Monikulmioiden teoriaa

Dzejla Bacic

Pro gradu -tutkielma
Kesäkuu 2022

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Dzejla Bacic: Monikulmioiden teoriaa
Pro gradu -tutkielma, 43 s.
Matematiikka
Kesäkuu 2022

Tämä tutkielma käsittelee monikulmioiden teoriaa, jota lähestytään ominaisuuksiltaan erilaisista ja mielenkiintoisista näkökulmista. Tutkielman alussa esitellään geometrian kannalta keskeisimmät monikulmioihin liittyvät lähtökohdat ja käsitteet.

Monikulmioiden teorian kannalta on tärkeää käsitellä kolmioita, yhdensuuntaisuutta ja Pythagoraan lausetta, sillä niiden avulla voidaan yksinkertaisesti esitellä keskeisimmät monikulmioihin liittyvät geometriset ominaisuudet. Myös monikulmion pinta-ala voidaan selvittää ja tässä tutkielmassa tarkastellaan kolmioiden ja suunnikkaiden pinta-aloja tutkimalla niiden sivuja, kulmia ja janoja.

Tutkielman lopussa käsitellään painopistettä ja monikulmioita analyyttisen geometrian näkökulmasta. Painopiste tarkoittaa kappaleessa olevaa kohtaa tai tarkemmin ottaen pistettä, johon painovoima vaikuttaa. Analyyttisen geometrian monikulmioiden teoriassa käsitellään maanmittaajan kaavaa ja suljettua yksinkertaista käyrää. Maanmittaajan kaavalla voidaan määrittää minkä tahansa yksinkertaisen monikulmion pinta-ala, jonka kärkipisteet sijaitsevat karteesisessa koordinaatistossa. Käyrän avulla voidaan rajata tietty alue, jolloin siitä tulee suljettu ja näin saadun suljetun käyrän pinta-ala voidaan vielä laskea.

Asiasanat: postulaatti, aksiooma, yhdensuuntaisuus, Pythagoraan lause, painopiste, maanmittaajan kaava, suljettu käyrä.

Sisältö

1 Johdanto

Geometria on matematiikan osa-alue, joka tutkii erilaisia kuvioita, niiden ominaisuuksia ja piirtämistä. Geometria on saanut alkunsa arkipäivien perustarpeista ja se kehittyi omaksi matematiikan osa-alueeksi, kun Eukleides kokosi noin 300 eKr. kreikkalaisen kulttuurin geometrian tiedon kolmentoista kirjan kokoelmaksi, missä aksioomat perustuvat loogiseen järjestelmään. Geometria on kehittynyt ajan myötä ja sen mukaan sitä sovelletaan erilaisia arkipäivään liittyviin asioihin esimerkiksi maanmittaukseen, rakentamiseen ja ajanlaskuun.

Tämän pro gradu -tutkielman tarkoitus on ymmärtää monikulmioiden rakenteita, ominaisuuksia ja näiden välisiä yhteyksiä, mutta sitä varten tutkielmassa käydään ensin läpi geometrian postulaatit, aksioomat ja yleiset säännöt kolmioiden yhtenevyyksille, sillä ne ovat pohjana kolmioiden, suunnikkaiden ja muiden monikulmioiden ymmärtämiselle. Monikulmiot ovat mielenkiintoisia, koska niillä on erilaisia rakenteita ja ominaisuuksia, minkä takia ne ovat mielenkiintoisia ja niitä on mukava tutkia. Näin pro gradu -tutkielman aihe on määräytynyt. Mitä enemmän monikulmioita tutkitaan, sitä enemmän luodaan uutta teoriaa monikulmioista.

Tämä pro gradu -tutkielma perustuu kolmeen eri lähteeseen. Luvut 2 - 7 käsittelevät geometrian peruskäsitteitä, geometristen kuvioiden pinta-aloja sekä Pythagoraan lausetta, jotka perustuvat Dillonin kirjaan [3]. Luvussa 8 käsitellään painopistettä, joka perustuu Bourken artikkeliin [1]. Luku 9 perustuu Bradenin työhön [2], jossa käsitellään analyyttisen geometrian monikulmioiden pinta-aloja.

2 Eukleideen lähtökohdat

Määritelmät. Eukleides antaa 23 määritelmää. Hän määrittelee seuraavilla tavoilla muun muassa pisteen ja suoran:

Määritelmä 2.1. Pisteellä ei ole mitään osaa.

Määritelmä 2.2. Viiva on pituus, jolla ei ole leveyttä.

Määritelmä 2.3. Suora on viiva, joka on tasaisesti pisteidensä sisällä.

Tässä pro gradu -tutkielmassa pisteet merkitään isoilla kirjaimilla.

Merkintä $\overrightarrow{AB}$ tarkoittaa, että puolisuora, jonka toinen päätepiste on A, kulkee pisteen B kautta, kun taas merkintä $\overline{AB}$ tarkoittaa suoraa, joka kulkee pisteiden A ja B kautta.

Janaa, jonka päätepisteet ovat A ja B, merkitään AB:llä.

Joskus Eukleides puhuu kahden suoran kulman summasta, jolle käytetään tässä tutkielmassa lyhennettä π.

Postulaatit. Tässä luvussa käsitellään geometrian postulaatteja, koska niitä tarvitaan monikulmioiden teorian pohjatietona. Monikulmioiden teoriaa ei voida ymmärtää ilman postulaatteja. Postulaattien avulla ymmärretään geometristen muotojen, kuten suoran, janan, ympyrän, pisteen ja kehän välisiä yhteyksiä.

P.I Suora voidaan piirtää mistä tahansa pisteestä mihin tahansa pisteeseen.

P.II Jana voidaan jatkaa suoraksi.

P.III Voidaan piirtää ympyrä, jonka keskipiste sekä keskipisteen ja kehän välinen etäisyys on mikä tahansa.

P.IV Kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuret.

P.V Jos kahta suoraa leikkaa poikittainen suora ja jos suorien sisäpuoliset kulmat poikkileikkaavan suoran kanssa ovat yhteensä pienemmät kuin π, niin suorat leikkaavat jossakin pisteessä sillä puolella, missä kulmien summa on pienempi kuin π.

Postulaatit P.I-P.III sanovat, että konstruktioihin voi käyttää vain viivainta ja harppia. Paralleelipostulaatin, eli postulaatin P.V nykyaikaisen muodon mukaan

P.V Annetun suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkee aina yksi ja vain yksi annetun suoran kanssa yhdensuuntainen suora, toisin sanoen sellainen suora, joka kuuluu samaan tasoon mutta ei leikkaa annettua suoraa.

Jos paralleelipostulaatti ei ole voimassa, kyseessä on epäeuklidinen geometria.

Aksioomat. Aksioomia tarvitaan monikulmioiden teorian pohjatiedoksi, vastaavalla tavalla kuin postulaattejakin. Aksioomat eroavat postulaateista niin, että aksioomia tarvitaan matemaattisen päättelyn ja matemaattisten tulosten todistamiseen. Aksioomat ovat epäsuoria määritelmiä, jotka liittyvät esimerkiksi erilaisten kokonaisuuksien yhtäsuuruuden tutkimiseen.

A.I Asiat, jotka ovat yhtä suuret saman asian kanssa, ovat keskenään yhtä suuret.

A.II Jos yhtä suuriin lisätään yhtä suuret, niin kokonaisuudet ovat yhtä suuret.

A.III Jos yhtä suurista vähennetään yhtä suuret, niin jäännökset ovat yhtä suuret.

A.IV Asiat, jotka yhtyvät toisiinsa, ovat yhtä suuret.

A.V Kokonaisuus on suurempi kuin sen osa.

Yhtenevyys. Tason kuvio on yhtenevä toisen tasokuvion kanssa, jos nämä kuviot ovat keskenään samankokoiset ja samanmuotoiset. Tämän edellytyksenä on, että tason kuvion osa vastaa samanlaista toisen tason kuvion osaa. Yhtenevyyttä merkitään symbolilla $\cong$, ja sitä käytetään paljon seuraavissa luvuissa.

Esimerkiksi $AB \cong DE$ tarkoittaa, että janat AB ja DE ovat samanpituiset, kun taas $BAC \cong DEF$ tarkoittaa, että kulmat $\angle BAC$ ja $\angle EDF$ ovat yhtä suuret. Yhtenevyyden määritelmää tarvitaan, jos kahdessa kolmiossa vastinsivut ja vastinkulmat ovat yhtä suuret.

Symbolia $\cong$ käytetään geometriassa ja ryhmäteoriassa, tarkemmin ottaen ryhmäisomorfismissa.

Yhtenevät kolmiot. Kaksi kolmiota ovat yhtenevät, jos niiden vastinsivut ja vastinkulmat ovat yhtä suuret. Yhtenevyyslauseissa käytetään seuraavia lyhenteitä:

SKS Jos kahdessa kolmiossa kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret, ovat kolmiot yhtenevät.

SSS Jos kahdessa kolmiossa kaikki toisiaan vastaavat sivut ovat yhtä suuret, niin kolmiot ovat yhtenevät.

KSK Jos kahdessa kolmiossa kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu ovat yhtä suuret, niin kolmiot ovat yhtenevät.

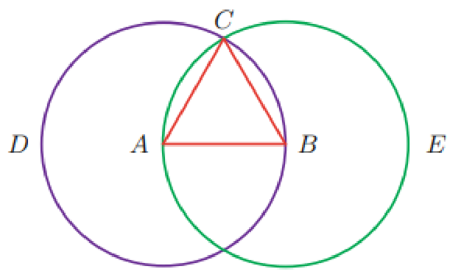
SKK Jos kahdessa kolmiossa kaksi kulmaa ja toisen kulman vastainen sivu ovat yhtä suuret, niin kolmiot ovat yhtenevät.

SSK Jos kahdessa kolmiossa kaksi sivua ja toisen sivun vastainen kulma ovat yhtä suuret ja lisäksi kyseinen kulma on tylppä ($> \pi/2$), ovat kolmiot yhtenevät.

Eukleides todistaa lauseen SSS asettamalla kuviot yksinkertaisesti päällekkäin. Lauseiden SKS, KKS ja KSK todistukset esitetään myöhemmin.

3 Peruskonstruktiot

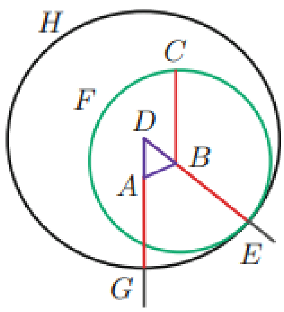
Lause 3.1. Voidaan muodostaa tasasivuinen kolmio, jonka yhtenä sivuna on annettu jana.



Kuva 1: Janojen avulla muodostettu tasasivuinen kolmio.

Todistus. Jana AB säteenä voidaan muodostaa kaksi ympyrää: yksi, jonka keskipiste on A ja säde AB, ja toinen, jonka keskipiste on B ja säde AB. Olkoon piste C ympyröiden leikkauspiste. Ensimmäisen ympyrän säteelle pätee $AB \cong AC$ ja toisen ympyrän säteelle $BC \cong BA = AB$ ja näin ollen myös $AC \cong BC$. Näin ollen janat AC, AB ja BC ovat yhtenevät keskenään, jolloin $\triangle ABC$ on tasasivuinen kolmio. □

Lause 3.2. Voidaan muodostaa annetun janan kanssa yhtenevä jana, joka lähtee annetusta pisteestä.

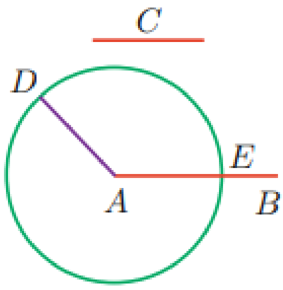


Kuva 2: Pisteen avulla muodostettu jana.

Todistus. Olkoon A piste ja BC jana. Muodostetaan jana AB ja muodostetaan tasasivuinen kolmio $\triangle ABD$ käyttäen edellisen lauseen konstruktiota. Muodostetaan ympyrä käyttäen pistettä B keskipisteenä ja janaa BC säteenä. Jatketaan janaa DB niin kauas, että se leikkaa ympyrän pisteessä E. Valitaan tämän ympyrän kehältä piste F. Ympyrän CEF säteelle pätee $BC \cong BE$.

Muodostetaan toinen ympyrä keskipisteellä D ja säteellä DE. Jatketaan janaa DA niin kauas kunnes se leikkaa tämän ympyrän pisteessä G. Valitaan ympyrän kehältä piste H. Ympyrän EGH säteelle pätee $DE \cong DG$. Koska $DA \cong DB$, niin poistamalla jana DA janalta DB ja jana DB janalta DE saadaan $AG \cong BE$. Koska $BC \cong BE$, niin $AG \cong BC$. □

Lause 3.3. Kahdella erisuuruisella janalla voidaan katkaista pidemmästä janasta janan, joka on yhtenevä lyhyemmän janan kanssa.



Kuva 3: Katkaistaan jana annetulla pituudella.

Todistus. Olkoot janat AB ja C kaksi erisuuruista janaa, joista jana AB on pidempi. Käytetään lausetta 3.2 ja muodostetaan pisteestä A lähtevä janan C kanssa yhtenevä jana AD. Muodostetaan ympyrän keskipisteellä A ja säteellä AD. Olkoon piste E ympрän ja janan AB leikkauspiste. Nyt $AE \cong C$. $\square$

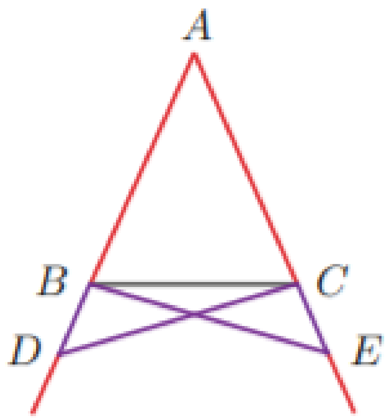
4 Kolmioiden geometriaa

Todistetaan ensimmäinen yhtenevyyslause SKS.

Lause 4.1 (SKS)**.** Jos kahdessa kolmiossa kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret, ovat kolmiot yhtenevät.

Todistus. Oletetaan, että kolmioille $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ pätee $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ ja $\angle BAC \cong \angle EDF$. Jos kolmio $\triangle ABC$ on asetettu kolmion $\triangle DEF$ päälle niin, että A on pisteessä D ja jana AB on janalla DE, niin piste B kohtaa pisteen E, sillä $AB \cong DE$. Jos jana AB kohtaa janan DE, niin janan AC täytyy kohdata jana DF, sillä $\angle BAC \cong \angle EDF$. Piste C kohtaa pisteen F, koska $AC \cong DF$. Koska piste B kohtaa pisteen E, niin janan BC täytyy kohdata jana EF. Siten voidaan päätellä, että $BC \cong EF$ ja näin janat BC ja EF ovat yhtä pitkät, koska jäljelle jääneiden kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kulmat ovat yhtenevät: $\angle ABC \cong \angle DEF$ ja $\angle ACB \cong \angle DFE$. $\square$

Lause 4.2 (Pons Asinorum)**.** Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Kolmion kannan alapuoliset ulkokulmat ovat myös yhtä suuret.



Kuva 4: Pons Asinorum Eukleideen elementistä.

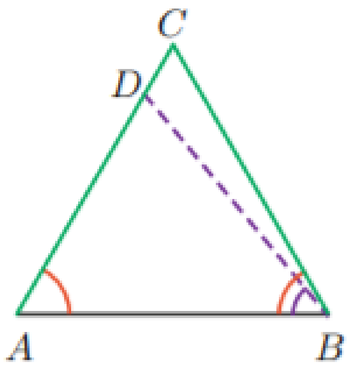
Todistus. Olkoon kolmio $\triangle ABC$ tasakylkinen ja olkoon $AB \cong AC$. Jatketaan puolisuoria $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ sivun BC ohitse ja valitaan piste D suoralta AB ja piste E suoralta AC niin, että $AD \cong AE$. Muodostetaan janat DC ja EB. Lauseen SKS perusteella $\triangle ADC \cong \triangle AEB$, koska $\angle CAD$ on yhteinen. Tästä seuraa, että $DC \cong EB$, $\angle ACD \cong \angle ABE$ ja $\angle ADC \cong \angle AEB$. Koska $AD \cong AE$ ja $AB \cong AC$ ja koska $\angle BDC \cong \angle BEC$ ja sivu BC on yhteinen, niin lauseen SKS perusteella $\triangle BDC \cong \triangle BEC$. Tästä seuraa $\angle CBD \cong \angle BCE$, joten ulkokulmat ovat samat.

Myös on $\angle BCD \cong \angle CBE$. Koska $\angle ABE \cong \angle ACD$, niin aksiooman A.III mukaan $\angle ABC \cong \angle ACB$. Kantakulmat ovat siis samat. □

Lause 4.3. Jos kolmion kantakulmat ovat yhtenevät, niin kantakulmien vastakkaiset sivut ovat yhtenevät.

Todistus. Tarkastellaan kolmiota $\triangle ABC$, missä $\angle ABC \cong \angle BAC$. Tehdään vastaoletus, jolloin joko sivu AC tai BC on pidempi. Valitaan sivu AC pidemmäksi ja asetetaan siihen piste D niin, että $AD \cong BC$. Lauseen SKS perusteella $\triangle DAB \cong \triangle CAB$, ja nämä kolmiot sulkevat siten yhtä suuret alueet. Osana kolmiota $\triangle CAB$ kolmiolla $\triangle DAB$ täytyy olla pienempi pinta-ala kuin kolmiolla $\triangle CAB$ aksiooman A.V perusteella. Tästä seuraa ristiriita, joten täytyy olla $AC \cong BC$. □

Seuraavassa lauseessa tarvitaan lausetta SSS, jonka mukaan kaksi kolmio-



Kuva 5: Yhtenevät kantakulmat aiheuttavat yhteneviä sivuja.

ta, joiden vastinsivut ovat samat, ovat yhtenevät. Eukleides todisti lauseen SSS yksinkertaisesti asettamalla kolmiot päällekkäin.

Lause 4.4. Kulma voidaan puolittaa.

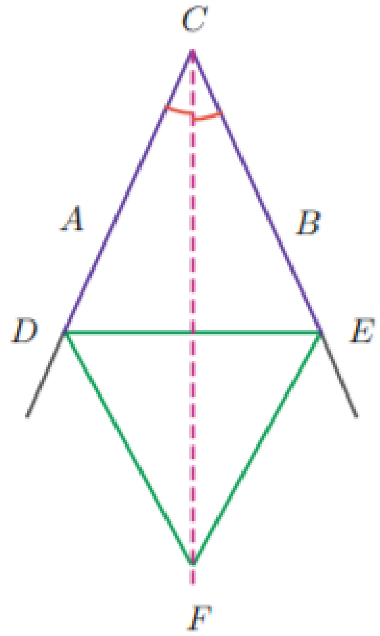
Todistus. Tarkastellaan kulmaa $\angle ACB$. Valitaan piste D puolisuoralta $\overrightarrow{CA}$ ja piste E puolisuoralta $\overrightarrow{CB}$ niin, että $CD \cong CE$. Muodostetaan tasasivuinen kolmio $\triangle DEF$ niin, että sen yksi sivu on sivulla DE. Osoitetaan, että jana CF puolittaa kulman $\angle ACB$. Nyt $CD \cong CE$, $CF = CF$ ja $FD \cong FE$, joten lauseen SSS perusteella $\triangle CDF \cong \triangle CEF$. Vastinkulmina saadaan $\angle FCD \cong \angle FCE$. □

Lause 4.5. Jana voidaan puolittaa.

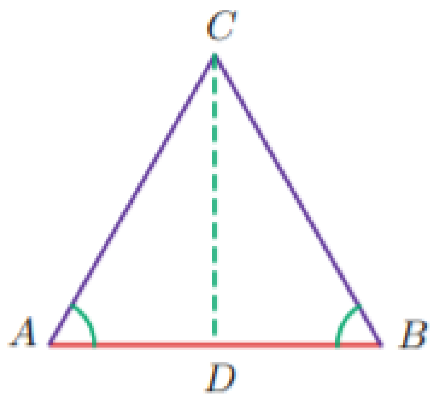
Todistus. Tarkastellaan janaa AB. Muodostetaan tasasivuinen kolmio $\triangle ACB$ niin, että sen yksi sivu on janalla AB. Puolitetaan kulma $\angle ACB$, ja merkitään kulmanpuolittajan ja janan AB leikkauspistettä pisteellä D. Saadaan $AC \cong BC$, $\angle ACD \cong \angle BCD$ ja $CD = CD$, joten lauseen SKS perusteella $\triangle ACD \cong \triangle BCD$. Vastinsivuiksi saadaan $AD \cong BD$. □

Lause 4.6. Voidaan muodostaa kohtisuora mille tahansa suoralle ja mille tahansa suoralla olevalle pisteelle.

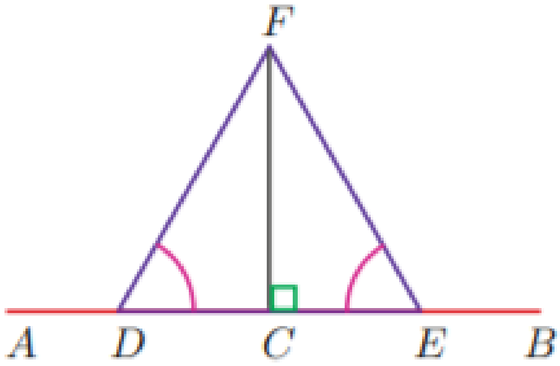
Todistus. Muodostetaan kohtisuora pisteeseen C, joka on suoralla $\overline{AB}$. Valitaan mikä tahansa piste D janalta AC ja piste E janalta CB niin, että $CE \cong CD$ toteutuu. Muodostetaan tasasivuinen kolmio $\triangle DEF$ janalle



Kuva 6: Puolitettu kantakulma.



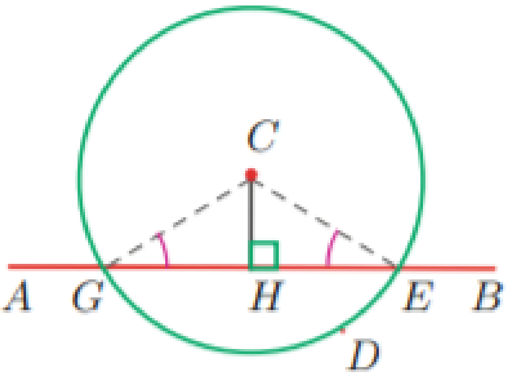
Kuva 7: Puolitettu jana.



Kuva 8: Kohtisuora.

DE. Näin jana DE on yksi tasasivuisen kolmion sivuista. Lauseen SKS perusteella $\triangle DFC \cong \triangle EFC$, joten myös $\angle DCF \cong \angle ECF$. Yhtenevinä vierekkäisinä kulmina $\angle DCF$ ja $\angle ECF$ ovat suoria kulmia, joten jana CF on kohtisuorassa suoraa $\overline{AB}$ vasten. $\square$

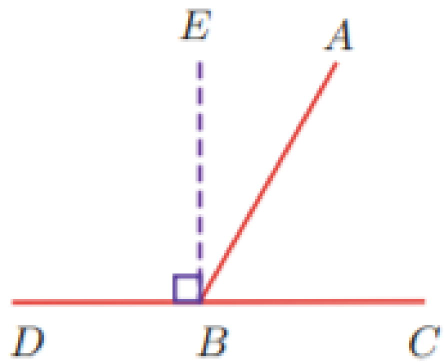
Lause 4.7. Voidaan muodostaa kohtisuora johonkin pisteeseen, joka ei ole suoralla, toisin sanoen pisteen ei tarvitse olla suoralla, jos siihen muodostetaan kohtisuora.



Kuva 9: Muodostettu kohtisuora.

Todistus. Muodostetaan kohtisuora suoralle $\overline{AB}$ sellaisesta pisteestä C, joka ei ole suoralla $\overline{AB}$, mutta pisteen C täytyy olla kuitenkin suoran $\overline{AB}$ jommallakummalla puolella. Valitaan piste D suoran $\overline{AB}$ toiselta puolelta. Nyt muodostetaan ympyrä niin, että piste C on ympyrän keskipiste ja etäisyys CD sen säde. Olkoot pisteet E ja G ympyrän ja suoran $\overline{AB}$ kaksi leikkauspistettä. Olkoon piste H janan EG keskipiste. Koska kolmion $\triangle GEC$ kaksi sivua ovat säteitä, niin kolmio $\triangle GEC$ on tasakylkinen, joten $\angle HGC \cong \angle HEC$. Koska $HG \cong HE$, niin lauseen SKS perusteella $\triangle HGC \cong \triangle HEC$, eli $\angle GHC \cong \angle EHC$. Nyt yhtenevät vierekkäiset kulmat $\angle GHC$ ja $\angle EHC$ ovat suorat ja yhtä suuret, joten jana CH on kohtisuorassa suoraa $\overline{AB}$ vasten. $\square$

Lause 4.8. Jana, joka on kohtisuorassa toista janaa vasten, muodostaa kaksi suoraa kulmaa. Siinä tapauksessa, jossa toinen jana ei olisi kohtisuorassa, mutta kuitenkin kiinni toisessa janassa, muodostuisi kulmat, joiden summa on kahden suoran kulman suuruus, eli π.



Kuva 10: Kulmat, joiden summa on kaksi suoraa kulmaa.

Todistus. Olkoon jana AB kiinni janassa CD niin kuin kuvassa 10 näkyy. Jos $\angle ABC \cong \angle ABD$, niin kulmat, jotka muodostuvat kahdesta janasta, ovat molemmat suoria. Jos $\angle ABC \ncong \angle ABD$, niin piirretään jana BE kohtisuoraan janaa CD vasten, jolloin kulmat $\angle CBE$ ja $\angle DBE$ ovat molemmat suoria kulmia ja saadaan

$$\angle CBE = \angle CBA + \angle ABE.$$

Lisätään $\angle DBE$ molemmille puolille ja saadaan

$$\angle DBE + \angle CBE = \angle DBE + \angle CBA + \angle ABE$$

aksiooman A.II seurauksena. Samalla tavalla

$$\angle ABD = \angle ABE + \angle EBD.$$

Lisätään $\angle ABC$ molemmille puolille ja toisen postulaatin seurauksena saadaan

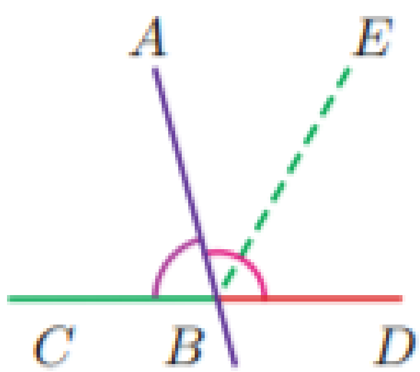
$$\angle ABC + \angle ABD = \angle ABC + \angle ABE + \angle EBD.$$

Ensimmäisen postulaatin seurauksena saadaan

$$\angle ABC + \angle ABD \cong \angle DBE + \angle CBE.$$

Aiemmin on todettu, että kulmien $\angle DBE$ ja $\angle CBE$ summa on π, mikä todistaa lauseen. $\square$

Lause 4.9. Oletetaan, että kaksi janaa on annetun suoran eri puolilla ja että janojen toinen päätepiste on samassa suoran pisteessä. Jos janojen ja suoran välisten vierekkäisten kulmien summa on π, niin janat ovat samalla suoralla.



Kuva 11: Vierekkäiset kulmat muodostavat 180 astetta.

Todistus. Kuvitellaan, että janat BD ja BC jatkuvat suoran $\overline{AB}$ molemmin puolin ja että kulmien $\angle ABD$ ja $\angle ABC$ summa on π. Väitetään, että pisteet

B, D ja C ovat samalla suoralla. Tehdään vastaoletus, että pisteet B, D ja C eivät ole samalla suoralla.

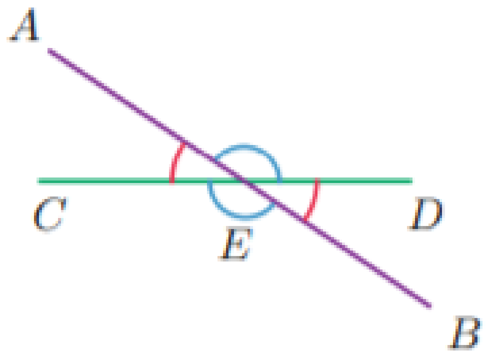
Olkoon piste E suoralla $\overline{CB}$, joka on samalla puolella suoraa $\overline{AB}$ kuin piste D. Lauseen 4.8 mukaan kulmien $\angle ABC$ ja $\angle ABE$ summa on π. Täten

$$\angle ABC + \angle ABE \cong \angle ABC + \angle ABD.$$

Aksiooman A.III perusteella $\angle ABE \cong \angle ABD$. Koska yksi kulmista $\angle ABE$ ja $\angle ABD$ on osa toista, niin tämä rikkoo aksioomaa A.V. Tästä seuraa ristiriita, jolloin lause on todistettu. $\square$

Kun kaksi suoraa leikkaa, ne muodostavat neljä kulmaa, joista kahta vastakkain olevaa sanotaan *ristikulmiksi*.

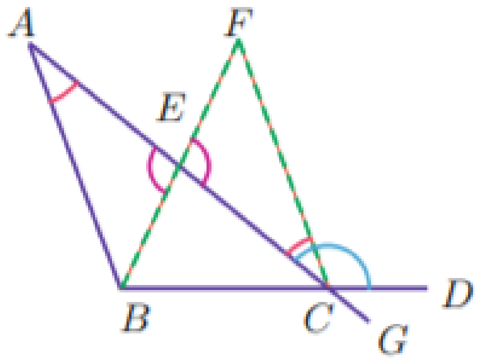
Lause 4.10. Ristikulmat ovat yhtenevät.



Kuva 12: Ristikulmat ovat yhtenevät.

Todistus. Olkoon suorien $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ leikkauspiste E. Lauseen 4.8 mukaan kulmat $\angle AEC$ ja $\angle AED$ muodostavat yhdessä π:n suuruisen kulman ja samalla tavalla myös kulmat $\angle AEC$ ja $\angle BEC$. Aksiooman A.III perusteella $\angle AED \cong \angle BEC$, jolloin myös $\angle AEC \cong \angle BED$. $\square$

Lause 4.11. Kolmion sisäkulman ulkokulma on suurempi kuin kumpikaan toisista sisäkulmista.



Kuva 13: Ulkokulma on suurempi kuin sisäkulma.

Todistus. Tarkastellaan kuvan 13 kolmiota $\triangle ABC$. Jatketaan janaa BC pisteeseen D asti, toisin sanoen lisätään piste D puolisuoralle $\overrightarrow{BC}$. Samalla tavalla jatketaan janaa AC pisteeseen G, eli lisätään piste G puolisuoralle $\overrightarrow{AC}$. Pisteen C ulkokulmat ovat $\angle ACD$ ja $\angle BCG$. Kulmat $\angle ACD$ ja $\angle BCG$ ovat ristikulmat. Lauseen 4.10 mukaan ne ovat yhtä suuret. Riittää osoittaa, että kulma $\angle ACD$ on suurempi kuin kulma $\angle BAC$ ja että kulma $\angle BCG$ on suurempi kuin kulma $\angle ABC$.

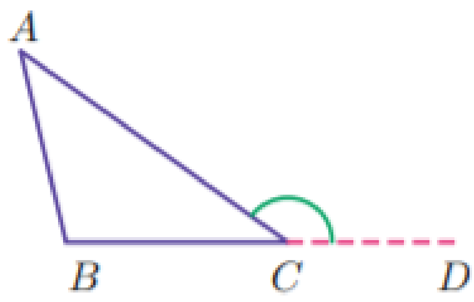
Olkoon piste E janan AC keskipiste. Yhdistetään piste E kolmion $\triangle ABC$ kärjen B kanssa ja saadaan puolisuora $\overrightarrow{BE}$. Valitaan puolisuoralta $\overrightarrow{BE}$ piste F, jolle $EF \cong BE$. Puolisuora $\overrightarrow{BE}$ jatkuu pisteeseen F asti, minkä jälkeen muodostetaan jana FC. Lauseen 4.10 perusteella $\angle AEB \cong \angle CEF$. Koska $AE \cong EC$ ja $BE \cong EF$, niin lauseen SKS perusteella $\triangle AEB \cong \triangle CEF$ ja vastinkulmat $\angle BAE \cong \angle ECF$. Koska $\angle ECF = \angle ACF$ on osa kulmaa $\angle ACD$, niin aksiooma A.V takaa, että $\angle ACD > \angle ACF \cong \angle BAC$.

Toistamalla tämä todistus uudestaan aloittamalla janan BC keskipisteestä, saadaan osoitettua, että $\angle BCG > \angle ABC$. $\square$

Lause 4.12. Kolmion kahden kulman summa on vähemmän kuin π.

Todistus. Muodostetaan annetulle kolmiolle $\triangle ABC$ ulkokulma pisteeseen C jatkamalla puolisuoraa $\overrightarrow{BC}$ pisteeseen D. Silloin $\angle ACD + \angle ACB = \pi$ ja lauseen 4.11 mukaan $\angle ACD > \angle ABC$, joten

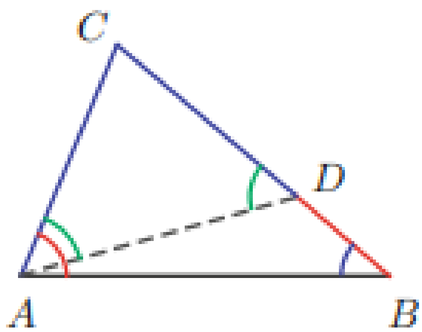
$$\pi = \angle ACD + \angle ACB > \angle ABC + \angle ACB.$$



Kuva 14: Kahden kulman summa on vähemmän kuin π.

Vastaavasti koska $\angle ACD > \angle BAC$, niin $\pi > \angle BAC + \angle ACB$. Jotta nähdään, että kulmien $\angle ABC$ ja $\angle BAC$ summa on vähemmän kuin π, muodostetaan ulkokulma pisteeseen A. $\square$

Lause 4.13. Kolmion pidempi sivu on suuremman kulman vastapäätä missä tahansa kolmiossa.



Kuva 15: Kolmion pidempi sivu on suuremman kulman vastapäätä.

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jolla $BC > AC$. Osoitetaan, että $\angle CAB > \angle ABC$.

Valitaan piste D janalta BC niin, että $CD \cong AC$. Kulma $\angle CAD$ on osa kulmaa $\angle CAB$ niin, että aksiooman A.V perusteella $\angle CAB > \angle CAD$.

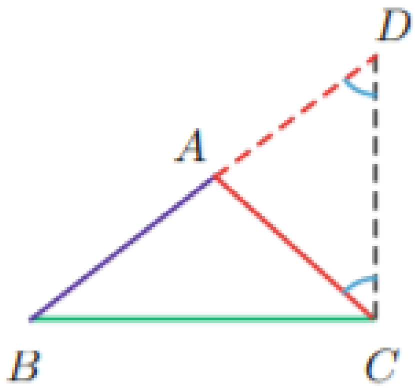
Pons Asinorum -lauseen perusteella $\angle CAD \cong \angle CDA$, joten saadaan $\angle CAB > \angle CDA$. Lauseen 4.11 perusteella $\angle CDA > \angle ABC$, josta seuraa $\angle CAB > \angle ABC$, mikä piti osoittaa. $\square$

Lause 4.14. Kolmion suurempi kulma on pidempää sivua vastapäätä missä tahansa kolmiossa.

Todistus. Oletetaan, että kolmiolle $\triangle ABC$ pätee $\angle BAC > \angle ABC$.

Jos $CB \cong CA$, niin Pons Asinorum -lauseen mukaan olisi $\angle BAC \cong \angle ABC$, mikä ei pidä paikkansa. Jos olisi $CB < CA$, niin lauseen 4.13 mukaan olisi $\angle BAC < \angle ABC$, mikä myöskään ei pidä paikkansa. Siis $CB > CA$. $\square$

Lause 4.15 (Kolmioepäyhtälö)**.** Kolmion yhden sivun pituus on lyhyempi kuin kahden jäljelle jääneiden sivujen pituuksien summa.



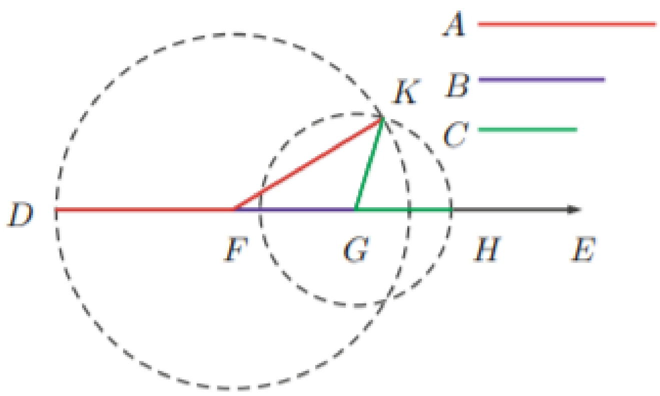
Kuva 16: Eukleideen todistus kolmiepäyhtälölle.

Todistus. Ajatellaan kolmiota $\triangle ABC$. Jatketaan puolisuoraa $\overrightarrow{BA}$ uuteen pisteeseen D niin, että $AD \cong AC$. Yhdistetään pisteet D ja C. Pons Asinorum -lauseen perusteella $\angle ADC \cong \angle ACD$. Aksiooman A.V perusteella $\angle BCD > \angle ACD$, täten $\angle BCD > \angle ADC$. Sovelletaan lausetta 4.14 kolmioon $\triangle BCD$, jolloin saadaan $BD > BC$. Tässä tapauksessa

$$BD = BA + AD \cong BA + AC > BC.$$

Sivut valittiin mielivaltaisesti, joten minkä tahansa kahden sivun pituuden summa on suurempi kuin jäljellä olevan sivun pituus. $\square$

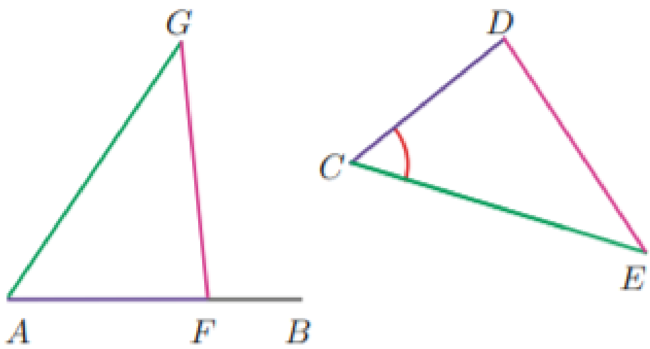
Lause 4.16. Tarkastellaan kolmea janaa, joissa minkä tahansa janan pituus on suurempi kuin kahden jäljelle jäävien janojen pituuksien summa. Voidaan muodostaa kolmio, jonka sivut ovat näiden janojen mittaiset.



Kuva 17: Janat, jotka noudattavat kolmiepäyhtälöä.

Todistus. Olkoon A, B, C janoja, jotka noudattavat ehtoa $A < B+C$. Olkoon $\overrightarrow{DE}$ puolisuora, joka alkaa siis jostain aloituspisteestä D. Asetetaan pisteet F, G, H puolisuoralle $\overrightarrow{DE}$ niin, että $DF \cong A$, $FG \cong B$ ja $GH \cong C$. Muodostetaan kaksi ympyrää, jossa yhden ympyrän keskipiste on F ja säde DF ja toisen ympyrän keskipiste G ja säde GH. Olkoon piste K näiden kahden ympyrän leikkauspiste. Koska $FK \cong DF \cong A$, $FG \cong B$ ja $GK \cong GH \cong C$, niin $\triangle FKG$ on kolmio, joka haluttiin muodostaa. $\square$

Lause 4.17. Kun on annettu kulma, suora ja piste tällä suoralla, niin voidaan muodostaa samansuuruinen kulma, jonka kärki on annettu piste ja jonka toinen kylki on annetulla suoralla.



Kuva 18: Muodostetaan kulmat.

Todistus. Kiinnitetään huomiota kulmaan $\angle DCE$, kun halutaan muodostaa yhtenevä kulma puolisuoralla $\overrightarrow{AB}$ ja kärjellä A. Yhdistetään pisteet D ja E kolmion $\triangle DCE$ muodostamiseksi. Valitaan piste F puolisuoralta $\overrightarrow{AB}$ niin, että $AF \cong CD$. Muodostetaan kolmio samalla tavalla kuin lauseessa 4.16 ja saadaan $\triangle AFG \cong \triangle DCE$. Nähdään, että $AG \cong CE$ ja $FG \cong DE$ ja tästä seuraa, että $\angle GAF \cong \angle DCE$ kuten haluttiin. □

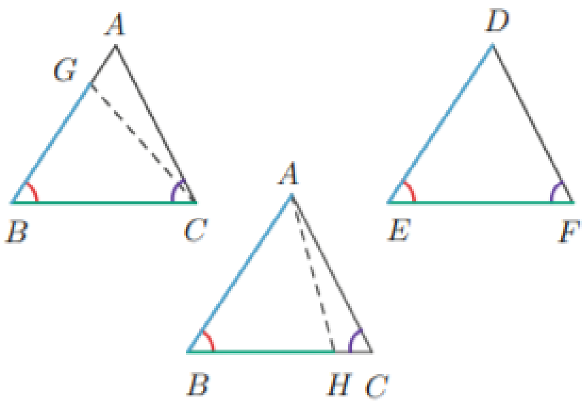
Seuraavaksi todistetaan lauseet KSK ja KKS.

Lause 4.18. Jos kolmiossa

(1) kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu tai

(2) kaksi kulmaa ja jokin muu kuin niiden välinen sivu

ovat samansuuruiset kuin toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.



Kuva 19: Eukleideen todistus lauseista KSK ja KKS.

Todistus. Tarkastellaan kolmioita $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$, missä $\angle ABC \cong \angle DEF$, $BC \cong EF$ ja $\angle BCA \cong \angle DFE$. Jos $AB \cong DE$, niin lauseen SKS perusteella saadaan $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Oletetaan, ettei tämä päde, eli $AB \ncong DE$. Voidaan olettaa, että $AB > DE$.

Valitaan piste G janalta AB niin, että $BG \cong ED$. Tällöin lauseen SKS perusteella $\triangle GBC \cong \triangle DEF$, josta seuraa, että $\angle BCG \cong \angle DFE$. Mutta

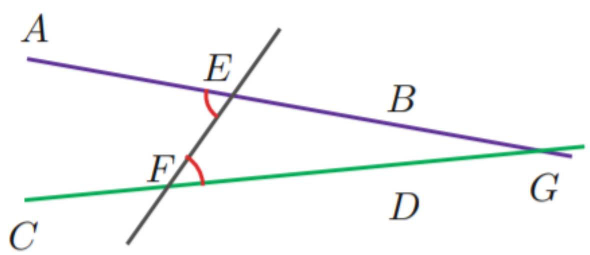
$\angle BCG$ on osa $\angle BCA \cong \angle DFE$, joten kulma $\angle BCG$ on pienempi kuin kulma $\angle DFE$. Tästä seuraa ristiriita, jolloin $AB \cong DE$, eli $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Oletetaan, että kolmioille $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ on voimassa $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle ACB \cong \angle DFE$, $AB \cong DE$. Jos $BC \cong EF$, niin lauseen SKS perusteella $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Tehdään vastaoletus, että $BC > EF$. Valitaan piste H janalta BC niin, että $BH \cong EF$. Lauseen SKS perusteella $\triangle ABH \cong \triangle DEF$, josta seuraa, että $\angle AHB \cong \angle DFE$. Kulma $\angle AHB$ on kolmion $\triangle ACH$ ulkokulma, joten lauseen 4.11 mukaan $\angle AHB > \angle ACH = \angle ACB \cong \angle DFE$. Tämä on kuitenkin ristiriita. On siis oltava $BC \cong EF$, jolloin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. □

5 Yhdensuuntaisuus

Tarkastellaan tilannetta, jossa kahta toisiaan leikkaavaa suoraa $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ leikkaa kolmas poikittainen suora $\overline{EF}$. Katso kuvaa 20. Suorien leikkauspisteisiin muodostuu kahdeksan kulmaa. Ne kulmat, joilla poikittainen suora $\overline{EF}$ on vasempana kylkenä, ovat *samankohtaiset*. Samoin ne kulmat, joilla suora $\overline{EF}$ on oikeana kylkenä, ovat *samankohtaiset.*

Lause 5.1. Jos kahta suoraa leikkaa kolmas poikittainen suora ja jos suorien AB ja CD välissä olevat samankohtaiset kulmat ovat yhtenevät, niin suorat ovat yhdensuuntaiset.



Kuva 20: Yhtenevät kulmat.

Todistus. Olkoon $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ suoria, joita leikkaa suora $\overline{EF}$ poikittain. Oletetaan, että kulmat $\angle AEF$ ja $\angle EFD$ ovat yhteneviä. Jos suorat $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$

eivät ole yhdensuuntaiset, niin niiden täytyy kohdata pisteiden A ja C suunnissa tai vastaavasti pisteiden B ja D suunnissa. Oletetaan, että ne kohtaavat pisteiden B ja D suunnissa pisteessä G. Koska kulma $\angle AEF$ on kolmion $\triangle GEF$ sisäkulman $\angle FEG$ ulkokulma, niin se on suurempi kuin kolmion sisäkulma $\angle EFG \cong \angle EFD$, mikä on ristiriita. Samoin päätellään, jos suorat leikkaavat suoran $\overline{EF}$ toisella puolella. Tehdään johtopäätös, että suorat $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ ovat yhdensuuntaiset. □

Lause 5.2. Tarkastellaan kahta suoraa, joita leikkaa kolmas suora. Jos jompikumpi ehto pitää paikkansa, niin ensimmäiset kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset.

(1) Suorien ulkopuolella ja välissä olevat samankohtaiset, samalla puolella leikkaavaa suoraa olevat kulmat ovat kongruentit.

(2) Suorien välissä olevat, samalla puolella leikkaavaa suoraa olevat kulmat ovat suplementtikulmat.

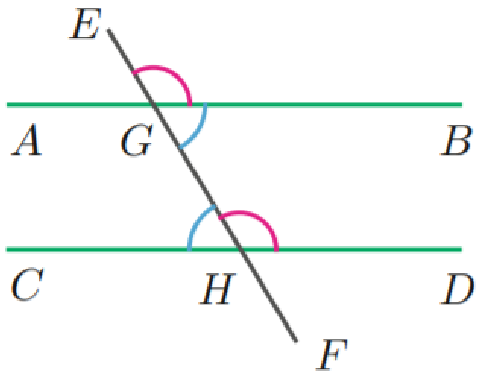
Todistus. Oletetaan ensin (1). Katsotaan kuvaa 21. Oletetaan, että ulkopuolella oleva kulma $\angle EGB$ on kongruentti sisäpuolisen kulman $\angle GHD$ kanssa. Ristikulmalauseen mukaan $\angle EGB \cong \angle AGH$. Silloin $\angle AGH \cong \angle GHD$. Lauseen 5.1 mukaan suorat $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ ovat yhdensuuntaiset. Oletetaan sitten (2). Olkoon $\angle BGH + \angle GHD = \pi$. Myös $\angle AGH + \angle BGH = \pi$ lauseen 4.8 mukaan. Siten $\angle GHD = \angle AGH$. Nyt väite seuraa lauseesta 5.1. □

Lause 5.3. Tarkastellaan jälleen kahta suoraa, joita leikkaa kolmas suora. Jos suorat ovat yhdensuuntaiset, kaikki seuraavat ehdot täyttyvät.

(1) Suorien välissä olevat samankohtaiset kulmat ovat yhtenevät.

(2) Suorien ulkopuolella ja välissä olevat samankohtaiset, samalla puolella leikkaavaa suoraa olevat kulmat ovat kongruentit.

(3) Suorien välissä olevat, samalla puolella leikkaavaa suoraa olevat kulmat ovat suplementtikulmat.



Kuva 21: Yhdensuuntaiset suorat.

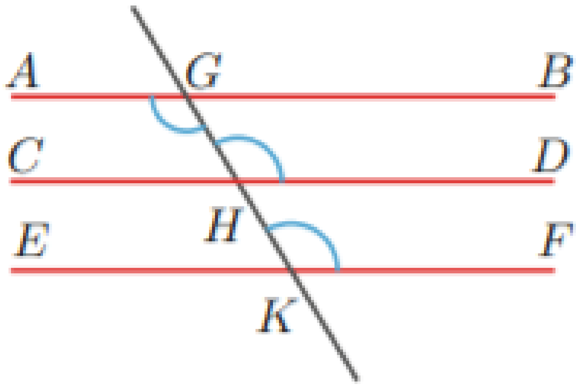
Todistus. Oletetaan, että $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ ovat yhdensuuntaiset. Tehdään vastaoletus, ettei (1) päde. Oletetaan, että kuvan 21 samankohtaiset kulmat $\angle AGH$ ja $\angle GHD$ ovat erisuuruiset, esimerkiksi $\angle AGH > \angle GHD$. Koska $\angle AGH + \angle BGH = \pi$, niin $\angle BGH + \angle GHD < \pi$. Suorat AB ja CD kohtaavat jossakin pisteessä pisteiden B ja D puolella, mikä on ristiriita. Tehdään johtopäätös, että $\angle AGH \cong \angle GHD$, minkä täytyy pitää paikkansa.

Seuraavaksi väitetään, että $\angle EGB \cong \angle GHD$. Lauseen 4.10 mukaan $\angle AGH \cong \angle EGB$. Ehdon (1) perusteella $\angle AGH \cong \angle GHD$. Tehdään johtopäätös, että $\angle EGB \cong \angle GHD$, mikä todistaa ehdon (2).

Lopulta huomataan, että $\angle EGB + \angle BGH = \pi$, joten $\angle GHD + \angle BGH = \pi$. Tämä riittää ehdon (3) todistukseksi. □

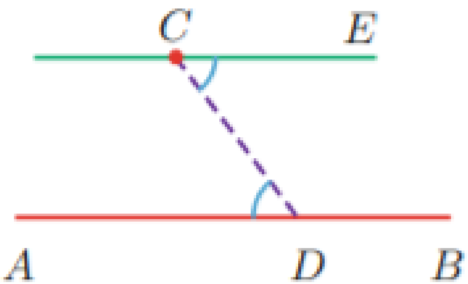
Lause 5.4. Kaksi suoraa, jotka ovat yhdensuuntaiset kolmannen suoran kanssa, ovat yhdensuuntaiset.

Todistus. Oletetaan, että suorat $\overline{AB}$ ja $\overline{EF}$ ovat yhdensuuntaisia suoran $\overline{CD}$ kanssa. Olkoon $\overline{GK}$ poikittainen suora, joka leikkaa nämä kolme yhdensuuntaista suoraa. Koska suora $\overline{AB}$ on yhdensuuntainen suoran $\overline{CD}$ kanssa, niin lauseen 5.3 perusteella $\angle AGH \cong \angle DHG$. Koska suorat $\overline{CD}$ ja $\overline{EF}$ ovat yhdensuuntaiset, on oltava myös $\angle DHG \cong \angle FKG$. Aksiooman A.I perusteella päätellään, että $\angle AGK \cong \angle FKG$. Näin ollen lauseen 5.1 mukaan suorat $\overline{AB}$ ja $\overline{EF}$ ovat yhdensuuntaiset. □



Kuva 22: Yhdensuuntaisuus on transitiivista.

Lause 5.5. Kun on annettu suora ja piste, joka ei ole suoralla, voidaan muodostaa pisteen kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen annetun suoran kanssa.

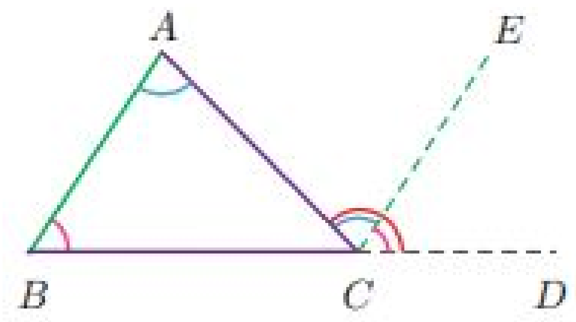


Kuva 23: Suoralle muodostettu yhdensuuntainen suora.

Todistus. Olkoon $\overline{AB}$ suora ja C piste, joka ei sijaitse suoralla. Valitaan suoralta $\overline{AB}$ piste D ja muodostetaan sitä kautta pisteeseen C jana CD. Valitaan piste E niin, että $\angle DCE \cong \angle ADC$. Lauseen 5.1 mukaan suora $\overline{AB}$ on yhdensuuntainen suoran $\overline{CE}$ kanssa. □

Playfairin aksiooma on yhtäpitävä postulaatin P.V kanssa. Playfair julkaisi Euklidisen geometrian olennaisen yhdensuuntaisuusaksiooman vuonna 1795. Proklos tiesi tästä jo tätä ennen. Paralleeliaksioomalle käytetään nimitystä Playfairin aksiooma, jonka mukaan on olemassa suora l ja piste P, joka ei ole suoralla l. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi suora m, joka kulkee pisteen P kautta ja on yhdensuuntainen suoran l kanssa.

Lause 5.6. Kolmion sisäkulman ulkokulma on yhtenevä kolmion muiden sisäkulmien summan kanssa. Kolmion sisäkulmien summa on π.



Kuva 24: Kolmion kulmien summa on π.

Todistus. Tarkastellaan kolmiota $\triangle ABC$. Jatketaan puolisuoraa $\overrightarrow{BC}$ kulkemaan pisteen D kautta. Muodostuu kulma $\angle ACD$. Muodostetaan jana CE, joka on yhdensuuntainen janan AB kanssa ja joka kulkee pisteen C kautta. Ristikulmina $\angle BAC \cong \angle ACE$. Lauseen 5.3 mukaan on oltava $\angle ABC \cong \angle ECD$. Lisäämällä kulmia ja vetoamalla aksioomaan A.II saadaan

$$\angle ABC + \angle BAC \cong \angle ACE + \angle ECD \cong \angle ACD.$$

Pitää lisätä vielä kulma $\angle ACB$, jolloin saadaan

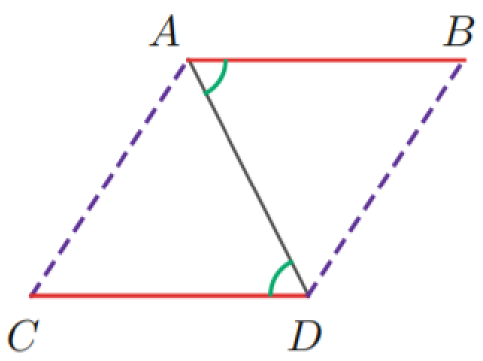
$$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB \cong \angle ACD + \angle ACB = \pi$$

niin kuin pitikin olla. $\square$

6 Kolmioiden ja suunnikkaiden aloja

Tässä luvussa käsitellään suunnikkaiden rakenteita ja ominaisuuksia sekä kolmioiden välisiä yhteyksiä. Huomio kiinnittyy lähinnä tuloksiin, jotka liittyvät Eukleideen todistukseen Pythagoraan lauseesta. Tässä luvussa on tärkeää ymmärtää sivu-kulma-sivu-lauseen tarkoitusta: jos kahdessa kolmiossa kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret, ovat kolmiot yhtenevät.

Lause 6.1. Janat, jotka muodostuvat yhdistämällä yhdensuuntaisten ja yhtä pitkien janojen päätepisteet, ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset.



Kuva 25: Janat, jotka yhdistävät yhdensuuntaisten ja yhtä pitkien janojen päätepisteet.

Todistus. Olkoot $AB \cong CD$ yhdensuuntaisia janoja, jotka on merkitty kuvaan 25 niin, että pisteet A ja C ovat pisteiden B ja D vasemmalla puolella. Koska jana AD yhdistää yhdensuuntaiset janat AB ja CD, niin lauseen 5.3 perusteella samankohtaisille kulmille pätee $\angle BAD \cong \angle ADC$. Nyt lauseen SKS perusteella $\triangle ABD \cong \triangle ACD$. Vastinsivuille pätee $BD \cong AC$, joten lauseen ensimmäinen väite on todistettu.

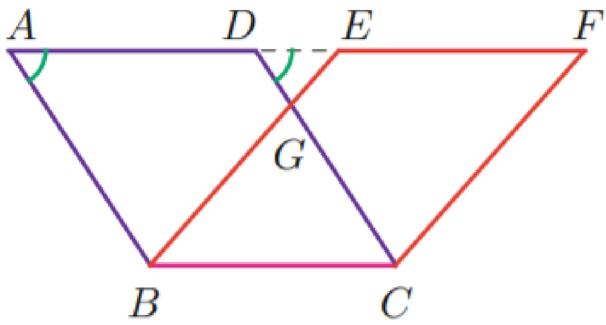
Kolmioiden yhtenevyyden takia vastinkulmille pätee $\angle CAD \cong \angle ADB$. Ne ovat vastinsivujen AC ja BD poikkileikkaavan janan AD samankohtaiset kulmat, joten lauseen 5.1 mukaan vastinsivujen AC ja BD pitää olla yhdensuuntaiset. Tästä seuraa lauseen toisen väitteen todistus. □

Seuraava lause seuraa edellisestä lauseesta.

Lause 6.2. Vastakkaiset sivut ja kulmat ovat yhtä suuret missä tahansa suunnikkaassa. Tämän lisäksi suunnikkaan halkaisija puolittaa alueen.

Seuraavissa lauseissa Eukleides käyttää sanontaa, jossa kuviot ovat 'samojen yhdensuuntaisten suorien välissä'. Se tarkoittaa, että kuviot ovat saman korkuiset. Lisäksi ne on järjestetty niin, että kuvioiden pohjat ovat yhdellä suoralla ja niiden vastakkaiset pisteet ovat toisella suoralla, joka on yhdensuuntainen ensimmäisen suoran kanssa.

Lause 6.3. Suunnikkaat, joilla on sama pohjasivu ja jotka ovat samojen yhdensuuntaisten suorien välissä, sulkevat yhtä suuren alueen.



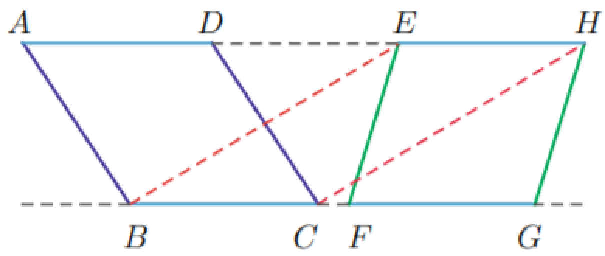
Kuva 26: Suunnikkaat, joilla on sama pohjasivu ja jotka ovat samojen yhdensuuntaisten suorien välissä.

Todistus. Oletetaan, että $ABCD$ ja $BCEF$ ovat suunnikkaita, jotka jakavat yhdessä suoran $\overline{BC}$ ja joiden sivut AD ja EF ovat samalla suoralla.

Lauseen 6.2 perusteella $AD \cong BC$ ja $EF \cong BC$, jolloin myös $AD + ED \cong EF + DE$, eli $AE \cong DF$. Myös $AB \cong DC$. Koska suora $\overline{AF}$ leikkaa yhdensuuntaiset suorat $\overline{AB}$ ja $\overline{DC}$, niin vastinkulmat $\angle\, CDF$ ja $\angle\, BAD$ ovat yhtä suuret. Tästä seuraa, että $\triangle ABE \cong \triangle DCF$. Vähennetään tästä suljettu alue $\triangle EDG$, jotta saamme puolisuunnikkaat, jotka sulkevat yhtä suuret alueet $ABGD$ ja $EFCG$. Viimeiseksi lisätään kolmio $\triangle BGC$ suljettuihin alueisiin, mistä seuraa tulos. □

Lause 6.4. Suunnikkaat, joiden pohjasivut ovat yhtä pitkät ja jotka ovat samojen yhdensuuntaisten suorien välissä, sulkevat yhtä suuret alueet.

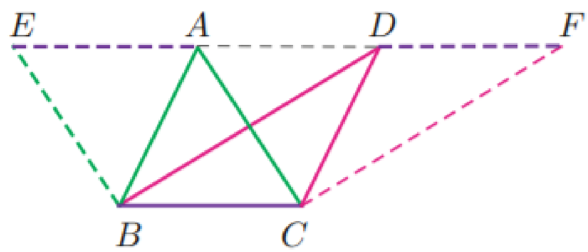
Todistus. Olkoon $ABCD$ ja $EFGH$ suunnikkaita ja olkoon $BC \cong FG$, $\overline{BC} = \overline{FG}$ ja $\overline{AD} = \overline{EH}$. Yhdistetään pisteet B ja E ja saadaan jana BE sekä pisteet C ja H ja saadaan jana CH. Koska $BC \cong FG$ ja $FG \cong EH$,



Kuva 27: Suunnikkaat, joiden pohjasivut ovat yhtä pitkät ja jotka ovat samojen yhdensuuntaisten suorien välissä, sulkevat yhtä suuret alueet.

niin $BC \cong EH$. Koska BC ja EH ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät, niin lauseen 6.1 mukaan myös BE ja CH ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Lauseen 6.3 mukaan suunnikkaat $BCEH$ ja $EFGH$ sulkevat yhtä suuren alueen, samoin kuin suunnikkaat $BCEH$ ja $ABCD$. Tästä seuraa, että suunnikkaiden $ABCD$ ja $EFHG$ sulkemat alueet ovat yhtä suuret, niin kuin haluttiinkin. $\square$

Lause 6.5. Kolmiot, joilla on sama pohjasivu ja jotka ovat samojen yhdensuuntaisten suorien välissä, sulkevat yhtä suuret alueet.

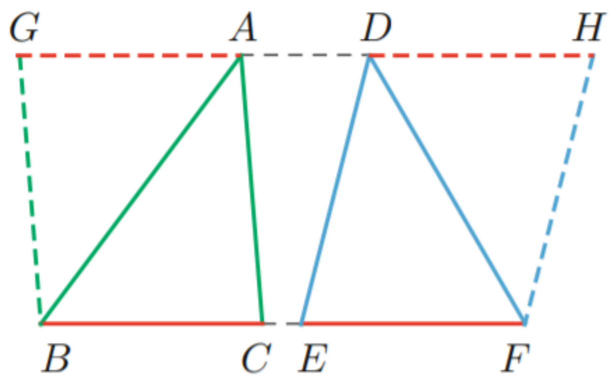


Kuva 28: Yhtenevät kolmiot samalla tasolla.

Todistus. Tarkastellaan kolmioita $\triangle ABC$ ja $\triangle BCD$, joissa jana AD on yhdensuuntainen janan BC kanssa. Muodostetaan pisteen B kautta kulkeva, suoran AC kanssa yhdenssuuntainen suora. Merkitään E:llä sen ja suoran AD leikkauspistettä. Samalla tavalla muodostetaan pisteen C kautta kulkeva, janan BD kanssa yhdensuuntainen suora, ja merkitään F:llä sen ja suoran AD leikkauspistettä. Nyt meillä on suunnikkaat $EBCA$ ja $DBCF$

samojen yhdensuuntaisten suorien välissä, eli ne sulkevat yhtä suuret alueet. Lauseen 6.2 mukaan alueet $\triangle ABC$ ja $\triangle BCD$ ovat puolet suunnikkaiden $EBCA$ ja $DBCF$ sulkemista alueista, joten kolmioiden sulkemat alueet ovat yhtä suuret. □

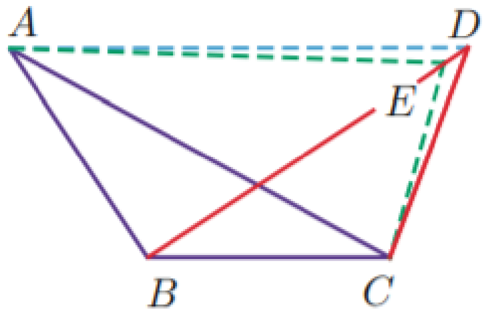
Lause 6.6. Kolmiot, joilla on yhtä pitkät pohjasivut ja jotka ovat samojen yhdensuuntaisten suorien välissä, sulkevat yhtä suuret alueet.



Kuva 29: Kolmiot, joilla on yhtä pitkät pohjasivut ja jotka ovat samojen yhdensuuntaisten suorien välissä.

Todistus. Tarkastellaan kolmioita $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$, missä $BC \cong EF$, $\overline{BC} = \overline{EF}$, ja $\overline{BF}$ on yhdensuuntainen suoran $\overline{AD}$ kanssa. Muodostetaan pisteen B kautta kulkeva, janan AC kanssa yhdensuuntainen suora ja merkitään sen ja suoran $\overline{AD}$ leikkauspistettä G:llä. Muodostetaan myös pisteen F kautta kulkeva, janan DE kanssa yhdensuuntainen suora ja merkitään sen ja suoran $\overline{AD}$ leikkauspistettä H:lla. Saadaan suunnikkaat $GBCA$ ja $DEFH$, joilla on yhtä pitkät pohjasivut ja jotka ovat samojen yhdensuuntaisten suorien välissä, joten ne sulkevat yhtä suuret alueet. Lauseen 6.2 mukaan alueet $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat puolet alueista $GBCA$ ja $DEFH$, vastaavasti, joten kolmioihin suljetut alueet ovat yhtä suuret. □

Lause 6.7. Kolmiot, jotka sulkevat yhtä suuret alueet ja joilla on sama pohjasivu ja jotka ovat pohjasivun samalla puolella, ovat samojen yhdensuuntaisten suorien välissä.



Kuva 30: Kolmiot, joilla on sama pohja ja jotka sulkevat yhtä suuret alueet.

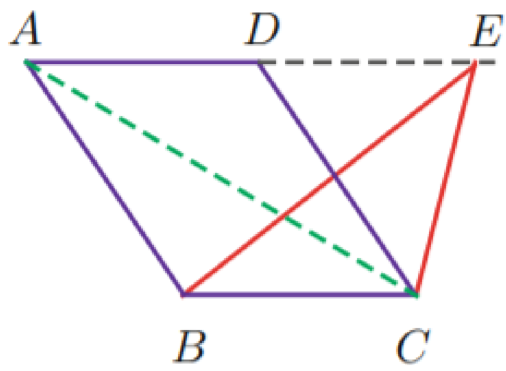
Todistus. Ajatellaan kolmioita $\triangle ABC$ ja $\triangle BCD$, jotka sulkevat yhtä suuret alueet. Pitää osoittaa, että suora $\overline{AD}$ on yhdensuuntainen suoran $\overline{BC}$ kanssa. Oletetaan, että tämä ei pidä paikkansa. Muodostetaan yhdensuuntainen jana suoran $\overline{BC}$ kanssa, niin että se kulkee pisteen A kautta ja oletetaan, että se leikkaa suoraa $\overline{BD}$ pisteessä E. Muodostetaan jana EC. Nyt meillä on kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle BCE$, joilla on sama pohjasivu ja jotka ovat samojen yhdensuuntaisten suorien välissä, joten niiden täytyy sulkea yhtä suuret alueet. Mutta tämä tarkoittaa, että kolmiot $\triangle BCE$ ja $\triangle BCD$ sulkevat yhtä suuret alueet.Tämä on ristiriita, koska yhden kolmioista $\triangle BCE$ tai $\triangle BCD$ on oltava toisen osa. Tehdään johtopäätös, että suora $\overline{AD}$ on yhdensuuntainen suoran $\overline{BC}$ kanssa. □

Lause 6.8. Kolmiot, jotka sulkevat yhtä suuret alueet ja joilla on yhtä suuret pohjat samalla suoralla ja sen samalla puolella, ovat samojen yhdensuuntaisten suorien välissä.

Lause todistetaan käyttämällä hyväksi lausetta 6.7.

Lause 6.9. Jos suunnikkaalla ja kolmiolla on sama pohja ja ne ovat samojen yhdensuuntaisten suorien välissä, niin suunnikkaan sulkema alue on kaksi kertaa kolmion sulkema alue.

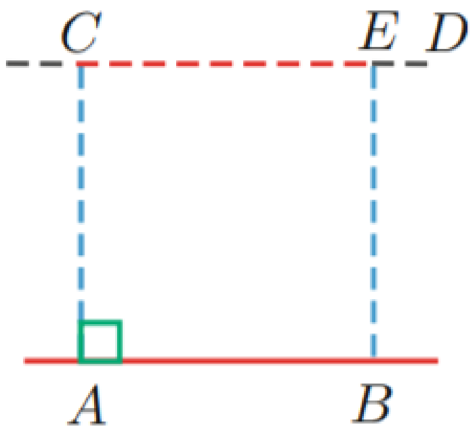
Todistus. Tarkastellaan suunnikasta $ABCD$ ja kolmiota $\triangle BCE$, joilla janat BC ja AE ovat yhdensuuntaiset. Muodostetaan jana AC. Lauseen 6.5 mukaan $\triangle ABC$ ja $\triangle BCE$ sulkevat yhtä suuret alueet. Suunnikkaalla $ABCD$ on lävistäjä AC, joten lauseen 6.2 mukaan se sulkee kaksi kertaa kolmion $\triangle ABC$



Kuva 31: Samojen yhdensuuntaisten suorien välissä olevat samanpohjaiset suunnikas ja kolmio.

suuruisen alueen. Koska kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle BCE$ sulkemat alueet ovat yhtä suuret, niin suunnikas $ABCD$ sulkee kaksi kertaa kolmion $\triangle BCE$ suuruisen alueen. $\square$

Lause 6.10. Voidaan muodostaa neliö, jonka sivu on annettu jana.



Kuva 32: Neliö, jonka sivu on annettu jana.

Todistus. Oletetaan, että meille on annettu jana AB. Muodostetaan sille kohtisuora jana pisteen A kohdalla. Valitaan kohtisuoran janan AC päätepiste C niin, että $AC \cong AB$. Nyt muodostetaan yhdensuuntainen suora suoran $\overline{AB}$

kanssa kulkemaan pisteen C kautta. Olkoon piste D tällä samalla suoralla. Muodostetaan nyt pisteeseen B yhdensuuntainen suora suoran $\overline{AC}$ kanssa ja sanotaan sen kohtaavan suoran $\overline{CD}$ pisteessä E.

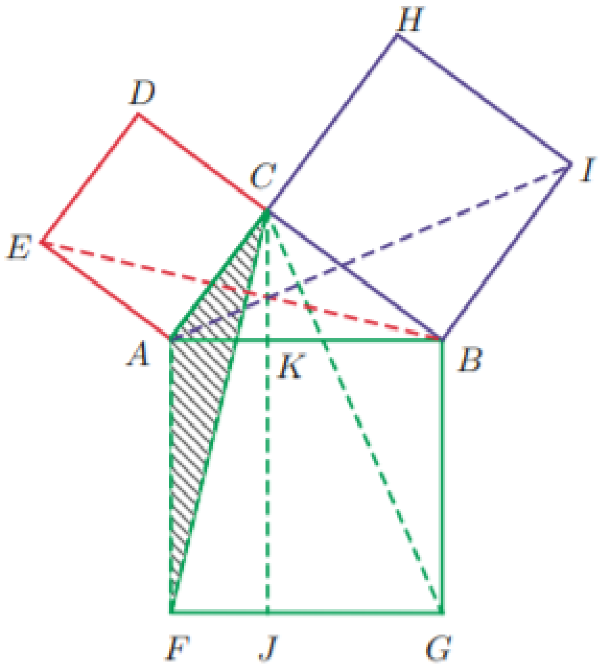
Konstruktion perusteella $ABCE$ on suunnikas. Lauseen 6.2 mukaan $AB \cong CE$ ja $AC \cong BE$. Koska $AC \cong AB$, niin kaikki suunnikkaan $ABCE$ neljä sivua ovat yhtä pitkiä. Koska $\angle BAC$ on suora kulma, niin lause 6.2 antaa meille, että $\angle BEC$ on suora kulma. Koska suora $\overline{AC}$ leikkaa suorat $\overline{AB}$ ja $\overline{CE}$, niin lauseesta 5.3 seuraa, että suorien $\overline{AC}$ ja $\overline{EC}$ muodostamat kulmat ovat kaikki suoria. Vetoamalla uudestaan lauseeseen 6.2 nähdään, että kulma $\angle ABE$ on suora kulma ja näin muodostunut suunnikas on neliö. $\square$

7 Pythagoraan lause

Lause on saanut nimensä kreikkalaisen matemaatikon Pythagoraan mukaan. Pythagoraan lausella voidaan laskea suorakulmaisen kolmion tuntemattoman sivun pituus, jos muiden sivujen pituudet tiedetään. Lause on yksi tärkeimmistä matematiikan tuloksista, koska pisteiden koordinaattien avulla voidaan määrittää pisteiden välinen etäisyys ja näin kolmioiden sivun pituudet.

Lause 7.1. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusalla olevan neliön pinta-ala on suorakulmaisen kolmion kateeteilla olevien neliöiden pinta-alojen summa.

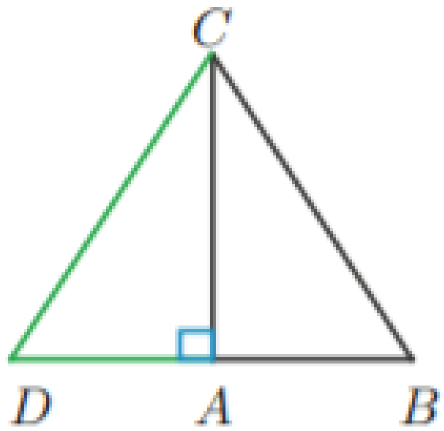
Todistus. Olkoon kulma $\angle ACB$ suora. Muodostetaan kuvassa 33 näkyvän kolmion jokaiseen sivuun neliö: $ABFG$ sivulla AB, $ACDE$ sivulla AC ja $BCHI$ sivulla BC. Lauseen 4.9 mukaan pisteet A, C, H ovat samalla suoralla ja samoin pisteet B, C, D. Muodostetaan pisteen C kautta kulkeva, suoran $\overline{AF}$ kanssa yhdensuuntainen suora. Olkoon J piste, jossa suora leikkaa janan FG. Saadaan suunnikas $AKJF$ ja kolmio $\triangle CAF$. Lauseen 6.9 mukaan suunnikas $AKJF$ sulkee kaksi kertaa kolmion $\triangle CAF$ suuruisen pinta-alan. Tämä pätee myös suunnikkaalle $ACDE$ ja kolmiolle $\triangle AEB$. Myös $\angle BAE \cong \angle CAF$ pätee, koska kumpikin kulma on suoran kulman ja kulman $\angle BAC$ summa. Lauseen SKS perusteella $\triangle AEB \cong \triangle CAF$. Tästä seuraa,



Kuva 33: Eukleideen todistus Pythagoraan lauseesta.

että suunnikkaat $AKJF$ ja $ACDE$ ovat yhtä suuret. Samalla tavalla näytetään, että myös suunnikkaat $KBGJ$ ja $BCHI$ sulkevat yhtä suuret alueet. Kaikki todistuksessa välttämättömät kolmiot on esitetty kuvassa 33. □

Lause 7.2. Jos neliön sulkema alue kolmion yhdellä puolella on yhtä suuri kuin niiden alueiden summa, jotka neliöt sulkevat jäljellä olevilta sivuilta, niin jäljellä olevien kahden sivun muodostama kulma on suora.



Kuva 34: Käänteinen väittämä Pythagoraan lauseelle.

Todistus. Tarkastellaan kolmiota $\triangle ABC$, jonka sivulla BC muodostetun neliön ala on yhtä suuri kuin kateeteilla AB ja AC muodostettujen neliöiden alojen summa. Osoitetaan, että $\angle CAB$ on suora kulma.

Muodostetaan jana AD niin, että se on kohtisuorassa janaa AC vastaan ja $AD \cong AB$ toteutuu. Tiedetään, että sivuilla AD ja AB olevat neliöt ovat yhtä suuret. Täten janojen AB ja AC olevien neliöiden summa on yhtä suuri kuin janoilla AD ja AC olevien neliöiden summa. Koska $\triangle ADC$ on suorakulmainen, niin janoilla AD ja AC olevien neliöiden summa on yhtä suuri kuin neliö sivulla CD, joka täytyy näin olla myös yhtä suuri kuin sivulla BC oleva neliö. Tästä seuraa, että $BC \cong CD$. Koska $AB \cong AD$ ja sivu AC on yhteinen, niin lauseen SSS mukaan $\triangle ABC \cong \triangle ADC$. Vastinkulmina $\angle CAB \cong \angle CAD$. Koska kulma $\angle CAD$ on suora, lause on saatu todistettua.

□

8 Painopiste

Painopiste on tietyssä kappaleessa oleva kohta, johon painovoima vaikuttaa. Painopiste lasketaan tasalaatuisesta materiaalista tehdylle monikulmiolle [3]. Painopisteen x- ja y-koordinaattipisteet saadaan laskettua kaavoilla

$$c_x = \frac{1}{6A}\sum_{i=0}^{N-1}(x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

ja

$$c_y = \frac{1}{6A}\sum_{i=0}^{N-1}(y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

Esimerkki 8.1. Tarkastellaan monitahokasta, jonka tahkot ovat kolmioita, ja lasketaan sen painopiste C. Kappaleella on N tahkoa, joilla on kärjet (a_i, b_i, c_i). R_i on i:nnen tahkon kärkipisteiden keskiarvo ja A_i on kaksi kertaa i:nnen tahkon pinta-ala. Huomaa, että tahkojen oletetaan olevan ohuita homogeenisiä, eikä niitä tarvitse yhdistää tai muodostaa niiden avulla kiinteää esinettä. Tämä johtaa siihen, että jäljelle jää tarkasteltavaksi vain 3-kärkisiä kaksiulotteisia tasokolmioita. Tällaisen painopiste on

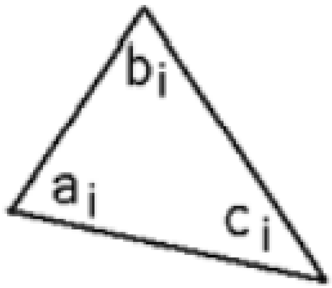
$$C = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} A_i R_i}{\sum_{i=0}^{N-1} A_i},$$

missä

$$R_i = \frac{(a_i + b_i + c_i)}{3}$$

ja

$$A_i = \|(b_i - a_i) \otimes (c_i - a_i)\|.$$



Kuva 35: Kolmion painopiste

9 Analyyttisen geometrian monikulmioiden pinta-aloja

9.1 Maanmittaajan kaava

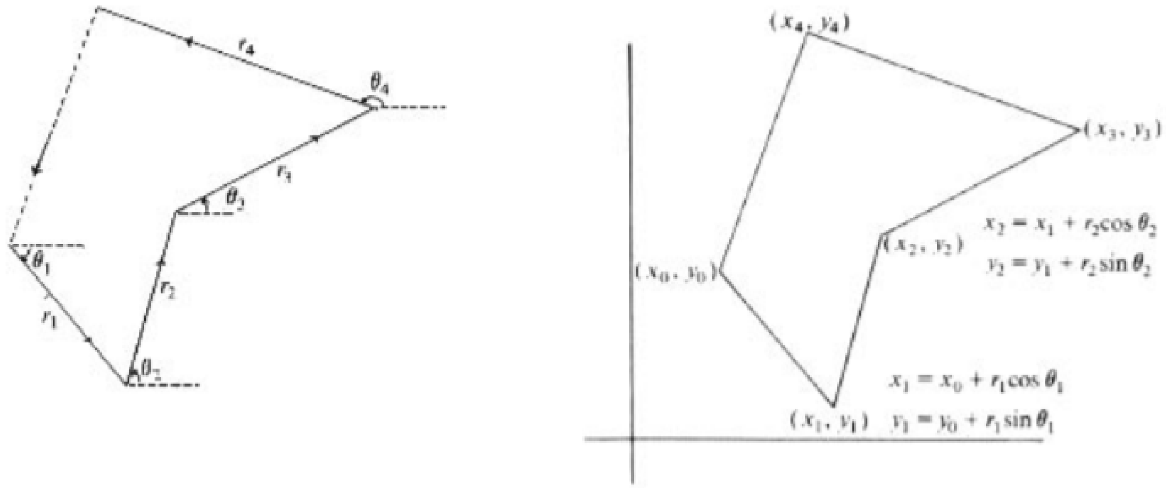
Jos yksinkertaisen monikulmion kärjet, jotka on asetettu vastapäivään kehän ympärille, ovat $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_{n-1}, y_{n-1})$, niin monikulmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} x_{n-2} & x_{n-1} \\ y_{n-2} & y_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_0 \\ y_{n-1} & y_0 \end{vmatrix}\right\}.$$

Huomaa, että jokainen suuntautunut monikulmion särmä vastaa maanmittaajan kaavassa olevaa 2×2-determinanttia. Maanmittaajan kaavan johtaminen perustuu geometriseen tulkintaan, missä 2×2-determinantti tarkoittaa suunnikkaan suunnattua pinta-alaa, jonka sivut ovat vektoreita.

Lemma 9.1. Determinantin $\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$ itseisarvo on sellaisen suunnikkaan ala, jonka sivut ovat vektorit $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ ja $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2\rangle$ ja jonka determinantti on positiivinen jos ja vain jos lyhyempi pyörimissuunta vektorista $\mathbf{v}$ vektoriin $\mathbf{w}$ on vastapäivään.

Todistus. Oletetaan, että $\mathbf{n}$ on vektori, joka saadaan kiertämällä $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ vastapäivään $\frac{\pi}{2}$ verran. Jos $\boldsymbol{\theta}$ on positiivisen x-akselin ja vektorin $\mathbf{v}$ välinen



Kuva 36: Monikulmion sivu

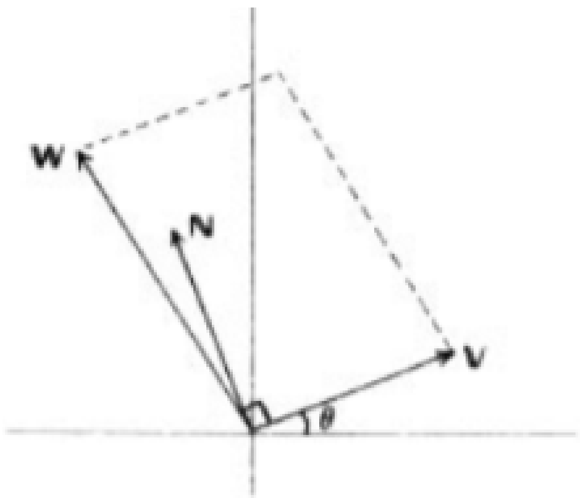
kulma, niin $\boldsymbol{\theta} + \frac{\pi}{2}$ on vektorin **n** kulman suuruus.

Koska $\mathbf{v} = \langle r \cos \boldsymbol{\theta}, r \sin \boldsymbol{\theta} \rangle$, missä $r = |\mathbf{v}|$, niin $\mathbf{n} = \langle -r \sin \boldsymbol{\theta}, r \cos \boldsymbol{\theta} \rangle = \langle -v_2, v_1 \rangle$.

Suunnikkaan, jonka pohja on **v** ja sivu **w**, korkeus on vektorin **w** skalaariprojektio vektorilla **n**, eli $\frac{|\mathbf{w} \bullet \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$. Siksi suunnikkaan ala on $\frac{|\mathbf{v}||\mathbf{w} \bullet n|}{|\mathbf{n}|}$. Mutta $\mathbf{n} = \mathbf{v}$, joten $A = |\mathbf{w} \bullet \mathbf{n}| = |v_1 w_2 - v_2 w_1|$, joka on siis pystyvektoreiden **w** ja **v** determinantin itseisarvo. Lisäksi determinantti on positiivinen vain jos vektoreiden **n** ja **w** välinen kulma on terävä, eli jos kulma vektorista **v** kierretään vastapäivään vektoria **w** kohti sen verrran, että kulma on nollan ja π:n välillä. Tällöin kulma on terävä. □

Palataan nyt takaisin maanmittaajan kaavaan. Tapaus $n = 3$, eli kun monikulmio on kolmio, on avain meidän todistusta varten. Edellisestä lemmasta tiedetään, että kolmion, jonka kärkipisteet ovat $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ pinta-ala on (kierto vastapäivään vektorista $\mathbf{v} = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0 \rangle$ vektoriin $\mathbf{w} = \langle x_2 - x_0, y_2 - y_0 \rangle$) on

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}.$$



Kuva 37: Suunnikas, jonka sivut ovat vektorit **v** ja **w**

Olkoon D 3×3-determinantti, jonka rivit ovat $r_1 = (1, 1, 1), r_2 = (x_0, x_1, x_2)$ ja $r_3 = (y_0, y_1, y_2)$. Lasketaan D kahdella eri tavalla

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_0 & y_1 - y_0 & y_y - y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 2A$$

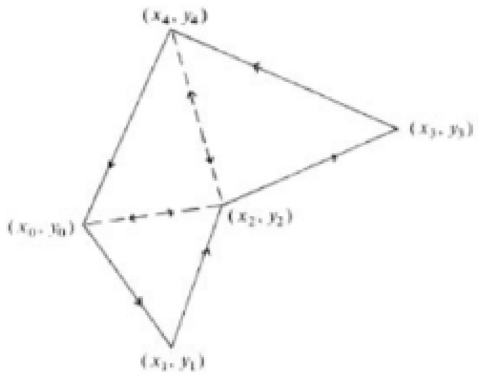
ja

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_0 \\ y_2 & y_0 \end{vmatrix}.$$

Saadaan maanmittaajan kaava

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_0 \\ y_2 & y_0 \end{vmatrix} \right\}.$$

Huomaa, että kaavassa oleva determinantti vastaa kolmion kolmea suunnattua särmää. Jotta voidaan hyödyntää maanmittaajan kaavaa monikulmioille, joilla on $n > 3$ sivua, niin siinä tapauksessa mikä tahansa suuntautunut yksinkertainen monikulmio voidaan jakaa kolmioihin. Tämä tarkoittaa, että voidaan lisätä $n - 3$ kappaletta apuhalkaisijaa, jotta saadaan hajotettua monikulmio $n-2$ kolmioksi. Jokaisella halkaisijalla on kahden vierekkäisen kolmion särmänä päinvastaiset suuntaukset. Koska monikulmion kärkipisteet ovat lueteltu vastapäivään, niin kaikki kolmiot perivät tämän positiivisen suuntauksen. Siten monikulmion pinta-ala koostuu kolmioiden summasta.



Kuva 38: Monikulmio koostuu kolmioista.

Maanmittaajan kaavaa voidaan soveltaa kussakin kolmiossa kaavalla

$$A = \frac{1}{2} \sum \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix},$$

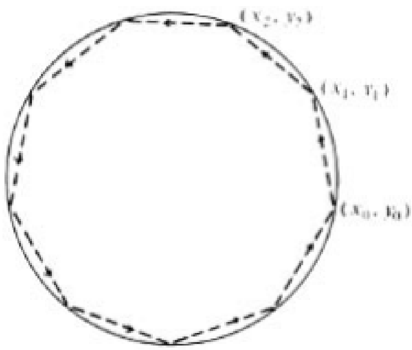
joka on determinantti jokaiselle suuntautuneelle särmälle kolmioiden joukossa. Koska jokainen halkaisija esiintyy kahdesti ja vastakkaissuuntaisesti, niin kaksi determinanttia, jotka vastaavat jokaista halkaisijaa, kumoutuvat. Jäljelle jää vielä niiden determinanttien summa, jotka vastaavat alkuperäisen monikulmion suuntautuneita särmiä. Tämä täydentää todistuksen.

9.2 Sulkeutuva yksinkertainen käyrä

Lukuun ottamatta napakoordinaattien käyriä pinta-ala voidaan selvittää hajottamalla ja rajaamalla alue funktion kuvaajien avulla ja koordinaattiakselien suuntaisilla suorilla. Tätä tietoa hyödynnetään seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 9.2. Olkoon C ympyrä ja r sen säde ja keskipiste origossa. Silloin ympyrä voidaan lausua yhtälöiden $x(t) = r\cos t$ ja $y(t) = r\sin t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$

avulla. Mille tahansa luonnolliselle luvulle n pisteet $t_k = \frac{2k\pi}{n}$ ja $(0 \leq k \leq n)$ muodostavat säännöllisen jaon muuttujavälille $[0, 2\pi]$. Vastaavasti pisteet $(x_k, y_k) = (rcost_k, rsint_k)$ ovat kärkipisteet positiivisesti suuntautuneessa, säännöllisessä n-sivuisessa monikulmiossa, joka on suljettu ympyrämme sisään. Huomaa, että $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$. Soveltamalla maanmittaajan kaavaa



Kuva 39: Pisteet ympyrällä.

jokaiseen kolmioon ja summaan saadaan

$$A_n = \frac{1}{2}\left\{ \begin{vmatrix} r\cos 0 & r\cos\frac{2\pi}{n} \\ r\sin 0 & r\sin\frac{2\pi}{n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r\cos\frac{2\pi}{n} & r\cos\frac{4\pi}{n} \\ r\sin\frac{2\pi}{n} & r\sin\frac{4\pi}{n} \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} r\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} & r\cos 2\pi \\ r\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} & r\sin 2\pi \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}r^2\left\{ \sin\tfrac{2\pi}{n} + \sin\tfrac{2\pi}{n} + ... + sin\tfrac{2\pi}{n} \right\} = \tfrac{r^2}{2} \cdot n\sin\tfrac{2\pi}{n} = \pi r^2 \left[\frac{sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \right] \quad .$$

Näin ollen tämän alueen pinta-ala on $A = \lim_n A_n = \pi r^2$. Huomaa myös, että

$\frac{1}{2}\int\limits_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [r\cos t(r\cos t) - r\sin t(-r\sin t)]\, dt = \pi r^2.$

Jotta voidaan osoittaa, että suljettujen monikulmioiden pinta-alojen raja-arvo on $\frac{1}{2}\int\limits_C xdy - ydx$, niin muokataan esitystapaamme kirjoittamalla maanmittaajan kaava muotoon

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{i-1} & x_i \\ y_{i-1} & y_i \end{vmatrix}, \tag{1}$$

niin että $(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$. Asetetaan $\triangle\ x_i = x_i - x_{i-1}$ ja $\triangle\ y_i = y_i - y_{i-1}$

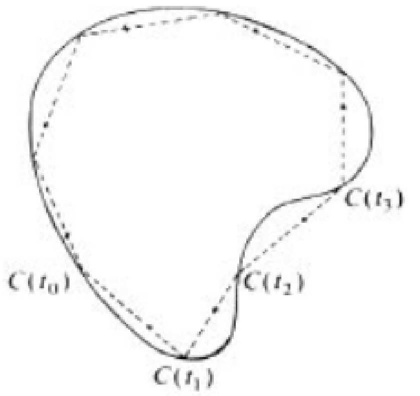
ja sijoitetaan, jolloin

$$\begin{vmatrix} x_{i-1} & x_i \\ y_{i-1} & y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{i-1} & \triangle\, x_i \\ y_{i-1} & \triangle\, y_i \end{vmatrix}.$$

Nyt

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_{i-1} & \triangle\, x_i \\ y_{i-1} & \triangle\, y_i \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Oletetaan, että $C : t \to C(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ on yksinkertainen, suljettu ja sileä tasokäyrä positiiviseen suuntaan niin, että käyrä $C(t)$ sijaitsee liikkuvan pisteen vasemmalla puolella. Jokainen osa $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ parametrivälillä $[a, b]$ määrittää kärkipisteillä $C(t_i)$ positiivisesti suuntautuneen monikulmion, joka on melkein käyrän sisällä. Väliarvolauseen avulla



Kuva 40: Käyrän sisään piirretty monikulmio.

monikulmion pituus

$$\sum_{i=1}^{n} \mid C(t_i) - C(t_{i-1}) \mid = \sum_{i=1}^{n} \{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

voidaan esittää muodossa

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\{x'(u_i)\}^2 + \{y'(v_i)\}^2} (t_i - t_{i-1}),$$

jossa derivaatat on laskettu pisteissä (u_j, v_j) ja (t_{j-1}, t_j).

Samoin maanmittaajan kaava monikulmioiden pinta-aloista

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \{x(t_{i-1})[y(t_i) - y(t_{i-1}] - y(t_{i-1})[x(t_i) - x(t_{i-1})]\}$$

voidaan esittää muodossa

$$\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\{x(t_{i-1})y'(v_i) - y(t_{i-1})x'(u_i)\}(t_i - t_{i-1}).$$

Kun välin $[a, b]$ osavälien pituudet lähestyvät nollaa, niin yleistetyt Riemannin summat lähestyvät integraaleja

$$L = \int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}dt \tag{3}$$

ja

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b [x(t)y'(t) - y'(t)x(t)]dt = \frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} x(t) & x'(t) \\ y(t) & y'(t) \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Saatu integraali L antaa itse asiassa käyrän C kaarenpituuden, joka näkyy vakuuttavasti kuvassa 40. Pinta-alakaavan (3) ja maanmittaajan kaavan (2) yhteys voidaan nähdä käyttämällä integraalia differentiaalimuodossa käyrän C yli, jolloin

$$\frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$$

tai

$$\frac{1}{2}\int_C \begin{vmatrix} x & dx \\ y & dy \end{vmatrix}.$$

Koska $\triangle x_i$ ja $\triangle y_i$ muuttuvat äärettömän pieniksi muotoon dx ja dy, yhteenlasku Surveyorin kaavassa (2) muunnetaan integraatiksi kaavassa (3).

Huomautus 9.3. Sisällyttämällä välin $[a, b]$ jakopisteisiin ne t:n arvot, joissa joko $C'(t)$ on nolla tai $C(t)$ ei ole differentioituva, edelliset kaavat käyvät myös paloittain sileille käyrille, joka on riittävä ehto ymmärtämään kaikkia monikulmioita.

Huomautus 9.4. Jos sisään piirretty käyräleikkaa itsensä hienoillakin osituksilla, voidaan käyttää Greenin kaavaa

$$\int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy = \int\int_R (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dA.$$

9.3 Pinta-alakaavojen sovelluksia

Napakoordinaattikäyrän pituuden kaava on $r = f(\theta)$, kun $(a \leq \theta \leq b)$, joka on parametrimuotoisen käyrän pituuden kaavan erityismuoto. Käyttämällä parametrista käyrää napakulman avulla saadaan

$$x(\theta) = f(\theta)\cos\theta \text{ ja } y(\theta) = f(\theta)\sin\theta.$$

Koska

$$\{x'(\theta)\}^2 + \{y'(\theta)\}^2 = \{f(\theta)\}^2 + \{f'(\theta)\}^2,$$

niin

$$L = \int_a^b \sqrt{\{f(\theta)\}^2 + \{f'(\theta)\}^2} d\theta.$$

Vastaavasti

$$x(\theta)y'(\theta) - y(\theta)x'(\theta) = \{f(\theta)\}^2$$

ja tämä johtaa pina-alakaavaan

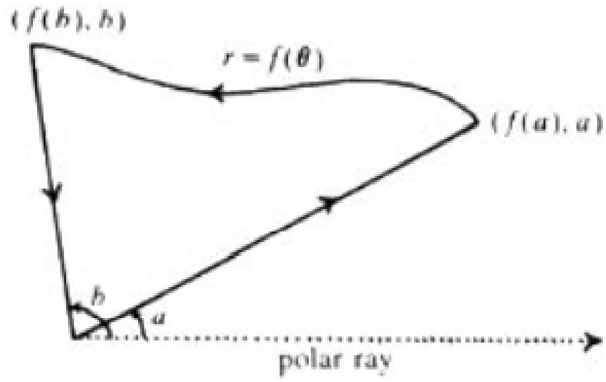
$$A = \tfrac{1}{2}\int_a^b \{f(\theta)\}^2 d\theta,$$

kun napakoordinaattikäyrä on yksinkertainen ja suljettu.

Tavallinen geometrinen argumentti, joka perustuu sektorin pinta-alan kaavaan osoittaa, että napa-alueen kaava ei sovellu vain yksinkertaisiin suljettuihin käyriin. Toisin sanoen $\frac{1}{2}\int_a^b \{f(\theta)\} d\theta$
antaa säteiden $\theta = a$ ja $\theta = b$ sekä käyrän $r = f(\theta)$ rajaaman sektorin pinta-alan $A = \frac{1}{2}r^2\theta$. Sama tulos voidaan johtaa huomaamalla, että $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ on identtisesti 0, koska tällaisen säteen tangenttivektori $\langle x', y' \rangle$ on paikkavektorin monikerta $\langle x, y \rangle$. Siten integraali $\frac{1}{2}\int xdy - ydx$ kulkee segmenttiä pitkin navasta pisteeseen $(f(a), a)$ ja pisteestä $(f(b), b)$ takaisin navalle, jolloin molemmat katoavat jättäen integraalin $\frac{1}{2}\int_a^b \{f(\theta)\}^2 d\theta$ ainoaksi ei-katoavaksi osaksi integraalia $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$, joka on "sektorin"rajojen ympärillä.

Tämän yhteydessä on tärkeää mainita yhteys maanmittaajan pinta-alakaavaan. Huomaa, että

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{i-1} & x_i \\ y_{i-1} & y_i \end{vmatrix}$$



Kuva 41: Napakoordinaattien rajaama alue.

on kolmion pinta-ala, jonka kärkipisteet ovat (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i) sekä $(0,0)$. Näin ollen maanmittaajan kaavaa voidaan katsoa ilmaisevan monikulmion pinta-alaa summana kolmioiden suuntautuneista pinta-aloista muodostamalla peräkkäisiä kärkipistepareja. Tämä johtaa siihen, että differentiaalia $\omega = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$ pidetään "säteittäisen pinta-alan elementtinä"karteesisessa koordinaatistossa samalla tavalla ajateltuna, että $(\frac{1}{2})r^2 d\theta$ on pinta-alaelementti napakoordinaatistossa. Kun parametri t kulkee pisteestä a pisteeseen b, niin säde origosta pisteeseen $C(t) = (x(t), y(t))$ pyyhkii yli alueen, jonka ala lasketaan integroimalla ω käyrän C yli.
Tarkastellaan lyhyesti kahta hyödyllistä integrointikaavaa, joita voidaan hyödyntää yksinkertaisen, suljetun käyrän rajaamaan alueeseen:

$$A = \int_a^b x(t)y'(t)dt \tag{5}$$

ja

$$A = -\int_a^b y(t)x'(t)dt. \tag{6}$$

Kun nämä kaksi integraalia lasketaan yhteen ja jaetaan kahdella saadaan maanmittaajan symmetrinen kaava (3). Miten sitten (5) ja (6) liittyvät maanmittaajan kaavaan, jolla lasketaan monikulmion pinta-ala? Määrittelemällä (x_{n+1}, y_{n+1}) samaksi kuin (x_1, y_1) ja poimimalla jokainen x_i maanmittaajan kaavasta, saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} x_{i-1} & x_i \\ y_{i-1} & y_i \end{vmatrix} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i(y_{i+1} - y_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i(y_{i+1} - y_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - y_{i-1}).\end{aligned}$$

Tästä seuraa että, kun välin $[a, b]$ jakoväli lähestyy nollaa, niin

$$\frac{1}{2}\int_a^b x(t)y'(t)dt + \frac{1}{2}\int_a^b x(t)y'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt.$$

Vastaava argumentti antaa kaavan (6). Itse asiassa maanmittaajan kaava ilmaistaan usein vastaavassa muodossa

$$A = \frac{1}{2}\sum x_i(y_{i+1} - y_{i-1})$$

tai

$$A = \frac{1}{2}\sum y_i(x_{i-1} - x_{i+1}).$$

Kirjallisuutta

[1] Paul Bourke: *Calculating The Area And Centroid Of A Polygon*, heinäkuu 1988.
http://www.paulbourke.net/geometry/polygonmesh/centroid.pdf. Viitattu 9.6.2022.

[2] Bart Braden: The Surveyor's Area Formula, *The College Mathematics Journal*, syyskuu 1986, kokoelma 17, teos 4, sivut 326–337.

[3] Meighan I. Dillon: *Geometry Through History*, Springer, 2018.