.

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan, mitä yhteyksiä on joustavalla asiantuntijuudella matematiikassa ja spontaanilla huomionkiinnittämisellä määrällisiin suhteisiin. Molemmat termit ovat keskeisiä matemaattisen osaamisen ja sen kehittymisen näkökulmasta. Tutkimuksessa joustavan asiantuntijuuden kontekstina käytetään rationaalilukuja, joihin kuuluvat luvut, jotka voidaan esittää murtolukumuodossa. Tutkimuksessa tarkastellaan spontaanisti huomioitavia määrällisiä suhteita murtolukujen, osa-kokonainen -suhteiden ja multiplikatiivisuuden eli kerrannaisuuden kautta, sillä ne ovat rationaalilukujenkin näkökulmasta keskeisiä osa-alueita. Aiheita on aiemmin tutkittu erityisesti rationaalilukujen näkökulmasta ja sen piiristä on löydetty merkityksellisiä yhteyksiä sekä kausaalisuhteita, minkä vuoksi rationaalilukujen aihepiiri koettiin järkeväksi aihealueeksi myös tässä tutkimuksessa. Kohderyhmäksi rajataan lukion ensimmäisen vuoden opiskelijat, sillä aiempia tutkimuksia samoilla tutkimustehtävillä on tehty vain nuoremmilla lapsilla ja aikuisilla. Lukion ensimmäisen vuosikurssin opiskelijat eivät vielä ole ehtineet syvemmin eriytymään pitkän ja lyhyen matematiikan ryhmiin, sillä ensimmäinen matematiikan kurssi on kaikille yhteinen ja heillä on vielä suurin osa kursseista edessäpäin. Lukioikäiset ovat opiskelleet matematiikkaa koko peruskoulun oppimäärän verran ja lukiossa matematiikan eri aiheita kerrataan, joten matematiikka on läsnä heidän elämässään sekä opinnoissa että arjessa. Ensimmäisen vuosikurssin opiskelijoita kaikilla on vielä aika lailla samat lähtökohdat opiskeltuja matematiikan oppimääriä ja aiheita ajatellen. Keskeisiä käsitteitä tässä tutkimuksessa ovat spontaani huomionkiinnittäminen määrällisiin suhteisiin (SFOR), joustava asiantuntijuus ja tarkemmin joustava rationaalilukukäsite (ARNK) eli joustava asiantuntijuus rationaaliluvuilla, rationaaliluvut ja matemaattinen ajattelu. Tarkoituksena on tutkia, millaiset joustavat rationaalilukukäsitetaidot ja spontaanit huomionkiinnittämistaipumukset määrällisiin suhteisiin lukiolaisilla on. Lisäksi tutkitaan, ovatko joustavat rationaalilukukäsitetaidot ja spontaanit huomionkiinnittämistaipumukset määrällisiin suhteisiin keskenään yhteydessä ja onko pitkän ja lyhyen matematiikan valinneiden välillä eroja kyseisissä ominaisuuksissa.

Pitkän matematiikan merkitys on kasvanut moniin jatko-opintopaikkoihin hakiessa niin, että sen voidaan sanoa olevan tärkein ylioppilaskirjoituksissa kirjoitettava oppiaine. Yliopistoon hakiessa pitkän matematiikan ylioppilasarvosanoista saa eniten pisteitä kaikkiin hakukohteisiin todistusvalintavaiheessa, jos verrataan muista oppiaineista saatavia ylioppilasarvosanapisteitä (Opintopolku, 2021). Matemaattisten taitojen korostamisen myötä onkin mielenkiintoista tutkia, millaista matemaattista osaamista ja havainnointia lukiolaisilla on. Joustavasti sovellettavissa olevaa osaamista korostetaan monien maiden opetussuunnitelmissa (Mullis, Martin, Goh, & Cotter, 2016 artikkelissa McMullen, Hannula-Sormunen, Lehtinen & Siegler, 2020). Lukion opetussuunnitelman perusteissa (2019) (myöhemmin LOPS 2019) korostetaan matematiikan kohdalla joustavuutta, arkielämään liittämistä ja oppilaiden omaan maailmaan tuomista (LOPS, 2019, s.221–222). Myös perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014) (myöhemmin POPS 2014) matematiikan opetuksessa korostetaan vaihtelevia työtapoja, toiminnallisuutta, oppilaan arkielämään integroimista ja käytännön sovelluksien ymmärtämistä (POPS, 2014, s.234–237, 128–130, 374–376). Matematiikka ei arkitilanteissa tai edes kirjoissa esiinny aina samanlaisena kuin se on oppitunnilla esitetty eikä oppitunnin osaamista välttämättä osaa siirtää ja soveltaa muissa yhteyksissä, jos ei ymmärrä, miksi jotain on tehty. Hatanon (1987) mukaan monet osaavat laskea laskuja ja tietävät mitä keinoja käyttää, mutta eivät ymmärrä, mitä prosessissa tarkalleen tapahtuu ja miksi niin tehdään. Tällöin osaamista on hankala soveltaa tilanteisiin, joissa on uudenlaisia ongelmia ja vaaditaan erilaisia tehtävänratkaisutyylejä (Hatano, 1987). Joustavaa asiantuntijuutta on hyvä tutkia, jotta saataisiin kehitettyä joustavaa osaamista opetuksessa. Perusopetussuunnitelman perusteiden (2014) matematiikan laaja-alaisissa tavoitteissa kehotetaan oppilaita suhtautumaan uusiin mahdollisuuksiin avoimesti ja toimimaan kaikissa tilanteissa joustavasti ja luovasti. Lisäksi korostetaan aloitteellisuutta ja erilaisten vaihtoehtojen etsimistä. (POPS, 2014, s. 24). Joustavassa asiantuntijuudessa korostuvat samat asiat. Joustavalla asiantuntijalla on vahva käsitteellinen ymmärrys siitä, miksi ja miten jokin pitää tehdä, jotta saadaan tarvittava ratkaisu (Hatano, 1987). Joustava asiantuntija osaa valita tilanteeseen sopivan strategian ja soveltaa sitä uuteen tilanteeseen (Hatano, 1987).

Arjen monissa tilanteissa matematiikka tulee vastaan. Kaupassa voi miettiä, montako tomaattia tarvitsee tiettyyn ruokaohjeeseen tai kuinka monen henkilön kesken jäätelöpaketin voi jakaa. Monet tilanteet arjessa eivät ole pelkästään matemaattisia, mutta lukumäärät tai matemaattiset toiminnot voivat silti tulla tilanteissa mieleen ja niiden mukaan voi toimia. Tällaisissa tilanteissa on kyse spontaanista huomionkiinnittämisestä lukumääriin (Spontaneous Focusing On Numerosity eli SFON) tai määrällisiin suhteisiin (Spontaneous Focusing On Relations eli SFOR) (McMullen, Chan, Mazzocco & Hannula-Sormunen, 2019). Spontaanien matemaattisten toimintojen on todettu olevan positiivisesti yhteydessä esimerkiksi parempaan rationaalilukutietämykseen, rationaalilukuosaamisen ja aritmeettisten taitojen kehittymiseen sekä osittain kehittyneempään murtolukuosaamiseen (Hannula-Sormunen, Lehtinen & Lepola, 2010; McMullen & Siegler, 2020; McMullen, Hannula-Sormunen, Laakkonen & Lehtinen, 2016; Van Hoof, Degrande, Verschaffel, Hannula-Sormunen, McMullen, Van Dooren & Lehtinen, 2016). Spontaani huomionkiinnittäminen matemaattisiin piirteisiin kehittää matemaattisia taitoja, joiden kehittyminen lisää spontaania huomionkiinnittämistä matemaattisiin piirteisiin, joten kyse on eräänlaisesta kehästä, jossa molemmat yhä vahvistavat toisiaan lisääntyessään (McMullen & Siegler, 2020).

Matematiikkaa voi käyttää monenlaisissa tilanteissa aina yhteiskunnallisten ongelmien ratkaisemisesta alennusmyyntien hintojen laskemiseen ja ruokaostosten tekemiseen. Matemaattinen ajattelu on itse matematiikkaa laajempi käsite ja vaikuttaa moniin arjen toimintoihin, kuten loogiseen ajatteluun ja erilaisten ratkaisumenetelmien löytämiseen. Matematiikan asema elämässä ja arjessa onkin suurempi kuin voisi päältä päin ajatella. Matematiikan opetus kehittää oppilaiden taitoja käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia (POPS, 2014, s. 128, 234, 374). Matematiikan osaaminen on tärkeä tekijä menestymisessä akateemisesti, taloudellisesti ja yleisesti elämässä (Rittle-Johnson, 2017). Menestyminen matematiikassa on tutkitusti yhteydessä opiskelemiseen yliopistossa, korkeampaan tulotasoon ja parempien terveysvalintojen tekemiseen (Rittle-Johnson, 2017). Matematiikkaa käytetään keskeisenä välineenä monilla eri tieteen aloilla, kuten luonnontieteissä ja kauppatieteissä. Vähänkään monimutkaisempia fysiikan ongelmia on mahdotonta ratkaista ilman matemaattista osaamista eikä esimerkiksi talouskasvujen ennusteita voi tehdä ilman matemaattisten mallien käyttöä. Lisäksi yleisesti kaikessa ongelmanratkaisussa tarvittavat taidot vaativat loogista ajattelua, joka on yksi matematiikan opetuksen tärkeistä aiheista (POPS, 2014, s. 128).

Matematiikan osaamisessa on eroja, jotka alkavat eriytyä jo varhaisessa vaiheessa, mutta kulminoituvat lukiokoulutuksen loppua kohden (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017). Suuri osa lukion aikana yhä lisääntyvistä osaamiseroista selittyy pitkän ja lyhyen matematiikan kurssien määrällä ja niiden valinneiden opiskelijoiden välisillä eroilla (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017). Monilla opiskelijoilla on vaikeuksia matematiikan oppimisessa, joten on tärkeää ymmärtää, kuinka opettajat voisivat tukea matematiikan osaamisen kehittymistä (Rittle-Johnson, 2017). Matematiikan soveltaminen ja erilaisten ratkaisutapojen löytäminen on tärkeä taito, jota tarvitaan jokapäiväisessä elämässä. Lukiolaiset ovat opiskelleet matematiikkaa jo koko peruskoulun ajan, jolloin on kiinnostavaa tarkastella, kuinka joustavaa heidän matematiikan osaamisensa on ja miten he soveltavat matematiikkaa spontaanisti ympäristöissä, jotka eivät ole pelkästään matemaattisia. Joustava asiantuntijuus matematiikassa ja spontaani huomionkiinnittäminen määrällisiin suhteisiin ovat monella tavalla toisiinsa liittyviä käsitteitä, mutta niiden yhteyttä ei ole aiemmin tutkittu. Niistä kummassakin vaaditaan taustalla matemaattista osaamista ja taitoja sen soveltamiseen (Baroody, 2003; McMullen, Hannula-Sormunen, Chan & Mazzocco, 2019). Seuraavaksi tutustutaan tarkemmin keskeisiin käsitteisiin, aiempiin tutkimuksiin ja aiheen teoriataustaan.

1.1 Spontaani huomionkiinnittäminen lukumääriin (SFON) ja määrällisiin suhteisiin (SFOR)

Spontaani huomionkiinnittäminen lukumääriin (SFON) tarkoittaa oma-aloitteista ilman muiden johdattelua tapahtuvaa huomionkiinnittämistä asioiden lukumääriin ja lukumäärätiedon käyttämistä hyväksi omassa toiminnassaan (Hannula-Sormunen, Lehtinen & Lepola, 2010). Lapsi voi esimerkiksi huomata seinällä olevan neljä taulua tai karkkeja olevan pussissa 22. McMullen, Hannula-Sormunen, Chan ja Mazzocco (2019) kuvailevat, että SFON:n mukaisessa toiminnassa lapsi kiinnittää lukumäärällisiin asioihin huomiota, vaikka tilanteessa olisi niiden lisäksi myös muita huomioitavia asioita, kuten värit, muodot ja kuvat. Siinä missä SFON kuvaa taipumusta kiinnittää huomiota tiettyihin määriin tai lukuihin ja niiden käyttämiseen, spontaani huomionkiinnittäminen määrällisiin suhteisiin (SFOR) kuvaa taipumusta tunnistaa ja käyttää matemaattisia suhteita. Jos lapsi huomaa, että kulhossa on kaksi banaania ja neljä päärynää, on kyseessä spontaani huomionkiinnittäminen lukumääriin eli SFON. Jos taas lapsi huomaa, että päärynöitä on kaksi kertaa niin paljon kuin banaaneja tai yksi kolmasosa kaikista hedelmistä on banaaneja, on kyseessä spontaani huomionkiinnittäminen määrällisiin suhteisiin eli SFOR. (McMullen, Hannula-Sormunen, Chan & Mazzocco, 2019). Van Hoofin ja kumppanien (2016) mukaan spontaanin huomionkiinnittämisen tutkimusten taustalla on nimenomaan epäviralliset, ei matemaattiset tilanteet eikä kyse ole vain oppilaiden matematiikan taitojen tutkimisesta matematiikan tunneilla tai muissa formaaleissa tilanteissa. SFOR- ja SFON-tutkimuksissa tarkoituksena on tutkia, kuinka usein oppilaat huomioivat matemaattisia ulottuvuuksia tilanteissa, joissa vastaukset eivät ole yksinomaan matemaattisia (Van Hoof, ym., 2016). SFOR ja SFON on yhdistetty avainkomponenteiksi matemaattisessa kehityksessä (McMullen, Chan, Mazzocco & Hannula-Sormunen, 2019), minkä vuoksi ne ovat keskeisiä käsitteitä matemaattisen osaamisen kentällä.

SFOR on yksi rationaalilukujen osaamisen kehitystä ennustava tekijä (McMullen, 2014; McMullen, Hannula-Sormunen, Laakkonen & Lehtinen, 2016) ja SFOR on yhteydessä kehittyneempään murtolukuosaamiseen (McMullen & Siegler, 2020). Näiden uskotaan olevan seurausta korkeammasta SFOR-taipumuksesta, joka johtaa siihen, että käyttää matemaattisia suhteita oma-aloitteisemmin käytännössä, mikä puolestaan johtaa parempaan muodolliseen matematiikan suorituskykyyn (McMullen & Siegler, 2020). Useammissa tutkimuksissa (mm. McMullen, Hannula-Sormunen, Laakkonen & Lehtinen, 2016; McMullen & Siegler, 2020) on huomattu, että kyse on kaksisuuntaisesta suhteesta. Jos oppilas kiinnittää spontaanisti huomionsa määrällisiin suhteisiin tai lukumääriin, se kehittää kyseisiä taitoja ja taitojen kehittyminen taas johtaa yhä enemmän kyseisten asioiden spontaaniin huomionkiinnittämiseen (McMullen, Hannula-Sormunen, Laakkonen & Lehtinen, 2016; McMullen & Siegler, 2020). Opiskelijoiden omalla huomionkiinnittämistaipumuksella ja käytöksellä voi olla tärkeä rooli monimutkaisten kognitiivisten taitojen pitkäaikaisessa kehittämisessä (McMullen, Hannula-Sormunen, Laakkonen & Lehtinen, 2016). Tällä tarkoitetaan esimerkiksi sitä, että jos opiskelija kiinnittää enemmän huomiota lukumääriin ja käyttää sitä omassa toiminnassaan hyödyksi, voi se auttaa kehittämään tässä tapauksessa matemaattisia taitoja ja edistää esimerkiksi lukumäärien hahmottamista. Jos opiskelijan huomio kiinnittyy tiettyihin asioihin, jotka harjoittavat älyllisiä taitoja, voi hän tällä omalla toiminnallaan kehittää kyseisiä taitoja pitkällä tähtäimellä.

McMullen, Hannula-Sormunen, Kainulainen, Kiili ja Lehtinen (2019) tekivät interventiotutkimuksen, jossa mobiiliteknologiaa käyttämällä pyrittiin vaikuttamaan oppilaiden spontaaniin huomionkiinnittämiseen määrällisiin suhteisiin. Tutkimuksessa pystyttiin vaikuttamaan positiivisesti oppilaiden SFOR-käyttäytymiseen. Myös Määttä, Hannula-Sormunen, Halme ja McMullen (2022) ovat saaneet samankaltaisia tuloksia tutkimuksestaan, jossa pyrittiin lisäämään SFOR-käyttäytymistä intervention avulla. Tutkimusten tulokset viittaavat siihen, että opiskelijoiden SFOR-käyttäytymiseen voidaan vaikuttaa erilaisten interventioiden avulla ja parantaa opiskelijoiden tietoisuutta mahdollisuuksista käyttää määrällisiä suhteita päättelyn apuna ei-yksiselitteisesti matemaattisissa tilanteissa. (McMullen, Hannula-Sormunen, Kainulainen, Kiili & Lehtinen, 2019; Määttä, Hannula-Sormunen, Halme ja McMullen, 2022).

1.2 Joustava asiantuntijuus ja joustava rationaalilukukäsite (ARNK)

Hatano (1987) erotti tutkimuksessaan osaamisen kahteen eri tyyppiin: rutiiniasiantuntijuuteen ja joustavaan asiantuntijuuteen (Hatano, 1987). Joustava asiantuntija eroaa rutiiniasiantuntijasta sillä, että osaa yhdistellä joustavasti osaamiaan asioita uusiin konteksteihin (Baroody, 2003) ja vahvan osaamisen lisäksi osaa löytää uusia menetelmiä (Hatano, 1987; McMullen, Hannula-Sormunen, Lehtinen & Siegler, 2020). Hatanon (1987) mukaan, jos osaaminen perustuu rutiinitasolle, ei uusien ongelmien ratkaisussa osaa keksiä sopivia toimintatapoja, vaan pohjaa aiempiin keinoihin hieman muokattuna ja luottaa yritys ja erehdys -tekniikkaan. Vaikka jollakulla olisi vahva matematiikan osaamistausta ja pystyy laskemaan nopeasti tehtäviä, ei välttämättä silti ole joustava asiantuntija. Sekä joustavalla asiantuntijalla että rutiiniasiantuntijalla täytyy olla jonkinlainen tietopohja aiheesta, mutta tietotaidon ymmärtämisen ja soveltamisen taso ratkaisee, kumpi asiantuntija on kyseessä. (Hatano, 1987).

Hatano (1987) muodosti joustavan asiantuntemuksen mallin ja olosuhteet, joiden avulla sen voi saavuttaa. Mallissa on neljä ehtoa, joiden myötä opiskelijat ovat motivoituneita ymmärtämään prosessin menettelytavat ja hankkimaan käsitteellistä tietoa samalla kun he käyttävät menetelmiä useiden ongelmien ratkaisemiseen. Menettelytapojen ymmärtäminen ja käsitteellisen tiedon hankkiminen ovat keskeisiä joustavan asiantuntijuuden synnyssä, sillä ilman niitä osaaminen jää pintapuolisemmaksi. Olosuhteet joustavan asiantuntijuuden saavuttamiseen ovat uuden tyyppisten ongelmien kohtaaminen jatkuvasti, ymmärrykseen kannustaminen tehokkuuden sijaan, vapaus kiireellisestä tarpeesta saada ulkopuolista vahvistusta ja dialoginen vuorovaikutus. (Hatano, 1987). Baroody ja Rosu (2004) tutkivat lukujen ymmärtämistä (number sense) osana joustavan asiantuntijuuden kehittymistä. He huomasivat lukujen ymmärtämiseen ja ajatteluun keskittyvän käsitteellisen opetuksen kehittävän enemmän joustavaa asiantuntijuutta kuin yleiset tehtävät, jotka keskittyivät enemmän passiiviseen asioiden muistiin painamiseen ja sen myötä rutiiniosaamisen kehittämiseen. (Ruso & Baroody, 2004). Hatanon (1987) mukaan, jos opiskelija ymmärtää miksi tehdään eikä vain sitä, miten tehdään, on opetus käsitteellisempää. Käsitteellinen tieto antaa opiskelijoille mahdollisuuden ymmärtää menetelmien tarkoitusta ja toiminnan syitä, vaikkakin he osaisivat jo käyttää itse menetelmää. Jos käsitteellinen tieto jää löytymättä, syntyy luultavammin rutiiniasiantuntijuutta. (Hatano, 1987).

McMullenin, Brezowszkyn, Rodríguez-Aflechtin, Pongsakdin, Hannula-Sormusen ja Lehtisen (2016) mukaan matematiikassa joustava asiantuntijuus voidaan jakaa proseduraaliseen eli menetelmälliseen joustavuuteen ja joustavaan lukukäsitteeseen. Molempien taustalla välttämättömiä ovat sekä aritmeettiset että numeeriset tiedot ja taidot, mutta ne yksinään eivät muodosta joustavaa matemaattista osaamista (McMullen, Brezowszky, Rodríguez-Aflecht, Pongsakdi, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2016). McMullen, Hannula-Sormunen, Lehtinen ja Siegler (2020) tutkivat eroja rutiiniosaamisen ja joustavan rationaalilukuasiantuntijuuden eli joustavan rationaalilukukäsitteen (Adaptive Rational Number Knowledge eli ARNK) välillä rationaalilukujen aritmetiikassa. Todettiin, että joustava asiantuntijuus pystyttiin myös rationaalilukujen aihepiirissä erottamaan rutiiniosaamisesta. Huomattiin, ettei joustava asiantuntijuus vaatinut erityistason osaamista yleisesti koulussa tai rationaaliluvuissa. (McMullen, Hannula-Sormunen, Lehtinen & Siegler, 2020). On huomattu, että joustavan rationaalilukukäsitteen kehittymiseen pystytään ulkoisesti vaikuttamaan. Kärki ja kumppanit (2021) tekivät interventiotutkimuksen, jossa pelattiin matematiikkapeliä tunneilla rationaalilukukäsitteen ja joustavan matematiikan vahvistamiseksi. Oppilaiden rationaalilukuosaamista pystyttiin pelin avulla kehittämään lähes kaikilla osa-alueilla enemmän kuin perinteisellä kouluopetuksella. (Kärki, McMullen , Halme, Määttä, Lehtinen & Hannula-Sormunen, 2021).

1.3 Rationaalilukujen oppiminen ja osaaminen

Rationaalilukuja ovat yleisesti määriteltynä luvut, jotka voidaan esittää murtolukumuodossa eli ne voivat myös olla päättyviä tai jaksollisia desimaalilukuja. Esimerkiksi ½ ja 0.33 ovat rationaalilukuja, kun taas $\sqrt{2}$ ja π eivät ole. Rationaalilukuja voi esittää eri tavoilla (esimerkiksi 0.5 ja $\frac{1}{2}$) ja niitä voi käyttää erilaisiin tarkoituksiin, kuten alueiden osina ja joukkoina, suhteina tai osamäärinä (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001. s.231–232). Rationaalilukuihin liittyviä käsitteitä ja laskutoimituksia aloitetaan opiskelemaan jo varhain alakoulussa. Murtolukujen oppiminen alkaa 1.–2. luokkien aikana, jolloin pohjustetaan murtoluvun käsitettä (POPS, 2014, s. 129). Murtoluku sekä desimaaliluvut opitaan tarkemmin 3.–6. luokan aikana ja harjoitellaan niillä peruslaskutoimitusten tekemistä (POPS, 2014, s. 236). Yläkoulun tavoitteena on, että oppilaat oppivat käyttämään rationaalilukuja sujuvasti peruslaskutoimituksissa (POPS, 2014, s. 378). Lukion ensimmäisen yhteisen matematiikan kurssin aikana tavoitteena on syventää murtolukujen laskutoimitusten osaamista ja kerrata peruskoulun oppeja (LOPS, 2019, s. 223).

Kilpatrick, Swafford ja Findell (2001) tarkastelevat kirjassaan “Adding it up: Helping children learn mathematics” rationaalilukujen oppimista. Rationaalilukujen oppiminen on haastavampaa kuin kokonaislukujen (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s.231–232) ja murto-osiin liittyvät käsitteet ovat monille oppilaille vaikeita (McMullen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2011). McMullenin ja Sieglerin (2020) mukaan haasteita murtoluvuissa monille aiheuttaa niiden suhteellinen luonne, joka näyttäytyy esimerkiksi murtoluvuilla laskettavissa määrissä. Määrät eivät ole aina pysyviä, vaan esimerkiksi $\frac{1}{3}$ on eri asia, jos puhutaan karkkien määrästä kokonaismäärän ollessa kolme tai 15. (McMullen & Siegler, 2020). Haasteena voi olla myös oppilaiden väärät käsitykset jakamisesta, kertomisesta ja mittaamisesta rationaaliluvuilla (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 232). Oppilailla voi olla kokonaislukujen pohjalta muodostuneita kaavoja, jotka eivät pidäkään samalla tavalla paikkaansa rationaaliluvuilla laskettaessa (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 232). Rationaalilukujen oppimista ja osaamista on tutkittu jonkun verran, ja on löydetty yhteyksiä muihin matematiikan osaamisen osa-alueisiin ja aihepiireihin liittyen. Spontaanilla huomionkiinnittämisellä määrällisiin suhteisiin on todettu olevan positiivinen vaikutus rationaalilukujen oppimiseen yläkouluiässä (McMullen, Hannula-Sormunen, Laakkonen & Lehtinen, 2016). Sieglerin ja kumppanien (2012) mukaan alakoululaisten tieto murtoluvuista ja jakolaskuista ennustaa yksilöllisesti algebran ja matematiikan yleisen tiedon osaamista lukiossa (Siegler ym., 2012). Toisin sanottuna rationaalilukujen osaaminen on keskeinen osa-alue matemaattista osaamista ajatellen. Sieglerin ja kumppanien (2012) mukaan ilman rationaalilukujen ymmärtämistä yksinkertaisten algebrallisten lauseiden ratkaisu voi olla haastavaa. Esimerkkinä voidaan tarkastella matemaattista lausetta $\frac{1}{3} \cdot x = \frac{2}{3} \cdot y$, jos ymmärtää murtolukujen suuruusvertailua, osaa päätellä x:n olevan kaksi kertaa niin suuri kuin y. Jos tätä taas ei ymmärrä, on laskeminen huomattavasti hankalampaa. (Siegler ym., 2012). Oppilaiden lisäksi myös opettajien osaamista rationaalilukujen suhteen on tutkittu. Lemonidis, Tsakiridou ja Meliopoulou (2018) tutkivat opettajien sisältöosaamista ja pedagogista sisältöosaamista sekä päässälaskua rationaaliluvuilla ja huomasivat, että opettajilla, joilla on monipuolisesti erilaisia laskustrategioita, oli myös hyvät päässälaskutaidot rationaaliluvuilla. (Lemonidis, Tsakiridou & Meliopoulou, 2018).

1.4 Matemaattisen ajattelun osatekijät

Matematiikan opetuksen tavoitteena on kehittää loogista ja luovaa matemaattista ajattelua (POPS, 2014, s. 128, 234, 374). Isodan ja Katagirin (2012) mukaan matematiikan opetuksen taustalla on ajatus siitä, että opiskelijat oppivat etsimään oikeita keinoja ongelmien ratkaisuun. Tarkoituksena ei ole niinkään, että opiskelijat osaavat tehdä aina tietyt toimenpiteet ja käskyt alusta loppuun mahdollisimman nopeasti ja oikein, sillä teknologia ja tiede ovat alati muuttuvia. Tärkeämpää onkin ymmärtää, miten ratkaisuja voi lähteä etsimään. (Isoda & Katagiri, 2012, s. 31). Ei siis ole tarpeen, että opiskelijat osaavat toimia itse laskimina, vaan, että he osaavat tehdä oikeat toimenpiteet esimerkiksi laskimella tai muilla apuvälineillä. Tarkoituksena on kehittää oppilaan ajattelua, joka mahdollistaa matemaattisten ongelmien muodostamisen ja ratkaisun.

Matemaattista ajattelua voi tapahtua eri tasoilla ja eri tilanteissa, joten matemaattisen ajattelun määritelmä on hyvinkin laaja. Matemaattisen ajattelun voi kuvata olevan liikkeellepaneva voima tietojen ja taitojen takana, mikä mahdollistaa tilanteeseen tai ongelmaan sopivien tietojen ja taitojen löytämisen (Isoda & Katagiri, 2012, s. 49). Matemaattinen ajattelu on ikään kuin asenne, joka tulee esille, kun kohtaa ongelman ja päättää ratkaista sen käyttämällä jotain metodejaan (Isoda & Katagiri, 2012, s. 47). Matemaattisella ajattelulla voidaan myös tarkoittaa suoraan sellaista ajatustyötä, jossa käytetään matemaattista toimintaa eli esimerkiksi matematiikan välineitä ja kaavoja (Joutsenlahti, 1997, s. 336).

Matemaattinen ajattelu voidaan jakaa kahteen eri osa-alueeseen Yrjönsuuren (1993) mukaan: algoritmiseen ja reflektoivaan ajatteluun. Algoritminen ajattelu keskittyy juuri tekemiseen ja toimintaan, ja sen avulla saa konkreettisesti ratkaistua matemaattisia ongelmia. Reflektoiva matemaattinen ajattelu keskittyy enemmän olemassaolon pohtimiseen, mietiskelyyn ja oivallusten sekä päätelmien tekemiseen. (Yrjönsuuri, 1993, s. 47–48). Myös Isoda ja Katagiri (2012) jakavat teoksessaan ”Mathematical Thinking: How To Develop It In The Classroom” matemaattisen ajattelun kahteen kategoriaan: matemaattisiin metodeihin ja sisältöihin liittyvään ajatteluun. Metodeilla tarkoitetaan yleisesti matemaattisia keinoja, kuten induktiivinen päättely ja numeroiden käyttö. Sisältöihin liittyvää ajattelua on esimerkiksi erilaisten toimintatapojen peruslaskusääntöjen ja ominaisuuksien pohtiminen. Lisäksi Isoda ja Katagiri esittävät, että kolmantena matemaattisen ajattelun kategoriana voidaan sanoa olevan matemaattiset asenteet, sillä ne vaikuttavat vahvasti metodiajattelun ja sisältöajattelun taustalla samalla vaikuttaen itse matemaattiseen ajatteluun. Isodan ja Katagirin mukaan matemaattista ajattelua tapahtuu juuri matemaattisten toimintojen aikana, kuten aritmeettisia operaatiota suorittaessa. Myös Yrjönsuuren (1993) algoritminen ajattelu keskittyy vahvasti matemaattiseen toimintaan metodi- ja sisältöajatteluiden tapaan. (Isoda & Katagiri, 2012. s. 49–52; Yrjönsuuri, 1993. s. 45–56).

Joutsenlahti (2004) jakaa matemaattisen ajattelun Stenbergin (1996) mukaan viiteen eri lähestymistapaan: psykometriseen, informaation prosessointia tutkivaan, antropologiseen, pedagogiseen ja matematiikkaan. Psykometrisessä lähestymistavassa korostetaan ihmismieltä karttana, jonka alueet ovat erilaisia, eri kokoisia ja tärkeydeltään eriarvoisia, kun tarkastellaan matemaattisia kykyjä. Informaation prosessointia tutkivassa lähestymistavassa keskitytään nimensä mukaisesti prosesseihin, erityisesti tulkintaan ja ratkaisuihin, joista muodostuu matemaattinen ajattelu. Kun psykometrinen lähestymistapa vastaa kysymykseen, mitkä kykyfaktorit ovat matemaattisessa ajattelussa eniten esillä, informaation prosessointia tutkiva vastaa kysymykseen, mitkä mentaaliset prosessit ovat keskeisiä. Antropologisessa lähestymistavassa taas matematiikkaa tutkitaan kulttuurien näkökulmasta. Siinä korostetaan esimerkiksi sosiaalista puolta ja arjen matematiikkaa, joka on yhteydessä kieleen ja kulttuuriin eikä ole samanlaista ympäri maailmaa. Myös pedagogisessa lähestymistavassa sosiaalinen puoli on vahvasti läsnä, sillä siinä korostetaan matematiikan opettamista eli esimerkiksi oppimistilanteen vaikutusta matemaattisen ajattelun oppimiseen. Matematiikan lähestymistavassa matematiikkaa tarkastellaan tieteenä, jonka osaamisen kautta matemaattinen ajattelu rakentuu. Sen osa-alueita ovat esimerkiksi analoginen päättely, joustava ajatteleminen ja struktuurien ymmärtäminen. (Joutsenlahti, 2004, s. 363–366).

1.4.1 Matemaattinen osaaminen ja käyttäytyminen

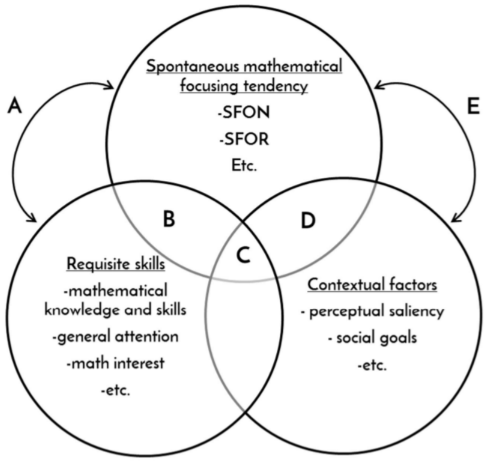
Kilpatrick, Swafford ja Findell (2001) määrittelevät matematiikan osaamisen muotoutuvan viidestä eri osa-alueesta (taulukko 1) (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s.116). Vastaavasti Joutsenlahti (1997) jakaa matemaattisen käyttäytymisen neljälle eri tasolle Wilsonin taksonomian mukaan (taulukko 1) (Joutsenlahti, 1997, s. 338).

Taulukko 1 Matemaattisen osaamisen ja käyttäytymisen tasot

Kilpatrick, Swafford ja Findell (2001): matemaattisen osaamisen osa-alueet	Joutsenlahti (1997): matemaattisen käyttäytymisen tasot
käsitteellinen ymmärtäminen (conceptual understanding)	1. laskutaito
menetelmällinen sujuvuus (procedural fluency)	2. ymmärtäminen
strateginen kompetenssi (strategic competence),	3. soveltaminen
mukautuva päättely (adaptive reasoning)	4. analysoiminen
produktiivinen dispositio (productive disposition).	

Joutsenlahden (1997) ymmärtämisen taso ja Kilpatrickin ja kumppanien (2001) käsitteellisen ymmärtämisen osa-alue kattavat molemmilla käsitteiden, operaatioiden ja matemaattisten periaatteiden taustan ymmärtämisen. Näissä ymmärretään, miksi käytetään tiettyjä menetelmiä eri tilanteissa, opitaan näkemään tehtävissä loogisia sääntöjä ja ymmärtämään niitä. Vastaavasti laskutaidon taso ja menetelmällisen sujuvuuden osa-alue sisältävät keskenään samankaltaisia aspekteja. Joutsenlahden (1997) laskutaidon tasolla osataan ratkaista yksinkertaisia rutiinimaisia drillaustehtäviä ja tunnetaan algoritmien käyttöä. Kilpatrickin ja kumppanien (2001) menetelmällisen sujuvuuden osa-alueella osataan käyttää tehokkaasti oikeita menetelmiä, oikealla tavalla ja oikeissa tilanteissa. Soveltaminen ja strateginen kompetenssi käsittävät sisälleen aiemmin saatujen tietojen käyttämisen joustavasti ja mukautuen. Joutsenlahden (1997) soveltamisen tasolla korostuu rutiinitehtävien ratkaiseminen ja erilaisten mallien tilanteeseen sopiva sujuva käyttö. Kilpatrickin ja kumppanien (2001) strategisen kompetenssin osa-alueella taas korostetaan taitoa muodostaa matemaattisia ongelmia, esittää niitä oikealla tavalla ja ratkaista niitä. Strategisen kompetenssin osa-alueella osataan tehdä ei-rutiinitehtäviä ja perustella vastauksia. Joutsenlahden (1997) käyttäytymisen tasoista vasta viimeinen taso, analysointi, mahdollistaa ei-rutiinitehtävien tekemisen ja todistusten rakentamisen. Kilpatrickin ja kumppanien (2001) mukautuvan päättelyn osa-alueella ymmärretään loogisia suhteita eri konseptien ja tilanteiden välillä. Sitä voi kuvata ikään kuin liimaksi, joka pitää kaiken opitun yhdessä ja toimii johtotähtenä oppimisessa. Kilpatrick ja kumppanit (2001) esittävät viimeisenä matematiikan osaamisen osa-alueena produktiivisen disposition tason, jolla viitataan taipumuksiin nähdä matematiikassa järkeä, kokea se hyödylliseksi ja uskoa tasaisen ponnistelun kannattavan matematiikan oppimisessa. Lisäksi siihen liittyy itsensä näkeminen tehokkaana matematiikan oppijana ja tekijänä. (Joutsenlahti, 1997, s. 338; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001. s. 116–133).

McMullen, Chan, Mazzocco ja Hannula-Sormunen (2019) jakoivat matemaattisen käyttäytymisen kolmeen toisistaan erotettavaan ulottuvuuteen: spontaani matemaattinen huomionkiinnittäminen, tarvittavat taidot ja tilannekohtaiset muuttujat. Useissa tutkimuksissa keskitytään vain tarvittavaan tietopohjaan tai tilannekohtaisiin muuttujiin, kun tarkastellaan matemaattista osaamista tai käyttäytymistä, mutta McMullenin ja kumppanien (2019) mukaan täytyy ottaa huomioon myös jokaisen omat spontaanit matemaattiset toiminnat. Spontaaneihin matemaattisiin toimintoihin kuuluu esimerkiksi spontaani huomionkiinnittäminen lukumääriin (SFON) ja spontaani huomionkiinnittäminen määrällisiin suhteisiin (SFOR). Kaikki kolme matemaattisen ulottuvuuden osaa ovat yhteyksissä toisiinsa. Jos esimerkiksi on hyvät matemaattiset pohjataidot, käyttää helpommin matematiikkaa spontaanisti eri tilanteissa ja taas kehittää samalla taitojaan eli eri ulottuvuudet tukevat toisiaan. Ulottuvuudet yhdessä rakentavat yksilön matemaattisen käyttäytymisen kokonaisuuden. McMullen ja kumppanit (2019) luonnostelivat kuvion (kuvio 1), jossa kuvataan näiden kolmen eri ulottuvuuden suhteita, yhteyksiä ja päällekkäisyyksiä. Kuviossa ulottuvuudet eivät ole oikeassa mittakaavassa. (McMullen, Chan, Mazzocco & Hannula-Sormunen, 2019).



Kuvio 1 McMullenin, Hannula-Sormusen, Chanin ja Mazzoccon (2019) luonnostelema malli matemaattisten fokusointitendenssien, matemaattisten valmiuksien ja tilannetekijöiden suhteesta

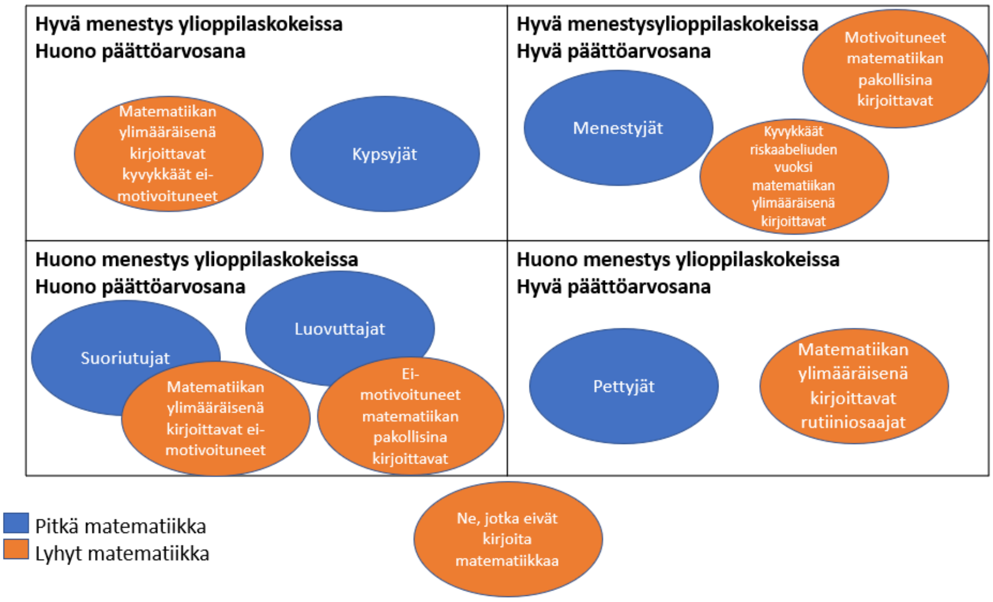
Matemaattinen osaaminen ja käyttäytyminen rakentuvat monien eri ulottuvuuksien päälle ja jokaisen matemaattisen taidon taustalla on havaittavissa ulottuvuuksia, joita tässä luvussa kuvattiin. Kilpatrickin ja kumppanien (2001) matemaattisessa osaamisessa korostetaan yhteyksiä arkielämään ja käytäntöön sekä joustavuutta, jota kehittyy vähitellen opiskelijan tullessa yhä taitavammaksi kaikilla matemaattisen osaamisen osa-alueilla. Tässä tutkimuksessa huomio kiinnittyy lähes kaikkiin Kilpatrickin ja kumppanien (2001) kuvaamiin matemaattisen osaamisen osa-alueisiin, sillä ne ovat kietoutuneet vahvasti kiinni toisiinsa (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s.117). Matemaattisen käyttäytymisen osioista korostuu etenkin spontaani huomionkiinnittäminen määrällisiin suhteisiin (McMullen, Chan, Mazzocco & Hannula-Sormunen, 2019) sen ollessa toinen tutkittava ominaisuus sekä soveltaminen (Joutsenlahti, 1997), joka on suuressa roolissa joustavan osaamisen suhteen.

1.4.2 Lukiolaisten matemaattinen ajattelu ja osaaminen

Yläkoulun aikana kaikkien oppilaiden pitäisi tulla yhä pätevimmiksi matematiikan laskijoiksi (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Tavoitteena tulisi olla, että tunneilla saatava matematiikan osaaminen antaisi oppilaille mahdollisuuden selviytyä jokapäiväisen elämän matemaattisista haasteista ja antaa heille mahdollisuuden jatkaa matematiikan opintojaan lukiossa ja sen ulkopuolella (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Peruskoulussa jokaiselle pitäisi olla rakentunut matematiikan pohjaosaaminen, jonka päälle on hyvä lähteä myös keräämään uutta osaamista ja soveltaa vanhaa tietoa. Opetushallituksen (2005) tuottaman 9. luokan oppimistuloksia arvioivan kokeen perusteella 9. luokan lopulla parhaiten oppilaat hallitsivat lukuihin ja laskutoimituksiin liittyvät asiat. Sukupuolten välillä ei ollut merkittäviä eroja kokonaisosaamisessa, mutta päässälaskuissa pojat menestyivät tyttöjä paremmin. (Mattila, 2005). 9. luokan osaamistasolla on vahva yhteys osaamistasoon lukion lopussa, vaikka lukion aikana osaamistaso voikin laskea tai nousta huomattavasti (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017).

Joutsenlahti (1997, 2004) jakaa lukiolaisten matematiikan osaamisen nelikenttään kurssien päättöarviointien keskiarvon ja ylioppilaskirjoituksissa saatujen pisteiden perusteella. Nelikenttä syntyy, kun päättöarvosanojen keskiarvot ja ylioppilaskirjoituspisteet jaetaan hyviin ja huonoihin (Joutsenlahti, 1997; Joutsenlahti, 2004) (Taulukko 2). Nelikenttää on käytetty sekä lyhyen matematiikan (Joutsenlahti, 1997) että pitkän matematiikan opiskelijoiden suorituksien analysointiin (Joutsenlahti, 2004). Joutsenlahden (2004) tutkimuksessa pitkän matematiikan opiskelijat jaettiin viiteen ryhmään: kypsyjät, menestyjät, suoriutujat, luovuttajat ja pettyjät. Lyhyen matematiikan opiskelijat jaettiin Joutsenlahden (1997) tutkimuksessa kolmeen ryhmään: matematiikan pakollisina kirjoittavat, matematiikan ylimääräisenä kirjoittavat ja ne, jotka eivät kirjoita matematiikkaa lainkaan. Matematiikan pakollisina kirjoittavat voidaan jakaa kahteen alaryhmään: motivoituneet ja ei-motivoituneet. Matematiikan ylimääräisenä kirjoittavat voidaan jakaa neljään alaryhmään: rutiiniosaajat, kyvykkäät ei-motivoituneet, ei-motivoituneet ja kyvykkäät, mutta riskaabeliuden vuoksi matematiikan ylimääräisenä kirjoittavat. (Joutsenlahti, 1997). Kunkin ryhmän sijoittuminen nelikentälle pohjautuu pitkälti heidän matematiikan asenteisiinsa, oppimistyyleihinsä ja koulumotivaatioon, joten eri ryhmien kautta on mahdollista nähdä monia vaikuttavia tekijöitä koulupolun aikaisten matematiikan taitojen kehittymisen ja osaamisen taustalla.

Taulukko 2 Pelkistetty kuvaus Joutsenlahden (1997, 2004) nelikentän osa-alueista



Metsämuuronen ja Tuohilampi (2017) tutkivat matematiikan kokonaisosaamista lukion lopussa. He jakoivat lukio-opiskelijat kolmeen osaan sen mukaan kirjoittavatko he matematiikan pitkänä, lyhyenä vai ei ollenkaan. Keskeistä matematiikan kokonaisosaamisen kannalta eri ryhmien välillä oli se, kuinka monta kurssia matematiikkaa he opiskelivat. Pitkän matematiikan kirjoittajat opiskelivat usein vähintään 12 kurssia, lyhyen matematiikan kirjoittajat pääasiassa 7–11 ja ne, jotka eivät kirjoittaneet matematiikkaa valitsivat usein alle 7 kurssia. Matematiikan kokonaisosaamiseen lukion lopussa vaikutti matematiikan kurssien määrän lisäksi mm. matematiikan kurssien keskiarvo, koulun taso, kokonaisasenne lukiokoulutuksen lopussa, positiivinen tunnetila matematiikkaa ajatellessa sekä muut tekijät. Matematiikan osaaminen lähtee eriytymään vähitellen jo varhaisina kouluvuosina. (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017). Lukiolaisten matematiikan osaamiseen vaikuttaa murtoluku- ja jakolaskuosaaminen jo alakoulun aikana (Siegler, ym., 2012). Nuoruuden ja aikuisuuden matematiikan osaamiseen vaikuttaa vahvasti matemaattinen osaaminen esikouluiästä 1. luokalle (Watts, Duncan, Siegler & Davis-Kean, 2014). Lukion pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden välillä on selkeästi havaittavissa eroja osaamisessa, jotka eriytyvät etenkin lukio-opintojen aikana (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017). Metsämurosen ja Tuohilammen (2017) mukaan jo kouluun tullessa myöhemmin pitkänä matematiikan kirjoittavat suoriutuvat paremmin matematiikan tehtävistä kuin ne, jotka käyvät minimimäärän matematiikan kursseja lukiossa. Minimimäärän kursseja suorittavien osaamisen taso ei myöskään merkittävästi nouse tasosta, jonka he ovat saavuttaneet peruskoulun loputtua. (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017).

Hannula ja Holm (2018) toteavat, että kuva matematiikasta, omasta matematiikan oppimisesta ja osaamisesta muodostuu pitkälti kokemusten kautta. Sukupuoli vaikuttaa opiskelijoiden omaan käsitykseen itsestään matematiikan oppijana. Pojat valitsevat tyttöjä helpommin pitkän matematiikan, kun taas tytöillä pitää olla erityinen syy valita lyhyen sijaan pitkä matematiikka. (Hannula & Holm, 2018). Tyttöjen ja poikien eriytyminen alkaa vähitellen jo perusopetuksen aikana ja tytöt panostavat matematiikan tai luonnontieteiden sijaan ennemmin muihin oppiaineisiin (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017). Tyttöjen osaaminen on noin vuoden verran poikien osaamista jäljessä lukion lopussa ja parhaista matematiikan osaajista vain 35 % oli lukion lopussa tyttöjä (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017).

Matematiikan opiskelussa ei selkeästi ole vain yhtä suoraa polkua tai profiilia, joka kuvastaisi tarpeeksi kaikkia lyhyen tai kaikkia pitkän matematiikan opiskelijoita. Joutsenlahden (1997, 2004) nelikenttäkuvauksesta huomattiin, että matematiikan opiskeluun liittyy monenlaisia yksilöllisiä haasteita ja taustamuuttujia, jotka muovaavat matematiikan oppimispolusta ja osaamisesta erilaisen. Hannulan ja Holmin (2018) tutkimuksen perusteella sukupuoli vaikuttaa siihen, valitseeko helpommin lyhyen vai pitkän matematiikan. Metsämuurosen ja Tuohilammen (2017) tutkimuksen perusteella voidaan kuitenkin huomata, että itse pitkää ja lyhyttä matematiikkaa opiskelua enemmän merkitystä oli sillä, kuinka paljon matematiikkaa opiskeli. Lukiolaisten matematiikan osaaminen perustuu pitkälti heidän peruskoulun matematiikan osaamiseensa sekä sen kehittymiseen lukioaikana (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017).

1.5 Matematiikan opetus koulussa

Kaikki opetus kaikilla koulutustasoilla perustuu opetussuunnitelmiin aina varhaiskasvatuksesta korkeakouluihin. Lukion opetussuunnitelman perusteiden (2019) mukaan matematiikan tehtävänä on oppiaineena antaa valmiudet käsittää, soveltaa ja luoda itse matemaattista sisältöä. Oppilaiden täytyy ymmärtää matematiikan merkitys eri tieteen aloilla ja yhteiskunnassa. Opetuksen tarkoitus on antaa oppilaille käsitys matematiikan peruskäsitteistä, niiden sujuvasta käytöstä ja soveltamisesta. Lisäksi opetuksen on tarkoitus kehittää laskemistaitoja, luovuutta ja ongelmanratkaisutaitoja. (LOPS, 2019, s.221). LOPS:n (2019) matematiikan laaja-alaisissa tavoitteissa ajatuksena on kasvattaa mm. hyvinvointiosaamista, globaali- ja kulttuuriosaamista, vuorovaikutusosaamista, ympäristöosaamista sekä yhteiskunnallista osaamista ja yhdistää näitä asioita matematiikkaan.

Pohditaan esimerkiksi, millä tavoin matematiikkaa voisi hyödyntää kestävään kehitykseen ja ihmiskunnan ongelmiin liittyvissä kysymyksissä. On tärkeää, että opiskelija ymmärtää yhteyden eri sovellusmahdollisuuksien välillä ja osaa nähdä matematiikan moniin eri tilanteisiin soveltuvana välineenä. Lisäksi näissä laaja-alaisissa tavoitteissa korostetaan myös yhteyttä arkielämään sekä opiskelijan oman kiinnostuksen ja kokeilemisen merkitystä. Opetustilanteissa on hedelmällistä pohtia omia havaintoja, esittää niiden pohjalta kysymyksiä ja perustella oppimaansa. (LOPS, 2019, s. 221). Lukion matematiikan yleisissä tavoitteissa mainitaan käytännön tilanteiden mallintaminen matemaattisiksi ongelmiksi, erilaisten ratkaisustrategioiden hyödyntäminen, kokeileva ja tutkiva toiminta sekä ongelmien ratkaisujen keksiminen ja selkeä esittäminen. Myös yleisissä tavoitteissa korostetaan ratkaisujen perustelemista ja oikeellisuuden arviointia. (LOPS, 2019, s. 222).

Opetus- ja oppimateriaalit ovat tärkeä osa opetusta, koska ne luovat eräänlaiset kehykset luokassa tapahtuville matematiikan opetustoiminnoille ja siten myös rajaavat mahdollisuuksia oppia strategioiden mukautuvaa käyttöä (Sievert, van den Ham, Niedermeyer & Heinze, 2019). Perinteitä mukailevat oppikirjat ja materiaalit ohjaavat usein osaltaan opetuksen sisältöjä ja työtapoja, sillä ajanpuutteessa opettajat valitsevat aiheita, jotka ovat heidän mielestään tärkeitä tai kiinnostavia (Juuti & Lavonen, 2018). Sievertin ja kumppanien (2019) mukaan oppikirjoilla oli merkitystä oppilaiden joustavan asiantuntijuuden kehittymisessä, sillä opetus pohjautuu melko pitkälti oppikirjojen sisältöihin (Sievert, ym., 2019). Oppimateriaalin ja opetussuunnitelman lisäksi opettaja itse on yksi keskeinen tekijä, joka vaikuttaa oppilaiden oppimiseen (Halinen, Huotilainen, Kauppinen, Nilivaara, Vainikainen & Raami, 2016). Opettajan uskomukset opiskelijoista ja heidän kyvyistään vaikuttavat siihen, mitä opettaja kultakin opiskelijalta odottaa (Halinen, ym., 2016). Opettajan odotukset voivat luoda itseään toteuttavan kehän, jossa opiskelija ei esimerkiksi haasta itseään tarpeeksi soveltavilla tehtävillä, sillä odotuksena on, etteivät hänen taitonsa riitä perustehtäviä pidemmälle. Opetussuunnitelmat ovat usein melko väljiä ja jättävät opettajille paljon valinnan varaa sisältöjä ja menetelmiä valitessa (Halinen, ym., 2016). Tämän myötä opettajan käsissä on pitkälti se, miten hän käyttää hyödykseen erilaisia opetustyylejä ja tuo esille erilaisia strategioita ongelmien ratkaisuun. Vaikka opetussuunnitelman perusteissa korostetaan osaltaan eri strategioiden joustavaa osaamista ja arkielämään liittämistä, on luokassa tapahtuva opetus pitkälti kiinni opettajasta.

Matematiikan opetuksen on tarkoitus valmistaa opiskelijoille tarvittavat matemaattiset taidot, joilla pärjää yhteiskunnassa. Jos opetus on riittämätöntä ja opetussuunnitelmat huonosti suunniteltuja ruokkivat ne pelkoa siitä, että koulu ei valmista opiskelijoille yhteiskunnassa tarvittavaa matemaattista osaamista (Isoda & Katagiri, 2012, s. 13). Matematiikan tarkoitus on oppiaineena antaa mahdollisimman laajat matemaattiset valmiudet jatko-opiskeluun ja matematiikan käyttämiseen erilaisissa tilanteissa elämässä (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; LOPS, 2019, s.222). SFOR-taitoja käytetään juuri opiskelijan arjen tilanteissa, joihin halutaan opetussuunnitelmien mukaan matematiikkaa liittää (LOPS, 2019, s. 221; POPS, 2014, s.234). Joustava osaaminen on nykyisten opetussuunnitelmien (mm. LOPS 2019 ja POPS 2014) perusteella keskeinen käsite ja se korostuu kaikessa osaamisessa, jossa on osatekijänä matematiikan taitojen soveltaminen. Sekä SFOR-taitoja että ARNK-taitoja ajatellen, täytyy opiskelijalta löytyä pohjalta jotain matemaattista osaamista, jotta spontaani huomionkiinnittäminen määrällisiin suhteisiin tai joustava osaaminen rationaalilukujen parissa onnistuu (Baroody, 2003; McMullen, Hannula-Sormunen, Chan & Mazzocco, 2019). Matematiikan opetus on itsenäisenä tekijänä tärkeä vaikuttaja opiskelijoiden matematiikan osaamisen muodostumisessa ja sen vuoksi on keskeistä tarkastella matematiikan opetusta ja opetussuunnitelmien perusteita taustalla vaikuttavana tekijänä, kun tutkitaan mitä tahansa matemaattisen osaamisen osa-aluetta.

2 Tutkimusongelmat

1. Kuinka paljon lukiolaiset kiinnittävät spontaanisti huomiota määrällisiin suhteisiin ja millaiset joustavat rationaalilukukäsitetaidot heillä on?

Aiemmissa tutkimuksissa on huomattu, että SFOR on keskeinen tekijä matematiikan osaamisessa ja taitojen kehittymisessä (mm. McMullen, Hannula-Sormunen, Laakkonen & Lehtinen, 2016; McMullen, 2014; McMullen & Siegler, 2020). Aiemmat tutkimukset (mm. McMullen, Hannula-Sormunen, Laakkonen & Lehtinen, 2016; Van Hoof, ym., 2016) on kuitenkin tehty pääasiassa alakouluikäisillä ja nuoremmilla lapsilla eikä lukiolaisten SFOR-taipumuksia ole tutkittu. Tässä tutkimuksessa kartoitetaan, millaiset SFOR-taidot lukiolaisilla on eli paljonko he kiinnittävät spontaanisti huomiota määrällisiin suhteisiin tilanteissa, joissa on myös muita havainnoitavia ulottuvuuksia eivätkä tilanteet ole yksinomaan matemaattisia. Lukiolaiset ovat jo matematiikan opinnoissaan hyvin pitkällä, joten on kiinnostavaa tutkia, millaiset SFOR-taipumukset opiskelijoilla on, kun matemaattiset taidot ovat jo melko kehittyneellä tasolla.

Useissa aiemmissa tutkimuksissa (mm. Lemonidis, Tsakiridou & Meliopoulou, 2018; McMullen, ym., 2020; Siegler, ym., 2012) on tutkittu rationaalilukuosaamista ja sen merkitys osana matemaattista osaamista on todettu keskeiseksi. Tarkemmin juuri joustavaa rationaalilukukäsitettä on aiemmin tutkittu yläkoululaisilla ja osana rationaalilukuosaamista alakoululaisilla, mutta ei lukioikäisillä (mm. McMullen, Hannula-Sormunen, Lehtinen & Siegler, 2020; McMullen, Kanerva, Lehtinen, Hannula-Sormunen & Kiuru, 2019). Tässä tutkimuksessa tutkitaan, millaiset joustavat rationaalilukukäsitetaidot lukiolaisilla on. Lukiolaiset ovat opiskelleet matematiikkaa jo koko peruskoulun oppimäärän verran, joten heille pitäisi olla muodostunut hyvä perusosaamispohja rationaalilukujen suhteen. Joustava osaaminen voi kuitenkin olla monille haastavaa, joten oletuksia lukiolaisten joustavista rationaalilukukäsitetaidoista on vaikea asettaa.

2. Miten lukiolaisten joustavat rationaalilukukäsitetaidot ovat yhteydessä spontaaniin määrällisiin suhteiden huomionkiinnittämiseen?

Aiemmissa tutkimuksissa (mm. McMullen, Hannula-Sormunen, Laakkonen & Lehtinen, 2016; McMullen & Siegler, 2020) SFOR-taipumusten yhteyttä rationaalilukuosaamiseen ja rationaalilukuosaamisen kehittymiseen on tutkittu alakouluikäisillä ja niiden on todettu olevan yhteydessä toisiinsa. Tässä tutkimuksessa tutkitaan SFOR-taipumusten yhteyttä juuri joustavaan rationaalilukukäsitteeseen, sillä kyseisiä taitoja ei ole tutkittu lukioikäisillä eikä joustavan rationaalilukukäsitteen yhteyttä SFOR-taipumuksiin ei ole tutkittu aiemmin itsenäisenä muuttujana. Lukioikäisten matemaattiset taidot ovat ehtineet kehittyä pidemmälle kuin alakoululaisilla, joten onkin hyvä tutkia, onko kyseisillä taidoilla yhteys toisiinsa vielä matemaattisten taitojen kehityttyä yhä pidemmälle. Aiempien tutkimusten perusteella voidaan olettaa, että joustavat rationaalilukukäsitetaidot voisivat olla positiivisesti yhteydessä SFOR-taipumuksiin.

3. Onko lukion pitkän ja lyhyen matematiikan valinneiden rationaalilukukäsitetaidoissa ja spontaanissa huomionkiinnittämisessä määrällisiin suhteisiin eroa?

Aiempien tutkimusten mukaan (mm. Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017; Siegler ym., 2012; Watts, Duncan, Siegler & Davis-Kean, 2014) matematiikan taidot alkavat eriytymään jo varhaisessa vaiheessa ja pitkän ja lyhyen matematiikan lukijoiden välillä on osaamiskuilu (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017). Tässä tutkimuksessa tutkitaan lukion ensimmäisen vuosikurssin opiskelijoita, jotka eivät vielä ole opiskelleet montaa kurssia pitkän ja lyhyen matematiikan omia kursseja. Kuitenkin jo koulu-uran alkuvaiheilta alkaen ne, jotka valitsevat pitkän matematiikan suoriutuvat keskimäärin paremmin matemaattisista tehtävistä kuin ne, jotka valitsevat lukiossa lyhyen matematiikan ja minimimäärän matematiikan kursseja (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017). On siis oletettavissa, että pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden välillä voi olla eroja osaamisessa myös joustavan rationaalilukukäsiteosaamisen ja SFOR-taipumusten saralla lukion ensimmäisen vuosikurssin opiskelijoilla.

3 Tutkimusmenetelmä

Aihetta tutkittiin kvantitatiivisen tutkimuksen keinoin. Tutkimuksessa pyrittiin löytämään ilmiöiden välisiä yhteyksiä ilman, että tutkija on vaikuttanut mitenkään tutkittaviin tai kontrolloinut heidän vastauksiaan ennen testausta tai testauksen aikana (Nummenmaa, 2009, s. 34). Otos kerättiin aiempien tutkimusten (McMullen, Hannula-Sormunen, Laakkonen & Lehtinen, 2016; McMullen, Hannula-Sormunen, Lehtinen & Siegler, 2020; Määttä, Hannula-Sormunen, Halme & McMullen, 2022) mukaisilla SFOR:a ja ARNK:ta mittaavilla testeillä.

Tutkimuksen aikaisen koronaviruspandemian vuoksi tiedonkeruu suoritettiin täysin etänä. Testimateriaalit jaettiin sähköisinä opettajille, he ohjeistivat kirjallisten ohjeiden mukaisesti opiskelijat ja valvoivat testaustilanteen. Testin rakenne ja ajastukset pysyivät samana kuin tutkijan ollessa fyysisesti paikalla. Testaus suoritettiin suomen kielen tunnilla, jotta pystyttiin mittaamaan opiskelijoiden spontaania matemaattista huomionkiinnittämistä ja paikalla olisi mahdollisimman paljon sekä lyhyen että pitkän matematiikan opiskelijoita. Testin matemaattisesta luonteesta ei kerrottu opiskelijoille ennen testiä, jottei se ohjannut heidän vastauksiaan mihinkään suuntaan.

3.1 Tutkittavat

Tutkimuksen kohderyhmänä olivat lukion ensimmäisen vuosikurssin opiskelijat. Spontaania huomionkiinnittämistä määrällisiin suhteisiin ja joustavaa rationaalilukukäsitettä on tutkittu aiemmin peruskoululaisilla ja nuoremmilla lapsilla, mutta lukioikäisiä ei ole aiemmin tutkittu. Lukiolaiset ovat myös opiskelleet matematiikkaa koko peruskoulunsa ajan, ja heille on sen perusteella muodostunut tietyntasoinen osaamispohja. Siksi olikin mielenkiintoista tutkia juuri lukiolaisten joustavaa rationaalilukukäsiteosaamista ja spontaania huomionkiinnittämistä määrällisiin suhteisiin.

Tutkittavat luokat valittiin mukavuusotannalla. Mukavuusotannassa tutkija valitsee näytteen sen mukaan, minne on helppo pääsy (Cohen, Manion & Morrison, 2000, s. 102). Tutkimuspyyntöjä (liite 2) lähetettiin useiden eri lukioiden rehtoreille ja opettajille Varsinais-Suomen, Satakunnan, Kymenlaakson ja Hämeen alueille. Opiskelijoita saatiin neljästä eri opetusryhmästä kolmesta eri lukiosta. Kaikilta osallistujilta kysyttiin tutkimuslupa (liite 1) testin alussa ja tutkimukseen osallistuminen oli vapaaehtoista. Vastaajien kokonaismäärä oli 114, josta poistettiin vastaajat (n=8), joiden vastauksista puuttui data lähes kokonaan. Osa vastaajista esiintyi useamman kerran, sillä tunnusten toimivuutta kokeiltiin ennen testauksen tekoa. Nämä testauskirjaukset, joissa ei ollut vastauksia poistettiin analyysista eikä niitä ole huomioitu otoksen koossa. Lopullinen otoskoko oli 106, joista oli naispuolisia 49, miespuolisia 51, muunsukupuolisia neljä ja kaksi vastaajaa jätti kertomatta sukupuolensa. Koska muunsukupuolisten ja vastaamatta jättäneiden määrä sukupuolen kohdalla oli niin pieni, tehtiin tarvittavat sukupuolten väliset vertailut mies- ja naispuolisten välillä. Toisena taustamuuttujana kysyttiin, opiskeleeko vastaaja pitkää vai lyhyttä matematiikkaa. Vastaajista 57 opiskeli pitkää matematiikkaa, 40 lyhyttä ja yhdeksän ei halunnut vastata kysymykseen. Tarvittavat vertailut tehtiin kysymykseen vastanneiden 97 opiskelijan kesken.

3.2 Joustava rationaalilukukäsitetehtävä

Joustavaa rationaalilukukäsitettä (ARNK) testattiin McMullenin, Hannula-Sormusen, Lehtisen & Sieglerin (2020) tutkimuksen mukaisilla tehtävillä. Tehtävissä tarkoituksena oli saada muodostettua mahdollisimman monta matemaattisesti pätevää lauseketta, joiden lopputuloksena oli annettu lukuarvo. Vastaajille oli annettu neljä eri operaatiota (+, -, · ja ÷) sekä viisi eri lukuarvoa taulukon 3 mukaan, joilla he saivat muodostaa lausekkeita. Aikaa yhden tehtävän kohdalla oli 90 sekuntia ja jokaisesta oikeasta vastauksesta sai yhden pisteen. Vääristä vastauksista ei saanut pisteitä eivätkä ne vaikuttaneet oikeista vastauksista saatuihin pisteisiin.

Ennen varsinaisia tehtäviä lomakkeessa oli yksi harjoitustehtävä, joka oli vastaava tehtävänannoltaan, mutta lukuarvoina oli luonnollisia lukuja. Harjoitustehtävän tuloksia ei otettu huomioon, sillä sen tarkoituksena oli vain auttaa vastaajia ymmärtämään tehtävän tyyppi ja mahdollistaa keskittyminen oikeissa tehtävissä juuri rationaalilukuosaamiseen eikä tehtävätyypin hahmottamiseen.

Taulukko 3 Annetut operoitavat lukuarvot ja tuloslukuarvot

Tehtävä	Operoitavat lukuarvot	Tuloslukuarvot
1	½; ¼; 0.5; 0.25;4	1
2	½; ⅛; 0.5; 0.125; 2	¼
3	¼; ¾; 0.25; 0.75; 2	0.5
4	3/2; ¾; 1.5; 0.75;2	3

3.3 SFOR-tehtävät

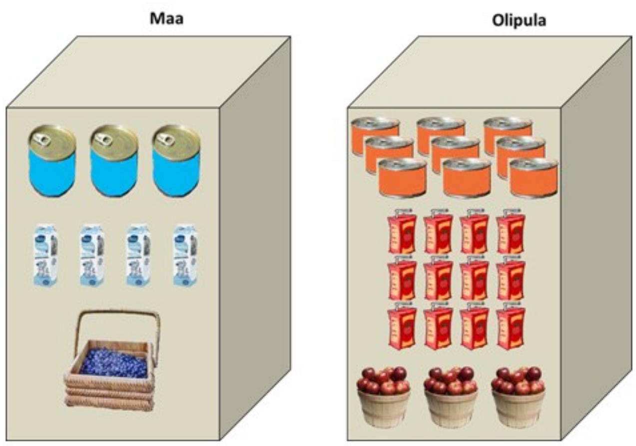
Spontaania huomionkiinnittämistä määrällisiin suhteisiin (SFOR) mitattiin kahdella erilaisella tehtävätyypillä. Molemmissa tehtävissä aikaa oli kaksi minuuttia per tehtävä ja testi ilmoitti, kun ajasta oli enää 10 sekuntia jäljellä. Vastausten ei tarvinnut olla matemaattisesti oikein, vaan kiinnostuksen kohteena oli se, kiinnittikö vastaaja huomiota määrällisiin suhteisiin. Ensimmäinen tehtävä oli Määtän, Hannula-Sormusen, Halmeen ja McMullenin (2022) tutkimuksen ”valokuvan kuvailu” -tehtävä (kuva 1). Tehtävässä oppilaille esiteltiin kerrallaan yksi valokuva, josta heidän piti kertoa mahdollisimman tarkka kuvaus. Jos vastaaja viittasi vastauksessaan murtolukusuhteeseen, multiplikatiiviseen suhteeseen tai osakokonaisuuteen, sai hän kustakin maininnasta pisteen. Murtolukusuhteisiin sai viitata numeerisesti tai kirjoitusmuodossa, kuten ”kaksi neljäsosaa laseista on täynnä”. Multiplikatiivisella suhteella tarkoitettiin kahden luvun tai asian suhteen ilmaisua. Esimerkiksi ”pieniä ikkunoita on kolme kertaa enemmän kuin isoja” tai ”munkki leikataan puoliksi”. Osakokonaisuuden kohdalla kahden ehdon tuli täyttyä: koko joukko piti ilmaista numeerisesti ja koko joukkoon piti viitata, kun puhuttiin osasta joukkoa. Esimerkkinä ”kaksi mukia, joista toisessa on vettä” ja ”Kuusi ikkunaa. Ikkunat ovat kahdessa rivissä” olisivat yhden pisteen arvoisia vastauksia. Jos vastaaja täytti kaksi osakokonaisuuden piste-ehtoa ja lisäksi määritteli tarkasti kaikki osajoukot, saattoi vastaaja saada kaksi pistettä. Esimerkiksi ”Kuusi ikkunaa, joista kolme on ylhäällä ja kolme alhaalla” oli kahden pisteen vastaus. Yksi vastaus saattoi sisältää useamman pisteluokan vastauksia tai saada useamman pisteen samaan pisteluokkaan liittyen, jos vastaaja oli kuvaillut esimerkiksi useamman asian multiplikatiivista suhdetta.

Tämä kuva jätetään albumiin. Kirjoita mahdollisimman tarkka kuvaus.

Tämä kuva jätetään albumiin. Kirjoita mahdollisimman tarkka kuvaus.

Kuva 1 Esimerkkikuvat valokuvatehtävien kuvista (Määttä, ym., 2022)

Toinen tehtävätyyppi oli aiemmissa tutkimuksissa (mm. McMullen, Hannula-Sormunen, Laakkonen & Lehtinen, 2016) käytetty teleportaatiotehtävä (kuva 2). Tehtävässä kolmea erityyppistä tuotetta siirtyi tietyn määrän verran Olipula- ja Teradus-planeetoille, ja matkalla tuotteet muuttuivat sekä laadultaan että määrältään erilaisiksi. Tehtävässä opiskelijan piti kuvailla mahdollisimman tarkasti, kuinka tavarat olivat muuttuneet siirtyessään Maasta uusille planeetoille. Tehtävän maksimipistemäärä oli kolme ja yhden pisteen sai per muuttunut asia. Pisteiden analysointitapa mukaili valokuvatehtävän pisteytysohjeita murtolukusuhteen, multiplikatiivisen suhteen ja osa-kokonainen -suhteen puolesta. Esimerkkinä yhden pisteen sai, jos mainitsi maasta lähteneiden maitojen muuttuneen mehuiksi sekä määrän kolminkertaistuneen uudelle planeetalle saapuessa ja kolme pistettä, jos mainitsi, että kaikkien tavaroiden määrä oli kolminkertaistunut.



Kuva 2 Esimerkkikuva teleportaatiotehtävästä (McMullen & Siegler, 2020)

3.4 Tutkimusetiikka

Tutkimuksessa noudatettiin Tutkimuseettisen neuvottelukunnan (myöhemmin TENK) (2019) tieteen tekemisen eettisiä periaatteita. Cohen, Manion ja Morrison (2000) kuvailivat kirjassaan ”Research methods in Education” Bellin (1991) esittämiä eettisiä käytäntöjä, jotka on myös hyvä ottaa huomioon erityisesti koulumaailmaan sijoittuvissa tutkimuksissa. Näitä käytäntöjä mukaillen tässä tutkimuksessa kaikille osallistujille annettiin mahdollisuus pysyä anonyymeinä, kaikkea tietoa käsiteltiin luottamuksellisesti ja tutkimuksen tarkoituksena oli tuottaa hyötyä kasvatustieteen kentälle ja sen myötä koululle (Cohen, Manion & Morrison, 2000. s. 56). Tutkimus toteutettiin ilman oppilaiden nimien keräämistä eikä täten kenenkään tunnistettavia tuloksia ole saatavilla. Osallistujille kerrottiin, mihin tutkimustuloksia käytetään ja kuka pääsee käsiksi tietoihin (TENK, 2019). Tutkimusolosuhteista kerrottiin todenmukaisesti; kauanko osallistuminen kestää ja mihin tarkoitukseen tuloksia kerättiin (Cohen, Manion & Morrison, 2000. s. 57). Tässä tutkimuksessa tuloksia käytettiin tutkijan pro gradu -tutkielmaan ja tuloksiin pääsi käsiksi tutkija. Testauksen yhteydessä jokaiselta vastaajalta kysyttiin tutkimuslupa (liite 1), joten osallistuminen oli vapaaehtoista ja korostettiin, ettei pakkoa osallistumiseen ole opintojen puolesta (TENK, 2019). Testauksen ohjeet olivat näkyvillä online-testitilanteessa osallistujille mukaan lukien kesto. Tutkimus oli mahdollista keskeyttää missä vaiheessa vain ilman, että siitä tuli vastaajalle mitään seurauksia (TENK, 2019). Tutkimuksen matemaattista taustaa ei kerrottu osallistujille ennen aineiston keräämistä, sillä se olisi saattanut vääristää tuloksia.

4 Tulosten analysointi

Ennen tulosten analysointia aineisto siirrettiin vastaussivustolta Excel-taulukkoon ja sieltä oikeaan muotoon muokattuna tilastotieteen analysointiohjelmisto SPSS:ään, jossa aineiston analysointi suoritettiin. Ensin rakennettiin tarvittavat summamuuttujat ja tarkasteltiin niiden reliabiliteettia. Tämän jälkeen tarkasteltiin aineiston normaalijakautuneisuutta muuttujien suhteen sekä muita ominaisuuksia, jotka vaikuttivat oikean testin valintaan ja tulkintaan. Aineistoa analysoitiin kuvailevan statistiikan avulla, korrelaatiokertoimella, parametrisilla ja epäparametrisilla testeillä. Kuvailevan statistiikan perusteella tutkittiin, millaiset SFOR-taipumukset ja joustavat rationaalilukukäsitetaidot lukiolaisilla yleisesti on. Spearmanin korrelaatiokertoimella tarkasteltiin, ovatko SFOR-taipumukset ja joustavat rationaalilukukäsitetaidot yhteydessä toisiinsa. U-testin ja T-testin avulla tutkittiin, onko naisten ja miesten tai pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden välillä eroja SFOR-taipumuksissa tai joustavissa rationaalilukukäsitetaidoissa.

4.1 Summamuuttujien rakentaminen

Summamuuttujat muodostettiin erikseen SFOR:iin liittyvistä osatehtävistä ja rationaalilukuihin liittyvistä osatehtävistä. SFOR-osatehtäviä oli yhteensä kahdeksan, joista kuusi ensimmäistä olivat tehtävänannoltaan samanlaiset (valokuvatehtävät) ja kaksi viimeistä olivat keskenään tehtävänannoltaan vastaavia (teleportaatiotehtävät). ARNK-osatehtäviä oli neljä, jotka olivat luonteeltaan keskenään samanlaisia.

Taulukko 4 Tehtäväosioiden tunnuslukuja

	Keskiarvo	Keskihajonta	Suurin arvo	Pienin arvo	Vinous	Huipukkuus
SFOR 1	.460	.570	2	0	.802	-.327
SFOR 2	.520	0.996	4	0	2.104	3.928
SFOR 3	.190	.439	2	0	2.278	4.677
SFOR 4	,250	.582	2	0	2.271	3.869
SFOR 5	.110	.421	2	0	3.830	13.927
SFOR 6	.450	.841	4	0	2.012	3.784
SFOR 7	.880	1.213	3	0	.911	-.888
SFOR 8	1.130	1.387	3	0	.519	-1.656
ARNK 1	5.050	2.816	12	0	.260	-.414
ARNK 2	2.440	2.296	9	0	.815	-.139
ARNK 3	3.810	2.728	11	0	.481	-.304

	Keskiarvo	Keskihajonta	Suurin arvo	Pienin arvo	Vinous	Huipukkuus
ARNK 4	3.100	2.371	12	0	1.188	2.055

Keskiarvoisesti etenkin SFOR-osatehtävissä, mutta myös ARNK-osatehtävissä pisteet olivat melko matalalla tasolla. Keskihajonnoissa on hieman vaihtelua tehtävien välillä. Suurimmassa osassa SFOR-osatehtäviä keskihajonta pysyy alle yhden, mutta tehtävissä 7 (1.213) ja 8 (1.387) arvot ovat suurempia ja tehtävässä 2 keskihajonta on tasan yksi. ARNK-osatehtävissä keskihajonnat nousevat melko korkeiksi, sillä niiden kaikkien keskihajonta oli yli kahden. Vinous saa kaikilla osatehtävillä arvon yli 0, jolloin jakauma on vino oikealle (Nummenmaa, 2009, s. 71). Vinouma oikealle tarkoittaa, että aineistossa on runsaasti arvoja, jotka ovat keskiarvoa pienempiä (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s. 104). Huipukkuusarvot vaihtelivat hyvin radikaalisti. Huipukkuus kertoo, kuinka terävähuippuinen jakauma on: alle nollan on litteähuippuinen ja yli nollan terävähuippuinen (Nummenmaa, 2009, s. 72). Korkein huipukkuusarvo tehtävistä oli viidennellä SFOR-osatehtävällä (13.927), jonka jakauma oli hyvin terävähuippuinen. Vastaavasti matalin huipukkuusarvo oli kahdeksannella SFOR-osatehtävällä (-1.656), joka oli litteähuippuinen.

Jo summamuuttujia rakennettaessa kiinnitettiin erityistä huomiota reliabiliteettiin. Reliabiliteetin avulla on tarkoitus arvioida, paljonko mittausvirheitä mittaustuloksiin sisältyy (Nummenmaa, 2009, s. 351). Tässä tutkimuksessa käytettiin reliabiliteetin tärkeimpänä tarkasteltavana mittarina Cronbachin alphaa, joka muodostuu arvioinniltaan yhtenäiseksi muutettujen muuttujien välisistä korrelaatioista ja niiden keskiarvosta (Nummenmaa, 2009, s. 356–357). Ensin tarkasteltiin summamuuttujan luotettavuutta, jos kaikista SFOR-osatehtävistä tehtäisi yksi summamuuttuja. Tällöin Cronbachin alpha oli 0.492, joka on reilusti alle tarvittavan arvon 0.6, jonka katsotaan olevan alaraja uusissa mittareissa (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s. 86). Myöskään lähes minkään osamuuttujan korrelaatio summamuuttujaan ei ollut tarvittavan korkea, joten summamuuttuja jaettiin tehtävänantojen perusteella kahteen osaan. Ensimmäiseen osaan kuuluivat valokuvatehtävät eli osatehtävät 1–6, jonka summamuuttujan Cronbachin alphaksi tuli 0.583 (taulukko 5). Osamuuttujien korrelaatiot olivat melko matalia edelleen (matalin 0.184 ja korkein 0.510), mutta huomattavasti parempia kuin aiemmin. Valokuvatehtävät ovat uusia SFOR-tehtävien kirjossa ja, vaikka ne pohjautuvat aiempiin SFOR- ja SFON-tehtäviin (esim. McMullen, Chan, Mazzocco & Hannula-Sormunen, 2019; McMullen, Hannula-Sormunen, Laakkonen &

Lehtinen, 2016), ei niitä ole vielä käytetty monessa tutkimuksessa ja se selittää osaltaan matalaa alphan arvoa. Alphan arvo oli melko lähellä uusien mittareiden 0.6 rajaa, joten sen katsotaan olevan tarpeeksi korkealla tasolla käytettäväksi. Toiseen osaan kuuluivat teleportaatiotehtävät eli osatehtävät 7–8, jonka summamuuttujan alpha oli 0.684. Myös sen osamuuttujien korrelaatiot summamuuttujaan olivat tarpeeksi korkeat (yli 0.5). Neljästä ARNK-tehtävästä tehtiin summamuuttuja, jonka alpha oli 0.775 ja osamuuttujien korrelaatiot summamuuttujaan ovat kolmella ensimmäisellä osatehtävällä yli 0.6 ja neljännellä 0.233.

4.2 Summamuuttujien tarkastelua parametrisia ja epäparametrisia testejä varten

Seuraavaksi tutkittiin, olivatko summamuuttujat normaalisti jakautuneita, jotta voidaan käyttää oikeita analysointimenetelmiä. Tätä tarkasteltiin Kolmogorov-Smirnov-testin ja kuvailevan statistiikan avulla. Standardoidun normaalisti jakautuneen muuttujan huipukkuus ja vinous ovat lähellä 0 sekä keskihajonta 1 (Nummenmaa, 2009, s. 71). Lisäksi, kun muuttujan moodi, mediaani ja keskiarvo ovat lähellä toisiaan, on muuttuja lähellä normaalijakaumaa (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s. 105). Kolmogorov-Smirnov-testin tulosten mukaan molempien SFOR-summamuuttujien eroavuus normaalijakaumasta oli tilastollisesti merkitsevää ($p<0.001$). ARNK-tehtävien eroavuus normaalijakaumasta oli 0.043 ($p<0.05$) eli myöskään ARNK-tehtävien summamuuttuja ei ole testin mukaan normaalijakauman mukainen. Koska normaalijakaumatestit tarkastelevat normaalijakaumaan asettumista hyvin tarkasti, voivat aineistot olla lähes normaalisti jakautuneita, vaikka testien mukaan ne eivät sen rajoihin yltäisi. Tämän vuoksi tarkastellaan lisäksi vielä summamuuttujien kuvailevia statistiikkoja (taulukko 5). SFOR-valokuvatehtävien summamuuttujan vinous (1.488) ja huipukkuus (1.841) kertovat, että muuttuja ei olisi normaalisti jakautunut. Tätä puoltaa myös keskihajonta, joka on 0.384 eli reilusti alle halutun arvon 1. Mediaani (0.167) on lähes kaksi kertaa niin suuri kuin keskiarvo (0.330). SFOR-teleportaatiotehtävien summamuuttujan vinous (0.667) on lähellä normaalisti jakautuneen rajoja ollessaan alle 1. Keskihajonta (1.136) melko lähellä arvoa 1, mutta huipukkuus (-1.058) ylittää normaalijakautuneiden ja lähes normaalisti jakautuneiden rajat. Myös tämän SFOR-summamuuttujan keskiarvo (1.001) on kaksi kertaa mediaanin (0.500) suuruinen. Kuvailevien statistiikkojen valossa kumpikaan SFOR-summamuuttujista ei ole lähellä normaalisti jakautunutta. ARNK-tehtävien summamuuttujan vinous on 0.568 ja huipukkuus 0.135, joista huipukkuus on hyvin lähellä nollaa ja vinouskin sijoittuu alle yhden päähän nollasta. Keskihajonta on 1.987, joka on melko kaukana halutusta arvosta 1. Mediaani (3.262) on melko lähellä keskiarvoa (3.621). Kuvailevien statistiikkojen valossa voidaan tulkita ARNK-tehtävien summamuuttujan olevan lähellä normaalisti jakautunutta, vaikka Kolmogorov-Smirnovin testin mukaan se ei ollut täysin normaalisti jakautunut. Tätä puoltaa myös kuvio 2, josta huomataan, että normaalijakauman käyrä ei hirveän radikaalisti poikkea muodoltaan saatujen pistemäärien muodostamasta jakaumasta.

Taulukko 5 Summamuuttujien arvoja

Summa-muuttuja	Alpha	Osioiden lkm.	Min	Max	Mediaani	Ka	Kh	Vinous	Huipukkuus
SFOR-tehtävät 1–6	.583	6	0	1.67	.167	.330	.384	1.488	1.841
SFOR-tehtävät 7–8	.684	2	0	3.00	.500	1.009	1.136	.667	-1.058
ARNK-tehtävät	.775	4	0	10.00	3.263	3.621	1.987	.568	.135

Summamuuttujien tarkastelussa huomattiin, että SFOR-tehtävien summamuuttujat eivät olleet normaalisti jakautuneet, mutta ARNK-tehtävien summamuuttuja oli lähellä normaalisti jakautunutta. Ryhmien vertailua varten tarkastellaan vielä Kolmogorov-Smirnov-testin avulla, ovatko vastaukset normaalisti jakautuneet lyhyen ja pitkän matematiikan ryhmien tai nais- ja miespuolisten mukaan. Odotetusti SFOR-tehtävien summamuuttujat erosivat tilastollisesti merkitsevästi ($p<0.001$) normaalijakautuneesta molempien suhteen, mutta ARNK-tehtävien summamuuttuja oli normaalisti jakautunut pitkän ja lyhyen matematiikan ryhmissä ($p=0.200$) sekä sukupuolen mukaan (miehet $p=0.200$ ja naiset $p=0.064$). Tämän perusteella SFOR-vastausten analysointiin käytetään epäparametrista Mann-Whitneyn testiä eli U-testiä ja ARNK-tehtävien vastausten analysointiin parametrista T-testiä. T-testi on parametrinen testimenetelmä, jossa vaaditaan mm. aineiston normaalijakautuneisuutta ja muuttujan jatkuvuutta (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s.120–121). T-testin menetelmä perustuu numeerisen muuttujan keskiarvojen vertailuun kategorisen muuttujan eri luokissa (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s.121). Tässä tutkimuksessa joustavat rationaalilukukäsitetaidot ovat numeerisena muuttujana ja kategorisena muuttujana sukupuoli tai pitkä ja lyhyt matematiikka. U-testi on T-testin epäparametrinen vastine, jossa normaalijakauma ei ole edellytyksenä, mutta jakaumien muodon tulisi olla samankaltainen (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s.135). U-testin toiminta perustuu järjestyslukujen keskiarvoihin: testissä halutun muuttujan arvot laitetaan suurusjärjestykseen, lasketaan järjestysluvut yhteen kategorisen muuttujan luokissa ja jaetaan luokan koolla, jolloin saadaan kummallekin kategorisen muuttujan luokille järjestyslukujen keskiarvot (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s.135).

Ennen T-testin tekemistä, täytyy vielä tarkastella, onko aineisto varianssiltaan soveltuva T-testiin ja miten tuloksia tarkastellaan. Levenen testi kertoo, ovatko tulokset tarpeeksi homogeenisiä eli onko ryhmien keskihajonnassa tilastollisesti merkitseviä eroja varianssin suhteen (Nummenmaa, 2009, s. 204). Levenen testin mukaan ryhmien erot eivät olleet tilastollisesti merkitseviä pitkän ja lyhyen matematiikan suhteen (p=0.066) eivätkä nais- ja miespuolisten suhteen (p=0.441), joten tuloksia voidaan tarkastella siltä kannalta, että varianssit ovat yhtä suuret.

Ennen U-testien tekemistä tarkastellaan kuvailevien statistiikkojen (taulukko 6) avulla, onko eri ryhmien vinoumissa suuria eroja. Sekä pitkän että lyhyen matematiikan suhteen SFOR-valokuvatehtävä on vino oikealle. Myös SFOR-valokuvatehtävän vinous on sekä pitkän että lyhyen suhteen kallistunut oikealle. Sukupuolten suhteen tarkasteltiin mies- ja naispuolisia, sillä kyseiset ryhmät olivat tarpeeksi suuret vertailuihin. Molemmat SFOR-tehtävät olivat sukupuolen suhteen vinoutuneet oikealle. Näiden tarkasteluiden valossa U-testiä voidaan käyttää luotettavasti haluttujen ryhmien vertailuun.

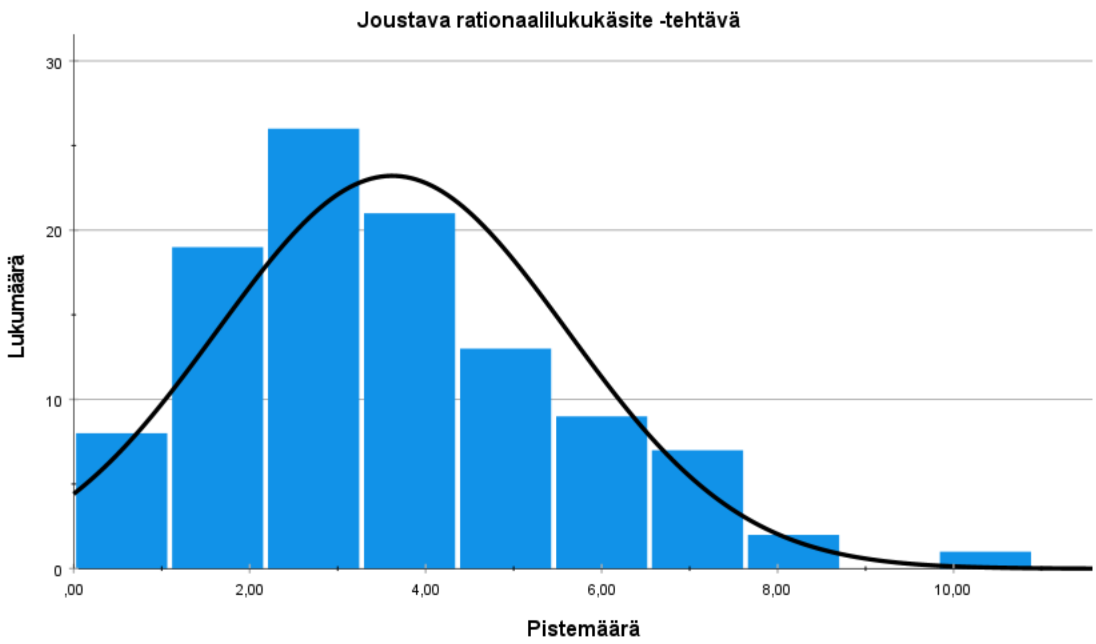
Taulukko 6 Kuvailevia statistiikkoja ryhmiteltynä sukupuolen ja pitkän & lyhyen matematiikan perusteella

	Keskiarvo	Mediaani	Vinous
Miehet SFOR-valokuvatehtävä	.291	.167	1.877
Naiset SFOR-valokuvatehtävä	.364	.167	1.314
Miehet SFOR-teleportaatiotehtävä	1.010	.500	.648
Naiset SFOR-teleportaatiotehtävä	.989	.500	.732
Lyhyt matematiikka SFOR-valokuvatehtävä	.288	.167	2.130
Pitkä matematiikka SFOR-valokuvatehtävä	.380	.167	1.149
Lyhyt matematiikka SFOR-teleportaatiotehtävä	.775	.000	.481
Pitkä matematiikka SFOR-teleportaatiotehtävä	1.131	.500	1.131

4.3 Lukiolaisten joustava rationaalilukukäsiteosaaminen

Taulukosta 5 nähdään, että ARNK-tehtävien maksimipistemäärä oli 10 ja minimi 0, keskiarvo oli 3.621 ja keskihajonta 1.987. ARNK-tehtävien vastaukset olivat kohtuu lähellä normaalisti jakautunutta, kuten normaalijakaumakäyrästä nähdään (kuvio 2). Vastaajista vain kuusi sai tehtävästä yhteensä alle yhden pisteen, ja heistä vain kaksi ei saanut yhtään pistettä. Suurin osa (n=87) sijoittui pisteiden osalta välille [1.00,6.00]. Yli kuusi pistettä sai 13 vastaajista ja kaksi heistä sai yli kahdeksan pistettä.

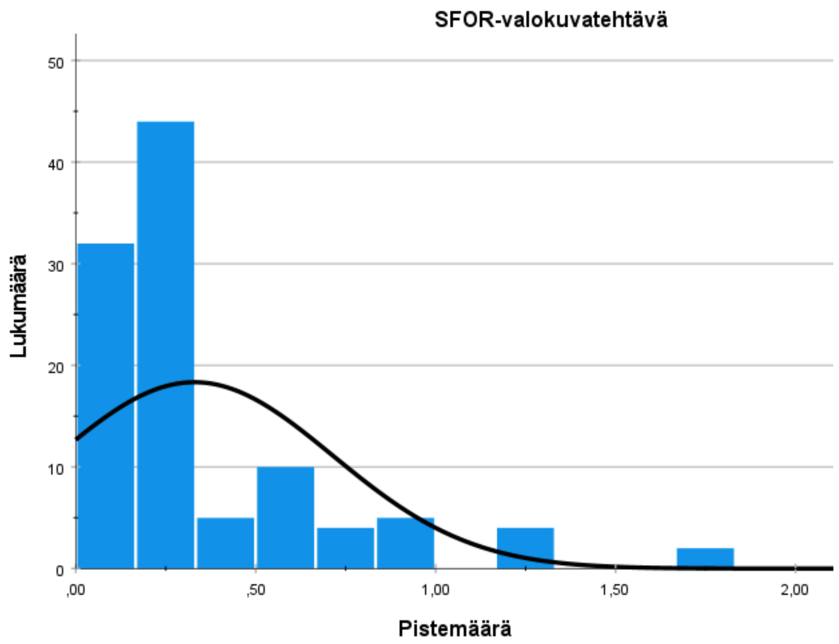
Naisten ja miesten välisiä eroja tarkasteltiin T-testillä. Miehet (4.01) saivat hieman naisia (3.30) enemmän pisteitä, mutta tulokset eivät olleet tilastollisesti merkitseviä $t(98) = 1.793$; $p = 0.076$. Tuloksen tarkentamiseksi tulkitaan efektikokoa, joka kertoo, kuinka todennäköisesti muuttujan vaihtelu on systemaattista (Nummenmaa, 2009, s. 395). Jos efektikoko on pieni, on satunnaisuuden mahdollisuus suurempi (Nummenmaa, 2009, s. 395). T-testin yhteydessä efektikokoa mitataan Cohenin d:n arvolla, joka sai tässä arvon 0.359. Cohenin (1988) mukaan $0.20 < |d| < 0.50$ on pieni, $0.50 < |d| < 0.80$ on keskisuuri ja $0.80 < |d|$ on suuri efektikoko (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s. 46). Efektikoko jää tässä pieneksi, mikä vahvistaa tulosta, että tilastollisesti merkitseviä tutkitusta muuttujasta johtuvia eroja ei ole.



Kuvio 2 Histogrammi ARNK-tehtävän pistemääristä ja frekvensseistä

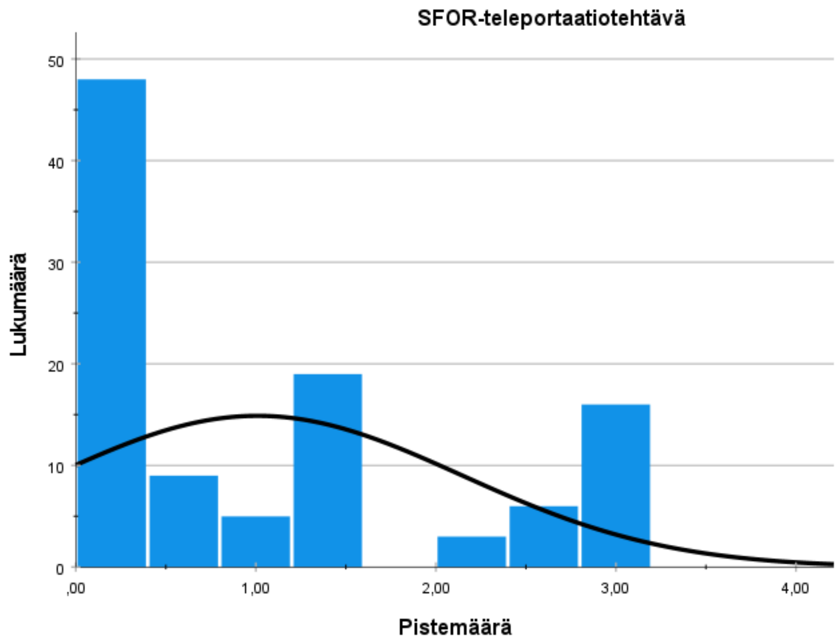
4.4 Lukiolaisten spontaani huomionkiinnittäminen määrällisiin suhteisiin

SFOR-tehtävät oli jaettu kahteen eri summamuuttujaan: valokuvatehtäviin ja teleportaatiotehtäviin. Kummankaan tehtävän vastaukset eivät noudattaneet normaalijakaumaa. Kokonaisuudessaan SFOR-tehtävien pistemäärät olivat melko matalia. Valokuvatehtävien maksimipistemäärä oli 1.67 ja minimi 0. Tehtävien keskiarvoinen pistemäärä oli koko testin tehtävien matalin (0.33) ja keskihajonta vähäistä (0.38) (taulukko 5). Vastaajista 31 sai nolla pistettä. Enemmän kuin yhden pisteen sai vain kuusi vastaajista eli 5.67 %. Suurin osa (n=69) sijoittui näiden pisteiden väliin.



Kuvio 3 Histogrammi SFOR-valokuvatehtävän pistemääristä ja frekvensseistä

Teleportaatiotehtävissä saatu maksimipistemäärä oli 3, joka oli suhteessa paljon korkeampi kuin valokuvatehtävillä ja minimi 0. Keskiarvo teleportaatiotehtävistä oli 1.00 ja keskihajontaa oli jonkun verran (1.136) (taulukko 5). Teleportaatiotehtävissä 48 vastaajaa sai nolla pistettä eli jopa 45.3 % vastaajista. 16 vastaajaa sai kolme pistettä eli tehtävän maksimimäärän. Loput 42 vastaajista sijoittui kuvion 4 mukaisesti välille [0.44,2.5].



Kuvio 4 Histogrammi SFOR-teleportaatiotehtävän pistemääristä ja frekvensseistä

Naisten ja miesten välisiä eroja tarkasteltiin U-testin avulla, sillä SFOR-tehtävien vastaukset eivät olleet lähellä normaalijakaumaa. U-testin perusteella miehet menestyivät teleportaatiotehtävässä hieman paremmin kuin naiset ja naiset taas miehiä paremmin valokuvatehtävissä, mutta kumpikaan ero ei ollut tilastollisesti merkitsevä. Valokuvatehtävissä Z=-1.134; p=0.257 ja teleportaatiotehtävissä Z=-0.124; p=0.901. Kun tarkastellaan kuvailevien statistiikkojen (taulukko 6) perusteella eroja pisteissä miehet (1.010) saivat keskiarvoisesti hieman korkeampia pisteitä teleportaatiotehtävissä kuin naiset (0.989) ja naiset (0.364) taas valokuvatehtävissä miehiä (0.291) hieman korkeampia pisteitä, mutta erot eivät ole suuria. Huomataan myös, että mediaanit olivat molemmilla ryhmillä samat (valokuvatehtävässä 0.1667 ja teleportaatiotehtävässä 0.500), vaikka keskiarvon perusteella pieniä eroja olisikin ollut havaittavissa. Lasketaan vielä U-testille efektikoko käyttäen r-suuretta. R-suure saadaan laskettua kaavalla Z/√N (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s. 136). Näin ollen valokuvatehtävän efektikoko on -1.134/√106=-0.110 ja teleportaatiotehtävän efektikoko on -0.124/√106=-0.012. R-suuren raja-arvot ovat 0,10–0,30–0,50: pieni-keskisuuri-suuri (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s. 47), joten valokuvatehtävän efektikoko jäi hyvin pieneksi ja teleportaatiotehtävän pieneksi. Nämä puoltavat sitä, että tilastollisesti merkitseviä eroja ei ollut, sillä satunnaisuuden mahdollisuus jää hyvin suureksi.

4.5 Joustavan rationaalilukukäsiteosaamisen yhteys spontaaniin huomionkiinnittämiseen määrällisiin suhteisiin

Summamuuttujista SFOR-summamuuttujien vastaukset eivät olleet lähellä normaalisti jakautuneita, joten yhteyksien tarkasteluun käytetään Spearmanin korrelaatiokerrointa. Tähtinen, Laakkonen ja Broberg (2020) huomauttavat, että toisin kuin Pearsonin korrelaation käytön edellytyksenä, Spearmanin korrelaatio ei vaadi aineiston olevan normaalisti jakautunut. Spearmanin korrelaatiokerroin perustuu järjestyskorrelaatioon, jossa muuttujien alkuperäiset arvot muutetaan järjestysluvuiksi ja tutkitaan, onko eri muuttujien järjestyksien suhteen yhteyksiä (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s. 190). Korrelaatiokerroin r saa arvoja välillä [-1.1], joista alle nollan olevat arvot kuvaavat negatiivista yhteyttä ja vastaavasti yli nollan olevat arvot positiivista yhteyttä (Nummenmaa, 2009, s. 280). Tähtinen, Broberg ja Laakkonen (2020) määrittelevät korrelaation olevan heikkoa $|r|<0.30$, kohtalaista $0.30<|r|<0.70$ ja voimakasta $|r|>0.70$. Samassa yhteydessä mainitaan, että jos otoskoko on suuri ($N<50$), voi vähän alle 0.30 olevalla arvolla riippuvuus olla kohtalaista (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s. 186).

Taulukosta 7 nähdään, että ARNK-tehtävien summamuuttujan vastaukset olivat tilastollisesti merkitsevästi yhteydessä molempiin SFOR-tehtävien summamuuttujiin ($p<0.01$). ARNK-tehtävien summamuuttujan korrelaatiokerroin SFOR-tehtävien 1–6 summamuuttujaan oli 0.261 ja 0.251 SFOR-tehtävien 7–8 summamuuttujaan. Tässä aineistossa ($N=106$) voidaan tulkita korrelaation 0.251–0.261 olevan kohtalaista eli rationaalilukukäsiteosaamisella ja spontaanilla huomionkiinnittämisellä määrällisiin suhteisiin on kohtalainen positiivinen yhteys.

Taulukko 7 Rationaalilukukäsitetehtävien summamuuttujan yhteys SFOR-tehtävien summamuuttujiin

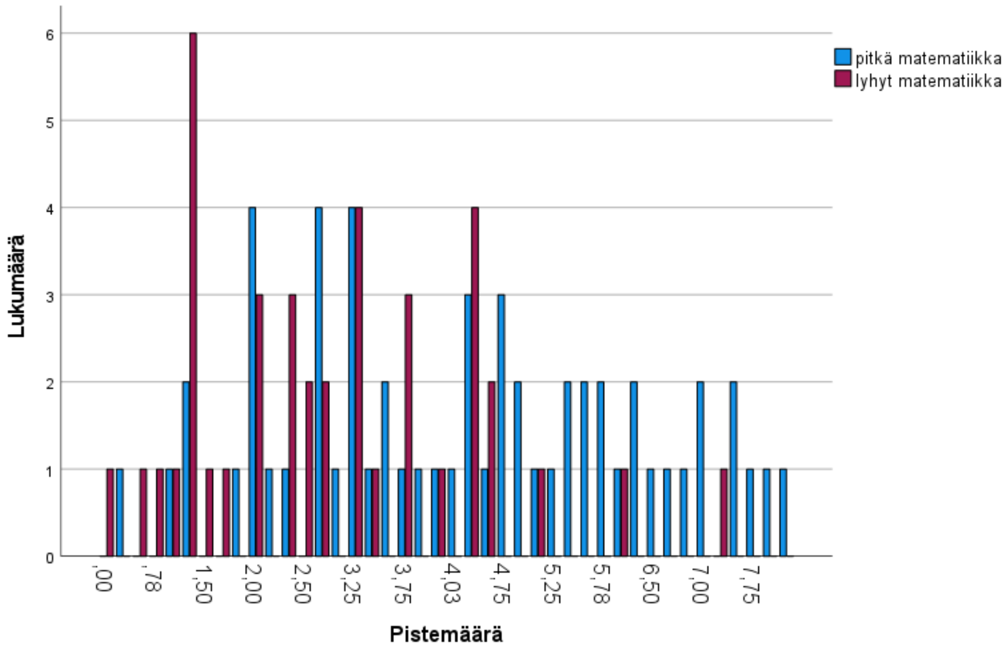
	ARNK-tehtävä (r)	p
SFOR-valokuvatehtävä	.261	.007
SFOR-teleportaatiotehtävä	.251	.009

4.6 Pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden erot joustavassa rationaalilukukäsiteosaamisessa ja spontaanissa huomionkiinnittämisessä määrällisiin suhteisiin

Taustamuuttujana kysyttiin opiskelevatko vastaajat pitkää vai lyhyttä matematiikkaa. Lyhyttä matematiikkaa vastaajista opiskeli 40 ja pitkää matematiikkaa 57 eli tässä osiossa tehdyissä testeissä vastaajien määrä oli yhteensä 97, sillä huomiotta jätettiin ne, jotka eivät vastanneet kumpaa opiskelevat. Seuraavaksi tarkastellaan, onko pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoilla eroja joustavassa rationaalilukukäsiteosaamisessa tai SFOR-taipumuksissa.

4.6.1 Joustava rationaalilukukäsiteosaaminen

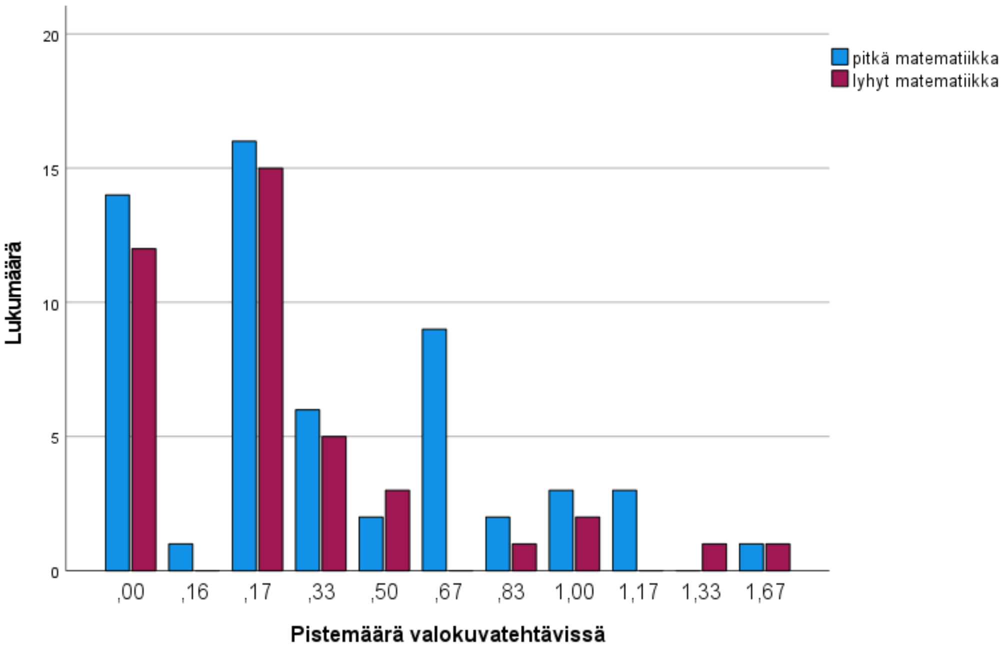
Joustavaa rationaalilukukäsiteosaamista pitkän ja lyhyen matematiikan suhteen analysoitiin parametrisellä T-testillä. Joustava rationaalilukukäsiteosaaminen oli pitkän matematiikan lukijoilla (4.37) korkeampaa kuin lyhyen matematiikan lukijoilla (2.80), ja ero oli tilastollisesti merkitsevä $t\ (95) = -4.069$; $p<0.001$. Kuviosta 5 voi huomata, että pitkän matematiikan opiskelijoiden määrä on melko vallitseva korkeiden pisteiden puolella. Koska tulos oli tilastollisesti merkitsevä, on erityisen tärkeää tarkastella efektikokoa, jotta voidaan selvittää, kuinka johdonmukaista muuttujan vaihtelu on (Nummenmaa, 2009, s. 395). Cohenin d saa arvokseen -0.839. Cohenin (1988) mukaan $0.80 < |d|$ on suuri efektikoko (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s. 46), joten voidaan siis tulkita, että efektikoko tässä tapauksessa on suuri. Efektikoon tarkastelun perusteella tulokset eivät todennäköisesti johdu satunnaisesta vaihtelusta, vaan kyse on pitkän ja lyhyen matematiikan aiheuttamasta efektistä.



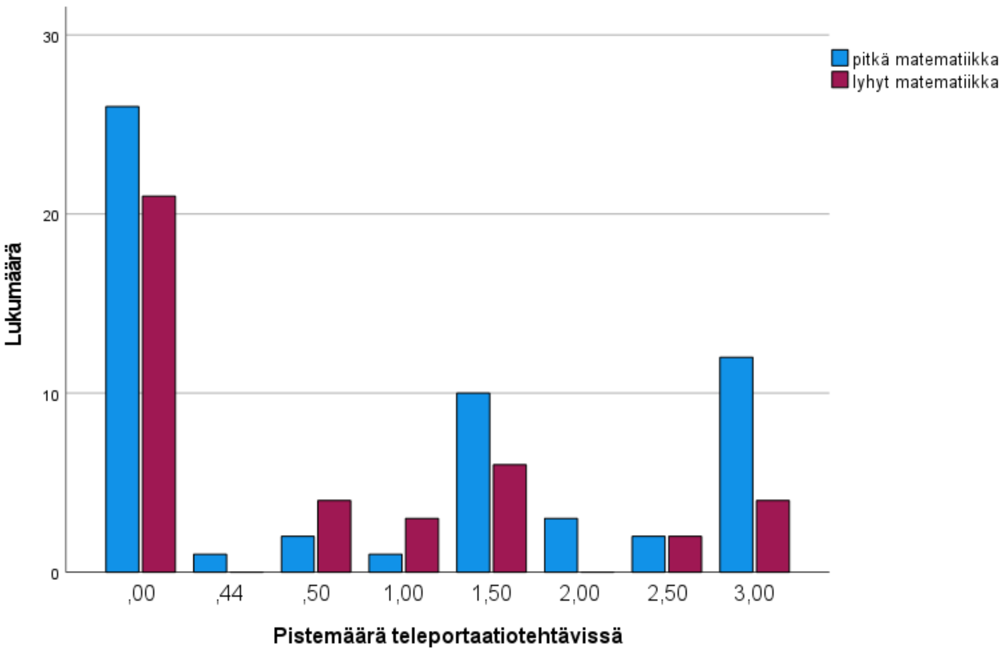
Kuvio 5 Pistemäärien jakautuminen joustava rationaalilukukäsite-tehtävässä pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoilla

4.6.2 Spontaani huomionkiinnittäminen määrällisiin suhteisiin

Spontaania huomionkiinnittämistä määrällisiin suhteisiin tutkittiin epäparametrisellä U-testillä, sillä aineisto ei ollut normaalijakautunut SFOR-summamuuttujien suhteen. U-testin perusteella pitkän matematiikan lukijat (valokuvatehtävissä ka. 0.380, md 0.167 ja teleportaatiotehtävissä ka. 1.131, md 0.500) kiinnittivät enemmän spontaanisti huomiota määrällisiin suhteisiin kuin lyhyen matematiikan lukijat (valokuvatehtävissä ka. 0.286, md 0.167 ja teleportaatiotehtävissä ka. 0.775, md 0.000). Tulokset eivät kuitenkaan olleet tilastollisesti merkitseviä. Valokuvatehtävissä Z=-1.225; p=0.221 ja teleportaatiotehtävissä Z=-1.287; p=0.198. Lasketaan tulosten luotettavuuden lisäämiseksi efektikoko käyttäen r-suuretta (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s. 44). Lasketaan r-suure valokuvatehtäville r=-1,225/√97=-0,124 ja teleportaatiotehtäville r=-1,287/√97=-0,131. Efektikoot voidaan tulkita pieneksi, sillä r-suureen pienen efektikoon raja-arvo on 0.10 (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s. 47). Näiden tehtävien suhteen efektikoon tarkastelu vahvistaa päätelmää, että tuloksissa ei ole tilastollisesti merkitseviä eroja pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden välillä, vaan kyse on satunnaisvaihtelusta. Paikallisia eroja pistemäärissä pitkän ja lyhyen matematiikan suhteen voi tarkastella kuvioiden 6 ja 7 perusteella, koska tilastollisesti merkitseviä eroja ei kokonaisuudessaan ollut. Kuvioista 6 ja 7 voi huomata, että suuria eroja lyhyen ja pitkän matematiikan opiskelijoiden suhteen ei SFOR-taipumuksissa ollut, sillä molempien ryhmien edustajia on jakautunut melko tasaisesti kaikille pistemäärille.



Kuvio 6 Pistemäärien jakautuminen valokuvatehtävissä pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoilla



Kuvio 7 Pistemäärien jakautuminen teleportaatiotehtävissä pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoilla

5 Pohdinta

Tutkimuksessa tarkasteltiin, millaiset joustavat rationaalilukukäsitetaidot lukiolaisilla on, kuinka paljon he kiinnittävät spontaanisti huomiota määrällisiin suhteisiin, ja miten kyseiset ominaisuudet ovat yhteydessä toisiinsa. Lisäksi tutkimuksessa selvitettiin, onko pitkän ja lyhyen matematiikan valinneiden välillä eroa kyseisissä ominaisuuksissa. Lyhyen ja pitkän matematiikan lisäksi taustamuuttujana kysyttiin sukupuolta, jonka puitteissa tutkittiin eroja mies- ja naispuolisten välillä, sillä muunsukupuolisten määrä (n=4) oli liian pieni tehtäviin testauksiin. Aiheita ei ole ennen tutkittu samassa yhteydessä tai lukioikäisillä, joten suoraan vertailtavia tuloksia aiempien tutkimusten perusteella ei ole. Samoja piirteitä kuitenkin aiempien tutkimusten kanssa oli havaittavissa tulosten taustalla esimerkiksi SFOR-taipumusten ja joustavan rationaalilukukäsiteosaamisen yhteyden suhteen sekä pitkän ja lyhyen matematiikan kohdalla. Seuraavaksi tarkastellaan tutkimuksen luotettavuutta, tutkimuskysymyksittäin saatuja tuloksia ja siirrytään lopuksi kohti yleisempiä huomioita matemaattisesta ajattelusta sekä matematiikan opetuksesta.

5.1 Tutkimuksen luotettavuus

Vastaukset SFOR-tehtävistä pisteytettiin tutkijan toimesta aiempien tutkimusten mukaisilla pisteytysohjeilla. Tässä kannattaa ottaa huomioon se, että vaikka pisteiden antaminen pohjautui vahvasti pisteytysohjeisiin ja pisteytyksessä pyrittiin sekä yhdenmukaisuuteen että objektiivisuuteen, on tutkija silti voinut tulkita jotain vastauksia oman subjektiivisen näkökulmansa kautta ja tehdä vääriä tulkintoja vastauksista. SFOR-tehtäviä tarkastellessa pitää myös huomioida, että valokuvatehtävä on tehtävätyyppinä uusi, vaikka pohjautuukin aiempien tutkimusten kaltaisiin tehtäviin. Valokuvatehtävää ei ole vielä käytetty monessa tutkimuksessa samaan tarkoitukseen kuin tässä tutkimuksessa, vaikka tietynlaisia muunnoksia siitä on käytetty myös muissa tutkimuksissa. SFOR-tehtävien, etenkin valokuvatehtävän, alphat olivat melko matalia osin viitearvojen alarajoilla ja jopa hieman niiden alapuolella. Tämä tarkoittaa, ettei mittarin reliabiliteetti ole paras mahdollinen ja silloin mittarin kuvaama vaihtelu ilmiön suhteen ei välttämättä ole täysin itse ilmiöstä lähtöisin, vaan osa tuloksesta voi olla peräisin satunnaisista mittausvirheistä (Tähtinen, Broberg & Laakkonen, 2020, s. 84). Reliabiliteettia tarkasteltiin ennen testien tekemistä myös ARNK-tehtävien suhteen ja sen alphan arvo oli hyvä, joten joustavan rationaalilukukäsitettä testaavaa mittaria voidaan pitää melko hyvänä luotettavuuden puolesta.

Otoskoko oli 106, joka oli kooltaan sopiva tehtyihin analyyseihin. Testaukseen osallistui neljä eri luokkaa, joiden vastaajista naispuolisia oli 49, miespuolisia 51, muunsukupuolisia neljä ja kaksi vastaajaa jätti kertomatta sukupuolensa. Koska muunsukupuolisten ja sukupuolensa mainitsematta jättäneiden määrä oli niin pieni, tehtiin sukupuolen suhteen tarvittavat vertailut nais- ja miespuolisten välillä. Pitkän (n=57) ja lyhyen (n=40) matematiikan jakaumat menivät myös kohtuullisen hyvin, vaikka pitkää matematiikkaa lukikin vastausten perusteella hieman useampi. Vaikka pitkän ja lyhyen matematiikan sekä sukupuolen vertailuissa osa vastaajista piti jättää pois, saatiin tarvittavat vertailut kyseisillä määrillä tehtyä hyvin ilman, että luotettavuus kärsi.

Testaustilanne toteutettiin koronavirusepidemian vuoksi ilman tutkijan fyysistä läsnäoloa. Kaikki testiryhmien opettajat saivat ohjeistuksen kirjallisena ja pystyivät sen perusteella pitämään testitilanteen itsenäisesti. Kuitenkin on otettava huomioon, että koska opettajat ovat erillisiä henkilöitä ja kouluissa on erilaisia käytäntöjä ja tiloja, voi tilanteen järjestäminen olla ollut pienissä määrin toisistaan poikkeavaa opetusryhmästä, opettajasta, luokkatilasta ja yleisistä käytännöistä riippuen. Tämän ei kuitenkaan ajatella vaikuttaneen tuloksiin merkitsevästi, sillä kirjallinen ohjeistus on ollut jokaiselle testiryhmälle yhtenäinen.

Valokuvatehtävässä pistemäärät olivat melko alhaisia (ka. 1,67) ja 31 vastaajista jäi ilman pisteitä. Myös teleportaatiotehtävässä suuri osa vastaajista (n=48) jäille vaille pisteitä, vaikka myös täysiä pisteitä saatiin jonkun verran (n=16). Näiden perusteella havaittavissa on pientä lattiaefektiä, jossa tehtävät ovat yleisesti olleet haastavia tutkimusjoukolle ja pisteet alhaisia (Cohen;Manion;& Morrison, 2000, s. 410). Osa tuloksista on voinut lattiaefektistä johtuen jäädä huomaamatta, merkityksettömiksi tai pienemmiksi kuin niiden vaikutukset oikeasti olisivat. Esimerkiksi SFOR-taipumusten ja joustavien rationaalilukukäsitetaitojen yhteys oli kohtalainen, mutta saattaa olla, että todellisuudessa niiden yhteys onkin voimakkaampi.

5.2 Lukiolaisten joustavat rationaalilukukäsitetaidot

Joustavissa rationaalilukukäsitetaidoissa oli melko paljon variaatiota. Keskiarvo oli 3.62 pistettä ja suurin osa vastaajista sijoittui normaalijakauman mukaisesti keskiarvon lähiympäristöön. 5.67 % vastaajista sai alle yhden pisteen ja alle 2 % ei saanut yhtään pisteitä eli suurin osa vastaajista sai vähintään yhden pisteen joustavasta rationaalilukukäsitetehtävästä. Yli kuusi pistettä sai vain 12.2 % vastaajista, joten huomataan, että korkeita pisteitä ei saanut kovin moni vastaaja. Joutsenlahden (2004) mukaan lukion matematiikan haasteena on opiskelija-aineksen heterogeenisyys: tasoerot opiskelijoiden välillä ovat huomattavia ja korostuvat aina pidemmälle opiskeltaessa. Heterogeenisyys on huomattavissa myös joustavissa rationaalilukukäsitetaidoissa, sillä pisteet jakautuvat melko laajasti matalista korkeisiin pisteisiin. Joutsenlahden (2004, 1997) lukiolaisten matematiikan osaamisen nelikentästä on huomattavissa, että opiskelijoilla on erilaisia opintopolkuja matematiikan oppiaineen sisällä ja oma motivaatio, kyvyt ja asenne matematiikkaa kohtaan vaikuttavat vahvasti siihen, miten oma matematiikan osaaminen tulee esille.

Joustavissa rationaalilukukäsitetehtävissä opiskelijalta täytyy löytyä kykyjä soveltaa osaamistaan. Jos tarkastellaan matemaattista käyttäytymistä, opitun soveltaminen ei-rutiini-muotoisiin tehtäviin tulee esille Joutsenlahden (1997) määrittelemänä vasta viimeisellä eli analysoinnin tasolla. Myös Kilpatrickin ja kumppanien (2001) matemaattisen osaamisen strategisen kompetenssin osa-alueella korostetaan joustavuuden merkitystä ongelmien ratkaisussa. Joustavan asiantuntijan rutiiniasiantuntijasta erottaa juuri se, että osaa soveltaa keräämäänsä osaamistaan ja ratkaista sen avulla uudenlaisia ongelmia (Hatano, 1987). Matematiikan oppiminen on kumulatiivista eli tieto rakentuu aiemmin opitun päälle (Joutsenlahti, 2004). Näin ollen opiskelija ei voi edetä matemaattisen osaamisen tasoilla eteenpäin, jos ei hallitse aiempia menetelmiä ja sisältöjä eivätkä kaikki välttämättä saavuta korkeimpia osaamisen tasoja lainkaan. Tämä voi osaltaan selittää tässäkin tutkimuksessa kohtuullisen pientä korkeita pisteitä saaneiden määrää joustavaa ja soveltavaa osaamista mitattaessa. Aiemmin mainittiin, että rationaaliluvut ovat kokonaislukuja monimutkaisempia ja niiden oppiminen on monille vaikeampaa (McMullen & Siegler, 2020; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001 s.231). Voi siis olla, että rationaaliluvut itsessään ovat aihepiiri, jossa useilla on vielä lukionkin aikana haasteita ja niillä soveltaminen voi olla sen vuoksi vaikeaa. Joustava rationaalilukukäsiteosaaminen ei vaadi muuta erityistason osaamista rationaalilukujen suhteen, mutta vahva rutiinitason käsitteellinen ja menetelmällinen sujuvuus on löydyttävä ennen kuin pystyy soveltamaan osaamistaan rationaalilukujen suhteen (McMullen, Hannula-Sormunen, Lehtinen & Siegler, 2020).

5.3 Lukiolaisten spontaani huomionkiinnittäminen määrällisiin suhteisiin

SFOR-tehtävät oli jaettu kahteen osaan tehtävänannon mukaan. Vain 13.2 % vastaajista ei saanut lainkaan pisteitä kummastakaan SFOR-tehtävästä eli enemmistö kiinnitti jonkin verran huomiota määrällisiin suhteisiin, vaikkakaan korkeita pisteitä lukiolaiset eivät niistä kokonaisuutena saaneet. Valokuvatehtävästä saatiin keskimäärin vähemmän pisteitä kuin teleportaatiotehtävästä, vaikka valokuvatehtävässä ei ollut maksimipistemäärää kuten teleportaatiotehtävässä. Vastaajista yli neljäsosa (n=31) ei saanut valokuvatehtävästä yhtään pistettä. Teleportaatiotehtävässä keskiarvo oli korkeampi, mutta vielä suurempi määrä vastaajista (n=48) jäi kokonaan ilman pisteitä. Teleportaatiotehtävässä jopa 15.1 % vastaajista sai maksimipistemäärän eli kolme pistettä. Valokuvatehtävässä korkein pistemäärä oli 1.67 ja yli yhden pisteen verran sai vain 5.67 % vastaajista. Taipumukset havaita matemaattisia ulottuvuuksia tilanteissa, jotka eivät ole pelkästään matemaattisia, riippuvat yksilöstä itsestään eivätkä siksi esiinny yhtä vahvoina kaikilla (McMullen, 2014). McMullen (2014) huomautti, että tutkittaessa lapsia helpommin esille tuli spontaania huomionkiinnittämistä mittaavissa tehtävissä lukumäärät eivätkä määrälliset suhteet, sillä lukumäärät saattoivat olla helpommin havaittavissa. SFOR-pisteet olivat tässä tutkimuksessa melko matalalla tasolla, joten saattaa olla, että sama efekti on huomattavissa myös lukiolaisten kohdalla, vaikka he ovat huomattavasti kauemmin opiskelleet matematiikkaa ja määrälliset suhteet sekä niihin liittyvät laskutoiminnot ovat heille tutumpia kuin nuorille lapsille. Mielenkiintoista olisikin tutkia, ovatko SFON-taipumukset eli spontaani huomionkiinnittäminen lukumääriin samalla tasolla vai onko sitä havaittavissa enemmän. Koska määrälliset suhteet opitaan matematiikan perusopetuksessa pelkkiä lukuja ja lukumääriä myöhemmin, on SFOR-toiminta sen puolesta SFON-toimintaa edistyksellisempi spontaanin matemaattisen toiminnan muoto. McMullenin (2014) mukaan spontaani huomion kiinnittäminen määrällisiin suhteisiin yhä edistyneemmällä tasolla on tärkeää, kun opetettavat matematiikan aiheet vaikeutuvat. Vaikka SFOR-taidot eivät suurella osalla lukiolaisilla olleetkaan korkealla tasolla, olisi tulevaisuudessa juuri sen vuoksi hyvä ottaa huomioon sekä spontaani huomionkiinnittäminen lukumääriin että määrällisiin suhteisiin, kun lähdetään kehittämään opetusta.

SFOR-taipumukset ovat yksi osa matemaattista käyttäytymistä ja ne ovat yhteydessä moniin eri matematiikan osaamisen alueisiin (McMullen, Chan, Mazzocco & Hannula-Sormunen, 2019). Kuten jo aiemmin mainittiin, on lukiolaisten osaaminen matematiikan suhteen hyvin vaihtelevaa ja suhtautuminen matematiikkaa kohtaan voi olla hyvin erilaista opiskelijasta riippuen. McMullen, Hannula-Sormunen ja Lehtinen (2011) ovat tutkineet SFOR-taipumuksia ja niiden yhteyksiä matematiikan osaamiseen ja sen kehitykseen. McMullenin ja kumppanien (2011) tutkimuksen mukaan SFOR on yksi osatekijä oppilaiden olemassa olevan matemaattisen osaamisen suhteen ja oppilailla, joilla oli korkea SFOR-taipumus, oli myös paremmat aritmeettiset taidot (McMullen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2011). Tässä tutkimuksessa opiskelijoiden yleistä matematiikan osaamista ei tutkittu joustavaa rationaalilukukäsitettä lukuun ottamatta, joten ei voida tarkemmin tietää, millaiset matemaattiset taidot opiskelijoilla on ja ovatko ne osatekijänä lukiolaisten SFOR-taipumuksille. Jatkotutkimusmahdollisuus olisikin tutkia vielä laajemmin lukiolaisten matemaattisen osaamisen eri osa-alueiden vaikutuksia heidän SFOR-taitoihinsa.

5.4 Lukiolaisten joustavan rationaalilukukäsiteosaamisen yhteys spontaaniin huomionkiinnittämiseen määrällisiin suhteisiin

Tulosten perusteella joustavalla rationaalilukukäsiteosaamisella on kohtalainen positiivinen yhteys spontaaniin huomionkiinnittämiseen määrällisiin suhteisiin. Aiempien tutkimusten perusteella rationaalilukujen osaamisella on yhteys spontaaniin huomion kiinnittämiseen määrällisiin suhteisiin (mm. McMullen, Hannula-Sormunen, Laakkonen & Lehtinen, 2016; Van Hoof, ym., 2016). Vaikka joustavien rationaalilukukäsitetaitojen yhteyttä ei ole vielä paljoa yksittäisenä muuttujana tutkittu, oli näiden aiempien tutkimusten valossa odotettavissa, että myös joustavilla rationaalilukukäsitetaidoilla voi olla yhteys SFOR-taitoihin. Hyvät joustavat rationaalilukukäsitetaidot mahdollistavat rationaalilukuosaamisen soveltamisen rutiinitason taitamista paremmin (McMullen, Hannula-Sormunen, Lehtinen & Siegler, 2020), ja joustava osaaja pystyy soveltamaan taitojaan tehokkaasti uusiin tilanteisiin sekä keksimään uusia ratkaisukeinoja (Kärki, ym., 2021). Matematiikan soveltaminen on keskeistä myös SFOR-taidoissa, sillä suuri osa tilanteista, joissa voi käyttää matematiikkaa on formaalien oppimistilanteiden ulkopuolella ja, jotta niissä voi käyttää matematiikkaa, pitää osata soveltaa sitä itsenäisesti (McMullen, 2014). Koska sekä SFOR-taidoissa että joustavissa rationaalilukukäsitetaidoissa osatun soveltaminen on suuressa roolissa, ei ole yllättävää, että niiden välillä on positiivinen yhteys.

5.5 Pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden erot joustavassa rationaalilukukäsiteosaamisessa ja spontaanissa huomionkiinnittämisessä määrällisiin suhteisiin

Pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden välillä on havaittavissa olevia eroja osaamisessa (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017). Myös tässä tutkimuksessa pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden välillä oli tilastollisesti merkitseviä eroja joustavassa rationaalilukukäsiteosaamisessa. Pitkän matematiikan opiskelijoilla oli keskimäärin parempi osaaminen joustavassa rationaalilukukäsitetehtävässä kuin lyhyen matematiikan opiskelijoilla. Myös SFOR-tehtävissä pieniä eroja oli havaittavissa keskiarvoissa, mutta ne eivät olleet tilastollisesti merkitseviä. Metsämurosen ja Tuohilammen (2017) mukaan eriytymistä matematiikan taidoissa tapahtuu etenkin lukion kurssien aikana, mutta eriytyminen alkaa jo peruskouluaikoina ja yksi selkeä eriytymisvaihe tapahtuu 9. luokalle tultaessa. Alakoulun aikaisella matematiikan osaamisella on tärkeä rooli matemaattisten taitojen kehittymisessä, sillä monet silloin opitut taidot ovat keskeisessä roolissa lukioaikaisen matematiikan osaamisen kannalta (Siegler, ym., 2012; Watts, Duncan, Siegler & Davis-Kean, 2014). Koska matematiikan osaamisessa tiedot rakentuvat aiemmin opitun päälle (Joutsenlahti 2004; POPS, 2014, s.234), voivat osaamiserojen tarkemmat taustat periaatteessa olla missä tahansa koulupolun varrella yksilöstä riippuen.

Lukion aikana matematiikan osaaminen monilla oppilailla kehittyy vielä 9. luokan osaamistasoa korkeammaksi ja lukion aikana osaaminen eriytyy vielä erityisesti pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden kesken (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017). Tässä tutkimuksessa tutkittiin lukion ensimmäisen vuosikurssin opiskelijoita, joten suurin osa heidän matematiikan kursseistaan on vielä edessäpäin eikä lukion aikaista pitkän ja lyhyen matematiikan kurssien valitsijoiden välistä eriytymistä näin ollen ole välttämättä vielä pitkälti muodostunut. Olisikin kiinnostavaa nähdä, miten mahdollinen vielä suurempi eriytyminen vaikuttaa opiskelijoiden spontaaneihin matemaattisiin toimintoihin ja joustavaan rationaalilukukäsitteeseen. Syntyykö niidenkin taitojen välille suurempia eroja pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden välille, pysyvätkö erot samansuuruisina vai kapenevatko osaamiserot niiden suhteen lukion lopulla?

5.6 Naisten ja miesten erot matematiikassa

Miesten matemaattinen osaaminen on naisten osaamista parempaa lukion lopulla (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017). Tässä tutkimuksessa tutkittiin lukion ensimmäisen vuoden opiskelijoita eikä heidän vastauksissaan tutkittujen sukupuolten välillä ollut tilastollisesti merkitseviä eroja spontaanissa huomionkiinnittämisessä määrällisiin suhteisiin tai joustavissa rationaalilukukäsitetaidoissa. Tutkimukseen osallistui myös neljä muunsukupuolista, mutta heidät piti jättää sukupuolten vertailuista vähäisen määrän vuoksi pois. Sukupuolierot ovatkin matematiikan kokonaisosaamisessa Hannulan ja Holmin (2018) mukaan kadonneet, mutta eroja on edelleen huomattavissa matematiikkakuvassa ja luottamuksessa omiin matemaattisiin kykyihin (Hannula & Holm, 2018; Mattila, 2005; Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017). Hannulan ja Holmen (2018) mukaan miehille pitkän matematiikan valitseminen lyhyen sijaan on naisia luonnollisempaa. Tässä tutkimuksessa nais- ja miespuolisten jakaumat lyhyen ja pitkän matematiikan ryhmissä olivat hyvin tasaiset.

Pitkän matematiikan opiskelijoista 28 oli naisia ja 26 miehiä, joten naisten määrä pitkän matematiikan opiskelijoissa oli jopa hieman miehiä suurempi. Lyhyttä matematiikkaa luki 19 miestä ja 18 naista, joten myös sen suhteen sukupuolijakauma oli tasainen. Hannula ja Holm (2018) mainitsevatkin, että uudemmissa arvioinneissa on ollut havaittavissa, että useammat naiset suunnittelevat pitkän matematiikan valitsemista ja sukupuolierot ovat sen suhteen vähenemässä.

5.7 Matemaattinen ajattelu ja matematiikan opetuksen kehittäminen

Tässä tutkimuksessa tarkasteltiin matemaattista ajattelua lähinnä matemaattisen toiminnan kautta eli keskitytttiin algoritmiseen matemaattiseen ajatteluun (Yrjönsuuri, 1993) ja matemaattisiin metodeihin liittyvään matemaattiseen ajatteluun (Isoda & Katagiri, 2012). Vaikka tässä tutkimuksessa tutkimuksen matemaattinen luonne ei ollut tutkittavien tiedossa testauksen aikana, oli matemaattisen ajattelun tutkiminen silti mahdollista. Matemaattinen ajattelu on taustalla itsenäisessä ajattelussa ja päätöksen teossa (Isoda & Katagiri, 2012, s.32), joten se ei ole pelkästään tietoista matematiikan metodien käyttöä. Saattaa myös olla, että testaus herätti vastaajia jälkikäteen miettimään matematiikkaa tarkemmin, jolloin heidän reflektiivinen matemaattinen ajattelunsa (Yrjönsuuri, 1993) on voinut aktivoitua pohtimaan esimerkiksi heidän SFOR-toimintojaan ja yleisesti matematiikkaa arjessa.

Koska joustava asiantuntijuus on keskeisesti läsnä matematiikan opetuksen opetussuunnitelmissa (POPS, 2014; LOPS, 2019) on tärkeää, että joustavan asiantuntijuuden yhteys muihin matemaattisen ajattelun käsitteisiin saadaan selville. Spontaaneihin huomionkiinnittämistaipumuksiin, SFON ja SFOR, keskittyvä tutkimus avaa silmämme laajemmille mahdollisuuksille tutkia opiskelijoiden omia spontaaneja, oma-aloitteellisia matemaattisia toimintoja ja näiden toimintojen vaikutusta opiskelijoiden menestykseen matematiikassa (McMullen, Chan, Mazzocco & Hannula-Sormunen, 2019). Opetuksen yhteys oppilaan arkielämään on keskeinen niin matematiikassa kuin muissakin oppiaineissa. SFOR keskittyy juuri epävirallisiin arjen tilanteisiin, joissa matematiikka on vain yksi aspekti. Jos saamme selville SFOR-toimintojen yhteyksiä ja vaikutuksia, voimme sen myötä pyrkiä kehittämään opetuksen kautta kaikkien oppilaiden spontaania huomionkiinnittämistä matemaattisiin piirteisiin. SFOR-taipumuksilla on aiemmin todettu olevan yhteys kehittyneempiin taitoihin murtolukujen saralla (McMullen & Siegler, 2020) ja murtoluku- ja jakolaskuosaaminen vaikuttaa vahvasti matematiikan osaamiseen (Siegler, ym., 2012). Matematiikan kokonaisosaaminen rakentuu monista osista, ja rationaalilukuosaamisella ja spontaaneilla huomionkiinnittämistaipumuksilla määrällisiin suhteisiin on vaikutusta siihen. Tässä tutkimuksessa saatiin selville, että SFOR-käyttäytymisellä ja joustavilla rationaalilukukäsitetaidoilla on positiivinen yhteys keskenään. Aiemmin on huomattu, että joustavat rationaalilukukäsitetaidot ovat erotettavissa rationaalilukujen sisältö- ja menetelmäosaamisesta (McMullen, Hannula-Sormunen, Lehtinen & Siegler, 2020). Joustavia rationaalilukukäsitetaitoja ei olla vielä yksittäisenä muuttujana paljoa ehditty tutkia, mutta joustavaa asiantuntijuutta itsessään on tutkittu jo 80-luvulta asti. Joustava asiantuntijuus mahdollistaa nimensä mukaisesti joustavan ja mukautuvan osaamisen, jossa osataan soveltaa yhteen aiemmin opittuja asioita ja ymmärretään asioiden menettelytapoja ja syitä niiden käytön takana (Hatano, 1987). Joustava osaaminen siis mahdollistaa opitun tiedon käyttämisen monipuolisesti ja tarkoituksenmukaisesti.

Soveltavat taidot ja joustava osaaminen olivat keskeisiä termejä tämän tutkimuksen osalta, sillä molemmissa tutkittavissa ominaisuuksissa ne ovat äärimmäisen keskeisiä. Kuten jo aiemmin mainittiin, joustavaa osaamista ja opitun soveltamista on korostettu lukion (2019) ja perusopetuksen (2014) opetussuunnitelmien perusteissa, mutta lukiolaisten vastauksissa kyseiset ominaisuudet eivät korostuneet lainkaan samalla tavalla, kun olisi opetussuunnitelmien perusteiden perusteella odottanut. Opetuksen saralla on varmasti vielä paljon, mitä voidaan tehdä, jotta opiskelijoiden joustava asiantuntijuus matematiikassa kehittyisi. Interventioilla on pystytty vaikuttamaan oppilaiden SFOR-käyttäytymiseen ja avaamaan heidän silmiään sen monipuolisille mahdollisuuksille (McMullen, Hannula-Sormunen, Kainulainen, Kiili & Lehtinen, 2019; Määttä, Hannula-Sormunen, Halme & McMullen, 2022). Tulevaisuudessa spontaaneja matemaattisia toimintoja olisikin hyvä korostaa yhä enemmän muun opetuksen ohella eri keinoin, sillä niiden positiiviset vaikutukset matematiikan taitoihin on todettu useissa eri tutkimuksissa (mm. Hannula-Sormunen, Lehtinen & Lepola, 2010; McMullen, Chan, Mazzocco & Hannula-Sormunen, 2019; Van Hoof, ym., 2016). Myös joustaviin rationaalilukukäsitetaitoihin on pystytty vaikuttamaan interventiolla pelillisen matematiikkaoppimisympäristön kautta (Kärki, ym., 2021). Joustavia rationaalilukukäsitetaitoja ja muuta rationaalilukuosaamista saatiin Kärjen ja kumppanien (2021) tutkimuksessa kehitettyä perinteistä kouluopetusta tehokkaammin, joten pelillisien ulottuvuuksien tuominen enemmän kouluopetuksen osaksi voisi olla yksi mahdollisuus. Matematiikan opetusta olisi hyvä yleisellä tasolla monipuolistaa ja luoda mahdollisuuksia informaalimpien ja soveltavampien tilanteiden esille tuomiseen sekä niiden liittämiseen osaksi matematiikan maailmaa.

Opettajan merkitys opiskelijan oppimisessa on keskeinen ja siksi olisi tärkeää, että opettaja ymmärtää, millä tavoin mitäkin matemaattisen ajattelun taitoa voi kehittää. Jos matematiikan opetuksen yhtenä tärkeimpänä tarkoituksena on kehittää matemaattista ajattelua, täytyy ymmärtää, mitä eri rooleja milläkin ulottuvuudella siinä on ja, kuinka niitä voi ottaa huomioon opetuksessa. Matematiikan opetuksen kannalta on keskeistä, että opettajalla on laaja käsitys matemaattisen ajattelun muodostamisesta, matematiikasta arkielämässä ja luovien matemaattisten taitojen opettamisesta. Opettajien käsissä on pitkälti se, miten opetus tunneilla rakennetaan ja näin ollen myös mitä taitoja korostetaan (Halinen, ym., 2016). Joustavan asiantuntijuuden kehittymisessä on keskeisessä osassa keskusteleva vuorovaikutus (Hatano, 1987) ja keskustelevan ilmapiirin rakentaminen on opettajan käsissä. Opettajan olisi tärkeää herättää omaa kiinnostustaan opettamiinsa aiheisiin ennen opetusta, sillä opiskelijoiden kiinnostuksen herättäminen ja ylläpitäminen on tärkeää (Juuti & Lavonen, 2018). Matematiikka voi usein olla irrallaan arjesta ja tuntua mekaanisten tehtävien läpikäymiseltä. Joustavalla matematiikalla ja spontaanilla huomionkiinnittämisellä matemaattisiin piirteisiin matematiikan saa yhdistettyä konkreettisemmaksi kokonaisuudeksi. Joustava asiantuntijuus auttaa ymmärtämään matematiikkaa syvemmin, miksi jotain tehdään, mitä hyötyä siitä voi olla ja mitä ajatuksia pelkkien toimintojen takana on (Hatano, 1987). Myös opettajan omalla osaamisella on yhteys opettajan opettamiseen. Kun Lemonidis ja kumppanit (2018) tutkivat opettajien rationaalilukuosaamista, he huomasivat monipuolisen rationaalilukuosaamisen olevan yhteydessä opettajien päässälaskuun rationaaliluvuilla ja päässälaskujen opettamiseen. Näin ollen opettajan joustavalla rationaalilukukäsiteosaamisella voi olla vaikutusta hänen päässälaskuosaamiseensa ja opettamiseensa. Tässä tutkimuksessa ei tutkittu opettajia, opettajan vaikutuksia SFOR-taipumuksiin tai joustavaan rationaalilukukäsitteeseen tai niiden vaikutuksia opettamiseen, mutta mielenkiintoinen tutkimuskohde tulevaisuudessa voisikin olla kyseisten taitojen tutkiminen juuri opettajilla.

6 Lähdeluettelo

Kilpatrick, J.;Swafford, J.;& Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Chidren Learn Mathematics.* Washington D.C.: National Academy Press.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. Teoksessa A. J. Baroody;& A. Dowker, *The development of arithmetic concepts and skills : constructing adaptive expertise* (ss. 1-33). Lawrence Erlbaum Associates.

Cohen, L.;Manion, L.;& Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education 5th edition.* London: RoutledgeFalmer .

Halinen, I.;Huotilainen, R.;Kauppinen, E.;Nilivaara, P.;Vainikainen , M.-P.;& Raami, A. (2016). *Ajattelun taidot ja oppiminen.* PS-kustannus.

Hannula, M.;& Holm, M. (2018). Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä. Teoksessa J. Joutsenlahti;H. Silfverberg;& P. Räsänen, *Matematiikan opetus ja oppiminen* (ss. 132-154). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Hannula-Sormunen, M.;Lehtinen, E.;& Lepola, J. (2010). Spontaneous focusing on numerosity as a domain-specific predictor of arithmetical skills. *Journal of Experimental Child Psychology*(107), 394-406.

Hatano, G. (1987). Social and motivational bases for mathematical understanding. *New Directions for Child and Adolescent Development*(41), 55-70. doi:https://doi.org/10.1002/cd.23219884105

Isoda, M.;& Katagiri, S. (2012). *Mathematical Thinking: How To Develop It In The Classroom.* World Scientific Publishing Company.

Joutsenlahti, J. (1997). Matemaattisen ajattelun kehittyminen lukiossa. Teoksessa P. Räsänen;T. Ahonen;P. Kupari;& P. Malinen, *Matematiikka - näkemyksiä opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 336-351). Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti.

Joutsenlahti, J. (2004). Matemaattinen ajattelu lukiossa. Teoksessa P. Räsänen;P. Kupari;T. Ahonen;& P. Malinen, *Matematiikka-näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 363-380). Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti.

Juuti, K.;& Lavonen, J. (2018). Opettaja voi tukea oppilaan kiinnostuksen kehittymistä. Teoksessa K. Salmela-Aro, *Motivaatio ja oppiminen* (ss. 197-210). Jyväskylä: PS-kustannus.

Kärki, T.;McMullen , J.;Halme, H.;Määttä, S.;Lehtinen, E.;& Hannula-Sormunen, M. (2021). Pelaamalla kohti joustavaa rationaalilukukäsitettä. *Psykologia, 56*(6), 567-583.

Lemonidis, C.;Tsakiridou, H.;& Meliopoulou, I. (2018). In-Service Teachers' Content and Pedagogical Content Knowledge in Mental Calculations with Rational

Numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(6), 1127–1145. Noudettu osoitteesta https://doi.org/10.1007/s10763-017-9822-6

Mattila, L. (2005). *Perusopetuksen matematiikan kansalliset oppimistulokset 9. vuosiluokalla 2004.* Helsinki: Opetushallitus.

McMullen, J. (2014). *Spontaneous Focusing on Quantitative Relations and the Development of Rational Number Conceptual Knowledge.* Turun yliopisto.

McMullen, J.;& Siegler, R. S. (2020). Spontaneous focusing on multiplicative relations and fraction magnitude knowledge. *Mathematical Thinking and Learning*(22), 351-359. doi:https://www.tandfonline.com/action/showCitFormats?doi=10.1080/10986065.2020.1816284

McMullen, J.;Brezowszky, B.;Rodríguez-Aflecht, G.;Pongsakdi, N.;Hannula-Sormunen, M.;& Lehtinen, E. (2016). Adaptive number knowledge: Exploring the foundations of adaptivity with whole-number arithmetic. *Learning and Individual Differences*(47), 172-181.

McMullen, J.;Chan, J. Y.-C.;Mazzocco, M. M.;& Hannula-Sormunen, M. M. (2019). Spontaneous mathematical focusing tendencies in mathematical development and education. Teoksessa A. Norton;& M. Alibali, *Constructing Number: Merging Perspectives from Psychology and Mathematics Education* (ss. 69–86). Springer. doi: http://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_4

McMullen, J.;Hannula-Sormunen, M.;& Lehtinen, E. (2011). Young children's spontaneous focusing on quantitative aspects and their verbalizations of their quantitative reasoning. Teoksessa B. In Ubuz (Toim.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (ss. 217-224). Ankara, Turkey: PME.

McMullen, J.;Hannula-Sormunen, M.;Kainulainen, M.;Kiili, K.;& Lehtinen, E. (2019). Moving mathematics out of the classroom: Using mobile technology to enhance spontaneous focusing on quantitative relations. *British Journal of Educational Technology, 50*(2), 562-573. doi:doi:10.1111/bjet.12601

McMullen, J.;Hannula-Sormunen, M.;Laakkonen, E.;& Lehtinen, E. (2016). Spontaneous Focusing on Quantitative Relations as a Predictor of the Development of Rational Number Conceptual Knowledge. *Journal of Educational Psychology, 108*(6), 857-868. doi:http://dx.doi.org/10.1037/edu0000094

McMullen, J.;Hannula-Sormunen, M.;Lehtinen, E.;& Siegler, R. (2020). Distinguishing adaptive from routine expertise with rational number arithmetic. *Learning and instruction, Volume 68*, 101347.

McMullen, J.;Kanerva, K.;Lehtinen, E.;Hannula-Sormunen, M.;& Kiuru, M. (2019). Adaptive Number Knowledge in Secondary School Students: Profiles and Antecedents. *Journal of Numerical Cognition, 5*(3), 283-300.

Metsämuuronen, J.;& Tuohilampi, L. (2017). *Matemaattisen osaamisen piirteitä lukiokoulutuksen lopussa 2015.* Tampere: Kansallinen koulutuksen arviontikeskus.

Määttä, S.;Hannula-Sormunen, M.;Halme, H.;& McMullen, J. (2022). Guiding students' attention towards multiplicative relations around them: A classroom intervention. Journal of Numerical Cognition. *Journal of Numerical Cognition, 8*(1), 36-52.

Nummenmaa, L. (2009). *Tilastolliset menetelmät.* Helsinki: Tammi.

Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet .*

Opetushallitus. (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet.* Opetushallitus.

Opetushallitus. (2021). *Opintopolku*. Haettu 26. Helmikuuta 2021 osoitteesta https://opintopolku.fi/wp/opo/korkeakoulujen-haku/mika-korkeakoulujen-opiskelijavalinnoissa-muuttuu-vuoteen-2020-menessa/yliopistojen-todistusvalinnat-2020/

Rittle-Johnson, B. (2017). Developing Mathematics Knowledge. *Child Development Perspectives, 11*(3), 184-190.

Ruso, L.;& Baroody, A. J. (2004). Adaptive Expertise with Basic Addition and Subtraction Combinations—The Number Sense View. *Developing Adaptive Expertise in Elementary School Arithmetic.* San Francisco: American Educational Research Association.

Siegler, R.;Duncan, G.;Davis-Kean, P.;Duckworth, K.;Claessens, A.;Engel, M.;. . . Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science, 23*(7), 691-697.

Sievert, H.;van den Ham, A.-K.;Niedermeyer, I.;& Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children's adaptive expertise in arithmetic. *Learning and Individual Differences*(74), 1-13.

Tutkimuseettinen Neuvottelukunta. (2019). Ihmiseen kohdistuvan tutkimuksen eettiset periaatteet ja ihmistieteiden eettinen ennakkoarviointi Suomessa. Tutkimuseettisen neuvottelukunnan ohje 2019. *Tutkimuseettisen neuvottelukunnan julkaisuja. 3*, ss. 1-26. Helsinki: Tutkimuseettinen neuvottelukunta.

Tähtinen, J.;Broberg, M.;& Laakkonen, E. (2020). *Tilastollisen aineiston käsittelyn ja tulkinnan perusteita.* Turku: TURUN YLIOPISTON KASVATUSTIETEIDEN TIEDEKUNNAN JULKAISUSARJA C, OPPIMATERIAALIT 22.

Van Hoof, J.;Degrande, T.;Verschaffel, L.;Hannula-Sormunen, M.;McMullen, J.;Van Dooren, W.;& Lehtinen, E. (2016). The relation between learners' spontaneous focusing on quantitative relations and their rational number knowledge. *STUDIA PSYCHOLOGICA, 58*(2), 156-170.

Watts, T.;Duncan, G.;Siegler, R.;& Davis-Kean, P. (2014). What's Past Is Prologue: Relations Between Early Mathematics Knowledge and High School Achievement. *Educational Researcher, 43*(7), 352-360.

Yrjönsuuri, R. (1993). Algoritminen ja reflektoiva ajattelu matematiikan oppimisessa. Teoksessa J. Paasonen;E. Pehkonen;& J. Leino, *Matematiikan opetus ja konstruktivismi* (ss. 45-56). Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos.

Liitteet

Liite 1. Tutkimuslupa ja lopun saatesanat

Tässä tutkimuksessa tutkitaan havainnointitaitoja. Tarkoituksena on kuvailla erilaisia kuvaärsykkeitä kirjallisesti ja noudattaa testin mukaisia ohjeita. Tutkimukseen osallistuminen on vapaaehtoista eikä osallistuminen vaikuta opiskeluihisi mitenkään.
Tutkimuksessa noudatetaan tieteellisen tutkimuksen eettisiä periaatteita. Tutkimustuloksia käsitellään luottamuksellisesti eikä niistä voi tunnistaa yksittäisiä opiskelijoita tai koulua.

☐ Vastauksiani saa käyttää tutkimuksessa.

☐ Vastauksiani ei saa käyttää tutkimuksessa.

Tässä tutkimuksessa tarkasteltiin ajattelu- ja havainnointitaitoja, jotka rajattiin tarkemmin matematiikan aihepiiriin. Tarkoituksena oli tutkia spontaania huomionkiinnittämistä matemaattisiin piirteisiin ja joustavaa osaamista rationaaliluvuilla. Koska kyseessä oli spontaani eli omaehtoinen huomionkiinnittäminen matemaattisiin piirteisiin, testin matemaattista luonnetta ei voitu kertoa etukäteen. Näin saamme selville, mihin oppilaat vapaasti, ilman ennakko-oletuksia kiinnittävät huomiota kuvissa. **Koska sama testaus saatetaan suorittaa useammalle luokalle koulussanne, onkin äärimmäisen tärkeää, ettei testauksen yhteyttä matematiikkaan paljasteta millään tavoin muille testiin osallistuville! Pyydän Sinua olemaan kertomatta tekemistäsi tehtävistä yhtään mitään muille oppilaille lähimmän kuukauden aikana, jolloin keräämme aineistoja.**
Kiitos paljon osallistumisestasi!

Liite 2. Tutkimuspyyntökirje opettajille ja rehtoreille

Olen kasvatustieteiden tiedekunnan viidennen/kuudennen vuoden opiskelija ja teen pro gradu -tutkielmaani lukiolaisten joustavuudesta matematiikassa ja spontaanista huomionkiinnittämisestä matemaattisiin piirteisiin, erityisesti määrällisiin suhteisiin. Tarvitsen mukaan lukion ensimmäisen vuosikurssin opiskelijaryhmiä, jotka pystyvät osallistumaan mukaan lyhyeen 25 minuutin mittaiseen onlinetestaukseen.

Tutkimuksen taustaa

Tarkoituksena on tarkemmin tutkia joustavuutta rationaalilukujen aihepiirissä ja spontaania huomionkiinnittämistä määrällisiin suhteisiin.

Uusimmissa matematiikan opetussuunnitelmissa korostetaan monipuolisia ratkaisutapoja, luovuutta, arkielämään ja oppilaiden omaan maailmaan liittämistä. Juuri nämä ominaisuudet liittyvät joustavaan rationaalilukukäsitteeseen ja spontaaniin huomionkiinnittämiseen matemaattisiin piirteisiin. Onkin mielenkiintoista tutkia, miten nämä asiat ilmenevät lukiolaisilla, jotka ovat kerryttäneet osaamistaan jo peruskouluajaltaan asti.

Miten testaus tehdään?

Tarkoituksena on tehdä suomen kielen tunnilla opiskelijoille internetissä olevalla digitaalisella alustalla testaus, joka kestää n. 25 minuuttia. Testin kannalta on tärkeää, että **opiskelijat eivät tiedä testin matemaattisesta luonteesta etukäteen**, jotta spontaania huomionkiinnittämistä voidaan testata luotettavasti. Opiskelijoille kerrotaan ennen testiä, että tarkoituksena on kuvailla erilaisia kuvaärsykkeitä kirjallisesti ja toimia testin ohjeiden mukaisesti.

Testissä on kaksi osiota, joista ensimmäisellä testataan opiskelijoiden spontaania huomionkiinnittämistä matemaattisiin piirteisiin ja toisella joustavaa rationaalilukukäsitettä. Ensimmäisessä osiossa opiskelijoiden tehtävänä on kuvailla kuvia kirjoittamalla. Toisessa osiossa opiskelijoiden tulee muodostaa rationaaliluvuista erilaisia matemaattisia lausekkeita, jotka toteuttavat annetut ehdot.

Miten tuloksia käsitellään?

Tuloksia käsitellään luottamuksellisesti eikä niiden perusteella voi tunnistaa yksittäistä opiskelijaa tai koulua. Opiskelijoiden nimi- tai henkilötietoja ei kerätä lainkaan. Tutkimuksen teossa noudatetaan Turun yliopiston tieteellisen tutkimuksen eettisiä ohjeita.

Toivottavasti kiinnostuitte tutkimukseen osallistumisesta!

Yhteistyöterveisin,

Pauliina Salonen

Luokanopettajaopiskelija
Opettajankoulutuslaitos, Turun yliopisto
pauliina.k.salonen@utu.fi
p.040-XXXXXXX

Tutkimuksen ohjaaja
Minna Hannula-Sormunen
Professori, Opettajankoulutuslaitos
mimarha@utu.fi