

**Marika Toivola ja Tiina Härkönen**

**AVOIN MATEMATIIKKA 7 lk.  
Osio 3: Potensseja ja polynomeja**

Sisältö on lisensoitu avoimella CC BY 3.0 -lisenssillä.

## Osio 3: Potensseja ja polynomeja

1.	Samankantaisten potenssien tulo.....	4
2.	Samankantaisten potenssien osamäärä ja nolla eksponentti .....	10
3.	Potenssin potenssi.....	17
4.	Negatiivinen eksponentti .....	22
5.	Tulon potenssi.....	28
6.	Osamäärän potenssi .....	33
7.	Kymmenpotenssimuoto .....	41
8.	Potensseja laskimella.....	49
9.	Lukujärjestelmät* .....	55
10.	Lausekkeita .....	60
11.	Polynomi.....	66
12.	Termien yhdistäminen ja järjestäminen .....	72
13.	Polynomien yhteen- ja vähennyslasku .....	78
14.	Monomin kertominen monomilla.....	83
15.	Polynomien kertominen monomilla.....	88
16.	Polynomien kertominen polynomilla.....	93
17.	Kertaustehtäviä .....	98

## Maapallon väestönkasvu

Maapallolla asuu tällä hetkellä (2008) arviolta 6,7 miljardia ihmistä. Väkilukuun vaikuttaa tarkasteltavalla aikavälillä se, paljonko lapsia syntyy ja vastaavasti se, paljonko ihmisiä kuolee. Näiden kahden lukumäärien erotusta sanotaan positiivisessa tapauksessa luonnolliseksi väestön lisäykseksi ja negatiivisessa tapauksessa luonnolliseksi väestön vähenemiseksi.

Väestöennusteiden laatimiseen käytetään matemaattisia malleja. Maapallon väkiluvun sanotaan kasvavan eksponentiaalisesti eli korkoa korolle –periaatteen mukaisesti. Pienikin jatkuva kasvuvauhti kaksinkertaistaa väkiluvun yllättävän nopeasti. Esimerkiksi jos vuotuinen kasvu olisi 4,0 %, niin maailman väkiluku kaksinkertaistuisi 18 vuodessa. Viime vuosikymmenellä kasvunopeus asettui nykyiseen 1,2 prosenttiin vuodessa.

Suomen väestömäärä on kasvanut vuosittain 1700-luvun puolesta välistä lähtien, lukuun ottamatta muutamia poikkeuksellisia vuosia. Suurimmat väestönmenetykset olivat nälkävuosina 1866 – 1868 ja viimeisimmät väestötappiot koettiin vuosina 1969 ja 1970, jolloin monet suomalaiset muuttivat Ruotsiin. Viime vuosina väestönkasvu on hidastunut ja se näyttää vähitellen pysähtyvän, minkä jälkeen väkilukumme alkaa vuosittain pienentyä. Tulevaisuudessa Suomen väestönkehitys riippuukin merkittävästi maahanmuuttajien määrästä.

Äärellisellä maapallolla voi elää vain äärellinen määrä ihmisiä. Jos maapallon väestönkasvua ei saada pysähtymään, lisääntyy puute ravinnosta, juomakelpoisesta vedestä ja muista luonnonvaroista. Vahvemmat väestöryhmät tulevat puolustamaan omia etujaan ja tarvitsemaansa elintilaa, mikä johtaa heikompien alistamiseen ja pahimmassa tapauksessa toistuviin sotiin.

Puolet maailman väestönkasvusta tapahtuu kuudessa maassa, jotka ovat Intia, Kiina, Pakistan, Nigeria, Bangladesh ja Indonesia. Indonesiassa ja Kiinassa väestö kasvaa kuitenkin hitaammin kuin kehitysmaissa keskimäärin. Lähes kaikissa kehitysmaissa on ryhdytty toimeen, jotta väestönkasvu saataisiin käännettyä laskuun. Suhtautuminen perhesuunnitteluun on kuitenkin kulttuurisidonnaista. Esimerkiksi Intiassa perheen koko on varallisuutta mittaava ja perheen sosiaaliturvaa takaava tekijä. Kiinassa väestönkasvun hidastumista on tavoiteltu antamalla yksilapsisten perheiden vanhemmille palkankorotuksia ja eläke-etuja. Myös ainoat lapset ovat saaneet etuja opiskelupaikkojen haussa. Jos perheeseen on syntynyt enemmän lapsia, on siitä annettu sakkoja. Maaseudulla yhden lapsen periaatteesta on joustettu siinä tapauksessa, jos ensimmäinen lapsi on ollut tyttö. Tiukasta väestöpolitiikasta johtuen poikalasten osuus on kasvanut.

## 1. Samankantaisten potenssien tulo

Merkinnässä  $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$  lukua 2 sanotaan *kantaluvuksi*, lukua 4 *eksponentiksi* ja lukua 16 *potenssin arvoksi*. Potenssin kantaluvin kanssa on oltava tarkkana. Jos sulkeita ei käytetä, eksponentti vaikuttaa vain siihen lukuun, joka on suoraan eksponentin alla.

### Esimerkki 1.

Sievennetään potenssit.

a)  $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$

Kantaluku on 2. Vastaus on negatiivinen, koska tulossa on pariton määrä (1) negatiivisia tekijöitä.

b)  $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

Kantaluku on -2. Vastaus on positiivinen, koska tulossa on parillinen määrä (4) negatiivisia tekijöitä.

Tulossa  $4^2 \cdot 4^3$  on molempien potenssien kantaluku sama. Merkintää kutsutaankin *samankantaisten potenssien tuloksi*.

$$4^2 \cdot 4^3 = \underbrace{4 \cdot 4}_{2 \text{ kpl}} \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ kpl}} = 4^5 = 1024$$

### Samankantaisten potenssien tulo

Samankantaiset potenssit *kerrotaan* keskenään siten, että eksponentit lasketaan yhteen. Kantaluku pysyy samana.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

### Esimerkki 1.

Sievennetään potenssit.

a)  $a^2 \cdot a^4 = a^{2+4} = a^6$

b)  $x \cdot x^2 \cdot x^3 = x^{1+2+3} = x^6$

c)  $a^3 \cdot a^2 \cdot b \cdot b^6 = a^{3+2} \cdot b^{1+6} = a^5 b^7$

Ainoastaan samankantaiset potenssit voidaan yhdistää.

Samankantaisien potenssien kertolaskuissa on usein mukana muitakin tekijöitä, joita voidaan yhdistellä erikseen keskenään. Jos tulossa on muuttujia eli kirjaimia, kertomerkit jätetään merkitsemättä lukuarvon ja muuttujan väliin tai useamman muuttujan väliin.

### **Esimerkki 2.**

Sievennetään potenssit.

a)  $(-2) \cdot (-2)^2 = (-2)^{1+2} = (-2)^3 = -8$

b)  $-3 \cdot 3^3 = -3^{1+3} = -3^4 = -81$

c)  $2x^2 \cdot x^6 = 2x^{2+6} = 2x^8$

d)  $3a^4 \cdot (-2a^3) = 3 \cdot (-2) \cdot a^4 \cdot a^3 = -6a^{4+3} = -6a^7$  **Luvut kerrotaan keskenään ja eksponentit lasketaan yhteen.**

## Tehtäviä

1.

Kirjoita potenssimuodossa.

- a)  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
- b)  $-9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$
- c)  $(-8) \cdot (-8) \cdot (-8)$
- d)  $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$

2.

Mikä on potenssin kantaluku?

- a)  $4^5$
- b)  $(-2)^2$
- c)  $-81^4$
- d)  $13 + 5^6$

3.

Onko potenssin arvo positiivinen vai negatiivinen?

- a)  $7^3$
- b)  $(-6)^6$
- c)  $(5 - 6)^7$
- d)  $(-12)^{98}$

4.

Laske luvun 5

- a) neliö
- b) kuutio.

5.

Ilmaise yhden potenssimerkinnän avulla.

- a)  $2^6 \cdot 2^2$
- b)  $8^5 \cdot 8^3$
- c)  $4^3 \cdot 4^2$
- d)  $7^4 \cdot 7$

6.

Sievennä ja ilmoita vastaus potenssimuodossa.

- a)  $7^2 \cdot 7^4$
- b)  $5^6 \cdot 5^4$
- c)  $4^5 \cdot 4$
- d)  $a^5 \cdot a^7$

7.

Sievennä.

- a)  $a \cdot a^2 \cdot a^6$
- b)  $b^3 \cdot b^5 \cdot b^2$

- c)  $c^8 \cdot c^{10} \cdot c^9 \cdot c$   
 d)  $d^3 \cdot d^3 \cdot d^3$

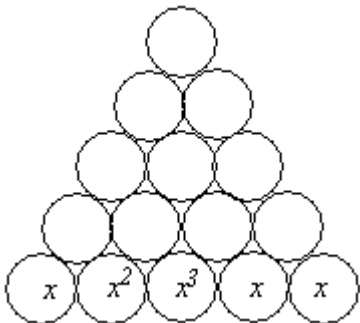
**8.**

Merkitse yhteisen kantaluvun potenssina.

- a)  $1^4 \cdot 1^2 \cdot 1^5$   
 b)  $2^2 \cdot 2^3$   
 c)  $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{2}$   
 d)  $10^5 \cdot 10^4$

**9.**

Jäljennä kuvio vihkoosi ja merkitse vierekkäisten potenssien tulo niiden yllä olevaan ympyrään.



**10.**

Merkitse ja sievennä potenssien tulo.

- a)  $6x^3$  ja  $x^2$   
 b)  $3x^2$  ja  $4x$   
 c)  $x^4$  ja  $5x^4$

**11.**

Sievennä

- a)  $6 \cdot x \cdot 4 \cdot x$   
 b)  $2 \cdot y \cdot y \cdot y \cdot (-4)$   
 c)  $-8 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot (-4)$   
 d)  $2 \cdot z \cdot z \cdot \frac{3}{2} \cdot z$

---

soveltavat tehtävät

---

**12.**

Merkitse ja laske luvun -2

- a) neljäs potenssi  
 b) neljännen potenssin vastaluku  
 c) neliö  
 d) kuutio

**13.**

Sievennä.

- a)  $xx \cdot xxx$
- b)  $xx \cdot yyy$
- c)  $xxx \cdot yyy \cdot zzzz$

**14.**

Sievennä.

- a)  $2a^6b^4 \cdot 5a^2b^6$
- b)  $8x^3y^2 \cdot y^4$
- c)  $3a^7b^3 \cdot 4ab^5$
- d)  $x^7y^9 \cdot xy$

**15.**

Mikä luku sopii  $x$ :n paikalle?

- a)  $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^x = 2^{12}$
- b)  $a^3 \cdot a^6 = a^x \cdot a$
- c)  $b^4 \cdot b \cdot b^x = b^2 \cdot b^8$

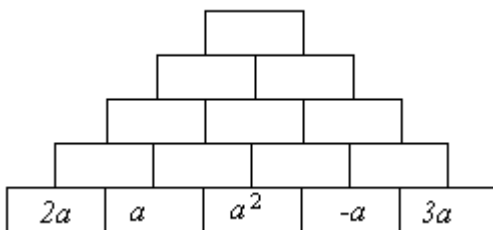
**16.**

Sievennä.

- a)  $\frac{2}{3}a^2b^2 \cdot \frac{3}{2}ab^4$
- b)  $x^3y^5$
- c)  $\frac{1}{2}cd \cdot 4c^2d^5$

**17.**

Jäljennä kuvio vihkoosi ja merkitse vierekkäisten potenssien tulo niiden yllä olevaan ruutuun.



\_\_\_\_\_ vaativat tehtävät \_\_\_\_\_

**18.**

Sievennä.

- a)  $4a \cdot 3a^5 \cdot 6a$
- b)  $b^3 \cdot 8b \cdot 2b^4$
- c)  $c^6d^2 \cdot 3cd \cdot 4c^3d^4$
- d)  $6g^2h^5 \cdot 3g^3h^2 \cdot 2gh$



**19.**

Kun  $2^{16} = 65536$ , laske päässä

- a)  $2^{17}$
- b)  $2^{15}$ .

**20.**

Taulukossa on potenssien  $4^x$  arvoja.

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$4^x$	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576

Päättele vastaukset taulukon avulla. Älä käytä laskinta.

- a)  $64 \cdot 256$
- b)  $16 \cdot 16384$
- c)  $1024^2$

**21.**

Keksi kaksi tehtävää, joissa käytetään edellisen tehtävän taulukkoa. Anna parisi ratkaista ne ja tarkista vastaukset.

## 2. Samankantaisten potenssien osamäärä ja nolla eksponentti

Osamäärää  $\frac{4^5}{4^2}$  kutsutaan *samankantaisten potenssien osamääräksi*.

$$\frac{4^5}{4^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{4}}} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$$

### Samankantaisten potenssien osamäärä

Samankantaiset potenssit jaetaan keskenään siten, että osoittajan eksponentista vähennetään nimittäjän eksponentti. Kantaluku pysyy samana.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

#### Esimerkki 1.

Sievennetään potenssit.

a)  $\frac{2^6}{2^3} = 2^{6-3} = 2^3 = 8$

b)  $\frac{(-4)^7}{(-4)^5} = (-4)^{7-5} = (-4)^2 = 16$

c)  $\frac{y^7}{y^3} = y^{7-3} = y^4$

d)  $\frac{a^3 \cdot a^4 \cdot a^6}{a^2 \cdot a^5} = \frac{a^{3+4+6}}{a^{2+5}} = \frac{a^{13}}{a^7} = a^{13-7} = a^6$

Myös samankantaisten potenssien osamäärässä on usein mukana muitakin tekijöitä, joten on syytä olla tarkkana kantaluvun kanssa.

#### Esimerkki 2.

Sievennetään potenssit.

a)  $\frac{3x^4}{x} = 3x^{4-1} = 3x^3$

$$b) \frac{-3^8}{3^5} = -3^{8-5} = -3^3 = -27$$

$$c) \frac{6a^4b^2}{3ab} = \frac{6}{3}a^{4-1}b^{2-1} = 2a^3b^1 = 2a^3b$$

Jaetaan luvut keskenään ja yhdistetään samankantaiset potenssit.

Tarkastellaan seuraavaksi jakolaskua  $\frac{4^3}{4^3}$  kahdella eri tavalla. Sievennetään lauseke samankantaisten potenssien osamäärän avulla sekä supistamalla.

$$\frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0 \quad \text{ja} \quad \frac{4^3}{4^3} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{4}}} = 1$$

Koska molemmat toimenpiteet ovat sallittuja, on lopputuloksien oltava yhtä suuret eli  $4^0 = 1$ .

### Nolla eksponentti

Jos eksponenttina on nolla, on potenssin arvo aina 1. Kantalukuna ei kuitenkaan saa olla nolla.

$$a^0 = 1, \text{ kun } a \neq 0$$

### Esimerkki 3.

Sievennetään potenssit.

$$a) 99^0 = 1$$

$$b) -45^0 = -1$$

c)  $0^0$  ei voida laskea

$$d) \frac{a^3 \cdot a^9}{a^{12}} = \frac{a^{3+9}}{a^{12}} = \frac{a^{12}}{a^{12}} = a^{12-12} = a^0 = 1$$

## Tehtäviä

**22.**

Sievennä ja ilmoita vastaus potenssimuodossa.

a)  $\frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4}$

b)  $\frac{yyyy}{yy}$

c)  $\frac{x^2}{x \cdot x}$

**23.**

Laske.

a)  $5 \cdot 3^0$

a)  $\left(\frac{10}{5}\right)^0$

b)  $0^4 \cdot 4^0$

c)  $\frac{6}{2^0}$

**24.**

Merkitse yhtenä potenssina.

a)  $\frac{5^7}{5^3}$

b)  $\frac{7^4}{7^2}$

c)  $\frac{4^4 \cdot 4^5}{4^2}$

d)  $\frac{a^2}{a^2}$

**25.**

Laske.

a)  $\frac{2^5}{2^2}$

b)  $\frac{8^5}{8^4}$

c)  $\frac{4^7}{4^5}$

d)  $\frac{7^6}{7^4}$

**26.**

Laske.

- a)  $\frac{2^9}{2^7}$
- b)  $\frac{9^8}{9^9}$
- c)  $-\frac{7^3}{7^5}$
- d)  $\frac{(-5)^4}{5^5}$

**27.**

Sievennä.

- a)  $\frac{a}{a}$
- b)  $\frac{2b^2}{b^2}$
- c)  $\frac{c^6}{c}$
- d)  $\frac{d \cdot d}{d^2}$

**28.**

Laske.

- a)  $\frac{y^6}{y^2}$
- b)  $\frac{x^5}{x^4}$
- c)  $\frac{a^k}{a^3}$
- d)  $\frac{b^3b^5}{b^2}$

**29.**

Laske.

- a)  $5^0$
- b)  $(-17)^0$
- c)  $-6^0$
- d)  $x^0 + y^0 + z^0$
- e)  $a^3 \cdot a^5 \cdot a^0$

**30.**

Sievennä.

- a)  $x^2 \cdot x^5 \cdot \frac{1}{x^4}$

- b)  $x^4 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$   
c)  $\frac{1}{x^6} \cdot \frac{1}{x} \cdot x^5$   
d)  $x^2 \cdot x^4 \cdot \frac{x^3}{x^5}$

**31.**

Sievennä.

- a)  $\frac{5a^7}{a^4}$   
b)  $\frac{8b^9}{b^5}$   
c)  $\frac{4c^8}{c}$   
d)  $\frac{2d^{10}}{d^9}$

**32.**

Sievennä.

- a)  $\frac{a^5 \cdot a^6}{a^{11}}$   
b)  $\frac{b^2 \cdot b^4}{b^6}$   
c)  $\frac{c^5 \cdot c^4}{c^3 \cdot c^6}$   
d)  $\frac{d^5 \cdot d^2}{d^3 \cdot d^4}$

---

soveltavat tehtävät

---

**33.**

Merkitse ja sievennä potenssien  $6x^3$  ja  $x^2$

- a) tulo  
b) osamäärä.

**34.**

Laske.

- a)  $\frac{(-5)^6}{(-5)^5}$   
b)  $\frac{(-1)^7}{(-1)^3}$   
c)  $\frac{(-8)^{13}}{(-8)^{14}}$

d)  $\frac{(-3)^{2003}}{(-3)^{2001}}$

**35.**

Laske.

a)  $\frac{2^4 \cdot 2^5}{2^6 \cdot 2}$

b)  $\frac{3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 3^5}$

c)  $\frac{4^4 \cdot 4^3 \cdot 4}{4^2 \cdot 4^6}$

d)  $\frac{10^{18}}{10^7 \cdot 10^{12}}$

**36.**

Sievennä.

a)  $\frac{b^2 \cdot b^4}{b^3}$

b)  $\frac{c \cdot c^3 \cdot c^5}{c \cdot c^2}$

c)  $\frac{c^3 d^4}{c^3 d^3}$

d)  $\frac{y}{x^2}$

**37.**

Laske.

a)  $-\frac{1,3^{13}}{1,3^{12}} + 0,4$

b)  $\frac{(-4,2)^5}{4,2^4} - 4,2$

**38.**

Sievennä.

a)  $\frac{35a^{10}}{5a^8}$

b)  $\frac{66b^3}{11b}$

c)  $\frac{c^8}{5c^4}$

d)  $\frac{9d^{10}}{33d^9}$

**39.**

Sievennä.

a)  $\frac{3x^2}{7x \cdot x}$

b)  $\frac{4y^3}{9y \cdot y^2}$

c)  $\frac{2x^6 \cdot 5x^2}{4x \cdot x^7}$

d)  $\frac{x^4 \cdot y}{2x^2 \cdot 3x^2}$

---

vaativat tehtävät

---

**40.**

Sievennä.

a)  $\frac{15a^8b^7}{5a^3b}$

b)  $\frac{12c^9d^5}{4c^6d^4}$

c)  $\frac{6x^9y^{10}z^5}{30x^2y}$

d)  $\frac{4a^5b^{11}c^9}{32a^4b^6c^2}$

**41.**

Mikä luku sopii  $x$ :n paikalle?

a)  $\frac{b^x}{b^5} = b^2 \cdot b^4$

b)  $\frac{a^6}{a^x} = a^2 \cdot a$

**42.**

Sievennä.

a)  $\frac{2a^4 \cdot 3a^6}{6a^5 \cdot 5a}$

b)  $\frac{b^2 \cdot 4b^7}{4b \cdot 6b^5}$

c)  $\frac{10c^7 \cdot 6c^7}{4c^{11} \cdot 15c^2}$

**43.**

Mikä luku sopii  $x$ :n paikalle?

a)  $\frac{4^8}{4^5} = 4^x$    b)  $\frac{(-2)^x}{(-2)^5} = -\frac{1}{2}$



### 3. Potenssin potenssi

Merkinnällä  $(3^2)^4$  tarkoitetaan *potenssin potenssia*. Eksponenttina on luku 4 ja kantalukuna on sulkeiden sisältö eli  $3^2$ . Käsitellään kantalukuna olevaa potenssia samoin kuin yksittäistä lukuakin. Potenssimerkintä voidaan kirjoittaa muodossa

$$(3^2)^4 = \underbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}_{= 2 \cdot 4} = 3^{2+2+2+2} = 3^8$$

Kyseessä on ennestään tuttu samankantaisten potenssien tulo.

#### Potenssin potenssi

Potenssi korotetaan potenssiin siten, että eksponentit kerrotaan keskenään. Kantaluku pysyy samana.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

#### Esimerkki 1.

Sievennetään potenssit.

a)  $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

b)  $16(a^2)^2 = 16 \cdot a^{2 \cdot 2} = 16a^4$  Ainoastaan  $a^2$  on potenssin kantaluku.

c)  $2^{3^2} = 2^9 = 512$

Kyseessä ei ole potenssin potenssi!

#### Esimerkki 2.

Mihin potenssiin luku 3 on korotettava, jotta vastaus olisi yhtä suuri kuin luku  $9^5$ ? Eli mikä luku sopii  $x$ :n paikalle:  $3^x = 9^5$ ?

#### Ratkaisu:

Potenssin  $9^5$  kantalukuna on 9, joka saadaan luvun kolme potenssina seuraavasti:  $3^2 = 9$ . Sijoittamalla tämä yhdeksikön paikalle ja sieventämällä saadaan  $9^5 = (3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$ .

Vastaus: Luku 3 on korotettava potenssiin 10.

## Tehtäviä

44.

Kirjoita yksinkertaisemmassa muodossa.

- a)  $(5^6)^3$
- b)  $(7^2)^4$
- c)  $(6^5)^3$
- d)  $(3^2)^{-6}$

45.

Sievennä.

- a)  $(10^2)^3$
- b)  $(y^4)^2$
- c)  $(a^3)^3$

46.

Sievennä.

- a)  $(5^2)^3$
- b)  $(3^4)^3$
- c)  $(7^2)^5$
- d)  $(1^4)^2$

47.

Sievennä.

- a)  $(5^2)^{\frac{1}{2}}$
- b)  $(100^{99})^0$
- c)  $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3$
- d)  $\left(b^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

---

soveltavat tehtävät

---

48.

Laske lausekkeen  $(x^2)^3$  arvo, kun

- a)  $x = 1$
- b)  $x = 2$
- c)  $x = -2$

49.

Päättele, mikä luku sopii  $x$ :n paikalle?

- a)  $(3^2)^x = 3^6$
- b)  $(4^x)^4 = 4^8$
- c)  $(5^2)^x = 5^{10}$
- d)  $(2^x)^x = 2^9$

**50.**

Sievennä.

- a)  $(k^4)^{10}$
- b)  $x^3(x^4)^6$
- c)  $\left(\frac{t^{14}}{t^5}\right)^{11}$

**51.**

Ilmoita luvut kahden potensseina.

- a)  $4^3$
- b)  $8^7$
- c)  $16^{16}$
- d)  $8^{13}$

**52.**

Merkitse ja sievennä lukujen neliöt.

- a)  $z^8$
- b)  $90^t$
- c)  $\frac{k^6}{k^2}$
- d)  $x^3x^{17}$

**53.**

Luvut 27 ja 81 ovat luvun kolme potensseja eli  $3^3 = 27$  ja  $3^4 = 81$ . Anna tehtävien vastaukset luvun 3 potensseina.

- a)  $27 \cdot 81$
- b)  $27^2$
- c)  $27 \cdot 81^3$
- d)  $\frac{81^5}{27^3}$

**54.**

Merkitse ja sievennä lukujen kuutiot.

- a)  $a^2$
- b)  $\frac{y^4}{y^2}$
- c)  $10^n$

**55.**

Sievennä.

- a)  $y^4 \cdot (y^3)^4$
- b)  $(m^3)^4 \cdot (m^9)^0$
- c)  $(p^5)^3 \cdot p^6$
- d)  $(f^7)^2 \cdot (f^4)^5$

**56.**

Sievennä.

- a)  $\frac{(a^5)^2}{(a^7)}$
- b)  $\frac{(b^7)^3}{(b^5)^4}$
- c)  $\frac{(c^7)^4}{(c^9)^3}$

---

vaativat tehtävät

---

**57.**

Päättele, mikä luku sopii  $x$ :n paikalle.

- a)  $(3^x)^4 = 3^{12}$
- b)  $(a^6)^x = a^{18}$
- c)  $(x^3)^2 = 1000000$
- d)  $(x^2)^2 = 10000$

**58.**

Sievennä.

$$\frac{6a(b^4)^2}{4(b^2)^3} \cdot \frac{2(a^2)^3}{3b^2(a^2)^2}$$

**59.**

Päättele, mikä luku sopii  $x$ :n paikalle.

- a)  $5^x = 25$
- b)  $3^x = 9^2$
- c)  $2^x = 4^3$
- d)  $4^x = 16^2$

**60.**

Mikä luvun

- a) 3 potenssi on yhtä suuri kuin luku  $9^7$
- b) 2 potenssi on yhtä suuri kuin luku  $4^5$  ?

**61.**

Taulukossa on potenssien  $3^x$  arvoja.

<b>x</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b><math>3^x</math></b>	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Sievennä lausekkeet käyttäen apuna oheista taulukkoa. Älä käytä laskinta.

- a)  $(3^2)^3$
- b)  $(3^4)^2$
- c)  $(3^1)^9$
- d)  $(3^2)^5$

**62.**

Keksi kaksi tehtävää, joissa käytetään edellisen tehtävän taulukkoa. Anna parisi ratkaista ne ja tarkista vastaukset.

## 4. Negatiivinen eksponentti

Tarkastellaan luvun kaksi potensseja sekä potenssien arvoja.

$$\begin{array}{cccccccc} \text{potenssi:} & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} \\ \text{arvo:} & 8 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \frac{1}{2} & \longrightarrow & \frac{1}{4} & \longrightarrow & \frac{1}{8} \end{array}$$

Oikealta vasemmalle mentäessä luvun kaksi eksponentti pienenee yhdellä. Potenssin arvo saadaan jakamalla edellisen potenssin arvo kahdella. Samaa menettelyä voidaan jatkaa myös negatiivisten eksponenttien puolelle.

Verrataan keskenään potenssien  $2^3$  ja  $2^{-3}$  arvoja ja havaitaan, että molemmissa esiintyy luku kahdeksan. Vastaavasti, jos eksponenttina on 2 tai  $-2$ , esiintyy arvossa luku 4. Merkitsemällä murtoluvut  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$  muodossa  $\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}$ , nähdään selvä yhteys vastaaviin positiivisiin eksponentteihin.

### Negatiivinen eksponentti

Potenssin *negatiivinen eksponentti* tarkoittaa kantaluvun käänteisluvun vastaavaa positiivista potenssia.

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{ja} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{kun } a \neq 0$$

Potenssin laskusäännöt ovat voimassa myös negatiivisille eksponenteille.

### Esimerkki 1.

Kirjoitetaan murtolukuna.

a)  $6^{-1} = \frac{1}{6^1} = \frac{1}{6}$

b)  $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

c)  $\frac{3^2}{3^4} = 3^{2-4} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

## Esimerkki 2.

Kirjoitetaan negatiivisen eksponentin avulla.

a)  $\frac{1}{7} = 7^{-1}$

b)  $\frac{1}{4^8} = 4^{-8}$

c)  $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$

d)  $\frac{5x}{y^2} = 5xy^{-2}$

e)  $\frac{1}{2a^4} = \frac{1}{2}a^{-4}$  **Ole tarkkana kantaluvun kanssa.**

## Tehtäviä

**63.**

Merkitse murtolukuna.

- a)  $3^{-1}$
- b)  $7^{-1}$
- c)  $100^{-1}$
- d)  $97^{-1}$
- e)  $1^{-1}$
- f)  $h^{-1}$

**64.**

Laske, ilmoita vastaus murtolukuna.

- a)  $3^{-2}$
- b)  $7^{-2}$
- c)  $5^{-3}$
- d)  $10^{-2}$

**65.**

Merkitse positiivisen eksponentin avulla.

- a)  $3^{-5}$
- b)  $6^{-3}$
- c)  $50^{-5}$
- d)  $a^{-4}$
- e)  $(xy)^{-2}$
- f)  $5x^{-3}$

**66.**

Kirjoita negatiivisen eksponentin avulla.

- a)  $\frac{1}{k^3}$
- b)  $\frac{1}{k^5}$
- c)  $\frac{1}{k^{20}}$
- d)  $\frac{1}{k}$

**67.**

Laske.

- a)  $\frac{5^5}{5^7}$
- b)  $\frac{7^3}{7^4}$



- c)  $\frac{a^3}{a^5}$   
d)  $x^2 \cdot x^{-3}$

**68.**

Mitkä laatikon lausekkeista on lausekkeen  $x^{-2}$  kanssa yhtä suuret, kun  $x$  ei ole nolla.

$-\frac{x}{2}$	$-x^2$	$-2x$	$-\frac{2}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^2}$
----------------	--------	-------	----------------	-----------------	------------------	------------------

**69.**

Laske, anna vastaus murtolukuna.

- a)  $3^{-1} + 4^{-1}$   
b)  $2^{-1} - 2^{-2}$   
c)  $5^{-1} \cdot 3^{-2}$   
d)  $3^{-1} : 2^{-2}$

soveltavat tehtävät

**70.**

Mikä ero on käänteisluvulla ja vastaluvulla?

**71.**

Määritä luvun käänteisluku.

- a) 9  
b)  $-\frac{1}{13}$   
c)  $\frac{3}{4}$   
d)  $2\frac{1}{2}$

**72.**

Määritä luvun vastaluku.

- a) 9  
b)  $-\frac{1}{13}$   
c)  $\frac{3}{4}$   
d)  $2\frac{1}{2}$

**73.**

Kirjoita positiivisen eksponenttien avulla ja laske potenssien arvot.

- a)  $3^{-2}$   
b)  $\frac{1}{2^{-3}}$

c)  $\frac{4}{5^{-2}}$

d)  $(2^{-2})^2$

e)  $a^{-3}$

f)  $\frac{1}{a^{-1}}$

**74.**

Laske käyttäen potenssikaavoja.

a)  $3^6 \cdot 3^{-3} \cdot 3^{-2}$

b)  $5^{-4} \cdot 5^0 \cdot 5^4$

c)  $2^8 \cdot 2^{-5} \cdot 2^{-1}$

d)  $7^{35} \cdot 7^{-29} \cdot 7^{-4}$

**75.**

Laske lukujen  $3^{-2}$  ja  $2^{-3}$

a) summa

b) erotus

c) tulo

d) osamäärä.

Anna vastaus murtolukuna.

**76.**

Sievennä ja anna vastaus potenssimuodossa.

a)  $(8^{-1})^3$

b)  $(7^{-2})^{-3}$

c)  $(2^{-6})^0$

d)  $(5^2)^{-4}$

**77.**

Sievennä ja anna vastaus potenssimuodossa.

a)  $4^{-3} \cdot 4^5 \cdot 7^5 \cdot 7^2$

b)  $3^{-1} \cdot 5^{-5} \cdot 5^7 \cdot 3^5$

c)  $2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^4 \cdot 3^{-1}$

d)  $3^{-1} \cdot 8^6 \cdot 3^{-2} \cdot 8^{-1}$

**78.**

Laske käyttäen potenssikaavoja.

a)  $\frac{6^{-15}}{6^{-14}}$

b)  $(6^{-1})^{-2}$

c)  $\frac{4^{-6}}{4^{-8} \cdot 4^2}$

d)  $\frac{2^2}{2^{-5} \cdot 2^3}$

**79.**

Mikä luku sopii  $x$ :n paikalle?

- a)  $(3^{-3})^x = 3^6$
- b)  $(4^{-x})^4 = 4^{-8}$
- c)  $(5^2)^x = 1$
- d)  $(2^x)^{-x} = 2^{-4}$

**80.**

Esitä yhden kymmenpotenssin avulla

- a)  $\frac{10^3}{10^{-2}}$
- b)  $\frac{10^4 \cdot 10^{-2}}{10^3}$
- c)  $\frac{10^{-3}}{10^2}$
- d)  $\frac{10^{-4}}{10^3 \cdot 10^{-6}}$

**81.**

Ovatko väittämä totta?

- a)  $(3^2)^3 < (3^3)^2$
- b)  $(9^5)^0 > (9^4)^{-1}$
- c)  $(a^{-2})^{-3} > (a^{-5})^2$
- d)  $(2^3)^4 = (4^4)^2$

---

vaativat tehtävät

---

**82.**

Päättele mikä luku sopii kirjaimen  $n$  paikalle.

- a)  $-101 \cdot 13^n = -101$
- b)  $2^n = \frac{1}{8}$

**83.**

Ilmoita luvun kaksi potensseina sievennetyssä muodossa.

- a)  $(4^{-3})^2$
- b)  $(8^{-1})^{-2}$
- c)  $(16^3)^{-1}$
- d)  $(3^0)^4$

**84.**

Laske  $3^0 - 3^{-2}$ . (yo kevät 1975)

## 5. Tulon potenssi

Jos potenssin kantalukuna on tulo  $(4 \cdot 3)^2$ , on kyseessä *tulon potenssi*, joka voidaan laskea normaaleja laskusääntöjä noudattaen  $(4 \cdot 3)^2 = (12)^2 = 144$ . Tulon potenssilla on olemassa myös oma laskusääntönsä, jolla päädytään samaan lopputulokseen.

$$(4 \cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$$

### Tulon potenssi

*Tulon potenssi* on tekijöiden potenssien tulo  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ .

Tulon potenssien laskusääntöä ei välttämättä tarvitse käyttää pelkillä lukuarvoilla laskettaessa. Sen sijaan lausekkeita, joissa on mukana muuttujia, ei voida sieventää normaaleja laskusääntöjä noudattaen.

#### Esimerkki 1.

Sievennetään potenssit.

- a)  $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$
- b)  $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$
- c)  $(5a^3b)^2 = 5^2 \cdot a^{3 \cdot 2} \cdot b^2 = 25a^6b^2$
- d)  $\frac{(2xy)^3}{2x^2} = \frac{2^3 x^3 y^3}{2x^2} = 2^{3-1} x^{3-2} y^3 = 2^2 xy^3 = 4xy^3$

#### Esimerkki 2.

Merkitään yhtenä potenssina.

- a)  $2^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot 4)^3 = 8^3$
- b)  $16x^2y^2 = 4^2 x^2 y^2 = (4xy)^2$

## Tehtäviä

**85.**

Laske.

- a)  $(5 \cdot 2)^2$
- b)  $(2 \cdot 3)^4$
- c)  $(10 \cdot 4)^2$
- d)  $(5 \cdot 6)^3$

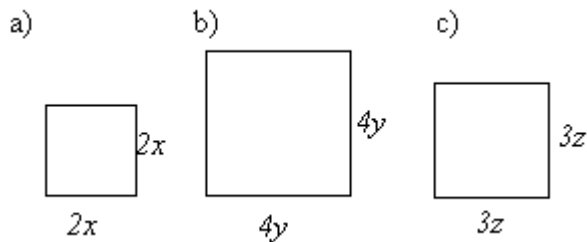
**86.**

Merkitse neliön pinta-ala potenssimuodossa ja sievennä lauseke, kun neliön sivun pituus on

- a) 8 m
- b) 10 m.

**87.**

Muodosta ja sievennä neliöiden pinta-alojen lausekkeet.



**88.**

Sievennä.

- a)  $(5x)^2$
- b)  $(2x)^3$
- c)  $(7a)^2$
- d)  $(5y)^3$

**89.**

Merkitse ja sievennä potenssi, jonka

- a) kantaluku on  $2x$  ja eksponentti 2
- b) kantaluku on  $a^2b$  ja eksponentti 4
- c) kantaluku on  $-3a$  ja eksponentti 3.

**90.**

Sievennä.

- a)  $(-4a)^2$
- b)  $(3a)^5$
- c)  $(-10)^3$
- d)  $(10x^3y^4)^2$

**91.**

Laske luvun neliö.

- a) 3
- b)  $-5a$
- c)  $2a^3$
- d)  $-7b$

**92.**

Sievennä.

- a)  $(xy^4z^5)^2$
- b)  $(-2ab)^3$
- c)  $(10y)^4$
- d)  $(-0,1c)^5$

**93.**

Laske luvun kuutio.

- a) 3
- b)  $-4$
- c)  $-5a$
- d)  $6b$
- e)  $4ab^6$

**94.**

Merkitse yhtenä potenssina.

- a)  $3^2 \cdot 5^2$
- b)  $5^4 \cdot 2^4$
- c)  $4^5 \cdot 25^5$
- d)  $4^{20} \cdot 0,25^{20}$

**95.**

Sievennä.

- a)  $(x^4y)^2 \cdot (x^2y^3)^4$
- b)  $(xy)^6 \cdot (x^4y^3)^3$
- c)  $(x^3y^5)^2 \cdot (x^4y^2)^3$

**96.**

Sievennä.

- a)  $(2x)^2 \cdot (2x)^3$
- b)  $(a^2 \cdot a^3)^4$
- c)  $b^3 \cdot (b^4)^2$

**97.**

Sievennä.

- a)  $(a^2b)^4 \cdot (a^2b^4)^3$   
 b)  $(c^3d^4)^5 \cdot (c^4d^2)^2$   
 c)  $(ef)^8 \cdot (e^2f^3)^4$

**98.**

Sievennä.

- a)  $\frac{(a^7b^5)^2}{(a^4b^2)^3}$   
 b)  $\frac{(xy)^{12}}{(x^3y^2)^3}$   
 c)  $\frac{(z^4w^3)^3}{(z^5w^2)^2}$

**99.**

Merkitse ja sievennä potenssi, jonka

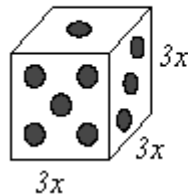
- a) kantaluku on  $a^2$  ja eksponentti 4  
 b) kantaluku on  $3a^2b$  ja eksponentti 3  
 c) kantaluku on  $-2x^2y^3$  ja eksponentti 5

**100.**

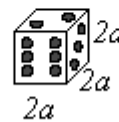
Kuution tilavuus saadaan laskemalla särmän pituuden kuutio. Merkitse kuution tilavuus potenssimuodossa ja sievennä lauseke, kun kuution särmän pituus on

- a) 3 m  
 b) 4 m

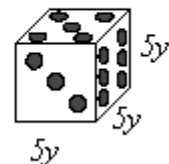
a)



b)



c)

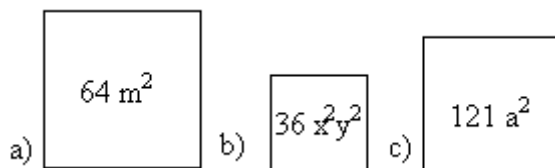


**101.**

Muodosta ja sievennä arpakuutioiden tilavuuksien lausekkeet.

**102.**

Päättele neliöiden sivujen pituudet.



vaativat tehtävät

**103.**

Merkitse yhtenä potenssina.

- a)  $2^2 \cdot a^2$   
 b)  $-a^4 \cdot b^4$   
 c)  $4^5 \cdot a^5 \cdot b^5$   
 d)  $-a^6 \cdot (-b^6) \cdot c^6$

**104.**

Päättele puuttuva kantoluku.

- a)  $(\quad)^2 = 9a^2$
- b)  $(\quad)^4 = 16z^4$
- c)  $(\quad)^3 = -8x^3$
- d)  $(\quad)^6 = x^6 y^{12} z^{18}$

**105.**

Merkitse yhtenä potenssina.

- a)  $4 \cdot a^2$
- b)  $8 \cdot b^3$
- c)  $25 \cdot a^2 \cdot b^2$
- d)  $-27 \cdot c^3$

**106.**

Sievennä.

- a)  $\frac{(m^4 n^3)^3}{(m^5 n^2)^2}$
- b)  $\frac{(ce)^9}{(c^3 e^2)^2}$
- c)  $\frac{(p^7 q^5)^2}{(p^4 q^2)^3}$

**107.**

Minkä lausekkeen neliö on

- a)  $9x^2$
- b)  $16a^4$
- c)  $0,81x^2 y^2$
- d)  $4a^4 b^2$ ?

**108.**

Päättele, mikä luku sopii  $x$ :n paikalle.

- a)  $(2a^4)^x = 4a^8$
- b)  $(2x)^4 = 10000$

**109.**

Sievennä.

$$\frac{(3a^4 b^3)^2 \cdot (a^2 b^2)^3}{(a^2 b^3)^3 \cdot 9(a^2 b)^2}$$



## 6. Osamäärän potenssi

Jos potenssin kantalukuna on osamäärä  $\left(\frac{12}{3}\right)^2$ , kutsutaan merkintää *osamäärän potenssiksi*.

Potenssin arvo voidaan laskea normaaleja laskusääntöjä käyttäen  $\left(\frac{12}{3}\right)^2 = (4)^2 = 16$  tai korottamalla ensiksi sekä osoittaja että nimittäjä toiseen potenssiin.

$$\left(\frac{12}{3}\right)^2 = \frac{12^2}{3^2} = \frac{144}{9} = 16$$

### Osamäärän potenssi

*Osamäärän potenssi* on potenssien osamäärä  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ,  $b \neq 0$ .

Osamäärän potenssien laskusääntöjä ei välttämättä tarvitse käyttää pelkillä lukuarvoilla laskettaessa. Sen sijaan lausekkeita, joissa on mukana muuttujia, ei voida sieventää normaaleja laskusääntöjä noudattaen.

### Esimerkki 1.

Sievennetään lausekkeet.

a)  $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

b)  $\left(\frac{x}{6}\right)^2 = \frac{x^2}{6^2} = \frac{x^2}{36}$

c)  $\left(\frac{3x}{5}\right)^2 = \frac{3^2 \cdot x^2}{5^2} = \frac{9x^2}{25}$

d)  $\left(\frac{2a^3 \cdot a^2}{b \cdot b^5}\right)^4 = \left(\frac{2a^{3+2}}{b^{1+5}}\right)^4 = \left(\frac{2a^5}{b^6}\right)^4 = \frac{2^4 \cdot a^{5 \cdot 4}}{b^{6 \cdot 4}} = \frac{16a^{20}}{b^{24}}$

**Esimerkki 2.**

Lasketaan lausekkeet sieventämällä ensiksi yhdeksi potenssiksi.

$$\text{a) } \frac{16^3}{8^3} = \left(\frac{16}{8}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$\text{b) } \frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 3^3 = 27$$

**Esimerkki 3.**

Merkitään yhtenä potenssina.

$$\text{a) } 5^7 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7 = \left(5 \cdot \frac{1}{6}\right)^7 = \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

$$\text{b) } \frac{4a^2}{3^2} = \frac{2^2 a^2}{3^2} = \left(\frac{2a}{3}\right)^2$$

## Tehtäviä

**110.**

Mikä on eksponentin 3 kantaluku?

a)  $\left(\frac{1}{6}\right)^3$

b)  $-\frac{2^3}{3}$

c)  $\left(-2\frac{3}{4}\right)^3$

d)  $-\left(\frac{2}{5}+7\right)^3$

**111.**

Laske.

a)  $\left(\frac{3}{5}\right)^2$

b)  $\left(-\frac{6}{7}\right)^2$

c)  $\left(3\frac{1}{2}\right)^2$

d)  $\left(-1\frac{1}{4}\right)^2$

**112.**

Sievennä.

a)  $\left(\frac{a}{b}\right)^5$

b)  $\left(\frac{c}{3}\right)^2$

c)  $\left(\frac{4}{d}\right)^3$

**113.**

Sievennä.

a)  $\left(\frac{2x}{5}\right)^2$

b)  $\left(\frac{y}{2}\right)^3$

c)  $\left(\frac{-3x}{4}\right)^2$

**114.**

Muodosta ja sievennä lukujen  $9m^3n^4$  ja  $5m^2n$  osamäärän neliö.

**115.**

Laske.

a)  $-\left(\frac{1}{2}\right)^4$

b)  $-10^4$

c)  $\left(-\frac{1}{10}\right)^5$

d)  $-\frac{1^3}{3}$

**116.**

Onko potenssin arvo positiivinen vai negatiivinen?

a)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$

b)  $\left(-\frac{4}{7}\right)^{15}$

c)  $\left(\frac{-2}{-3}\right)^3$

d)  $-\left(\frac{5}{7}\right)^8$

**117.**

Laske sieventämällä ensiksi yhdeksi potenssiksi.

a)  $\frac{8^4}{4^4}$

b)  $\frac{10^2}{2^2}$

c)  $\frac{6^{100}}{(5+1)^{100}}$

---

soveltavat tehtävät

---

**118.**

Merkitse ja sievennä luvun  $\frac{-3ab}{2c}$

- a) kuutio
- b) neliö
- c) neljäs potenssi.

**119.**

Sievennä.

a)  $\frac{(-1)^4}{(-1)^{21}}$

b)  $\frac{2^3 \cdot 2^5}{2^6}$

**120.**

Kirjoita neliönä.

a)  $9a^2$

b)  $4x^2y^2$

c)  $\frac{a^2b^2}{81}$

d)  $\frac{4x^4}{9y^2}$

**121.**

Merkitse yhtenä potenssina.

a)  $4^6 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^6$

b)  $\frac{16a^2}{9}$

c)  $\frac{8a^3}{b^3}$

d)  $\frac{-16a^4}{b^4}$

**122.**

Laske sieventämällä ensin yhdeksi potenssiksi.

a)  $\frac{100^3}{50^3}$

b)  $\frac{90^2}{30^2}$

c)  $\frac{32^2}{8^2}$

d)  $\frac{84^4}{42^4}$

**123.**

Sievennä.

a)  $\left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^5$

b)  $\left(\frac{c}{d}\right)^3 \cdot \left(\frac{c^4}{d^2}\right)^6$

$$c) \left(\frac{e^4}{f^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{e^4}{f^2}\right)^4$$

vaativat tehtävät

**124.**

Kirjoita kuutiona.

a)  $x^3y^3$

b)  $-27a^3b^3c^3$

c)  $\frac{x^3}{1000}$

d)  $-\frac{8x^6}{125y^3}$

**125.**

Sievennä.

a)  $\frac{8^3}{2^6}$

b)  $\frac{7^{15}}{49^8 \cdot 7}$

**126.**

Sievennä, ilmoita vastaus ilman negatiivista potenssia.

$$\left(\frac{2a^4}{3b}\right)^{-2}$$

**127.**

Päättele puuttuva kantaluku.

a)  $(\quad)^2 = \frac{25a^2}{4}$

b)  $(\quad)^4 = \frac{b^4}{81}$

c)  $(\quad)^3 = -\frac{27}{b^3c^3}$

d)  $(\quad)^4 = \frac{a^4b^8}{16}$

**128.**

Sievennä.

$$\left(\frac{4a^3b^4}{3ab}\right)^2 : \frac{(2a^2b^3)^3}{3a^5b^3}$$

**129.**

Potenssien laskusäännöt pitävät paikkansa myös silloin kuin eksponenttina on negatiivinen luku tai nolla. Korjaa kaavat oikeiksi.

a)  $(ab)^{-n} = -a^n \cdot b^n$

b)  $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{m-n}$

c)  $(a^{-m})^{-n} = a^{-m \cdot n}$

d)  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{-a^n}{b^n}$

## Atomi

Muodostumme kaikki atomeista. Itse asiassa ei meissä muuta olekaan. Kehossamme on erilaisia happi-, hiili-, vety-, typpi-, fosfori-, kalium- ym. atomeja yhteensä noin 4 000 000 000 000 000 000 000 000 kappaleita (lausutaan 4000 kvadriljoonaa). Meissä on atomeja satoja kertoja enemmän kuin vesipisaroita maailman kaikissa merissä. Atomit ovat läpimitaltaan noin 0,0000000001 m eli kymmenesmiljardisosan suuruusluokkaa.

Atomin massa on keskittynyt atomin ytimeen. Sen koko on suuruusluokkaa 0,000 000 000 000 01 m ja tilavuus vain sadasmiljardisosa koko atomin tilavuudesta. Ytimen ympärillä on lähes tyhjää, vain siellä täällä viuhtoo pienempiä hiukkasia nimeltään elektronit, jotka määräävät miten aine käyttäytyy kemiallisesti. Laaja elektronipilvi koostuu vain muutamasta elektronista, jotka ovat niin pieniä, ettei niiden kokoa ole kyetty mittaamaan. Jos ydintä esittäisi 1 mm kokoinen nuppineulan pää, niin atomia oikeassa mittakaavassa esittäisi halkaisijaltaan 10-metrinen pallo. Koska lähes koko atomin massa sijaitsee ytimessä, on ytimen aine erittäin tiheää. Jos puristaisimme koko maapallon ydinaineen tiheyteen, sen halkaisija pienenesi 6 356 800 metristä noin 250 metriin.

Koko elollinen maailma rakentuu hiiliatomin ympärille. Jokaisen ihmisen, eläimen tai kasvin jokainen solu sisältää hiiliatomeja. Syömme hiiliatomeja jokaisella aterialla ja vedämme niitä keuhkoihimme jokaisella hengenvedolla. Mistä hiiliatomi tietää, että sen kuuluu juuri olla hiiltä eikä esimerkiksi kultaa? Atomin keskipisteessä oleva pienen pieni ydin koostuu ydinhiukkasista, joita on kahta lajia: protoneja ja neutroneja. Protonien lukumäärä määrää aineen tyypin. Vedyllä on yksi protoni, heliumilla kaksi, hiilellä kuusi, uraanilla 92, kullalla 79 jne. Herääkin kysymys, voisimmeko tehdä kultaa joistakin halvemmista aineista? Kenties yhdistämällä tinaa (50 protonia) ja kuparia (29 protonia)? Se että sekoitamme astiassa tinaa ja kuparia, ei saa aikaan kultaa, sillä molemmat atomit säilyvät ennallaan. Jos sen sijaan onnistumme pommittamaan tinaa kuparilla niin voimakkaasti, että kupari ydin tunkeutuu tinaytimeen, saamme aikaiseksi kultaa. Jyväskylän yliopiston fysiikanlaitoksella on erityisesti perehdytty sellaisten ytimien, joissa on paljon protoneita, tuotantoon hiukkaskiihdyttimien avulla. Ongelmia ytimien valmistamisessa aiheuttaa kuitenkin se, että toiset ytimet hajoavat saman tien ja vain joistain tulee pysyviä.

Ytimessä olevien neutronien lukumäärä vuorostaan ratkaisee, onko aine pysyvää vai ei. Pysyvät ydinmuodot ovat niitä, joita me kutsumme ”tavallisiksi” tai ”ei-radioaktiivisiksi”. Jotta ydin olisi pysyvä, on siinä neutroneja oltava suunnilleen saman verran tai enemmän kuin protoneja. Tällöin positiivisesti varautuneet protonit eivät pääse hylkimään toisiaan. Mutta jos ytimessä on väärä määrä neutroneja, se ”stressaantuu”. Tällainen ydin on niin jännittynyt, ettei se kerta kaikkiaan pysy kasassa. Mitä nurinkurisempi neutronimäärä, sitä voimakkaampi stressitila, ja sitä nopeammin ydin purkaa ylimääräisen energiansa säteilypulssin muodossa. Tällaista ainetta sanotaan radioaktiiviseksi. Radioaktiivisuus siis riippuu ytimen rakenteesta.



## 7. Kymmenpotenssimuoto

Suurten ja pienten lukujen merkitsemisessä käytetään kymmenpotensseja. Kehossamme olevien atomien määrä 4 000 000 000 000 000 000 000 000 voidaan esittää lyhyemmin kymmenpotenssimuodossa

$$\text{kerroin} - 4 \cdot 10^{27} - \text{eksponentti}$$

kymmenpotensi

Lukuja voidaan merkitä *kymmenpotenssimuodossa*

$$a \cdot 10^n,$$

missä  $1 \leq a < 10$  ja  $n$  positiivinen tai negatiivinen kokonaisluku.

### Kymmenpotenssiesityksestä normaalimuotoon

Jos luvun kymmenen eksponentti on

- *positiivinen*, siirretään desimaalipilkkoa *oikealle*
- *negatiivinen*, siirretään desimaalipilkkoa *vasemmalle* eksponentin osoittama määrä.

### Esimerkki 1.

Kirjoitetaan luvut normaalimuodossa ilman kymmenpotenssia

- a)  $7 \cdot 10^6 = 7\,000\,000$   
Siirretään desimaalipilkkoa 6 askelta oikealle.
- b)  $4,25 \cdot 10^8 = 425\,000\,000$   
Siirretään desimaalipilkkoa 8 askelta oikealle.
- c)  $7 \cdot 10^{-6} = 0,000007$   
Siirretään desimaalipilkkoa 6 askelta vasemmalle.
- d)  $4,25 \cdot 10^{-8} = 0,0000000425$   
Siirretään desimaalipilkkoa 8 askelta vasemmalle.

Luku 120 voidaan esittää muodossa  $1,2 \cdot 100$ . Kun kerrotaan sadalla, siirretään desimaalipilkkoa *kaksi askelta oikealle*. Sama luku kymmenpotenssimuodossa on  $1,2 \cdot 10^2$ .

Luku 0,034 voidaan vastaavasti kirjoittaa muodossa  $3,4 \cdot 0,01$ . Kun kerrotaan sadasosalla, siirretään desimaalipilkku *kaksi askelta vasemmalle*. Sama luku kymmenpotenssimuodossa on  $3,4 \cdot 10^{-2}$ .

## Esimerkki 2.

Kirjoitetaan luvut kymmenpotenssimuodossa.

- a)  $10\,000\,000 = 10^7$  Jos kertojaksi tulee yksi, sitä ei merkitä näkyviin.  
Siirretään desimaalipilkku 7 askelta vasemmalle.
- b)  $14\,000\,000 = 1,4 \cdot 10^7$   
Siirretään desimaalipilkku 7 askelta vasemmalle.
- c)  $0,00000145 = 1,45 \cdot 10^{-6}$   
Siirretään desimaalipilkku 6 askelta oikealle.
- d)  $0,0000000809 = 8,09 \cdot 10^{-8}$   
Siirretään desimaalipilkku 8 askelta oikealle.

Joillakin suurilla luvuilla on omat nimityksensä:

nimitys	nollien lukumäärä
miljoona	6
miljardi	9
biljoona	12
triljoona	18
kvadriljoona	24
kvintiljoona	30
seksiljoona	36
septiljoona	42
googol	100

**Huom!** Triljoona on Euroopassa  $10^{18}$ , mutta USA:ssa  $10^{12}$ . Vastaavasti biljoona on Euroopassa  $10^{12}$ , mutta USA:ssa  $10^9$ .

On olemassa myös yleisesti käytettäviä kerrannaisyksiköiden etuliitteitä, joille on valittu omat tunnukset. Eräs tunnetuimmista etuliitteistä on kilo ( $10^3$ ). Usein käytetään yleisiä etuliitteitä kymmenpotenssimuotojen sijaan. Tällöin hyväksytään, että kertojaksi tulee myös suurempia lukuja kuin kymmenen ja pienempiä kuin ykkösen. Sanomme mieluummin jonkun massaksi 23 kg kuin  $2,3 \cdot 10^4$  g tai matkan pituudeksi 17 km kuin  $1,7 \cdot 10^4$  m.

Nimi	Tunnus	Kerroin
giga	G	$10^9$

mega	M	$10^6$
kilo	k	$10^3$
hehto	h	$10^2$
deka	da	$10^1$
desi	d	$10^{-1}$
sentti	c	$10^{-2}$
milli	m	$10^{-3}$
mikro	$\mu$	$10^{-6}$

Lisää kerrannaisyksiköitä löydät kirjan lopusta taulukko-osiosta.

### Esimerkki 3.

Vesimolekyylin halkaisija on  $2,8 \cdot 10^{-8}$  cm . Ilmoita halkaisija

- metreinä
- millimetreinä
- mikrometreinä ja
- nanometreinä.

### Ratkaisu:

$$a) 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 2,8 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$b) 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 2,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^3 \text{ mm} = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ mm}$$

$$c) 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 2,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^6 \mu\text{m} = 2,8 \cdot 10^{-4} \mu\text{m}$$

$$d) 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 2,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^9 \text{ nm} = 2,8 \cdot 10^{-1} \text{ nm} = 0,28 \text{ nm}$$

Otetaan tarkastelun lähtökohdaksi perusyksikkö metri.

Huomaa, että kerrannaisyksiköiden kerroin muuttaa lukuarvot metreiksi  $\text{mm} = 10^{-3} \text{ m}$  ja nyt muutokset halutaan tehdä toiseen suuntaan.

## Tehtäviä

### 130.

Laske.

- a)  $1000 \cdot 36,5$
- b)  $7 \cdot 1000$
- c)  $4,25 \cdot 10000$
- d)  $4,15 \cdot 0,1$
- e)  $0,001 \cdot 6$
- f)  $1,3 \cdot 0,00001$

### 131.

Kirjoita numeroin

- a) miljoona kuusisataatuhatta
- b) neljämiljardia viisisataamiljoonaa
- c) kaksisataatriljoonaa kolmebiljoonaa viisimiljoonaa kolme.

### 132.

Sievennä ilman laskinta.

- a)  $\frac{4 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 10^{19}}$
- b)  $\frac{-10^{25}}{-2 \cdot 10^{21}}$
- c)  $\frac{5 \cdot 10^7}{(-1 \cdot 10)^4}$
- d)  $\frac{2 \cdot 10^6}{-10^1}$

### 133.

Kirjoita kymmenpotenssimuodossa.

- a) 234
- b) 10
- c) 0,2968
- d) 0,03
- e) 1,20
- f) 2 000 000

### 134.

Kirjoita kymmenpotenssimuodossa.

- a) 0,0036
- b) 0,000000012
- c) 0,000000698
- d) 0,0000000000000000091

### 135.

Kirjoita ilman kymmenpotensseja.

- a)  $5,12 \cdot 10^{-5}$

- b)  $1,4 \cdot 10^{-9}$
- c)  $6,1 \cdot 10^{-16}$
- d)  $2,5 \cdot 10^{-25}$

**136.**

Ilmoita desimaalilukuna.

- a)  $10^{-4}$
- b)  $10^{-1}$
- c)  $10^{-7}$

**137.**

Laske ilman laskinta ja ilmoita vastaus kymmenpotenssimuodossa.

- a)  $5 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^3$
- b)  $7 \cdot 10^{-25} \cdot 2 \cdot 10^8$
- c)  $2 \cdot 10^{12} \cdot (-3) \cdot 10^{-18}$
- d)  $(-10)^8 \cdot 3 \cdot 10^5$

**138.**

Kirjoita kymmenpotenssimuodossa

- a) 1 000 000
- b) 72 300 000 000
- c) 0,000 000 052
- d) -300 000 000
- e) -0,000 000 001

**139.**

Mikä tulee kantaluvun 10 eksponentiksi, jos luvut esitetään kymmenpotenssimuodossa

- a) sata
- b) kymmenen tuhatta
- c) miljoona
- d) sata miljoonaa
- e) tuhat
- f) kymmenen miljardia
- g) kymmenen miljoonaa
- h) biljoona

**140.**

Kirjoita kymmenpotenssimuodossa

- a) 6 miljardia
- b) 4,9 triljoonaa
- c) 0,8 kvintiljoonaa
- d) 1,02 googolia
- e) 13 biljoonaa

**141.**

Kirjoita kymmenpotenssimuodossa

- a) 4,2 biljoonaa
- b) 6,8 miljoonaa

- c) 0,3 miljardia
- d) 17 miljoonaa

**142.**

Mitä lukuyksikköä merkitään seuraavasti?

- a)  $10^{-2}$
- b)  $10^5$
- c)  $10^9$
- d)  $10^8$
- e)  $10^{-3}$
- f)  $10^{12}$

**143.**

Verihiutalet auttavat verenvuodon tyrehtyttämässä ja niitä on normaalisti 0,15 – 0,40 miljoonaa kappaletta yhdessä kuutiomillimetrissä verta. Kirjoita lukuarvot normaalina lukujen esitysmuotona.

soveltavat tehtävät

**144.**

Kirjoita ilman kymmenpotenssia ja laske.

- a)  $5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$
- b)  $7 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1$
- c)  $9 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^0$
- d)  $2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}$
- e)  $6 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-4}$
- f)  $4,23 \cdot 10^{-3}$

**145.**

Kirjoita luvut muodossa  $a \cdot 10^n$ , missä  $1 \leq a < 10$ .

- a) 6 000
- b) 43 000
- c) 23 540 000
- d) 0,01
- e) 0,000 002 012

**146.**

Miehillä on litrassa verta 4,3 – 5,6 biljoonaa punasolua ja 3-10 miljardia valkosolua. Kirjoita lukuarvot kymmenpotenssimerkintää käyttäen.

**147.**

Maapallon massa on 6 000 000 000 000 tonnia, säde 6378 km ja pinta-ala 500 000 000 km<sup>2</sup>. Ilmoita kymmenpotenssimuodossa Maan

- a) massa kilogrammoina,
- b) säde metreinä,
- c) pinta-ala neliökilometreinä.

**148.**

Laske ilman laskinta ja ilmoita vastaus kymmenpotenssimuodossa.

- a)  $(2 \cdot 10^7)^3$
- b)  $(-3 \cdot 10^6)^2$
- c)  $(-1 \cdot 10^{11})^3$

**149.**

Seuraavat kymmenpotenssimuodot eivät ole oikein, korjaa ne.

- a)  $18,4 \cdot 10^6$
- b)  $104 \cdot 10^3$
- c)  $0,5 \cdot 10^{-3}$
- d)  $0,089 \cdot 10^{-2}$

---

vaativat tehtävät

---

**150.**

Muuta samaan kymmenpotenssimuotoon ja laske

- a)  $2,9 \cdot 10^7 + 3,6 \cdot 10^8$
- b)  $5,6 \cdot 10^{100} - 4,2 \cdot 10^{102}$

**151.**

Muuta samaan kymmenpotenssimuotoon ja laske.

- a)  $7,04 \cdot 10^{-4} + 1,1 \cdot 10^{-6}$
- b)  $2,11 \cdot 10^{-10} - 1,9 \cdot 10^{-8}$

**152.**

Laske ja pyöristä vastaus oikeaan tarkkuuteen.

- a)  $2,2 \cdot 10^7 + 1,6 \cdot 10^8$
- b)  $3,4 \cdot 10^{-6} - 5,1 \cdot 10^{-8}$

**153.**

Kroisoksella on rahaa kuusituhatta sekstiljoonaa euroa ja Roopella on rahaa  $10^{40}$  €. Kumpi on rikkaampi?

**154.**

Kirjoita suuret kymmenpotenssimuotoja ja SI-järjestelmän perusyksiköitä käyttäen.

- a) Auringosta Alfa Centaur tähdelle on matkaa 4 070 000 000 000 000 000 cm.
- b) Vetyatomin massa on 0,000 000 000 000 000 000 000 001 670 g.

**155.**

Suomen valtion budjetti on useita vuosia ollut noin 33 miljardia euroa. Jos tämä rahasumma jaettaisiin tasan kaikille suomalaisille, kuinka paljon kukin saisi? Suomen väkiluku on noin viisi miljoonaa. (yo kevät 2002)

**156.**

Maan ja Kuun välinen keskimääräinen etäisyys on 384 000 km. Ilmaise etäisyys sopivaa etuliitettä käyttäen. (Etuliitteitä löytyy kirjan takaa taulukko-osiosta)

**157.**

Kirjoita luvut käyttäen sopivia kerrannaisyksiköiden etuliitteitä.

- a) 2360 A (ampeeri, sähkövirran yksikkö)
- b) 756 000 nm
- c) 3 458 000 000 mm
- d) 0,000 78 km
- e) 0,000 0045 Mm



## 8. Potensseja laskimella

Vaikka käytössäsi olisi laskin, on potenssien laskusäännöt hallittava. Jos potenssi on liian suuri laskimen käsiteltäväksi, on se osattava muuttaa sellaiseen muotoon, josta laskin selviää. Lisäksi laskimen näytön tulosteet on osattava tulkita oikein. Koska laskimia on niin monenlaisia, on käyttöohjeet syytä säilyttää myös myöhempiä toimintoja varten.

### Esimerkki 1.

Lasketaan laskimella luvun  $2^{60}$  likiarvo. Montako numeroa luvussa  $2^{60}$  on?

Näppäilemällä laskimeen 

2	$y^x$	6	0
---	-------	---	---

saadaan laskimesta riippuen näyttöön esimerkiksi

1,152921	18
----------	----

Luku on liian suuri mahtuakseen kokonaan näyttöön, joten laskin näyttää sen likiarvon kymmenpotenssimuodossa. Tulos tulkitaan  $2^{60} \approx 1,152921 \cdot 10^{18}$  ja tämä muutetaan normaalimuotoon seuraavasti:

$$2^{60} \approx 1,152921 \cdot 10^{18} = 1,152921 \cdot \underbrace{1000000000000000000}_{1 \text{ ja } 18 \text{ nollaa}} = 1152921000000000000$$

Likiarvo on  $1,152921 \cdot 10^{18}$  ja luvussa on yhteensä 19 numeroa.

### Esimerkki 2.

Lasketaan luvun  $5^{250}$  likiarvo kahden numeron tarkkuudella. Montako numeroa luvussa  $5^{250}$  on?

Koska useimmat laskimet eivät pysty käsittelemään näin suuria potensseja, on potenssi jaettava osiin.

Sovelletaan potenssin potenssin laskusääntöä.

$$5^{250} = 5^{25 \cdot 10} = (5^{25})^{10} \approx (2,9802 \cdot 10^{17})^{10} = 2,9802^{10} \cdot (10^{17})^{10} \approx 55265,5 \cdot 10^{170}$$

Sovelletaan tulon potenssin laskusääntöä.

$$55265,5 \cdot 10^{170} \approx 5,5 \cdot 10^{174}$$

Siirretään pilkkua 4 kertaa vasemmalle, joten eksponenttiin on lisättävä 4.

Likiarvo on  $5,5 \cdot 10^{174}$  ja luvussa on 175 numeroa.

**Huom!** Muistathan, että kymmenpotenssin kerroin on välillä 1-10 oleva luku.

**Esimerkki 3.**

Lasketaan laskimella  $2,3 \cdot 10^9 + 1,6 \cdot 10^{10}$ .

Kymmenpotenssit syötetään laskimeen yleensä EXP-näppäintä käyttämällä. Näppäilemällä

laskimeen 

2	.	3	EXP	9	+	1	.	6	EXP	1	0
---	---	---	-----	---	---	---	---	---	-----	---	---

ilmestyy näyttöön 

1,83	10
------	----

 eli vastaus on  $1,83 \cdot 10^{10}$ .

## Tehtäviä

### 158.

Laske lukujen kuutiot.

- a) 13
- b) -22
- c)  $7x^4$
- d)  $15ab^9$

### 159.

Kirjoita lukujen likiarvot normaalimuodossa

- a)  $2^{35}$
- b)  $6^{15}$
- c)  $8^{18}$
- d)  $7^{30}$

### 160.

Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

- a)  $1,2^{19}$
- b)  $0,8^{19}$
- c)  $1,1^{19}$
- d)  $0,9^{19}$

### 161.

Montako numeroa luvuissa on?

- a)  $3^{51}$
- b)  $2^{42}$
- c)  $4^{33}$

### 162.

Laske lausekkeen  $(-x^3)^2$  arvo, kun

- a)  $x = 3$
- b)  $x = -1$
- c)  $x = -2$
- d)  $x = 8$

### 163.

Laske, anna vastaus kymmenpotenssimuodossa.

- a)  $2,3 \cdot 10^6 \cdot 5,8 \cdot 10^4$
- b)  $7,4 \cdot 10^5 \cdot 2,8 \cdot 10^7$
- c)  $5,28 \cdot 10^9 : 1,99 \cdot 10^{-3}$
- d)  $8,62 \cdot 10^3 : 2,42 \cdot 10^{-8}$

### 164.

Laske, anna vastaus kymmenpotenssimuodossa.

- a)  $9 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^7$
- b)  $7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^6$

- c)  $8,2 \cdot 10^{-4} - 1,45 \cdot 10^{-5}$   
d)  $5,7 \cdot 10^{-10} - 2,09 \cdot 10^{-11}$

**165.**

Laske, anna vastaus kymmenpotenssimuodossa.

- a)  $3 \cdot (5,6 \cdot 10^3 - 6,7 \cdot 10^7)$   
b)  $\frac{6,85 \cdot 10^4 \cdot 9,02 \cdot 10^{12}}{4 \cdot 10^5}$   
c)  $\frac{4 \cdot (8,2 \cdot 10^9 + 3,1 \cdot 10^4)}{9,14 \cdot 10^{-5}}$

**166.**

Laske.

- a)  $4^{3^2}$   
b)  $2^{5^2}$   
c)  $3^{2^2}$

**167.**

Laske.

- a)  $2^{3^2}$   
b)  $2^{2^3}$   
c)  $5^{3^2} - 4^{2^3}$

————— soveltavat tehtävät —————

**168.**

Anna vastaukset desimaalilukuna ja murtolukuna.

- a)  $(-5)^{-2}$   
b)  $-2^{-2}$   
c)  $-2^{-3}$

**169.**

Laske lausekkeet ja anna vastaukset kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella, kun  $a = 0,7$ ,  $b = 6,2$  ja  $c = -0,02$ .

- a)  $2a^7$   
b)  $(abc)^3$   
c)  $\left(a + \frac{c}{b}\right)^{10}$

**170.**

Jos kantaluku on 2, mikä on suurin eksponentti, jolla laskimesi antaa vastaukseksi potenssin

- a) tarkan arvon  
b) likiarvon?

**171.**

Saat ystävältäsi epäilyttävän ketjukirjeen, jossa on allekkain kuusi nimeä osoitteineen, ystäväsi nimi viimeisenä. Kirjeen mukaan sinun on lähetettävä listan ensimmäiselle henkilölle 10 €. Tämän jälkeen poistat ensimmäisen nimen listasta ja laitat oman nimesi viimeiseksi. Lopuksi lähetät kirjeen kuudelle ystäväillesi.

- Jos kukaan ei katkaise ketjukirjettäsi, niin monessako kirjeessä olet lopulta ensimmäisenä?
- Kuinka paljon voit saada rahaa?
- Miksi kymmenen nimen ketjukirje on mahdoton?

### 172.

Arkkien koot on standardoitu siten, että A0-arkin ala on  $1 \text{ m}^2$ . A1-arkin ala on puolet A0-arkin alasta. vastaavasti A2-arkin ala on puolet A1-arkin alasta jne. Laske A4-arkin ala käyttäen negatiivista eksponenttia.

\_\_\_\_\_ vaativat tehtävät \_\_\_\_\_

### 173.

Määritä potenssin  $4^{200}$  likiarvo kahden numeron tarkkuudella. Montako numeroa kyseisessä luvussa on?

### 174.

Määritä potenssin  $3^{300}$  likiarvo kahden numeron tarkkuudella. Montako numeroa luvussa  $5^{250}$  on?

### 175.

Hehkulampun palaminen tarkoittaa itse asiassa elektronien virtaa ohuessa metallilangassa. Teholtaan 100 W –hehkulampussa kulkee keskimäärin 6 000 000 000 000 000 elektronia joka sekunti. Montako elektronia hehkulampussa virtaa vuorokauden aikana? Ilmoita vastaus kymmenpotenssimuodossa.

### 176.

Minä vuonna täyttää 1983 syntynyt henkilö yhden gigasekunnin ( $=10^9$  sekuntia)? Laskussa ei tarvitse ottaa huomioon karkausvuosia. (yo kevät 2002)

### 177.

Shakkipeli keksittiin noin 2500 vuotta sitten Intiassa. Tarinan mukaan kuningas ihastui peliin niin paljon, että lupasi keksijälle palkinnoksi mitä tahansa. Vaatimattomana keksijä esitti toiveensa: Hän pyysi ensimmäiselle shakkipelin ruudulle yhden vehnänyyvän, toiselle kaksi, kolmannelle neljä, neljännelle kahdeksan jne. 64 ruudulle saakka.

- Montako jyvää oli shakkilaudan viimeisellä ruudulla?
- Yhden vehnänyyvän massa on noin 0,031 g. Mikä oli viimeisellä ruudulla olevan vehnämäärän massa?
- Vehnää tuotetaan koko maailmassa noin  $6,0 \cdot 10^8$  tonnia. Monenko vuoden tuotanto oli viimeisellä ruudulla?

## Lukujärjestelmien kehittyminen

Olisi hankalaa jatkaa laskemista loputtomasti antamalla jokaiselle uudelle luvulle uusi nimi, niinpä jokin tietty lukumäärä otetaan ns. kokoavaksi yksiköksi. Tämä idea on perustana kaikille lukujärjestelmille. Kokoavan yksikön suuruutta kutsutaan lukujärjestelmän kantaluvuksi. Ensimmäinen laskemisessa apuna käytetty väline lienee ollut sormemme. Tästä syystä käyttämämme lukujärjestelmän kantalukuna on kymmenen. Muitakin lukujärjestelmiä on ollut ja on edelleen käytössä, vaikka kymmenjärjestelmä onkin ylivoimainen muihin lukujärjestelmiin verrattuna. Kymmenjärjestelmässä laskutoimitukset ovat yksinkertaisia ja desimaalilukuja voidaan käsitellä samoin kuin muitakin lukuja. Yleisimmät kantaluvut ovat olleet viiden monikertoja tai näiden yhdistelmiä. Yhteys sormiin ja varpaisiin on selvä. Esimerkiksi luku kaksikymmentä voidaan ilmoittaa ”sormet ja varpaat”.

Useat Australian itäosien heimot ja Afrikan bushmannit käyttävät edelleenkin puhdasta kaksijärjestelmää, jossa lukumääriä lasketaan käyttämällä vain lukuja 1 ja 2 tarkoittavia sanoja. Kahta suurempia lukuja tarkoittavat sanat muodostetaan yhdistelemällä, esimerkiksi luku viisi esitetään muodossa ”kaksi-kaksi-yksi”. Kaksijärjestelmä on hyvin epäkäytännöllinen suurilla luvulla ilmaistaessa.

Tietokoneissa käytettyä binäärijärjestelmää sanotaan myös kaksijärjestelmäksi, mutta se poikkeaa olennaisesti edellä mainitusta. Binäärijärjestelmä perustuu paikkamerkintään ja se on vastaavanlainen kymmenkantaisen paikkajärjestelmämme kanssa, jossa numeron paikka luvussa ilmaisee, mitä lukuyksikköä numero tarkoittaa. Binäärijärjestelmässä kantaluvun 10 sijasta käytetään kantalukua 2. Ei ole todisteita siitä, että binääristä laskutapaa olisi käytetty jossakin kielessä.

Eräs mielenkiintoinen lukujärjestelmä on 60- eli seksagesimaalijärjestelmä, jonka kehittivät Mesopotamian sumerit noin 3000 eKr. On esitetty erilaisia teorioita sille, miksi juuri luku 60 oli niin tärkeä. Erään selityksen mukaan se valittiin helpottamaan jakolaskuja, koska 60 on jaollinen hyvin monella luvulla. Vaikka luku 60 kantalukuna tuntuukin omituiselta, vaikuttaa se edelleen meidänkin mittaajjärjestelmässämme kulmayksiköissä, minuuteissa ja tunneissa.

Sormilla ja varpailla laskettaessa laskutoimituksista ei jäänyt muistiinpanoja, niinpä tuli tarpeen kehittää tapoja lukujen merkitsemiseksi. Lukuja esitettiin solmujen ja puun- tai luunpalasille kaiverrettujen lovien avulla. Lisäksi käytettiin myös erityisiä symboleja, joita kaiverrettiin kiveen tai puuhun tai kirjoitettiin saveen.

## 9. Lukujärjestelmät\*

Voivatko luvut 110101 ja 53 olla yhtä suuria? Tietenkään eivät, jos molemmat tulkitaan normaalisti käytettävän kymmenjärjestelmän luvuiksi. Tilanne on kuitenkin toinen, jos luvut edustavatkin eri lukujärjestelmiä. Lukujärjestelmät nimetään niiden *kantaluvun* mukaan. Kantaluku myös määrää, minkälaisista numeroista kyseisen lukujärjestelmän luvut voidaan muodostaa.

Kantaluku kertoo mitä numeroita lukujärjestelmässä on.

Jos järjestelmän *kantalukuna* on luonnollinen luku  $n$ , voi siinä esiintyä numerot 0, 1, 2, 3, ...,  $n-1$ .

*Kymmen-* eli *desimaalijärjestelmä* on yleisin lukujärjestelmä. Järjestelmän kantalukuna on 10 ja siinä esiintyvät numerot 0...9. Kymmenjärjestelmässä jokainen luku voidaan kirjoittaa kymmenpotenssin avulla. Kymmenjärjestelmää merkitään laskimissa lyhenteellä DEC.

### Esimerkki 1.

Luku 374 voidaan kirjoittaa muodossa

$$3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 4 \cdot 1 \quad \text{eli} \quad 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

*Binääri-* eli *kaksijärjestelmä* (BIN) on yleisesti käytössä tietotekniikassa. Tietokoneet pystyvät käsittelemään vain kahta eri tasoa: jännitteetöntä tai jännitteellistä tilaa, joita voidaan kuvata numeroilla 0 ja 1. Binäärijärjestelmän kantalukuna on 2 ja sen ainoat numerot ovat 0 ja 1. Binäärijärjestelmässä jokainen luku voidaan esittää luvun 2 potenssina. Nollan tai ykkösen paikka kertoo kuinka suuri luku on kyseessä.

<b>potenssimuoto</b>	$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$
<b>lukuarvo</b>	1	2	4	8	16	32	64	128

Alaindeksit luvuissa

Käytetty lukujärjestelmä voidaan ilmaista alaindeksillä:  
 $101_2$  (binääriluku) tai  $5_{10}$  (kymmenjärjestelmän luku).

**Huom!** Koska kymmenjärjestelmä on yleisin lukujärjestelmä, ei sen luvuissa käytetä yleensä alaindeksiä.

### Esimerkki 2.

Muutetaan binääriluku 101101 kymmenjärjestelmän luvuksi.

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 32 + 8 + 4 + 1 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Vastaus:  $101101_2 = 45_{10}$

### Esimerkki 3.

Muutetaan kymmenjärjestelmän luku 83 binäärimuotoon.

- Otetaan ensiksi suurin sellainen kahden potenssi, joka on  $\leq 83$ .  $2^6 = 64 \leq 83$
- Vähennetään tämä muutettavasta luvusta  $83 - 64 = 19$ .
- Suurin kahden potenssi, joka on  $\leq 19$ , on  $2^4 = 16$ .
- Vähennetään tämä muutettavasta luvusta  $19 - 16 = 3$ .
- Suurin kahden potenssi, joka on  $\leq 3$ , on  $2^1 = 2$ .
- $3 - 2 = 1$ , joten viimeiseksi kahden potenssiksi tulee  $2^0 = 1$
- Potenssien  $2^6$ ,  $2^4$ ,  $2^1$  ja  $2^0$  paikoille tulee binääriesityksessä luku 1 ja niiden väliin jääville paikoille tulee nolla.
- Binääriluku on 1010011

Vastaus:  $83_{10} = 1010011_2$



## Tehtäviä

### 178.

Laske lausekkeen arvo.

- a)  $4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2$
- b)  $5 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^3 + 10^2 + 3$
- c)  $2 \cdot 10^7 + 9 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 10^3$
- d)  $10^6 + 10^4 + 6 \cdot 10^2 + 1$

### 179.

Esitä luvut kymmenpotenssilausekkeena.

- a) 4593
- b) 600850
- c) 4011009
- d) 50100601

### 180.

Luettele numerot, jotka ovat käytössä

- a) viisijärjestelmässä
- b) seitsemänjärjestelmässä.

### 181.

Mikä lukujärjestelmä on kyseessä, jos siinä voi esiintyä ainoastaan numerot 0, 1, 2 ja 3?

### 182.

Voiko luku 351 olla viisijärjestelmän luku? Perustele.

### 183.

Jatka seuraavia lauseita

- a) Kymmenjärjestelmää sanotaan myös...
- b) Binääriluvussa voi esiintyä numerot...

### 184.

Mikä on

- a) pienin viisinumeroinen binääriluku
- b) suurin kolminumeroinen binääriluku
- c) suurin kahdeksannumeroinen binääriluku?

### 185.

Luettele kymmenjärjestelmän luvut 0 - 10 binäärilukuina.

### 186.

Esitä binäärimuodossa kymmenjärjestelmän luvut

- a) 5
- b) 9
- c) 14
- d) 23

### 187.

Esitä kymmenjärjestelmämuodossa binääriluvut

- a) 10
- b) 100
- c) 1010
- d) 10001

**188.**

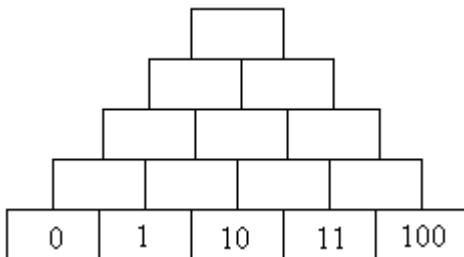
Ilmoita binääriluvut kymmenjärjestelmämuodossa.

- a) 1111
- b) 10011
- c) 11011
- d) 100001

———— soveltavat tehtävät —————

**189.**

Jäljennä kuvio vihkoosi. Laske sitten vierekkäisten binäärijärjestelmän lukujen summa ja merkitse se niiden yläpuolella olevaan ruutuun.



**190.**

Muunna luvut binäärijärjestelmästä kymmenjärjestelmään.

- a) 11110
- b) 11100000

**191.**

Ilmoita binäärilukuna

- a) oma ikäsi
- b) luokkasi oppilaiden määrä.

**192.**

Laske ja ilmoita vastaus kymmenjärjestelmässä

- a)  $12_{10} + 1_2$
- b)  $100_{10} + 100_2$
- c)  $111_2 + 1001_2 + 11_2$

**193.**

Internetiin liitetyt tietokoneet erotetaan toisistaan IP-osoitteiden perusteella. Jokaisella Internetiin liitetyllä koneella on oma yksilöllinen IP-osoitteensa. Esitä tietokoneen IP-osoitteet kymmenjärjestelmässä.

- a) 10001010.11001011.00101100.00111101
- b) 11101000.01101010.00101001.00001001

**194.**

Muuta IP-osoitteet binäärimuotoon.

- a) 128.10.2.30
- b) 201.45.87.129

————— vaativat tehtävät —————

**195.**

Onko lasku laskettu oikein?

- a)  $10_{10} + 10_{10} = 100_{10}$
- b)  $10_2 + 11_2 = 101_2$
- c)  $10_{10} + 10_2 = 12_{10}$
- d)  $100_2 + 101_2 = 10_{10}$

**196.**

Ranskassa on käytetty kymmenjärjestelmän sijasta 20-järjestelmää. Nykyisin Ranska on siirtynyt kymmenjärjestelmän käyttöön, mutta lukujen nimissä on jäänteitä 20-järjestelmän käytöstä.

<b>luku</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>nimitys</b>	un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf	dix
<b>luku</b>	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
<b>nimitys</b>	onze	douze	treize	quatorze	quinze	seize	dix-sept	dix-huit	dix-neuf	vingt

Kirjoita kymmenjärjestelmän luvut ranskan lukusanalla.

- a) 28
- b) 83
- c) 97

**197.**

Sano jokin luku ranskaksi ja pyydä vierustoveriasi muuttamaan se kymmenjärjestelmän luvuksi.

**198.**

Oktaaliluku eli kahdeksanjärjestelmässä kantalukuna on 8 ja siinä esiintyvät numerot 0...7. Ilmoita

- a) oktaaliluku 432 kymmenjärjestelmässä,
- b) kymmenjärjestelmän luku 100 oktaalilukuna,
- c) oma ikäsi oktaalilukuna.

**199.**

Binaarilukujen eli kaksijärjestelmän yhteenlaskusäännöt ovat

$$0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=10.$$

Mitkä ovat vastaavat kertolaskusäännöt? Laske binaarijärjestelmässä yhteen- ja kertolaskusääntöjen avulla  $110+1011$  ja  $11 \cdot 101$ . (Laske allekkain.) (yo kevät 2000)

**200.**

Lausu 5-järjestelmän luku 20314 10-järjestelmässä. (yo syksy 1994)

## 10. Lausekkeita

Suomessa lämpötilat ilmoitetaan celsiusasteina, mutta esimerkiksi USA:ssa lämpötilojen yhteydessä käytetään fahrenheitasteita. Eri lämpötila-asteikkojen välillä vallitsee tietty yhteys, joka voidaan ilmoittaa matemaattisena lausekkeena. Celsiusasteet voidaan muuttaa fahrenheitasteiksi lausekkeen

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

avulla, missä F on lämpötila fahrenheitasteina ja C lämpötila celsiusasteina.

Fahrenheitasteiden lauseketta voidaan käyttää yhä uudestaan sijoittamalla C:n paikalle eri lämpötiloja. Tämä on esimerkki *muuttujalausekkeesta*. Kirjain C edustaa *muuttujaa*, joka voi saada eri arvoja. Muuttujalausekkeissa kertomerkki jätetään merkitsemättä luvun ja muuttujan tulosta tai useampien muuttujien tulossa. Kertomerkki on ehdottomasti muistettava merkitä, kun muuttujan paikalle sijoitetaan jokin lukuarvo. Lisäksi, jos muuttujan arvo on negatiivinen, on se sijoitettava sulkeissa. Kahta laskutoimitusmerkkiä ei voi esiintyä peräkkäin ilman sulkeita.

### Esimerkki 1.

Lasketaan, mitä fahrenheitasteikoinen lämpötilamittari näyttää, jos lämpötila celsiusasteina on a) 5 °C, b) -15 °C?

a) Sijoitetaan luku 5 muuttujan C paikalle ja lasketaan lausekkeen arvo.

$$F = \frac{9}{5} \cdot 5 + 32 = \frac{9 \cdot 5}{5} + 32 = 9 + 32 = 41$$

↑ Muista sijoitusvaiheessa merkitä kertomerkki.

b) Sijoitetaan luku -15 muuttujan C paikalle ja lasketaan lausekkeen arvo.

$$F = \frac{9}{5} \cdot (-15) + 32 = -\frac{9 \cdot 15}{5} + 32 = -27 + 32 = 5$$

↑ Muista kertomerkki ja sulkeet, koska luku on negatiivinen.

Vastaus: 5 °C on fahrenheitasteina 41 °F ja -15 °C on fahrenheitasteina 5 °F.

### Tyypillisimmät muuttujan arvon sijoitusvirheet

- Sijoitetaan lausekkeeseen  $2xy$  arvot  $x = 3$  ja  $y = 4$ .

$$~~234~~$$

Väärin! Kertomerkit unohtui!

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Oikein

- Sijoitetaan lausekkeeseen  $2xy$  arvot  $x = -2$  ja  $y = -5$ .

$$~~2-2-5~~$$

Väärin! Kertomerkit unohtui!

$$~~2 \cdot -2 \cdot -5~~$$

Väärin! Sulkeet unohtui!

$$2 \cdot (-2) \cdot (-5) = 40$$

Oikein

Kirjaimilla laskeminen voi aluksi tuntua kummalliselta, mutta niiden avulla tosielämän ilmiöistä voidaan tehdä matemaattisia malleja. Yleensä matemaattiset mallit ovat niin monimutkaisia, ettei niiden kuvaamiseen riitä yksi muuttuja. Esimerkiksi maapallon väestönkasvumallissa ovat muuttujina  $A$  = väkiluku alussa,  $t$  = aika vuosina ja  $k$  = kasvukerroin. Väkiluku  $V$ , kun on kulunut  $t$  vuotta on

$$V = Ak^t$$

Kasvukertoimeen  $k$  vaikuttavat monet tekijät, kuten taudit, sodat ja nälänhätä. Siksi sen arvioiminen etukäteen on hankalaa. Tiedetään kuitenkin että maapallon väestönkasvu on hidastumassa, 1960-luvulla kasvukerroin oli 1,02 (tämä tarkoittaa että väestö lisääntyi 2 % vuodessa) ja vuoden 1990 lopussa se oli 1,015. On ennustettu, että vuoteen 2015 mennessä kasvukerroin laskee lukuun 1,01.

### Esimerkki 2.

Lasketaan arvio maapallon väkiluvulle 20 vuoden kuluttua, kun tällä hetkellä se on 6,7 miljardia (vuonna 2008). Lasketaan arvio käyttämällä ensin kasvukerrointa 1,015 ja sitten kasvukerrointa 1,01.

Listataan kaikki tehtävässä annetut muuttujat:

$$A = 6,7 \text{ miljardia}$$

$$k = 1,015$$

$$t = 20 \text{ vuotta}$$

Sijoitetaan muuttujat lausekkeeseen ja lasketaan lausekkeen arvo:

$$V = Ak^t = 6,7 \cdot 1,015^{20} \approx 9,0 \text{ miljardia}$$

Lasketaan toinen arvio käyttämällä kasvukerrointa 1,01.

$$V = Ak^t = 6,7 \cdot 1,01^{20} \approx 8,2 \text{ miljardia}$$

Vastaus: Arvio maapallon väkiluvulle 20 vuoden kuluttua on 9,0 miljardia (kasvukerroin 1,015) tai 8,2 miljardia (kasvukerroin 1,01).

## Tehtäviä

### 201. Laskintehtävä

Muunna lämpötilat fahrenheitasteiksi.

- a) Kakku paistetaan 175 celsiusasteen lämpötilassa.
- b) Jään sulamispiste on 0 °C.
- c) Absoluuttinen nolapiste on noin −273 °C.

### 202. Laskintehtävä

Ihmisen aikaansaama kuumin lämpötila on 510 miljoonaa °C eli 30 kertaa kuumempaa kuin auringon ytimessä. Se synnyttiin 27.5.1994 Tokamak-koefuusioreaktorissa Princetonin yliopistossa (New Jersey, USA) käyttämällä deuterium-tritium-plasmasekoitusta. Paljonko lämpötila on fahrenheitasteina?

### 203. Laskintehtävä

Kun halutaan muuntaa fahrenheitasteet celsiusasteiksi, käytetään lauseketta  $C = \frac{5(F - 32)}{9}$ .

Muunna lämpötilat celsiusasteiksi.

- a) 90 °F
- b) 0 °F
- c) −18 °F

### 204.

Laske lausekkeen  $10 - 2x$  arvo, kun

- a)  $x = 1$
- b)  $x = 2$
- c)  $x = 4$
- d)  $x = -1$

### 205.

Laske lausekkeen  $3a + 3$  arvo, kun

- a)  $a = 0$
- b)  $a = 4$
- c)  $a = -2$
- d)  $a = b$

### 206. Laskintehtävä

Olet varmaan havainnut, että helteellä kuuluu paljon heinäsirkan sirtystä. Ilman lämpötilaa voikin arvioida heinäsirkan sirtymisen avulla:

$$\text{lämpötila} = \frac{\text{sirtymien lukumäärä minuutissa} + 30}{7}$$

Laske lämpötila, kun heinäsirka sirittää minuutissa

- a) 160 kertaa
- b) 100 kertaa
- c) 30 kertaa

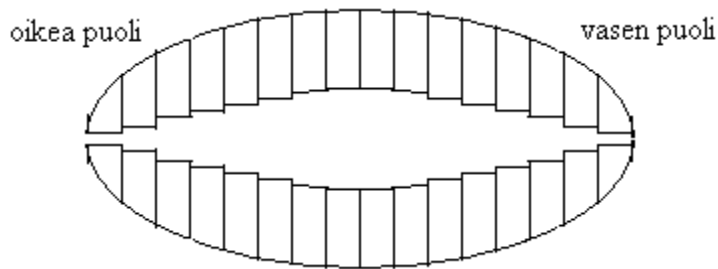
Arvioi, antaako lauseke todellisia tuloksia.

### 207.

Kullakin hampaalla on kaksinumeroinen tunnuslukunsa. Ensimmäinen numero tarkoittaa leukapuoliskoja, jotka ovat pysyväille hampaimistolle seuraavat:

- 1 = yläleuan oikea puoli (suun omistajan suunnasta katsottuna)
- 2 = yläleuan vasen puoli
- 3 = alaleuan vasen puoli
- 4 = alaleuan oikea puoli

Toinen numero hampaan paikkaa: Etuhampaat ovat ykkösiä ja viisaudenhampaat kahdeksikkoja. Kirjoita hampaistoon edestä katsottuna tunnusluvut.



### 208.

Maitohampaisto kirjoitetaan edestä katsottuna seuraavasti:

55 54 53 52 51      61 62 63 64 65  
85 84 83 82 81      71 72 73 74 75

- a) Millä numerolla merkitään yläleuan oikeaa puolta?
- b) Millä numerolla merkitään alaleuan vasempaa puolta?
- c) Montako maitohampaita on yhteensä?

### 209. Laskintehtävä

Ihmisen pituus senttimetreinä voidaan laskea kyynärluun tai sääriluun perusteella:

Naiset	Miehet
pituus = $3,88 \cdot \text{kyynärluu} + 73,50$	pituus = $3,65 \cdot \text{kyynärluu} + 80,41$
pituus = $2,53 \cdot \text{sääriluu} + 72,57$	pituus = $2,39 \cdot \text{sääriluu} + 81,69$

Mittaa oman kyynär- ja sääriluusi pituus ja laske oma pituutesi niiden perusteella. Kummalla tavalla pääsit lähemmäksi oikeaa pituuttasi? Vertaile tuloksia toisten kanssa.

### 210.

Laske lausekkeiden arvot, kun  $x$  saa arvon  $-3$ .

- a)  $x+1$
- b)  $x-6$
- c)  $-x+3$
- d)  $2x-2$

### 211.

Laske lausekkeen  $a^2 + 3b$  arvo, kun

- a)  $a = 3$  ja  $b = 3$
- b)  $a = -2$  ja  $b = 4$
- c)  $a = 4$  ja  $b = -8$
- d)  $a = -5$  ja  $b = -6$

**212.**

Kirjoita matemaattisena lausekkeena

- a) 3 enemmän kuin  $x$
- b) 5 vähemmän  $x$
- c)  $x$  lisättynä lukuun 6
- d) 4 vähennettynä luvusta  $x$
- e) 7 kerrottuna  $x$
- f)  $x$  jaettuna 2
- g) 3 jaettuna  $x$
- h)  $x$  kerrottuna itsellään

**213.**

Laske edellisen tehtävän lausekkeiden arvot, kun  $x = -1$ .

**214.**

Kynäkotelossa on  $n$  kappaletta kyniä. Montako kynää sinne jää, kun otat pois kynistä

- a) 2
- b) 5
- c)  $n$ ?

---

soveltavat tehtävät

---

**215.**

Kirjoita matemaattisena lausekkeena.

- a) Vähennä lukujen  $a$  ja  $b$  tulosta luku 9.
- b) Lisää lukujen  $a$  ja  $b$  osamäärään luku 3.
- c) Jaa lukujen  $a$  ja  $b$  summa lukujen  $a$  ja  $b$  erotuksella .
- d) Jaa lukujen 9 ja  $a$  erotus luvulla  $b$ .

**216.**

Laske edellisen tehtävän lausekkeiden arvot, kun  $a = -4$  ja  $b = 2$ .

**217.**

Yhdessä laatikossa on 24 omenaa. Paljonko omenoita on yhteensä, jos laatikoita on

- a)  $a$  kappaletta?
- b) 10 kappaletta?

**218.**

Koiria on tarhassa  $n$  kappaletta. Mitä voitaisiin kuvata lausekkeella

- a)  $n$
- b)  $2n$
- c)  $4n$  ?

**219.**

Koordinaatistoon piirrettyä suoraa voidaan kuvata lausekkeen (yhtälön) avulla. Jokaisella suoralla on omanlaisensa lauseke. Erään suoran lauseke on  $y = x + 1$ . Lausekkeessa  $x$  kuvaa suoralla olevan pisteen  $x$ -koordinaatin arvoa ja vastaavasti  $y$  kuvaa saman pisteen  $y$ -koordinaatin arvoa. Laske lausekkeen avulla  $y$ -koordinaatin arvo, kun

- a)  $x = 0$
- b)  $x = 2$



c)  $x = -3$

d) Miten voit piirtää suoran  $y = x + 1$  koordinaatistoon?

\_\_\_\_\_ vaativat tehtävät \_\_\_\_\_

**220.** Laskintehtävä

Määritä lausekkeen  $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) : (x + y)$  tarkka arvo, kun  $x = \frac{7}{3}$  ja  $y = \frac{3}{7}$ . (yo kevät 1985)

**221.**

Määritä lausekkeen  $\frac{ax}{b}$  arvo, kun  $a = \frac{2}{5}$  ja  $x$  on kolmasosa  $b$ :stä. (yo syksy 1999)



termi	kerroin	muuttujaosa
$2x^3$	2	$x^3$
$ab^2$	1	$ab^2$
$-xyz$	-1	$xyz$
-8	-8	ei ole

Muuttujaosassa voi olla useita kirjaimia.

Jos kerroin on 1, sitä ei merkitä termissä näkyviin.

Termiä, jossa ei ole muuttujaa, sanotaan *vakioksi*.

Kun termejä lasketaan yhteen, muodostuu *polynomi*. Polynomia, jossa on vain yksi termi sanotaan *monomiksi*, kaksitermistä *binomiksi* ja kolmitermistä *trinomiksi*. *Polynomin asteluvulla* tarkoitetaan sen asteluvultaan korkeimman termin astelukua.

Polynomin käsitteen ymmärtäminen on perusta yhtälöiden (matemaattisten lausekkeiden) muodostamiselle ja ratkaisemiselle.

### Esimerkki 3.

- Polynomi  $-4x^3 + 6x - 2$  on trinomi ja sen asteluku on 3.
- Polynomi  $2y$  on monomi ja sen asteluku on 1.
- Polynomi  $2x^2y - 3x$  on binomi ja sen asteluku on 2.

### Esimerkki 4.

Lasketaan trinomin  $2a^3 + 5b - 1$  arvo, kun  $a = 4$  ja  $b = -3$ .

Sijoitetaan muuttujien  $a$  ja  $b$  arvot trinomiin vastaavien muuttujien paikalle

$$2a^3 + 5b - 1 = 2 \cdot 4^3 + 5 \cdot (-3) = 2 \cdot 64 - 15 = 113.$$

## Tehtäviä

222.

Jäljennä taulukko vihkoosi ja täydennä puuttuvat tiedot.

termi	kerroin	muuttujaosa	asteluku
$7x^5$			
$xyz$			
$-5b^3$			
	-1	$x^4$	
	6	$z$	
	1	$a^7$	

223.

Onko kyseessä monomi, binomi vai trinomi?

- a)  $6x^2 - 4x + 5$
- b)  $56x$
- c)  $-4a + 9$
- d)  $x^3 - 34x$

224.

Laske binomin  $x - 5$  arvo, kun  $x$  on

- a) 0
- b) 11
- c) 2
- d) -5.

225.

Laske monomin  $-3a$  arvo, kun  $a$  on

- a) 0,1
- b)  $\frac{1}{2}$
- c)  $10^3$
- d) -4.

226.

Mikä on polynomin asteluku?

- a)  $5x^4 + 3x - 2$
- b)  $3a + 5$
- c)  $y^{32} + 8y^3$
- d)  $7a^n + 12$

227.

Laske monomin  $4a^2b$  arvo, kun

- a)  $a = 2$  ja  $b = -1$
- b)  $a = -3$  ja  $b = 2$ .

228.

Laske binomin  $2x - 3x^2$  arvo, kun

- a)  $x = 4$
- b)  $x = -1$ .

**229.**

Onko väite totta?

- a) Polynomiksi sanotaan summalauseketta, jonka yhteenlaskettavat ovat monomeja.
- b) Vakiotermi ei ole monomi.
- c) Myös pelkät monomit ovat polynomeja.
- d) On olemassa termejä, joilla ei ole kerroinosaa.
- e) On olemassa termejä, joilla ei ole muuttujaosaa.

**230.**

Nimeä polynomit termien lukumäärän mukaan.

- a)  $3a + 4b - 2c$
- b)  $-2xy$
- c)  $x + 3y^2$
- d)  $-2a - 3$

**231.**

Keksi itse jokin

- a) monomi
- b) binomi
- c) trinomi.

**232.**

Luettele polynomin  $2a^3 + 8a + 3ab - 4b^2 - 6$

- a) termit
- b) termien kertoimet
- c) vakiotermit.

**233.**

Jäljennä taulukko vihkoosi ja laske polynomin  $-2x + 4$  arvo taulukossa olevilla  $x$ :n arvoilla.

$x$	$-2x + 4$
2	
1	
0	
-1	
2	

———— soveltavat tehtävät —————

**234.**

Ota riittävä määrä seuraavista termeistä ja muodosta niistä jokin

$$ab, 4x, \frac{2c}{d}, -\frac{5y}{3x}, -23a^2, \frac{4ac}{5b}$$

- a) monomi
- b) binomi
- c) trinomi
- d) polynomi.

**235.**

Laske polynomien  $2a^2 - 6a + 5$  arvo, kun

- a)  $a = 1$
- b)  $a = 3$
- c)  $a = -2$

**236.**

Laske polynomien arvo, kun  $a = -4$  ja  $b = -3$

- a)  $a + b$
- b)  $-2ab$
- c)  $a^2 - 2ab + b^2$

**237.**

Suorakulmion piiri lasketaan kaavalla  $p = 2(a + b)$ , jossa  $a$  ja  $b$  ovat sivujen pituudet. Laske suorakulmion piiri, kun

- a)  $a = 2,3$  cm ja  $b = 4,1$  cm
- b)  $a = 57$  mm ja  $b = 23$  mm

**238.**

Mitkä ovat monomien asteluvut?

- a)  $3z$
- b)  $4x^2y$
- c)  $ab$
- d)  $12a^2b^3c$

**239.**

Mikä on vakiotermin asteluku?

**240.**

Millä muuttujan  $x$  arvolla binomi  $2x - 6$  saa arvon

- a)  $-2$
- b)  $0$
- c)  $4$
- d)  $-11$

**241.**

Laske polynomien  $-7x^3 + 12x - 8$  arvo, kun

- a)  $x = 1$
- b)  $x = 2$
- c)  $x = 0$ .

**242.**

Laske polynomien  $4y^2 - 3yz - 2z^2$  arvo, kun

- a)  $y = 1$  ja  $z = -1$
- b)  $y = 2$  ja  $z = 1$
- c)  $y = -1$  ja  $z = 0$ .

**243.**

Määritä polynomien asteluku.

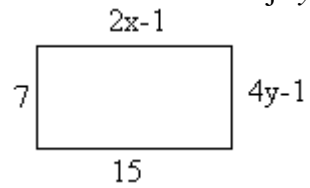
a)  $(2x^3 - 5)^2 + 3x$

b)  $(-2x)^6 + 7$

c)  $4x^2 - 2(x-1)^3$

**244.**

Mitkä on oltava  $x$ :n ja  $y$ :n arvot, jotta kuvassa olisi suorakulmio?



**245.**

Millä  $x$ :n arvolla polynomit  $2x+1$  ja  $3x-2$  saavat saman arvon?

## 12. Termien yhdistäminen ja järjestäminen

Termit ovat *samanmuotoisia*, jos niillä on täsmälleen sama kirjainosa. Myös vakiot ovat keskenään samanmuotoisia.

Vain keskenään samanmuotoiset termit voidaan yhdistää yhteen- ja vähennyslaskussa. Yhdistettäessä samanmuotoisia termejä lasketaan kertoimien summa tai erotus ja kirjainosa pysyy samana.

### Esimerkki 1.

Sievennetään lausekkeet, jos mahdollista.

- a)  $17\text{€} + 4\text{€} = 21\text{€}$
- b)  $150\text{m} - 35\text{m} = 115\text{m}$
- c)  $6x + 9x = 15x$
- d)  $18\text{ cm} + 101\text{ €}$      **Ei voida yhdistää, koska termeillä on eri kirjainosat.**
- e)  $5a - 3b$      **Ei voida yhdistää, koska termeillä on eri kirjainosat.**

### Esimerkki 2.

Sievennetään lausekkeet.

a)  $2x - 5 + x + 3 = 3x - 2$      Yhdistettävät termit otetaan etumerkkeineen.

b)  $4x + 5y + 2x - 3y - x = 5x + 2y$

c)  $2x^2 + x - 2 - 4x^2 + 1 = -2x^2 + x - 1$      Älä unohda ratkaisusta termejä, joita ei voi yhdistää mihinkään.



### Polynomin termien järjestäminen

Polynomin termit *järjestetään* tavallisesti kirjainosien mukaiseen aakkosjärjestykseen siten, että kirjainosan eksponentit pienenevät vasemmalta oikealle. Vakiotermin kirjoitetaan viimeiseksi.

#### **Esimerkki 3.**

Järjestetään polynomit.

a)  $-3a^2 + 6 + a^4 = a^4 - 3a^2 + 6$

b)  $ab + 2a^3 - 4b + b^2 = 2a^3 + ab + b^2 - 4b$

## Tehtäviä

**246.**

Sievennä.

- a)  $+(-3)$
- b)  $+(+2)$
- c)  $-(+5)$
- d)  $-(-4)$

**247.**

Laske.

- a)  $16+(-4)$
- b)  $-34-3$
- c)  $15-27$
- d)  $40-(-20)$
- e)  $19-(12-3)$

**248.**

Laske.

- a)  $5 \text{ kg} + 11 \text{ kg}$
- b)  $51 \text{ €} + 6 \text{ €}$
- c)  $18\frac{m}{s} - 4\frac{m}{s} + 1\frac{m}{s}$
- d)  $8x + 9x$

**249.**

Laske.

- a)  $3 \text{ koiraa} + 4 \text{ kissaa} + 6 \text{ koiraa}$
- b)  $6 \text{ km} - 3 \text{ min} + 7 \text{ min}$
- c)  $5 \text{ cm} + 4 \text{ €} - 2 \text{ cm} + 6 \text{ €}$
- d)  $10x + 4y + 9y - 2x$

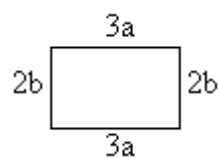
**250.**

Paljonko sinulla on rahaa jäljellä, jos ostoksille lähtiessä sinulla oli

- a)  $20 \text{ €}$  ja ostokset maksoivat  $14 \text{ €}$ ?
- b)  $30 \text{ €}$  ja ostokset maksoivat  $x \text{ €}$ ?
- c)  $x \text{ €}$  ja ostokset maksoivat  $23 \text{ €}$ ?
- d)  $4x \text{ €}$  ja ostokset maksoivat  $x \text{ €}$ ?

**251.**

Muodosta ja sievennä suorakulmion piirin lauseke.



**252.**

Yhdistä samanmuotoiset termit.

- a)  $4x + 9x + x$
- b)  $2a + 6a + 3a$
- c)  $7c + 8c + 9c$
- d)  $6x^2 + 9x^2 + 2x^2$

**253.**

Sievennä.

- a)  $2a + 3a$
- b)  $2b - 3b$
- c)  $5 + c - 2c$
- d)  $2a + b + 2$

**254.**

Sievennä.

- a)  $6x - 3x + 2x$
- b)  $7x - 9x - 4x$
- c)  $-4a - 5a + a$
- d)  $-5c + 6c - 5c$

**255.**

Järjestä polynomit.

- a)  $-4b + 6 - a + 2c$
- b)  $2x + 4 + 3z - y$
- c)  $2 - x + y$
- d)  $-7u + 2t + v + 8$

**256.**

Järjestä polynomit.

- a)  $-x + 7 + x^2$
- b)  $4y^2 - 5 + y^3 - 2y$
- c)  $u^3 - 9u + u^2 + 5u^4$
- d)  $5x + 7 - x^4$

---

soveltavat tehtävät

---

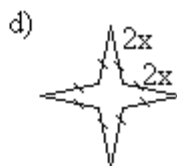
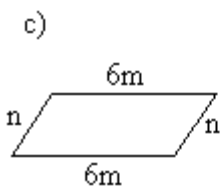
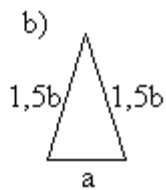
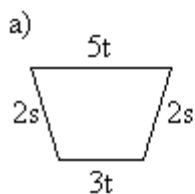
**257.**

Sievennä.

- a)  $5x + 8y + 7x + 4y$
- b)  $2a^2 - 9a - 4a + 6$
- c)  $5x - 4xy + 7y + 3x + 2xy$
- d)  $8ab - 5ab + 6ba - 4ab$

**258.**

Laske kuvioden piirit.



**259.**

Mitkä seuraavista termeistä ovat keskenään samanmuotoisia?

a)  $3a, -7c, \frac{3}{5}d, \frac{3a}{5}, 3b, -7a$

b)  $x^2y, -\frac{5xy}{2}, \frac{7x^2y}{5}, \frac{5}{2xy}, \frac{8}{3x^2y}, -4x^2y$

**260.**

Sievennä.

a)  $ab + ba$

b)  $3xy - yx$

c)  $3x^2 + x + 2x^2 - 2x$

d)  $m^2 - 2m + m^2 + m$

vaativat tehtävät

**261.**

Sievennä.

a)  $\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}x$

b)  $-\frac{x^2}{3} - 4x^2$

c)  $2\frac{1}{6}x^3 - 1\frac{1}{2}x^3 - x^3$

**262.**

Sievennä.

a)  $-3a - (-5a)$

b)  $7b - (+3a) + b - 2b$

c)  $-c + (-c) + 2b + 3a$

**263.**

Sievennä.

a)  $-x^2y + 2xy^2 + (-9x^2y) - (-xy^2)$

b)  $-4x - (-5x) - 2x^2 + (-10x^2) - 6x$

**264.**

Keksi kaksi monomia, joiden summa on

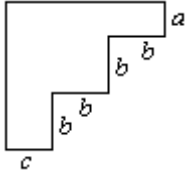
a)  $-15x$

b)  $2ab$

c)  $3a - b$

**265.**

Merkitse kirjainlausekkeena oheisen tasokuvion piiri. (pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen, kevät 1994)



### 13. Polynomien yhteen- ja vähennyslasku

Polynomien yhteen- ja vähennyslaskuissa on oltava tarkkana, kun sulkeita poistetaan. Sulkeiden edessä oleva plusmerkki ei aiheuta muutoksia termien etumerkkeihin, kun sulkeet poistetaan. Jos sulkeiden edessä on miinusmerkki, on kaikkien termien etumerkit vaihdettava vastakkaisiksi sulkeita poistettaessa. Jos et muista, miten kahden etu- ja laskumerkin yhdistelmät korvataan yhdellä merkillä, palauta ne mieleen seuraavasta taulukosta. Nämä on osattava.

merkkiyhdistelmä	korvataan merkillä	esimerkki
+ ( +	+	+ ( +2 ) = 2
- ( +	-	- ( +2 ) = -2
+ ( -	-	+ ( -2 ) = -2
- ( -	+	- ( -2 ) = 2

Kahta polynomia, joiden summa on nolla, sanotaan toistensa *vastapolynomeiksi*. Polynomien vastapolynomi saadaan vaihtamalla polynomien jokaisen termin etumerkki.

#### Esimerkki 1.

Muodostetaan ja sievennetään polynomien  $2a + 3$  ja  $-5a + 1$  summa.

Summa merkitään  $(2a + 3) + (-5a + 1)$ .

$$(2a + 3) + (-5a + 1) = 2a + 3 - 5a + 1 = -3a + 4$$

└ Sulkeiden edessä oleva plusmerkki ei aiheuta muutoksia termien etumerkkeihin, kun sulkeet poistetaan.

#### Esimerkki 2.

Muodostetaan ja sievennetään polynomien  $-6a^2 + b - 1$  vastapolynomi.

Vastapolynomi muodostetaan kuten vastaluku eli laitetaan polynomien eteen miinusmerkki.

Muista laittaa polynomi sulkeisiin, jotta miinus vaikuttaa polynomien jokaiseen termiin.

$$-(-6a^2 + b - 1) = 6a^2 - b + 1$$

└ Koska sulkeiden edessä on miinusmerkki, on sulkeita poistettaessa kaikkien termien etumerkit muutettava vastakkaisiksi.

### Esimerkki 3.

Muodostetaan ja sievennetään polynomien  $2a + 3$  ja  $-5a + 1$  erotus.

Polynomit vähennetään toisistaan lisäämällä ensimmäiseen polynomiin jälkimmäisen polynomin vastapolynomi.

$$(2a + 3) - (-5a + 1) = 2a + 3 + 5a - 1 = 7a + 2$$

└ Koska sulkeiden edessä on miinusmerkki, on sulkeita poistettaessa kaikkien termien etumerkit muutettava vastakkaisiksi.

### Esimerkki 4.

Lasketaan polynomin  $a - 3a^2 + 4 - 5a - (3 - 2a^2 - 4a)$  arvo, kun  $a = 10$ .

Ennen muuttujan arvon sijoittamista, kannattaa polynomi sieventää!

$$a - 3a^2 + 4 - 5a - (3 - 2a^2 - 4a) = a - 3a^2 + 4 - 5a - 3 + 2a^2 + 4a = -a^2 + 1$$

Sijoitetaan sievennettyyn lausekkeeseen  $-a^2 + 1$  muuttujan  $a$  paikalle 10

$$-10^2 + 1 = -100 + 1 = -99$$

## Tehtäviä

**266.**

Poista sulkeet.

- a)  $-(4x-3)$
- b)  $-(-2x-y)$
- c)  $+(y-5)$
- d)  $-(-8x+2y-4)$

**267.**

Sievennä.

- a)  $(x+3)+(x+3)$
- b)  $(2x-3)-(2x+3)$
- c)  $(5x+1)-(5x+1)$
- d)  $-(4x+6)-(4x+6)$

**268.**

Muodosta ja sievennä polynomien vastapolynomit.

- a)  $x$
- b)  $-3a$
- c)  $5x+4y$
- d)  $a-7b+2c$

**269.**

Sievennä.

- a)  $(4a+3)+(8a+5)$
- b)  $10a+(5a+4)$
- c)  $(15a+6)+(-14a+2)$
- d)  $(-a-7)+(-2a-1)$

**270.**

Sievennä.

- a)  $(8x+5)-(x+1)$
- b)  $-x-(7x+3)$
- c)  $(5x+9)-(-2x-5)$
- d)  $(-7x-3)+(-4-x)$

**271.**

Vähennä binomista  $12a^2-5b$

- a) monomi  $6b$
- b) binomi  $-3a^2+2$
- c) trinomi  $a^2-4b-8$

**272.**

Laske lausekkeen  $(2a+1)+(4a+3)$  arvo, kun

- a)  $a=1$



- b)  $a = 3$
- c)  $a = -2$

**273.**

Poista sulkeet ja sievennä.

- a)  $-(a+1)-(1-a)$
- b)  $3a+(5a+2a)-(4a+2a)$

---

soveltavat tehtävät

---

**274.**

Laske binomien  $2x - y$  ja  $y - 2x$

- a) summa
- b) erotus.

**275.**

Vähennä trinomista  $4x^2 + 6x - 7$  binomien  $-x^2 - 3x$  ja  $-2x + 4$  erotus.

**276.**

Laske edellisen tehtävän polynomin arvo, kun

- a)  $x = 2$
- b)  $x = -2$ .

**277.**

Muodosta polynomin  $-43a^5 + 7a^2 + 6b - 2$

- a) vastapolynomi
- b) vastapolynomin vastapolynomi.

**278.**

Sievennä.

- a)  $(5x^2 - 5) - (x^2 + 5x + 5)$
- b)  $(5x^2 - 5) + (x^2 + 5x + 5)$

**279.**

Poista sulkeet ja yhdistä samanmuotoiset termit.

- a)  $(5b - 4a) - (7a + 6b) + (2b + 5a)$
- b)  $(5x - 2y) - (7x + 7y) + (3x + 8y)$
- c)  $(12x - 7) + (3x - y) - (2 - x)$

**280.**

Laske lausekkeen  $(5a + b) - (-2a + 1)$  arvo, kun

- a)  $a = 1, b = 1$
- b)  $a = -2, b = 3$
- c)  $a = -3, b = -4$

**281.**

Sievennä ja laske polynomin arvo, kun  $x = -2$ .

a)  $2x^3 - 3x^2 + 4x + (-2x^3 + 4x^2 - 9x)$

b)  $7x^3 + 8x - (6x^3 - 4x^2 - x) - 4x^2$

**282.**

Mikä on puuttuva polynomi?

a)  $4x - (\quad) = -3x - 1$

b)  $x^2 - 3 + (\quad) = -10x^2 - 11$

c)  $-2x^3 - (\quad) = -7x^3 + 7x^2$

---

vaativat tehtävät

---

**283.**

Laske kahden parillisen kokonaisluvun  $2m$  ja  $2n$  neliöiden summa.

**284.**

Sievennä.

a)  $(-5x^2 - x) + \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{7}x\right)$

b)  $(-5x^2 - x) - \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{7}x\right)$

**285.**

Laske lausekkeen  $5x^2 + 2x - 5 - (-3 + 3x^2) - 2x^2$  arvo, kun

a)  $x = 1423$

b)  $x = -100$

c)  $x = \frac{4}{5}$ .

## 14. Monomin kertominen monomilla

Tarkastellaan kahden monomin  $3a^2$  ja  $5a^4$  tuloa. Molemmat termeistä muodostuvat kertoimen ja muuttujaosan tulosta, joten  $3a^2 \cdot 5a^4$  voidaan kirjoittaa muodossa

Kerrottavien paikkaa voidaan vaihtaa,  
koska tulo on riippumaton tekijöiden järjestyksestä.

$$3a^2 \cdot 5a^4 = 3 \cdot a^2 \cdot 5 \cdot a^4 = 3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a^4 = 15 \cdot a^{(2+4)} = 15a^6$$

kertoimien tulo — | — muuttujaosien tulo

### Monomin kertominen monomilla

Kerrotaan kertoimet keskenään ja muuttujaosat keskenään.

Jos monomeissa on muuttujina samoja kirjaimia, sovelletaan niiden kertolaskussa potenssien laskusääntöjä. Jos muuttujina on eri kirjaimia, jää ne vastaukseen kertolaskumuotoisena eikä niitä voida yhdistää.

#### Esimerkki 1.

Sievennetään lausekkeet.

- a)  $4 \cdot 3x = 12x$
- b)  $2 \cdot (-4y) = 2 \cdot (-4) \cdot y = -8y$
- c)  $-5x^2 \cdot (-3) = -5 \cdot (-3) \cdot x^2 = 15x^2$
- d)  $3 \cdot (-xy) = 3 \cdot (-1) \cdot xy = -3xy$

#### Esimerkki 2.

Lasketaan monomien tulot.

- a)  $2x \cdot (-3x) = 2 \cdot (-3) \cdot x \cdot x = -6x^2$
- b)  $4a \cdot 5b = 4 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 20ab$
- c)  $-x \cdot (-3y) = (-1) \cdot (-3) \cdot x \cdot y = 3xy$
- d)  $2y \cdot 4y^2 \cdot (-y^2) = 2 \cdot 4 \cdot (-1) \cdot y \cdot y^2 \cdot y^2 = -8 \cdot y^{(1+2+2)} = -8y^5$
- e)  $-5ab \cdot 2a = -5 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b = -10a^2b$

## Tehtäviä

**286.**

Laske.

- a)  $4 \cdot 5$
- b)  $-6 \cdot 7$
- c)  $8 \cdot (-9)$
- d)  $-11 \cdot (-8)$

**287.**

Sievennä.

- a)  $3 \cdot b$
- b)  $g \cdot 7$
- c)  $5 \cdot f \cdot 3 \cdot f$
- d)  $-9 \cdot e \cdot f \cdot (-2)$

**288.**

Laske.

- a)  $a^2 \cdot a^4$
- b)  $2b \cdot b^3$
- c)  $3c^2 \cdot 4c^5$
- d)  $-3d^3 \cdot 6d^4$

**289.**

Muodosta ja sievennä monomien  $3x$  ja  $-2x$

- a) summa
- b) erotus
- c) tulo.

**290.**

Laske.

- a)  $3x \cdot 2x^2$
- b)  $x \cdot 4$
- c)  $-5x \cdot 2$
- d)  $-x^2 \cdot (-4x^2)$

**291.**

Merkitse ja laske monomien tulo.

- a)  $3x$  ja  $2x$
- b)  $-6y$  ja  $y^5$
- c)  $-9x$  ja  $-1$
- d)  $y^6$  ja  $2y^2$

**292.**

Laske.

- a)  $3a \cdot 2b$
- b)  $a^2 \cdot 2b$

- c)  $2b \cdot 5a$
- d)  $2a \cdot (-2b)$

**293.**

Paljonko maksaa yhteensä

- a) 5 ruusua, kun yhden hinta on 1 €
- b)  $x$  ruusua, kun yhden hinta on 2 €
- c) 4 ruusua, kun yhden hinta on  $x$  €
- d)  $y$  ruusua, kun yhden hinta on  $x$  € ?

**294.**

Laske.

- a)  $-x \cdot (-y)$
- b)  $-3x^3 \cdot xy$
- c)  $2xy^2 \cdot 2xy^2$
- d)  $x^3y \cdot (-x^3y)$

**295.**

Sievennä.

- a)  $mn \cdot m^3n^2$
- b)  $a^2b \cdot 2ba^2$
- c)  $3st^3 \cdot 2s^2t$
- d)  $2p \cdot 3p^2 \cdot (-2p)$

---

soveltavat tehtävät

---

**296.**

Päättele puuttuva monomi.

- a)  $8x^4 \cdot \dots = 16x^5$
- b)  $-2x^4 \cdot \dots = -14x^6$
- c)  $\dots \cdot 7x^7 = -63x^7$
- d)  $\dots \cdot (-6x) = 24x^3$

**297.**

Keksi kaksi monomia, joiden tulo on

- a)  $6x^2$
- b)  $a^2bc$
- c)  $15y^3$ .

**298.**

Sievennä.

- a)  $3x \cdot 5 - 3 \cdot 3x$
- b)  $2y \cdot 6y - 3 \cdot 4y^2$
- c)  $-5x \cdot 2y + 7x \cdot (-y)$
- d)  $-y^2 + 3y \cdot 2z$

**299.**

Sievennä.

a)  $-xy \cdot 5 - 3 \cdot 3x$

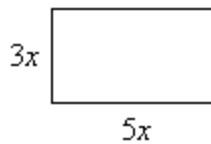
b)  $2y \cdot xy + 3x \cdot 4y^2$

c)  $-5x \cdot 2y \cdot y + 12x \cdot (-y)^2$

d)  $-y^2 + (3y)^2 \cdot 2 - 8y \cdot \left(-\frac{y}{2}\right)$

**300.**

Laske suorakulmion

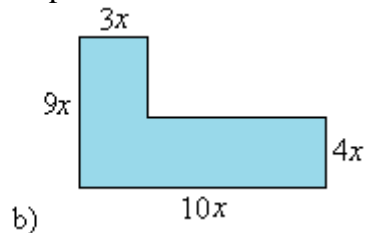
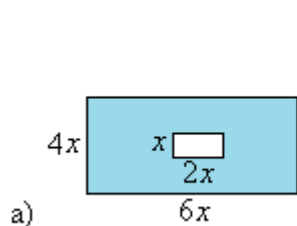


a) piiri

b) pinta-ala.

**301.**

Mikä on tummennetun alueen pinta-ala?



vaativat tehtävät

**302.**

Päättele puuttuva monomi.

a)  $-5a^4 \cdot \dots = 20a^5$

b)  $8b^{10} \cdot \dots = -16ab^{11}$

c)  $7ab \cdot \dots = 14b^2$

d)  $-5a^3 \cdot \dots = \frac{-10}{a}$

**303.**

Sievennä.

a)  $4a \cdot 3a^4 \cdot 5a^2$

b)  $-b \cdot 7b^2 \cdot 2b^3$

c)  $c^2d \cdot (-4cd) \cdot (-4c^{-2}d^{-1})$

d)  $g^{-2}h^7 \cdot 8g^3h^2 \cdot 2gh^{-1}$

**304.**

Sievennä.

a)  $\frac{3}{7}a^2 \cdot 1\frac{1}{6}a$

b)  $-\frac{7}{8}b \cdot \left(-\frac{2}{21}ab^3\right)$

c)  $3\frac{2}{5}c^2 \cdot 1\frac{5}{17}c^2$

**305.**

Sievennä.

a)  $-3x^a y^2 \cdot 4x^a y^a$

b)  $kx^{b-1}y^{2-b} \cdot (-kx^{b+1}y^b)$

## 15. Polynomin kertominen monomilla

Normaaleja laskusääntöjä noudattaen lauseke  $2(3+4)$ , joka siis tarkoittaa samaa kuin  $2 \cdot (3+4)$ , sievennetään seuraavasti:  $2(3+4) = 2 \cdot 7 = 14$ . Samaan tulokseen päädytään myös kertomalla ensiksi molemmat yhteenlaskettavat erikseen  $2(3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$ . Jos lausekkeessa on mukana muuttujia, mitkä estävät suluissa olevan summan sieventämisen, antaa jälkimmäinen tapa mahdollisuuden sulkujen poistamiseen.

### Polynomin kertominen monomilla

Polynomin jokainen termi kerrotaan monomilla erikseen.  
Tulot lasketaan yhteen etumerkkeineen.

$$a(b+c) = ab+ac$$

#### Esimerkki 1.

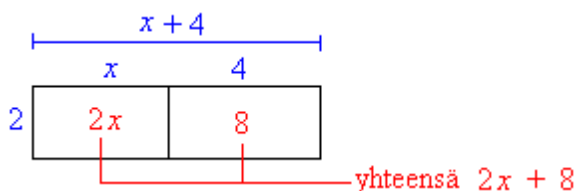
Kerrotaan polynomi monomilla.

$$3(2x-5) = 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-5) = 6x - 15$$

Molemmat sulkujen sisällä olevat termit kerrotaan erikseen ja lasketaan saadut termit yhteen.

#### Esimerkki 2.

Lasketaan  $2(x+4)$ . Päätelyn apuna voidaan käyttää suorakulmiota, jonka sivujen pituudet ovat 2 ja  $(x+4)$ . Vastaus saadaan suorakulmion pinta-alasta.



Vastaus:  $2x + 8$



### Esimerkki 3.

Kerrotaan polynomit monomilla.

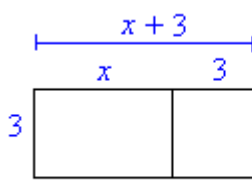
$$\text{a) } a(-3a + 4) = a \cdot (-3a) + a \cdot 4 = -3a^2 + 4a$$

$$\text{b) } 3y^2(y - 2) = 3y^2 \cdot y + 3y^2 \cdot (-2) = 3y^3 - 6y^2$$

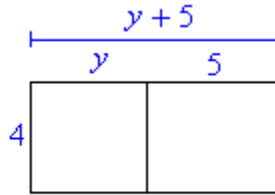
## Tehtäviä

306.

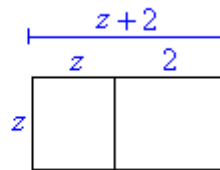
Sievennä käyttäen apuna suorakulmion pinta-alamallia.



a)  $3(x + 3) =$



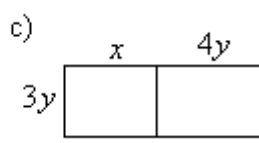
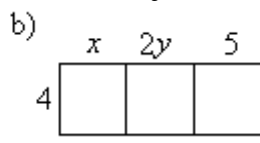
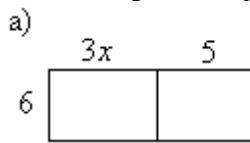
b)  $4(y + 5) =$



c)  $z(z + 2) =$

307.

Muodosta pinta-alojen lausekkeet ja sievennä ne.



308.

Laske edellisen tehtävän pinta-alojen arvot, kun  $x = 2$  ja  $y = 3$ .

309.

Laske.

- a)  $3x(x+1)$
- b)  $2(3x-4y)$
- c)  $-2y(1+y)$
- d)  $-2(-5x+y)$

310.

Poista sulkeet.

- a)  $3(2m+4)$
- b)  $5(-s-3)$
- c)  $4(3t-v)$
- d)  $-5(2-5b)$

311.

Poista sulkeet.

- a)  $x(x+4)$
- b)  $x(2-3x)$
- c)  $3x(x-6)$
- d)  $(5x-7) \cdot 2x$

312.

Laske edellisen tehtävän lausekkeiden arvot, kun  $x = -2$ .

313.

Poista sulkeet ja sievennä.

- a)  $3(x-1)+3$
- b)  $4(x-2y)-y$
- c)  $x^2+2x(x-3)$
- d)  $-5(x-y)+2y$

**314.**

Poista sulkeet ja sievennä.

- a)  $5x-3(x-2)$
- b)  $2x-x(1+x)$
- c)  $4x-2(3+x)$
- d)  $5x-3(x-2)$

**315.**

Poista sulkeet ja sievennä.

- a)  $5(t+3)-5t$
- b)  $r(r-4)+r^2$
- c)  $-8(r-s)+3s$
- d)  $-2w(4-7w)+6w^2$

---

soveltavat tehtävät

---

**316.**

Poista sulkeet ja sievennä.

- a)  $2(x+1)+3(x+2)$
- b)  $x(x+1)+2(x+3)$
- c)  $-(x-4)+3(-x+1)$
- d)  $3x(x-2)+5(x^2-x)$

**317.**

Poista sulkeet ja sievennä.

- a)  $8(2e-1)-4(e-2)$
- b)  $f(3f+2)+2f(3-f)$
- c)  $u(u-2)-u(2u-1)$
- d)  $-5g(6-2g)-3(g^2-g)$

**318.**

Täydennä.

- a)  $2x+2y=2(\dots+\dots)$
- b)  $6x-3y=3(\dots-\dots)$
- c)  $6x-8y=2(\dots-\dots)$
- d)  $x^2-3x=x(\dots-\dots)$

**319.**

Päätele puuttuva monomi.

- a)  $(\quad)(2x-3)=6x^2-9x$

- b)  $(\quad)(-y+1) = -2y^2 + 2y$   
 c)  $(\quad)(4x^3 - 2x) = -8x^3 + 4x$

**320.**

Päättele puuttuva binomi.

- a)  $-2x(\quad) = -6x^2 + 2x$   
 b)  $3y(\quad) = (3xy - y^2)$   
 c)  $-y^2(\quad) = 2xy^2 - 3y^3$

**321.**

Aikuisen lippu taidegalleriaan maksaa  $x$  euroa, lasten lippu maksaa 2 euroa vähemmän.

- a) Kirjoita lauseke, joka kuvaa lasten lipun hintaa.  
 b) Antti vei kolme lastansa taidegalleriaan. Kuinka paljon hänen ja lasten liput tulivat kokonaisuudessaan maksamaan?

\_\_\_\_\_ **vaativat tehtävät** \_\_\_\_\_

**322.**

Laske kahden peräkkäisen kokonaisluvun  $n$  ja  $n + 1$  summan ja erotuksen tulo.

**323.**

Merkitse ja laske lausekkeet, kun  $P(x) = -3x^2$  ja  $Q(x) = 2x^4 - 4x$ .

- a)  $2 \cdot Q$   
 b)  $-P \cdot P$   
 c)  $P \cdot (-Q)$   
 d)  $P + P \cdot Q$   
 e)  $P \cdot P - Q$   
 f)  $-P \cdot Q + P$

**324.**

Millä  $x$ :n arvoilla tulo  $3x^2(x+4)$  saa negatiivisia arvoja? (yo kevät 1995)

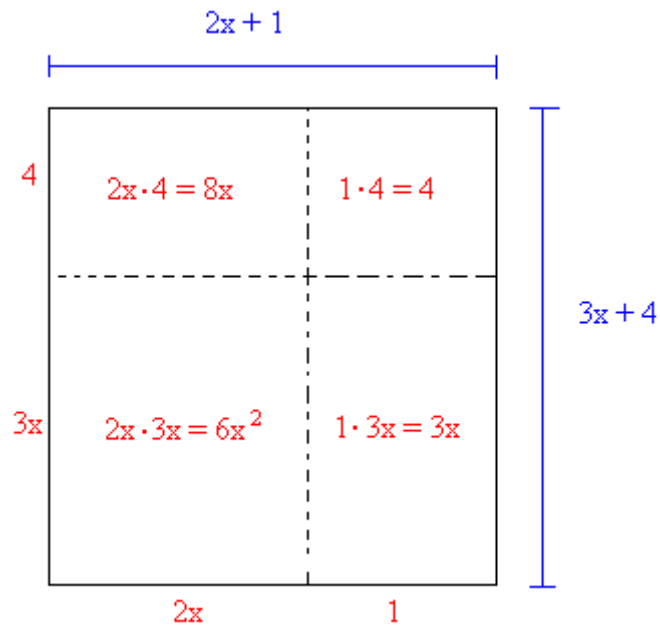
**325.**

Osoita, että kaikki kolminumeroiset luvut, joiden keskimäinen numero on yhtä suuri kuin muiden summa, ovat jaollisia yhdellätoista. Tällaisia lukuja ovat esimerkiksi 110, 385, 594 ja 990.

## 16. Polynomin kertominen polynomilla

### Esimerkki 1.

Määritetään suorakulmion pinta-ala, kun sen sivujen pituudet ovat  $2x+1$  ja  $3x+4$ .



Pinta-ala on neljän pienemmän suorakulmion alojen summa

$$A = 6x^2 + 8x + 3x + 4 = 6x^2 + 11x + 4$$

Toisaalta pinta-ala saadaan lasketuksi myös suorakulmion sivujen pituuksien tulona.

$$(2x+1) \cdot (3x+4) = \underbrace{2x \cdot 3x} + \underbrace{2x \cdot 4} + \underbrace{1 \cdot 3x} + \underbrace{1 \cdot 4} = 6x^2 + 8x + 3x + 4 = 6x^2 + 11x + 4$$

Vastaus: Suorakulmion pinta-ala on  $6x^2 + 11x + 4$ .

#### Polynomin kertominen polynomilla

Jokaisella kertojan termillä kerrotaan jokainen kerrottavan termi. Saadut tulot kirjoitetaan etumerkkeineen peräkkäin ja lasketaan yhteen.

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + dc + bd$$

**Huom!** Termit kerrotaan siis tässä järjestyksessä keskenään: ensimmäiset, uloimmat, sisimmät ja viimeiset.

Polynomien kertolaskuissa tulee helposti huolimattomuusvirheitä. Muista, että jokaiseen termiin kuuluu myös sen edessä oleva etumerkki.

### **Esimerkki 2.**

Kerrotaan binomi ja trinomi keskenään.

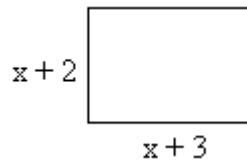
+ ja - merkit määräytyvät kertoimena olevien termien etumerkeistä.

$$\begin{aligned}
 (2x-1)(3x^2-4x+1) &= \underbrace{2x \cdot 3x^2}_{+} + \underbrace{2x \cdot (-4x)}_{+} + \underbrace{2x \cdot 1}_{+} - \underbrace{1 \cdot 3x^2}_{-} - \underbrace{1 \cdot (-4x)}_{-} - \underbrace{1 \cdot 1}_{-} \\
 &= 6x^3 - 8x + 2x - 3x^2 + 4x - 1 \\
 &= 6x^3 - 3x^2 - 2x - 1
 \end{aligned}$$

## Tehtäviä

**326.**

Laske kuvion



- a) piiri
- b) pinta-ala

**327.**

Sievennä.

- a)  $(a + 2)(a + 1)$
- b)  $(3 - b)(b + 5)$
- c)  $(c + 2)(c - 6)$

**328.**

Laske suorakulmion pinta-ala kun sen sivujen pituudet ovat

- a)  $x + 1$  ja  $x + 2$
- b)  $2x + 2$  ja  $x - 1$
- c)  $3x - 2$  ja  $2x - 1$

**329.**

Neliön sivun pituus on  $y + 6$ . Muodosta ja sievennä neliön

- a) piirin
- b) pinta-alan lauseke.

**330.**

Sievennä.

- a)  $(x + 2)(x - 2)$
- b)  $(x - 2)(x - 2)$
- c)  $(x + 2)(x + 2)$

**331.**

Sievennä.

- a)  $(x + 1)(x + 1)$
- b)  $(x + 1)(x - 1)$
- c)  $(x - 1)(x - 1)$

**332.**

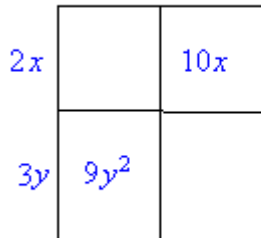
Muodosta ja sievennä binomien  $5x - 1$  ja  $3x + 4$

- a) summa
- b) erotus
- c) tulo.

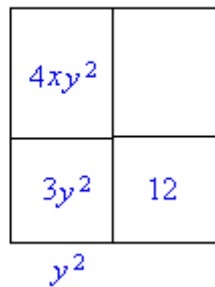
**333.**

Muodosta suorakulmioiden pinta-alojen lausekkeet.

a)



b)



**334.**

Sievennä edellisen tehtävän lausekkeet.

**335.**

Sievennä.

- a)  $2x + 3(1 - 4x)$
- b)  $(2x + 3)(1 - 4x)$
- c)  $(2x + 3)1 - 4x$

**336.**

Kerro monomien  $x^2$  ja  $2x$  summa monomien  $-5x$  ja  $3x^2$  erotuksella.

**337.**

Sievennä.

- a)  $(2x - 1)(2x - 1)$
- b)  $(2x + 1)(2x - 1)$
- c)  $(2x + 1)(2x + 1)$

**338.**

Merkitse ja sievennä lukujen  $a$  ja  $b$  summan ja erotuksen tulo.

**339.**

Sievennä.

- a)  $(2x + 5)(3x - 2)$
- b)  $2x + 5(3x - 2)$
- c)  $(2x + 5)3x - 2$

**340.**

Sievennä.

- a)  $a + 3(6 + a + b)$
- b)  $(a + 3)(6 + a + b)$
- c)  $c + d(2 + c - d)$
- d)  $(c + d)(2 + c - d)$



**341.**

Sievennä.

$$2x(x-4) - (3x+2)(2x-5)$$

**342.**

Sievennä  $t(t-1) - 2t(4+t) + (5t+2)(t-6)$ .

**343.**

Sievennä.

a)  $(a+1)^2$

b)  $(a-1)^2$

c)  $(a+b)^2$

d)  $(a-b)^2$

**344.**

Osoita, että  $(5-x)^2 = (x-5)^2$ .

**345.**

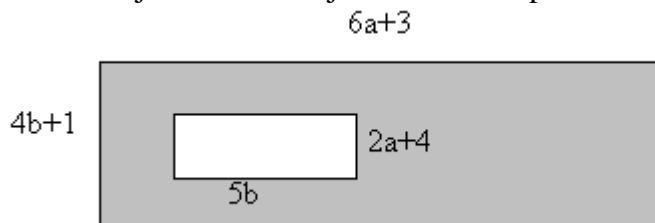
Sievennä.

a)  $2(x+m)^2$

b)  $3(x-2)^2$

**346.**

Muodosta ja sievennä varjostetun alueen pinta-alan lauseke.



**347.**

Lausu polynomina lauseke  $\left(1 - \frac{1}{A}\right)^{-1}$ , missä  $A = 1 + \frac{1}{x^2 + x}$ . (yo kevät 1987)

**348.**

Osoita, että luku  $(n+4)^2 - n^2$  on jaollinen kahdeksalla, kun  $n$  on kokonaisluku. (yo syksy 1995)

## 17. Kertaustehtäviä

### Samankantaisten potenssien tulo

**349.**

Onko potenssin arvo positiivinen vai negatiivinen?

- a)  $(-6)^3$
- b)  $(5-7)^2$
- c)  $(-9)^4$
- d)  $(-1)^{99}$

**350.**

Merkitse ja laske luvun -3

- a) viides potenssi
- b) viidennen potenssin vastaluku
- c) neliö
- d) kuutio.

**351.**

Sievennä ja ilmoita vastaus potenssimuodossa.

- a)  $5^3 \cdot 5^6$
- b)  $7^2 \cdot 7^9$
- c)  $a^6 \cdot a$
- d)  $b^8 \cdot b^4$

**352.**

Merkitse ja sievennä potenssien

- a)  $3x^4$  ja  $-x^2$
- b)  $-6x^3$  ja  $-2x$
- c)  $\frac{1}{3}x^4$  ja  $27x^5$

tulo.

**353.**

Sievennä.

- a)  $5 \cdot x \cdot 2 \cdot x$
- b)  $-x \cdot 3 \cdot y \cdot (-4)$
- c)  $-8 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot 11$

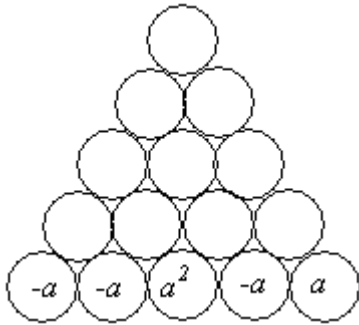
**354.**

Sievennä.

- a)  $4x^2 \cdot 2x$
- b)  $3x^4 \cdot 5x^5$
- c)  $7x \cdot 5y^2 \cdot x^8$
- d)  $y^2x \cdot 3y^5 \cdot 2x^7$

**355.**

Jäljennä kuvio vihkoosi ja merkitse vierekkäisten potenssien tulo niiden yllä olevaan ympyrään.



**356.**

Päättele mikä luku sopii  $x$ :n paikalle?

a)  $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^x = 3^{15}$

b)  $a^6 \cdot a^9 = a^x \cdot a$

c)  $b^3 \cdot b \cdot b^x = b^5 \cdot b^8$

### Samankantaisten potenssien osamäärä ja nolla eksponentti

**357.**

Laske.

a)  $\frac{2^{13}}{2^{10}}$

b)  $\frac{7^{100}}{7^{99}}$

c)  $\frac{4^{18}}{4^{16}}$

d)  $\frac{9^{50}}{9^{49}}$

**358.**

Laske.

a)  $0^0$

b)  $(-13)^0$

c)  $-9^0$

d)  $x^0 + y^0$

e)  $a^3 \cdot a^0$

**359.**

Sievennä.

a)  $\frac{4a^6}{a^4}$

b)  $\frac{-3b^8}{b^7}$

c)  $\frac{8c^9}{2c^2}$

d)  $\frac{d^{11}}{3d^7}$

**360.**

Merkitse yhtenä potenssina ja laske.

a)  $\frac{2^4 \cdot 2^6}{2^7}$

b)  $\frac{(-2)^{16}}{(-2)^9 \cdot (-2)^8}$

c)  $\frac{(-3)^{23} \cdot (-3)^{12}}{(-3)^{34} \cdot (-3)^0}$

**361.**

Merkitse ja sievennä potenssien  $8a^5$  ja  $2a^3$

a) osamäärä

b) tulo.

**362.**

Sievennä ja laske lausekkeen arvo, kun  $x = -2$ .

a)  $\frac{x^8 \cdot x^5}{x^{12}}$

b)  $\frac{x^{14}}{x^7 \cdot x^5 \cdot x^0}$

**363.**

Päättele puuttuva termi.

a)  $\frac{6a^7}{?} = 3a^2$

b)  $\frac{?}{5a} = 8a^4$

c)  $\frac{44a^{10}}{4a^8} = ?$

d)  $\frac{12a^{15}}{?} = 4a^{10}$

**364.**

Sievennä.

- a)  $\frac{4a^7 \cdot 3a^6}{6a^5 \cdot 2a}$   
 b)  $\frac{-5b^2 \cdot 4b^3}{4b \cdot 15b^5}$   
 c)  $\frac{c^0 \cdot 6c^7}{4c^{11} \cdot 15c^2}$

### Potenssin potenssi

**365.**

Sievennä.

- a)  $(6^2)^3$   
 b)  $(3^4)^2$   
 c)  $(12^3)^3$

**366.**

Sievennä.

- a)  $(5x^2)^3$   
 b)  $(3x^4)^3$   
 c)  $(ax^2)^4$   
 d)  $(-x^4)^2$

**367.**

Päättele, mikä luku sopii  $x$ :n paikalle?

- a)  $(4^2)^x = 4^6$   
 b)  $(4^x)^5 = 4^8$   
 c)  $(5^0)^x = 5^{10}$   
 d)  $(7^x)^x = 7^9$

**368.**

Sievennä .

- a)  $10^2 \cdot 10^3$   
 b)  $\frac{2^{13}}{2^{11}}$   
 c)  $\frac{1,5^{99}}{1,5^{98}}$   
 d)  $\left((x^2)^3\right)^4$

**369.**

Sievennä.

- a)  $a^2 \cdot (a^3)^5$

- b)  $(b^5)^4 \cdot (b^0)^{99}$   
 c)  $(c^6)^2 \cdot (c^7)^4$

**370.**

Sievennä.

- a)  $\frac{(x^7)^2}{x^7}$   
 b)  $\frac{(y^6)^4}{(y^{12})^0}$   
 c)  $\frac{(z^0)^{13}}{(z^{11})^2}$

**371.**

Mikä luvun

- a) 4 potenssi on yhtä suuri kuin  $16^3$   
 b) 5 potenssi on yhtä suuri kuin  $25^8$   
 c) 8 potenssi on yhtä suuri kuin  $64^9$

**372.**

Sievennä.

- a)  $x^4 \cdot (-x^3)^4$   
 b)  $-(x^3)^4 \cdot (-x^9)^0$   
 c)  $(-x^5)^3 \cdot x^6$   
 d)  $-(x^7)^2 \cdot (-x^4)^5$

### Negatiivinen eksponentti

**373.**

Merkitse murtolukuna.

- a)  $5^{-1}$   
 b)  $99^{-1}$   
 c)  $a^{-1}$   
 d)  $x^{-1}$

**374.**

Merkitse positiivisen eksponentin avulla.

- a)  $2^{-4}$   
 b)  $5^{-3}$   
 c)  $a^{-6}$   
 d)  $(ab)^{-3}$   
 e)  $4x^{-5}$

**375.**

Laske, ilmoita vastaus murtolukuna.

- a)  $5^{-2}$
- b)  $9^{-2}$
- c)  $2^{-3}$
- d)  $4^{-3}$

**376.**

Laske lukujen  $2^{-1}$  ja  $2^{-2}$

- a) summa
- b) erotus
- c) tulo
- d) osamäärä.

Anna vastaus murtolukuna.

**377.**

Kirjoita positiivisen eksponentin avulla.

- a)  $2^{-1}$
- b)  $(3x)^{-1}$
- c)  $5^{-2}$
- d)  $17^{-4}$

**378.**

Laske.

- a)  $(-7)^0$
- b)  $2^{-3}$
- c)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$
- d)  $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

**379.**

Laske.

- a)  $10^3 \cdot 10^{-2}$
- b)  $10^7 \cdot 10^4 \cdot 10^{-8}$
- c)  $10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6}$
- d)  $10^{-1} \cdot 10^0$

**380.**

Ilmoita luvun kaksi potensseina sievennetyssä muodossa.

- a)  $(4^{-2})^2$
- b)  $(8^{-1})^2$
- c)  $(16^2)^{-1}$
- d)  $(4^0)^4$

## Tulon potenssi

**381.**

Sievennä.

- a)  $(6x)^2$
- b)  $(2b)^3$
- c)  $(8a)^2$
- d)  $(5y)^3$

**382.**

Merkitse neliön pinta-ala potenssimuodossa ja sievennä lauseke, kun neliön sivun pituus on

- a) 6 m
- b) 9 m.

**383.**

Sievennä.

- a)  $(2 \cdot 3)^3$
- b)  $(2x)^3$
- c)  $(5a^3b)^2$
- d)  $\frac{(2xy)^3}{2x^2}$

**384.**

Merkitse ja sievennä potenssi, jonka

- a) kantaluku on  $3x$  ja eksponentti 2
- b) kantaluku on  $bcd$  ja eksponentti 5
- c) kantaluku on  $-4a$  ja eksponentti 2
- d) kantaluku on  $5x^2y^7$  ja eksponentti 3.

**385.**

Minkä lausekkeen kuutio on

- a)  $8a^3$
- b)  $-125a^3$
- c)  $0,008x^3y^3$
- d)  $64a^3b^3$
- e)  $27a^6$ ?

**386.**

Päättele puuttuva kantaluku.

- a)  $( \quad )^2 = 4b^2$
- b)  $( \quad )^3 = -0,125c^3$
- c)  $( \quad )^4 = -16x^4$
- d)  $( \quad )^4 = 16x^8$



**387.**

Merkitse yhtenä potenssina.

- a)  $9 \cdot a^2$
- b)  $64 \cdot b^3$
- c)  $81 \cdot a^2 \cdot b^2$
- d)  $-125 \cdot c^3$

**388.**

Sievennä.

- a)  $(4x)^3$
- b)  $2^6 \cdot 5^6$
- c)  $(2a^3)^2$
- d)  $(3b^2c^7)^3$

### Osamäärän potenssi

**389.**

Mikä on eksponentin 4 kantaluku?

- a)  $\left(-\frac{5}{6}\right)^4$
- b)  $\frac{2^4}{3^3}$
- c)  $-2\frac{1^4}{4}$
- d)  $-\left(\frac{2}{5}-x\right)^4$

**390.**

Sievennä.

- a)  $\left(\frac{3}{4}\right)^2$
- b)  $\left(\frac{x}{6}\right)^2$
- c)  $\left(\frac{3x}{5}\right)^2$
- d)  $\left(\frac{2a^3 \cdot a^2}{b \cdot b^5}\right)^4$

**391.**

Sievennä.

a)  $\left(\frac{x}{y}\right)^6$

b)  $\left(\frac{a}{9}\right)^2$

c)  $\left(\frac{3}{b}\right)^0$

**392.**

Sievennä.

a)  $\left(\frac{3x}{4}\right)^2$

b)  $\left(-\frac{y}{3}\right)^2$

c)  $\left(\frac{x}{5y}\right)^2$

**393.**

Muodosta ja sievennä lukujen  $8x^3y^4$  ja  $4x^2y$  osamäärän kuutio.

**394.**

Sievennä.

a)  $\left(\frac{6a}{7}\right)^2$

b)  $\left(-\frac{b}{2}\right)^3$

c)  $\left(\frac{-2x}{7}\right)^2$

**395.**

Merkitse yhtenä potenssina.

a)  $4^6 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^6$

b)  $-\frac{25a^2}{9}$

c)  $-\frac{8x^3}{y^3}$

d)  $\frac{16a^4}{b^4}$

**396.**

Sievennä. Vastauksissa ei saa esiintyä negatiivisia eksponentteja.

a)  $\left(\frac{2a^2b}{c^2}\right)^3$

b)  $\left(\frac{3a^5b^7}{2c^{-1}}\right)^2$

c)  $\left(\frac{a^{-5}b^2}{2c^{-1}}\right)^{-2}$

### Kymmenpotenssimuoto

**397.**

Kirjoita kymmenpotenssien avulla

- a) sata
- b) tuhat
- c) miljoona

**398.**

Kirjoita normaalimuodossa ilman kymmenpotensseja.

- a)  $3 \cdot 10^6$
- b)  $2,5 \cdot 10^3$
- c)  $6 \cdot 10^{-3}$
- d)  $2,15 \cdot 10^{-6}$
- e)  $9,81 \cdot 10^{-12}$

**399.**

Kirjoita kymmenpotenssimuodossa.

- a) 2300
- b) 345 000 000
- c) 18 000
- d) 930 000

**400.**

Kirjoita kymmenpotenssimuodossa.

- a) 180
- b) 575 000
- c) 12 000
- d) 13 500 000

**401.**

Kirjoita massat kymmenen potenssin avulla.

- a) 0,005 kg
- b) 0,000 002 kg
- c) 0,000 000 000 007 kg.

**402.**

Ilmoita luvut kymmenpotenssimuodossa.

- a) 8 000 000
- b) 34 000 000
- c) 0,0007
- d) 0,00000365

**403.**

Seuraavat kymmenpotenssimuodot eivät ole oikein, korjaa ne.

- a)  $17,5 \cdot 10^4$
- b)  $103,6 \cdot 10^2$
- c)  $0,5 \cdot 10^3$
- d)  $0,62 \cdot 10^{-2}$

**404.**

Kuinka monta nollaa on luvussa  $(10^{100})^{100}$ , jos se kirjoitetaan muotoon 100...00? (yo kevät 1988)

### Potensseja laskimella

**405.**

Laske lukujen kuutiot.

- a) -9
- b) 12
- c) -30
- d) 25

**406.**

Laske ja anna vastaus kokonaislukuna tai desimaalilukuna.

- a)  $\frac{1}{2} \cdot 10^7$
- b)  $\frac{4}{5} \cdot 10^{-3}$
- c)  $4\frac{2}{3} \cdot 10^3$
- d)  $2\frac{5}{9} \cdot 10^{-2}$

**407.**

Anna vastaukset kymmenpotenssimuodossa kahden desimaalin tarkkuudella.

- a)  $8^{22}$
- b)  $-12^6$
- c)  $(-7)^{12}$
- d)  $(-0,033)^9$

**408.**

Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

- a)  $1,2^{16}$
- b)  $0,8^{16}$

- c)  $1,1^{16}$
- d)  $0,9^{16}$

**409.**

Montako numeroa luvuissa on?

- a)  $3^{49}$
- b)  $2^{38}$
- c)  $4^{35}$

**410.**

Laske.

- a)  $\frac{4 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^4}$
- b)  $\frac{4,2 \cdot 10^{-3} \cdot 5,3 \cdot 10^9}{1,8 \cdot 10^{12} \cdot 3,4 \cdot 10^{-13}}$

**411.**

Laske lausekkeet ja anna vastaukset kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella, kun  $a = 1,2$ ,  $b = -3,4$  ja  $c = -5,6$ .

- a)  $2a^7$
- b)  $(abc)^3$
- c)  $\left(a + \frac{c}{b}\right)^{10}$

**412.**

Määritä potenssin  $7^{200}$  likiarvo kahden numeron tarkkuudella. Montako numeroa kyseisessä luvussa on?

## Lausekkeita

**413.**

Laske lausekkeen  $8 - 3x$  arvo, kun

- a)  $x = 1$
- b)  $x = 2$
- c)  $x = 4$
- d)  $x = -1$

**414.**

Laske lausekkeen  $-a + 2$  arvo, kun

- a)  $a = 0$
- b)  $a = 4$
- c)  $a = -2$
- d)  $a = b$

**415.**

Jonossa on alunperin  $n$  poikaa. Montako poikaa on jonossa, jos

- a) jonoon tulee 4 poikaa lisää
- b) 6 poikaa lähtee jonosta
- c) 2 tyttöä tulee jonoon
- d)  $x$  poikaa lähtee jonosta ja  $y$  tyttöä tulee jonoon?

**416.**

Kopioi taulukot vihkoosi ja täydennä lausekkeen arvot.

a)

$x$	$-3x$
-2	
-1	
0	
1	

b)

$x$	$\frac{x}{5}$
-10	
5	
35	
125	

**417.**

Laske lausekkeen  $a^3 - 6b$  arvo, kun

- a)  $a = 2$  ja  $b = 3$
- b)  $a = -1$  ja  $b = 5$
- c)  $a = 3$  ja  $b = -4$
- d)  $a = -4$  ja  $b = -2$

**418.**

Ihmisen verenpaine vaihtelee sydämen toiminnan mukaan. Kun sydän supistuu, verenpaine on suurimmillaan. Tätä sanotaan systoliseksi paineeksi. Kun sydän laajenee, on verenpaine pienimmillään. Tätä painetta sanotaan diastoliseksi paineeksi. Verenpaineen yksikkönä käytetään elohopeamillimetriä (mmHg). Systolisen verenpaineen normaaliarvo voidaan laskea lausekkeella

$$\text{systolinen paine} = \frac{\text{henkilön ikä vuosina}}{2} + 110$$

Laske, mikä on systolisen paineen normaaliarvo

- a) ikäiselläsi
- b) 49-vuotiaalla
- c) 30-vuotiaalla
- d) 98 vuotiaalla

**419.**

Kirjoita lausekkeena: Lukujen  $-6$  ja  $x$  tulo jaetaan luvulla  $2$  ja osamäärään lisätään lukujen  $x$  ja  $3$  erotus.

**420.**

Laske edellisten tehtävän lausekkeen arvo, kun  $x = -4$ .

## Polynomi

**421.**

Jäljennä taulukko vihkoosi ja täydennä puuttuvat tiedot.

monomi	kerroin	kirjainosa
	-1	$x$
	0	$y^9$
$t^6$		
$8c^{-3}$		
	18	$k^3$
	5	$x^{-2}$

**422.**

Kirjoita polynomi, jonka termit ovat

- a)  $2x$  ja  $-6$
- b)  $7x$ ,  $2x^2$  ja  $5$
- c)  $-4x$ ,  $4$  ja  $-y$

**423.**

Montako termiä on

- a) binomissa
- b) monomissa
- c) trinomissa?

**424.**

Mikä on polynomin asteluku?

- a)  $2x^3 - x + 4$
- b)  $y - 3$
- c)  $6a^{12} + 8a^2$
- d)  $13b^m + 19$

**425.**

Mikä on polynomin  $5x^4 - 7x^2 + x - 4$

- a) neljännen
- b) toisen
- c) ensimmäisen asteen termin kerroin?

**426.**

Keksi polynomi, jonka asteluku on

- a) 1
- b) 100
- c)  $k$

**427.**

Laske polynomin  $x^3 - 2y^2 + 3c - 1$  arvo, kun

- a)  $x = 1$ ,  $y = 2$  ja  $z = 3$
- b)  $x = 2$ ,  $y = -1$  ja  $z = 4$

**428.**

Millä  $x$ :n arvolla polynomit  $3x - 1$  ja  $-x + 2$  saavat saman arvon?

## Termien yhdistäminen ja järjestäminen

**429.**

Katariina sievensi lausekkeen  $7a - a = 7$ . Hän ei ymmärrä, miksi vastaus on väärin. Korjaa hänen virheensä ja selitä mikä hänen vastauksessaan on väärin.

**430.**

Järjestä polynomit

- a)  $2c - 2 + 4a - b$
- b)  $9 + 3x^3 - x + 6x^2$

**431.**

Järjestä polynomit.

- a)  $-x + 4 + 3x^2$
- b)  $4y^2 - 4 - 2y^3 - 2y$
- c)  $u^3 - 9u + 3u^2 - u^4$
- d)  $5x + 7x^3 - x^4$

**432.**

Keksi kolme muuta termiä, jotka ovat samanmuotoisia kuin

- a)  $-\frac{2}{3}x^2$
- b)  $xy$
- c)  $4xy^7$

**433.**

Sievennä.

- a)  $5a + 3a$
- b)  $10b - 5b$
- c)  $8 + 3c - 2c$
- d)  $4a + b + a$

**434.**

Sievennä.

- a)  $5m - 3m + m$
- b)  $y - 6y - 3y$
- c)  $-3n + 6n + 1$
- d)  $-10x + 7y - 5x$

**435.**

Yhdistä samanmuotoiset termit.

- a)  $4x - 9x + x$
- b)  $2a + 6a - 2a$
- c)  $7c - 5c + 9c$
- d)  $6x^2 + 9x^2 + 2$

**436.**



Sievennä ja järjestä termit.

- a)  $2a + 3a^2 - a$
- b)  $2b - 3b + b^2$
- c)  $5 + c - 3c^2$
- d)  $2a + b + 2a$

### Polynomien yhteen- ja vähennyslasku

**437.**

Poista sulkeet.

- a)  $+(2a - 3)$
- b)  $-(4a + b)$
- c)  $-(c - b)$
- d)  $-(-7a - b + 3c)$

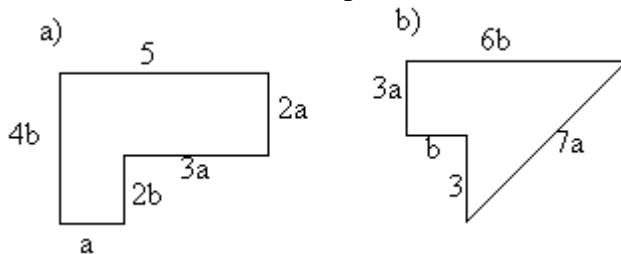
**438.**

Sievennä.

- a)  $(x+1) + (x+1)$
- b)  $(2x+3) - (2x-3)$
- c)  $(5x+y) - (5x+y)$
- d)  $-(2x+6) - (2x+6)$

**439.**

Sievennä monikulmioiden piirien lausekkeet.



**440.**

Muodosta ja sievennä polynomien vastapolynomit.

- a)  $a + 5$
- b)  $-a^2 + 6a - 2$
- c)  $8a^2 - a + 1$
- d)  $-6a^2 + 4ab - b - 1$

**441.**

Keksi kaksi binomia, joiden

- a) summa on  $6a^2 + 5a$
- b) erotus on  $2a^3 - 3a$

**442.**

Lisää monomien  $-4x$  ja  $x^2$  summaan monomien erotus. Muodosta lauseke ja sievennä se.

**443.**

Laske lausekkeen  $(3a + 2b) - (2a - 1)$  arvo, kun

- a)  $a = 1, b = 1$
- b)  $a = -2, b = 3$
- c)  $a = -3, b = -4$

**444.**

Sievennä ja laske polynomin arvo, kun  $x = -2$ .

- a)  $2x^3 - x^2 + 4x + (-2x^3 + x^2 - 9x)$
- b)  $7x^3 + 8x - (7x^3 - 4x^2 - x) - 4x^2$

### Monomin kertominen monomilla

**445.**

Sievennä.

- a)  $3 \cdot x$
- b)  $x^2 \cdot (-3)$
- c)  $5 \cdot x \cdot 3 \cdot x^4$
- d)  $-9 \cdot x^2 \cdot (-y) \cdot (-2)$

**446.**

Laske.

- a)  $a^2 \cdot a^4 \cdot (-a)$
- b)  $-2b \cdot (-5b^3)$
- c)  $3c^2 \cdot 4c^5 \cdot c$
- d)  $-3d^3 \cdot (-6d^4) \cdot d^0$

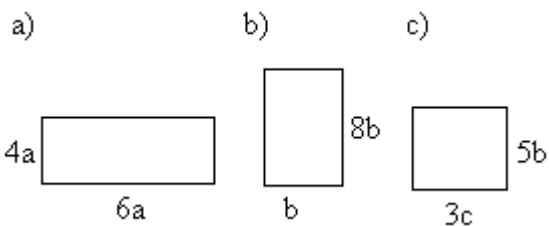
**447.**

Sievennä.

- a)  $4a \cdot 6b$
- b)  $7a \cdot 3a$
- c)  $2a \cdot 3b \cdot a$
- d)  $-a \cdot b \cdot 5a \cdot 2b$

**448.**

Sievennä suorakulmioiden pinta-alojen lausekkeet.



**449.**

Päättele puuttuva monomi.

- a)  $4a \cdot ? = 20a^2$
- b)  $3b \cdot ? = 18ab^3$
- c)  $5bc \cdot ? = -15ab^4c^5$
- d)  $-2b^6d^4 \cdot ? = 18b^7d^6$

**450.**

Keksi kaksi monomia, joiden

- a) summa on  $18a^3$
- b) erotus on  $18a^3$
- c) tulo on  $18a^3$

**451.**

Sievennä.

- a)  $3x \cdot 5 - 2 \cdot 3x$
- b)  $-2y \cdot 6y - 3 \cdot (-4y^2)$
- c)  $-5x \cdot 2y - 6x \cdot (-y)$
- d)  $-y^2 + 3y \cdot 2z - 3z$

**452.**

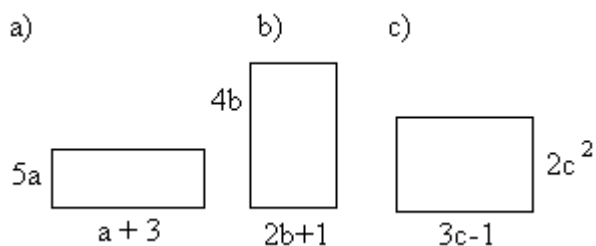
Sievennä.

- a)  $xy \cdot 5 - 3y \cdot 3x$
- b)  $2y \cdot xy - x \cdot 4y^2$
- c)  $-5x \cdot (-2y) \cdot y + 12x \cdot (-y)^2$
- d)  $-y^2 + (2y)^2 \cdot 2 - 10y \cdot \left(-\frac{y}{2}\right)$

### Polynomin kertominen monomilla

**453.**

Muodosta ja sievennä suorakulmioiden pinta-alojen lausekkeet.



**454.**

Piirrä suorakulmio, joka kuvaa lauseketta  $a(2+b) = 2a + ab$ .

**455.**

Sievennä.

- a)  $3(a+5)$
- b)  $4a(3a-1)$

- c)  $-2a(a + 3a^2 - 6)$   
d)  $a^2(4a + a^2)$

**456.**

Sievennä.

- a)  $5 + 2(x + 4)$   
b)  $4x + x(2 + x)$   
c)  $3(a - b) + 3(a - b)$   
d)  $3xy + 2x(y - x)$

**457.**

Elokuvalippu maksoi aiemmin  $a$  euroa, nyt se maksaa 2 euroa enemmän.

- a) Kirjoita lauseke, joka kuvaa elokuvalipun nykyistä hintaa.  
b) Paljonko maksaa kuusi elokuvalippua?

**458.**

Täydennä.

- a)  $4ab - 2a = 2a(\dots - \dots)$   
b)  $-ab - a = -a(\dots + \dots)$   
c)  $ab - ab^2 = ab(\dots - \dots)$   
d)  $-4a^2 - 6a = -2a(\dots + \dots)$

**459.**

Poista sulkeet ja sievennä.

- a)  $2(x + 1) - 3(x + 2)$   
b)  $-x(x - 4) + 2(x + 3)$   
c)  $-(x - 1) + 3(-x + 1)$   
d)  $3x(x - 2) - 3(x^2 - x)$

**460.**

Poista sulkeet ja sievennä.

- a)  $8(2a - 1) - 4(a - 2)$   
b)  $b(3b + 2) + 2b(3 - b)$   
c)  $c(c - 2) - c(2c - 1)$   
d)  $-5d(6 - 2d) - 3(d^2 - d)$

### Polynomin kertominen polynomilla

**461.**

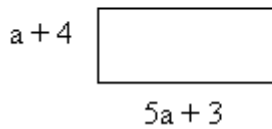
Sievennä.

- a)  $(x + 2)(x + 1)$   
b)  $(-x + 3)(x + 5)$   
c)  $(x + 2)(x - 6)$

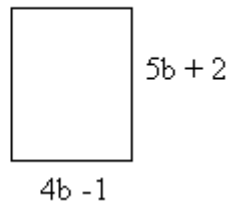
**462.**

Sievennä suorakulmioiden pinta-alojen lausekkeet.

a)



b)



**463.**

Sievennä.

- a)  $(a + 6)(2 + a)$
- b)  $(a + b)(a - b)$
- c)  $(a + b)(a - 3b)$
- d)  $(2a + b)(a + 3b)$

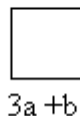
**464.**

Sievennä neliöiden pinta-alojen lausekkeet.

a)



b)



c)



**465.**

Sievennä.

- a)  $x + 3(6 + x + y)$
- b)  $(x + 3)(6 + x + y)$
- c)  $x + y(2 + x - y)$
- d)  $(x + y)(2 + x - y)$

**466.**

Keksi kaksi binomia, joiden tulo on  $x^2 + 5x + 6$ .

**467.**

Sievennä.

- a)  $(x + 2)^2$
- b)  $(x - 2)^2$
- c)  $(x + y)^2$
- d)  $-(x - y)^2$

**468.**

Pariton luku merkitään yleisesti  $2n + 1$ , missä  $n$  on kokonaisluku. Muodosta lauseke kahden peräkkäisen parittoman luvun tulosta ja sievennä se.

## Harjoituskoe I (Kappaleet 1-8)

1.

Sievennä.

a)  $a^2 \cdot a^3$

b)  $\frac{3^4}{3^5}$

c)  $(x^2)^5$

d)  $(-2)^4$

e)  $a^0 + b^0$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ )

2.

Kirjoita normaalimuodossa ilman kymmenpotensseja.

a)  $5,3 \cdot 10^6$

b)  $1,3 \cdot 10^{-4}$

c)  $6,8 \cdot 10^0$

3.

Kirjoita luvut kymmenpotenssimuodossa.

a) 3 miljoonaa

b) 5 tuhannesosa

c) 460 000

d) 0,0000084

e)  $23,5 \cdot 10^3$

f)  $0,76 \cdot 10^{-2}$

4.

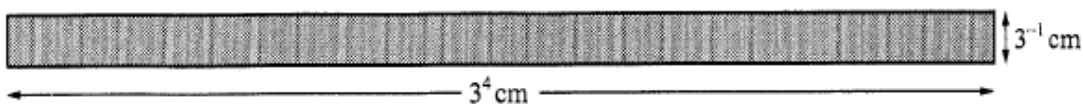
Muodosta ja sievennä potenssien  $8a^3b^5$  ja  $-4ab^2$

a) osamäärä

b) tulo.

5.

Teipinpalan pituus on  $3^4$  cm ja leveys  $3^{-1}$  cm.



a) Ilmoita teipin pituus ja leveys ilman potensseja.

b) Laske teipin pinta-ala ja ilmoita vastaus sekä luvun kolme potensseina että ilman potensseja.

6.

Sievennä. Vastauksissa saa esiintyä vain positiivisia eksponentteja.

a)  $(2a^4b^6)^3$

b)  $\left(\frac{2a^6b^{-4}}{3ab^2}\right)^2$

c)  $5a^4b \cdot 6a^{-7}b^5$

### 7. Lisätehtävä\*

Muunna kymmenjärjestelmän luku 42 binäärijärjestelmän luvuksi.

## Harjoituskokeen I ratkaisut

### 1.

a)  $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$

b)  $\frac{3^4}{3^5} = 3^{4-5} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

c)  $(x^2)^5 = x^{2 \cdot 5} = x^{10}$

d)  $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

e)  $a^0 + b^0 = 1 + 1 = 2$

### 2.

a)  $5,3 \cdot 10^6 = 5300000$  siirretään desimaalipilkkaa oikealle 6 askelta

b)  $1,3 \cdot 10^{-4} = 0,00013$  siirretään desimaalipilkkaa vasemmalle 4 askelta

c)  $6,8 \cdot 10^0 = 6,8$

### 3.

a)  $3000000 = 3 \cdot 10^6$

b)  $0,005 = 5 \cdot 10^{-3}$

c)  $460000 = 4,6 \cdot 10^5$

d)  $0,0000084 = 8,4 \cdot 10^{-6}$

e)  $23,5 \cdot 10^3 = 2,35 \cdot 10^4$

f)  $0,76 \cdot 10^{-2} = 7,6 \cdot 10^{-3}$

### 4.

Muodosta ja sievennä potenssien  $8a^3b^5$  ja  $-4ab^2$

a)  $\frac{8a^3b^5}{-4ab^2} = -2a^2b^3$

b)  $8a^3b^5 \cdot (-4ab^2) = -32a^4b^7$

### 5.

a)  $3^4 \text{ cm} = 81 \text{ cm}$ ,  $3^{-1} \text{ cm} = \frac{1}{3} \text{ cm} = 0,33 \text{ cm}$

b)  $3^4 \text{ cm} \cdot 3^{-1} \text{ cm} = 3^3 \text{ cm}^2 = 27 \text{ cm}^2$

### 6.

a)  $(2a^4b^6)^3 = 8a^{12}b^{18}$

b)  $\left(\frac{2a^6b^{-4}}{3ab^2}\right)^2 = \frac{4a^{10}b^{-12}}{9} = \frac{4a^{10}}{9b^{12}}$



c)  $5a^4b \cdot 6a^{-7}b^5 = 30a^{-2}b^6 = \frac{30b^6}{a^2}$

### 7. Lisätehtävä\*

- Otetaan ensin suurin kahden potenssi, joka on  $\leq 42$ .  $2^5 = 32 \leq 42$
- Vähennetään tämä alkuperäisestä luvusta:  $42 - 32 = 10$ .
- Suurin kahden potenssi, joka on  $\leq 10$  on  $2^3 = 8$ .
- Vähennetään tämä aiemmin saadusta erotuksesta:  $10 - 8 = 2$ .
- Suurin kahden potenssi, joka on  $\leq 2$ , on  $2^1 = 2$ .
- Potenssien  $2^5, 2^3, 2^1$  paikoille tulee binääriesityksessä ykköset ja niiden väliin jääville paikoille ja loppuun tulee nolla.  
Binääriluku on 101010.

## Harjoituskoe II (Kappaleet 10-17)

1.

Muodosta ja sievennä binomien  $2x+3$  ja  $5x-4$

- a) summa
- b) erotus
- c) tulo.

2.

Kirjoita matemaattisena lausekkeena.

- a) Lukujen 2 ja  $a$  tulon ja luvun 3 erotus.
- b) Lukujen  $a$  ja  $b$  osamäärän ja luvun 5 summa.
- c) Laske a) ja b) kohdassa muodostamiesi lausekkeiden arvot, kun  $a = 6$  ja  $b = -3$ .

3.

Tarkastellaan polynomia  $-5a + 6a^2 + 3 + 8b$ .

- a) Mikä on polynomin asteluku?
- b) Mikä on vakiotermi?
- c) Järjestä polynomi.

4.

Sievennä.

- a)  $7a^2 - 4 + 5a - a^2 + 2$
- b)  $4b^2 + 3b - (5b - 3 + b^2)$
- c)  $2a(3a^3 + 5a - b + 4)$

5.

Sievennä.

- a)  $(a-b)(3a+2b)$
- b)  $(2a+b)^2$
- c)  $(2a^2+b)(3a-b^2+2)$

6.

Aikuisen elokuvalippu maksaa  $a$  euroa, lasten lippu maksaa 2 euroa vähemmän.

- a) Kirjoita lauseke, joka kuvaa lasten lipun hintaa.
- b) Johanna vei kolme lastansa elokuviin. Kirjoita lauseke, joka kuva kuinka paljon hänen ja lasten liput tulivat yhteensä maksamaan?
- c) Jos aikuisen elokuvalipun hinta on 7 euroa, paljonko liput tulivat yhteensä maksamaan?

## Harjoituskokeen II ratkaisut

### 1.

a)  $2x + 3 + (5x - 4) = 7x - 1$

b)  $2x + 3 - (5x - 4) = 2x + 3 - 5x + 4 = -3x + 7$

c)  $(2x + 3)(5x - 4) = 2x \cdot 5x + 2x \cdot (-4) + 3 \cdot 5x + 3 \cdot (-4) = 10x^2 - 8x + 15x - 12 = 10x^2 + 7x - 12$

### 2.

a)  $2a - 3$

b)  $\frac{a}{b} + 5$

c) Sijoitetaan muuttujien arvot  $a = 6$  ja  $b = -3$  ylläoleviin lausekkeisiin:

$$2a - 3 = 2 \cdot 6 - 3 = 12 - 3 = 9$$

$$\frac{a}{b} + 5 = \frac{6}{-3} + 5 = -2 + 5 = 3$$

### 3.

Tarkastellaan polynomia  $-5a + 6a^2 + 3 + 8b$ .

a) Suurin muuttujan potenssi ilmoittaa asteluvun, joten se on 2.

b) Vakiotermi on pelkkä luku, joten se on 3.

c)  $6a^2 - 5a + 8b + 3$

### 4.

a)  $7a^2 - 4 + 5a - a^2 + 2 = 6a^2 + 5a - 2$

b)  $4b^2 + 3b - (5b - 3 + b^2) = 4b^2 + 3b - 5b + 3 - b^2 = 3b^2 - 2b + 3$

c)  $2a(3a^3 + 5a - b + 4) = 6a^4 + 10a^2 - 2ab + 8a$

### 5.

a)  $(a - b)(3a + 2b) = 3a^2 + 2ab - 3ab - 2b^2 = 3a^2 - ab - 2b^2$

b)  $(2a + b)^2 = (2a + b)(2a + b) = 4a^2 + 2ab + 2ab + b^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$

c)  $(2a^2 + b)(3a - b^2 + 2) = 6a^3 - 2a^2b^2 + 4a^2 + 3ab - b^3 + 2b = 6a^3 + 4a^2 - 2a^2b^2 + 3ab + 2b$

### 6.

a)  $a - 2$

b)  $a + 3(a - 2) = 4a - 6$

c) Sijoitetaan b) kohdan lausekkeeseen muuttujan  $a$  paikalle 7.

$$4a - 6 = 4 \cdot 7 - 6 = 22 \text{ euroa}$$

**Vastaukset:**

**1.**

- a)  $5^4$
- b)  $-9^6$
- c)  $(-8)^3$
- d)  $y^7$

**2.**

- a) 4
- b) -2
- c) 81
- d) 5

**3.**

- a) +
- b) +
- c) -
- d) +

**4.**

- a) 25
- b) 125

**5.**

- a)  $2^8$
- b)  $8^8$
- c)  $4^5$
- d)  $7^5$

**6.**

- a)  $7^6$
- b)  $5^{10}$
- c)  $4^6$
- d)  $a^{12}$

**7.**

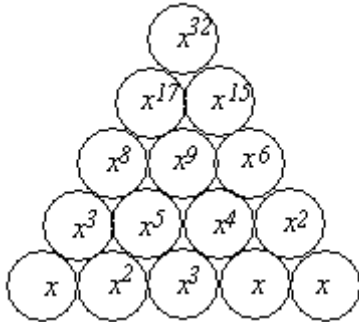
- a)  $a^9$
- b)  $b^{10}$
- c)  $c^{28}$
- d)  $d^9$

**8.**

- a)  $1^{11}$
- b)  $2^5$
- c)  $\left(\frac{1}{2}\right)^7$

d)  $10^9$

9.



10.

a)  $6x^3 \cdot x^2 = 6x^5$

b)  $3x^2 \cdot 4x = 12x^3$

c)  $x^4 \cdot 5x^4 = 5x^8$

11.

a)  $24x^2$

b)  $-8y^3$

c)  $32x^2y^2$

d)  $3z^3$

12.

a)  $(-2)^4 = 16$

b)  $-(-2)^4 = -16$

c)  $(-2)^2 = 4$

d)  $(-2)^3 = -8$

13.

a)  $x^5$

b)  $x^2y^3$

c)  $x^3y^3z^4$

14.

a)  $10a^8b^{10}$

b)  $8x^3y^6$

c)  $12a^8b^8$

d)  $x^8y^{10}$

15.

a) 6

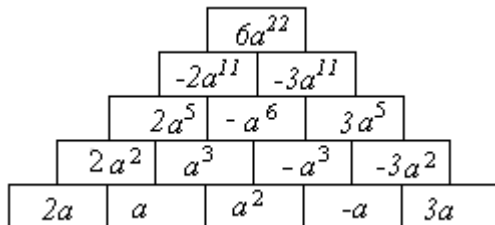
b) 8

c) 5

**16.**

- a)  $a^3b^6$
- b) ei sievene
- c)  $2c^3d^6$

**17.**



**18.**

- a)  $72a^7$
- b)  $16b^8$
- c)  $12c^{10}d^7$
- d)  $36g^6h^8$

**19.**

- a) 131072
- b) 32768

**20.**

- a) 16384
- b) 262144
- c) 1048576

**21.**

-

**22.**

- a)  $4^4$
- b)  $y^2$
- c) 1

**23.**

- a) 5
- b) 1
- c) 0
- d) 6

**24.**

- a)  $5^4$
- b)  $7^2$
- c)  $4^7$
- d) 1

**25.**

- a) 8
- b) 8
- c) 16
- d) 49

**26.**

- a) 4
- b)  $\frac{1}{9}$
- c)  $-\frac{1}{49}$
- d)  $\frac{1}{5}$

**27.**

- a) 1
- b) 2
- c)  $c^5$
- d) 1

**28.**

- a)  $y^4$
- b)  $x$
- c)  $a^{k-3}$
- d)  $b^6$

**29.**

- a) 1
- b) 1
- c) -1
- d) 3
- e)  $a^8$

**30.**

- a)  $x^3$
- b)  $x^4$
- c)  $\frac{1}{x^2}$
- d)  $x^4$

**31.**

- a)  $5a^3$
- b)  $8b^4$
- c)  $4c^7$
- d)  $2d$

**32.**

- a) 1
- b) 1
- c) 1
- d) 1

**33.**

- a)  $6x^3 \cdot x^2 = 6x^5$
- b)  $\frac{6x^3}{x^2} = 6x$

**34.**

- a) -5
- b) 1
- c)  $-\frac{1}{8}$
- d) 9

**35.**

- a) 4
- b) 9
- c) 1
- d) 0,1

**36.**

- a)  $b^3$
- b)  $c^6$
- c) d
- d) ei sievene

**37.**

- a) -0,9
- b) -8,4

**38.**

- a)  $7a^2$
- b)  $6b^2$
- c)  $\frac{c^4}{5}$
- d)  $\frac{3d}{11}$

**39.**

- a)  $\frac{3}{7}$
- b)  $\frac{4}{9}$



c)  $2\frac{1}{2}$

d)  $\frac{y}{6}$

**40.**

a)  $3a^5b^6$

b)  $3c^3d$

c)  $\frac{x^7y^9z^5}{5}$

d)  $\frac{ab^5c^7}{8}$

**41.**

a) 11

b) 3

**42.**

a)  $\frac{a^4}{5}$

b)  $\frac{b^3}{6}$

c)  $c$

**43.**

a) 3

b) 4

**44.**

a)  $5^{18}$

b)  $7^8$

c)  $6^{15}$

d)  $3^{-12}$

**45.**

a)  $10^6$

b)  $y^8$

c)  $a^9$

**46.**

a)  $5^6$

b)  $3^{12}$

c)  $7^{10}$

d) 1

**47.**

a) 5

b) 1

- c)  $a$
- d)  $b$

**48.**

- a) 1
- b) 64
- c) 64

**49.**

- a) 3
- b) 2
- c) 5
- d) 3

**50.**

- a)  $k^{40}$
- b)  $x^{27}$
- c)  $t^{99}$

**51.**

- a)  $2^6$
- b)  $2^{21}$
- c)  $2^{64}$
- d)  $2^{39}$

**52.**

- a)  $(z^8)^2 = z^{16}$
- b)  $(90^t)^2 = 90^{2t}$
- c)  $\left(\frac{k^6}{k^2}\right)^2 = k^8$
- d)  $(x^3 x^{17})^2 = x^{40}$

**53.**

- a)  $3^7$
- b)  $3^6$
- c)  $3^{15}$
- d)  $3^{11}$

**54.**

- a)  $(a^2)^3 = a^6$
- b)  $\left(\frac{y^4}{y^2}\right)^3 = (y^2)^3 = y^6$
- c)  $(10^n)^3 = 10^{3n}$

**55.**

- a)  $y^{16}$

- b)  $y^{12}$
- c)  $p^{21}$
- d)  $f^{34}$

**56.**

- a)  $a^3$
- b)  $b$
- c)  $c$

**57.**

- a) 3
- b) 3
- c) 10
- d) 10

**58.**

$$a^3b^2$$

**59.**

- a) 2
- b) 4
- c) 6
- d) 4

**60.**

- a)  $3^{14}$
- b)  $2^{10}$

**61.**

- a) 729
- b) 6561
- c) 19683
- d) 59049

**62.**

-

**63.**

- a)  $\frac{1}{3}$
- b)  $\frac{1}{7}$
- c)  $\frac{1}{100}$
- d)  $\frac{1}{97}$

- e)  $\frac{1}{1}$
- f)  $\frac{1}{h}$

**64.**

- a)  $\frac{1}{9}$
- b)  $\frac{1}{49}$
- c)  $\frac{1}{125}$
- d)  $\frac{1}{100}$

**65.**

- a)  $\frac{1}{3^5}$
- b)  $\frac{1}{6^3}$
- c)  $\frac{1}{50^5}$
- d)  $\frac{1}{a^4}$
- e)  $\frac{1}{(xy)^2}$
- f)  $\frac{5}{x^3}$

**66.**

- a)  $k^{-3}$
- b)  $k^{-5}$
- c)  $k^{-20}$
- d)  $k^{-1}$

**67.**

- a)  $\frac{1}{25}$
- b)  $\frac{1}{7}$
- c)  $\frac{1}{a^2}$
- d)  $\frac{1}{x}$

**68.**

$$\frac{1}{x^2}$$

**69.**

a)  $\frac{7}{12}$

b)  $\frac{1}{4}$

c)  $\frac{1}{45}$

d)  $\frac{4}{3}$

**70.**

Kun luku kerrotaan sen käänteisluvulla, saadaan tulokseksi yksi. Kun lukuun lisätään sen vastaluku, saadaan tulokseksi nolla.

**71.**

a)  $\frac{1}{9}$

b)  $-13$

c)  $\frac{4}{3}$

d)  $\frac{2}{5}$

**72.**

a)  $-9$

b)  $\frac{1}{13}$

c)  $-\frac{3}{4}$

d)  $-2\frac{1}{2}$

**73.**

a)  $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

b)  $2^3 = 8$

c)  $4 \cdot 5^2 = 100$

d)  $\left(\frac{1}{2^2}\right)^2 = \frac{1}{16}$

e)  $\frac{1}{a^3}$

f)  $a$

**74.**

- a) 3
- b) 1
- c) 4
- d) 49

**75.**

- a)  $\frac{17}{72}$
- b)  $-\frac{1}{72}$
- c)  $\frac{1}{72}$
- d)  $\frac{8}{9}$

**76.**

- a)  $8^{-3}$
- b)  $7^6$
- c) 1
- d)  $5^{-8}$

**77.**

- a)  $4^2 \cdot 7^7$
- b)  $3^4 \cdot 5^2$
- c)  $2^{10} \cdot 3^5$
- d)  $3^{-3} \cdot 8^5$
- e)  $\frac{2^2}{2^{-5} \cdot 2^3}$

**78.**

- a)  $\frac{1}{6}$
- b) 36
- c) 1
- d) 16

**79.**

- a) -2
- b) 2
- c) 0
- d) 2 tai -2

**80.**

- a)  $10^5$
- b)  $10^{-1}$

- c)  $10^{-5}$
- d)  $10^{-1}$

**81.**

- a) ei
- b) kyllä
- c) kyllä
- d) ei

**82.**

- a)  $n = 0$
- b)  $n = -3$

**83.**

- a)  $2^{-12}$
- b)  $2^6$
- c)  $2^{-12}$
- d)  $2^0$

**84.**

$$3^0 - 3^{-2} = 1 - \frac{1}{3^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

**85.**

- a) 100
- b) 1296
- c) 1600
- d) 27000

**86.**

- a)  $(8\text{ m})^2 = 64\text{ m}^2$
- b)  $(10\text{ m})^2 = 100\text{ m}^2$

**87.**

- a)  $(2x)^2 = 4x^2$
- b)  $(4y)^2 = 16y^2$
- c)  $(3z)^2 = 9z^2$

**88.**

- a)  $25x^2$
- b)  $8x^3$
- c)  $49a^2$
- d)  $125y^3$

**89.**

- a)  $(2x)^2 = 4x^2$

- b)  $(a^2b)^4 = a^6b^4$   
c)  $(-3a)^3 = -27a^3$

**90.**

- a)  $16a^2$   
b)  $243a^5$   
c)  $-1000$   
d)  $100x^6y^8$

**91.**

- a) 9  
b)  $25a^2$   
c)  $4a^6$   
d)  $49b^2$

**92.**

- a)  $x^2y^8z^{10}$   
b)  $-8a^3b^3$   
c)  $10000y^4$   
d)  $-0,00001c^5$

**93.**

- a) 27  
b) -64  
c)  $-125a^3$   
d)  $216b^3$   
e)  $64a^3b^{18}$

**94.**

- a)  $15^2$   
b)  $10^4$   
c)  $10^{10}$   
d)  $1^{20}$

**95.**

- a)  $x^{16}y^{14}$   
b)  $x^{18}y^{15}$   
c)  $x^{18}y^{16}$

**96.**

- a)  $32x^5$   
b)  $a^{20}$   
c)  $b^{11}$

**97.**

- a)  $a^{14}b^{16}$



- b)  $c^{23}d^{24}$   
c)  $e^{16}f^{20}$

**98.**

- a)  $a^2b^4$   
b)  $x^3y^6$   
c)  $z^2w^5$

**99.**

- a)  $(a^2)^4 = a^8$   
b)  $(3a^2b)^3 = 27a^6b^3$   
c)  $(-2x^2y^3)^5 = 32x^{10}y^{15}$

**100.**

- a)  $(3\text{ m})^3 = 27\text{ m}^3$   
b)  $(4\text{ m})^3 = 64\text{ m}^3$

**101.**

- a)  $(3x)^3 = 27x^3$   
b)  $(2a)^3 = 8a^3$   
c)  $(5y)^3 = 125y^3$

**102.**

- a) 8 m  
b)  $6xy$   
c)  $11a$

**103.**

- a)  $(2a)^2$   
b)  $-(ab)^4$   
c)  $(4ab)^5$   
d)  $(abc)^6$

**104.**

- a)  $3a$  tai  $-3a$   
b)  $2z$  tai  $-2z$   
c)  $-2x$   
d)  $xy^2z^3$  tai  $-xy^2z^3$

**105.**

- a)  $(2a)^2$   
b)  $(2b)^3$   
c)  $(5ab)^2$   
d)  $(-3c)^3$

**106.**

- a)  $m^2n^5$
- b)  $c^3e^5$
- c)  $p^2q^4$

**107.**

- a)  $3x$
- b)  $4a^2$
- c)  $0,9xy$
- d)  $2a^2b$

**108.**

- a) 2
- b) 5

**109.**

$-a^2b$

**110.**

- a)  $\frac{1}{6}$
- b) 2
- c)  $-2\frac{3}{4}$
- d)  $\frac{2}{5} + 7$
- e)

**111.**

- a)  $\frac{9}{25}$
- b)  $\frac{36}{49}$
- c)  $12\frac{1}{4}$
- d)  $1\frac{9}{16}$

**112.**

- a)  $\frac{a^5}{b^5}$
- b)  $\frac{c^2}{9}$
- c)  $\frac{64}{d^3}$

**113.**

a)  $\frac{4x^2}{25}$

b)  $\frac{y^3}{8}$

c)  $\frac{9x^2}{16}$

**114.**

$$\left(\frac{9m^3n^4}{5m^2n}\right)^2 = \frac{81m^2n^6}{25}$$

**115.**

a)  $-\frac{1}{16}$

b)  $-10000$

c)  $-0,00001$

d)  $-\frac{1}{3}$

**116.**

a)  $+$

b)  $-$

c)  $+$

d)  $-$

**117.**

a)  $16$

b)  $25$

c)  $1$

**118.**

a)  $\left(\frac{-3ab}{2c}\right)^3 = \frac{-27a^3b^3}{8c^3}$

b)  $\left(\frac{-3ab}{2c}\right)^2 = \frac{9a^2b^2}{4c^2}$

c)  $\left(\frac{-3ab}{2c}\right)^4 = \frac{81a^4b^4}{16c^4}$

**119.**

a)  $-1$

b)  $4$

**120.**

- a)  $(3a)^2$
- b)  $(2xy)^2$
- c)  $\left(\frac{ab}{9}\right)^2$
- d)  $\left(\frac{2x^2}{3y}\right)^2$

**121.**

- a)  $\left(\frac{4}{7}\right)^6$
- b)  $\left(\frac{4a}{3}\right)^2$
- c)  $\left(\frac{2a}{b}\right)^3$
- d)  $-\left(\frac{2a}{b}\right)^4$

**122.**

- a) 8
- b) 9
- c) 16
- d) 16

**123.**

- a)  $\frac{a^{19}}{b^{14}}$
- b)  $\frac{c^{27}}{b^{15}}$
- c)  $\frac{e^{28}}{f^{14}}$

**124.**

- a)  $(xy)^3$
- b)  $(-3abc)^3$
- c)  $\left(\frac{x}{10}\right)^3$
- d)  $\left(-\frac{2x^2}{5y}\right)^3$

**125.**

- a) 8

b)  $\frac{1}{49}$

**126.**

$$\frac{9b^2}{4a^8}$$

**127.**

a)  $\pm \frac{5a}{2}$

b)  $\pm \frac{b}{3}$

c)  $-\frac{3}{bc}$

d)  $\pm \frac{ab^2}{2}$

**128.**

$$\frac{2a}{3}$$

**129.**

a)  $(ab)^{-n} = a^{-n} \cdot b^{-n}$

b)  $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{(-m)+(-n)} = a^{-m-n}$

c)  $(a^{-m})^{-n} = a^{(-m)(-n)} = a^{mn}$

d)  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$

**130.**

a) 36 500

b) 7 000

c) 42 500

d) 0,415

e) 0,006

f) 0,000013

**131.**

a) 1 600 000

b) 4 500 000 000

c) 200 000 003 000 005 000 003

**132.**

a) 20000

b) 5000

c) 5000

d) -200000

**133.**

- a)  $2,34 \cdot 10^2$
- b)  $10^1$
- c)  $2,968 \cdot 10^{-1}$
- d)  $3 \cdot 10^{-2}$
- e)  $1,2 \cdot 10^0$
- f)  $2 \cdot 10^6$

**134.**

- a)  $3,6 \cdot 10^{-3}$
- b)  $1,2 \cdot 10^{-8}$
- c)  $6,98 \cdot 10^{-7}$
- d)  $9,1 \cdot 10^{-18}$

**135.**

- a) 0,0000512
- b) 0,0000000014
- c) 0,000000000000000061
- d) 0,000000000000000000000025

**136.**

- a) 0,0001
- b) 0,1
- c) 0,0000001

**137.**

- a)  $1,5 \cdot 10^{13}$
- b)  $1,4 \cdot 10^{-16}$
- c)  $-6 \cdot 10^{-6}$
- d)  $3 \cdot 10^{13}$

**138.**

- a)  $10^6$
- b)  $7,23 \cdot 10^{10}$
- c)  $5,2 \cdot 10^{-8}$
- d)  $-3 \cdot 10^8$
- e)  $-1 \cdot 10^{-9}$

**139.**

- a) 2
- b) 4
- c) 6
- d) 8
- e) 3

- f) 10
- g) 7
- h) 12

**140.**

- a)  $6 \cdot 10^9$
- b)  $4,9 \cdot 10^{18}$
- c)  $0,8 \cdot 10^{30}$
- d)  $1,02 \cdot 10^{100}$
- e)  $1,3 \cdot 10^{13}$

**141.**

- a)  $4,2 \cdot 10^{12}$
- b)  $6,8 \cdot 10^6$
- c)  $0,3 \cdot 10^9$
- d)  $1,7 \cdot 10^7$

**142.**

- a) sadasosa
- b) satatuhatta
- c) miljardi
- d) sata miljoonaa
- e) tuhannesosa
- f) biljoona

**143.**

150000 – 400000

**144.**

- a) 52315
- b) 700460
- c) 9003001
- d) 2,018
- e) 0,6002
- f) 0,00423

**145.**

- a)  $6 \cdot 10^3$
- b)  $4,3 \cdot 10^4$
- c)  $2,354 \cdot 10^7$
- d)  $1 \cdot 10^{-2}$
- e)  $2,012 \cdot 10^{-6}$

**146.**

$(4,3 - 5,6) \cdot 10^{12}$  ja  $(3 - 10) \cdot 10^9$

**147.**

- a)  $6 \cdot 10^{15}$  kg
- b)  $6,38 \cdot 10^6$  m
- c)  $5 \cdot 10^8$  km<sup>2</sup>

**148.**

- a)  $8 \cdot 10^{21}$
- b)  $9 \cdot 10^{12}$
- c)  $-10^{33}$

**149.**

- a)  $1,84 \cdot 10^7$
- b)  $1,04 \cdot 10^5$
- c)  $5 \cdot 10^{-4}$
- d)  $8,9 \cdot 10^{-4}$

**150.**

- a)  $2,9 \cdot 10^7 + 3,6 \cdot 10^8 = 0,29 \cdot 10^8 + 3,6 \cdot 10^8 = (0,29 + 3,6) \cdot 10^8 = 3,89 \cdot 10^8$
- b)  $5,6 \cdot 10^{100} - 4,2 \cdot 10^{102} = 0,056 \cdot 10^{102} - 4,2 \cdot 10^{102} = (0,056 - 4,2) \cdot 10^{102} = -4,144 \cdot 10^{102}$

**151.**

- a)  $7,04 \cdot 10^{-4} + 1,1 \cdot 10^{-6} = 0,0704 \cdot 10^{-6} + 1,1 \cdot 10^{-6} = (0,0704 + 1,1) \cdot 10^{-6} = 1,1704 \cdot 10^{-6}$
- b)  $2,11 \cdot 10^{-10} - 1,9 \cdot 10^{-8} = 2,11 \cdot 10^{-10} - 0,019 \cdot 10^{-10} = (2,11 - 0,019) \cdot 10^{-10} = 2,091 \cdot 10^{-10}$

**152.**

- a)  $2,2 \cdot 10^7 + 1,6 \cdot 10^8 = 0,22 \cdot 10^8 + 1,6 \cdot 10^8 = (0,22 + 1,6) \cdot 10^8 = 1,82 \cdot 10^8 \approx 1,8 \cdot 10^8$
- b)  $3,4 \cdot 10^{-6} - 5,1 \cdot 10^{-8} = 3,4 \cdot 10^{-6} - 0,051 \cdot 10^{-6} = (3,4 - 0,051) \cdot 10^{-6} = 3,349 \cdot 10^{-6} \approx 3,3 \cdot 10^{-6}$

**153.**

Kroisoksen rahat:  $6000 \cdot 10^{36} = 6 \cdot 10^{39}$ , tämä luku on pienempi kuin  $10^{40}$ , joten Roope on rikkaampi.

**154.**

- a)  $4,07 \cdot 10^{16}$  m
- b)  $1,670 \cdot 10^{-24}$  kg

**155.**

6600 €

**156.**

384 Mm tai 0,384 Gm

**157.**

- a) 2,36 kA
- b) 756 μm
- c) 3,458 Mm
- d) 0,78 m



e) 4,5 m

**158.**

- a) 2197
- b) -10648
- c)  $343x^{12}$
- d)  $3375a^3b^{27}$

**159.**

- a) 34 359 730 000
- b) 470 184 900 000
- c) 18 014 390 000 000 000
- d) 22 539 340 000 000 000 000 000 000

**160.**

- a) 31,9
- b) 0,0144
- c) 6,12
- d) 0,135

**161.**

- a) 25
- b) 13
- c) 20

**162.**

- a) 729
- b) 1
- c) 64
- d) 262144

**163.**

- a)  $1,3 \cdot 10^{11}$
- b)  $2,1 \cdot 10^{13}$
- c)  $2,64 \cdot 10^{12}$
- d)  $3,56 \cdot 10^{11}$

**164.**

- a)  $2 \cdot 10^7$
- b)  $8 \cdot 10^6$
- c)  $8,1 \cdot 10^{-4}$
- d)  $5,5 \cdot 10^{-10}$

**165.**

- a)  $-2 \cdot 10^8$
- b)  $1,5 \cdot 10^{12}$
- c)  $3,6 \cdot 10^{-5}$

**166.**

- a) 262144
- b) 33554432
- c) 81

**167.**

- a) 512
- b) 256
- c) 1 887 589

**168.**

- a)  $0,04 = \frac{1}{25}$
- b)  $-0,25 = -\frac{1}{4}$
- c)  $-0,125 = -\frac{1}{8}$

**169.**

- a) 0,165
- b) -0,000654
- c) 0,0270

**170.**

-

**171.**

- a)  $6^6 = 46656$  kirjeessä
- b) 466 560 €
- c) Olisit ensimmäisenä  $10^{10}$  kirjeessä eli 10 miljardissa ja Maapallon väkiluku on vain 6,5 miljardia (vuonna 2006).

**172.**

$$2^{-4} \text{ m}^2 = 0,0625 \text{ m}^2$$

**173.**

$$4^{200} = 4^{20 \cdot 10} = (4^{20})^{10} \approx (1,09951162810^{12})^{10} = 1,099511628^{10} \cdot (10^{12})^{10} \approx 2,5822 \cdot 10^{120}$$

Vastaus: Likiarvo on  $2,6 \cdot 10^{120}$  ja luvussa on 121 numeroa.

**174.**

$$3^{300} = (3^{30})^{10} \approx (2,05891132110^{14})^{10} = 2,058911321^{10} \cdot (10^{14})^{10} \approx 13689 \cdot 10^{140} = 1,4 \cdot 10^{143}$$

Vastaus: Likiarvo on  $1,4 \cdot 10^{143}$  ja luvussa on 144 numeroa.

**175.**

$$5,184 \cdot 10^{23} \text{ elektronia}$$

**176.**

vuonna 2015

**177.**

- a)  $2^{63}$
- b)  $2,9 \cdot 10^{11}$  t
- c) 480 vuoden

**178.**

- a) 4262
- b) 5007103
- c) 20941000
- d) 1010601

**179.**

- a)  $4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 3$
- b)  $6 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10$
- c)  $4 \cdot 10^6 + 10^4 + 10^3 + 9$
- d)  $5 \cdot 10^7 + 10^5 + 6 \cdot 10^2 + 1$

**180.**

- a) 0, 1, 2, 3, 4
- b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

**181.**

neljäjärjestelmä

**182.**

ei, viisijärjestelmässä esiintyy vain luvut 0 - 4

**183.**

- a) desimaalijärjestelmäksi
- b) 0 ja 1

**184.**

- a) 00000
- b) 111
- c) 11111111

**185.**

0, 01, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010

**186.**

- a) 101
- b) 1001
- c) 1110
- d) 10111

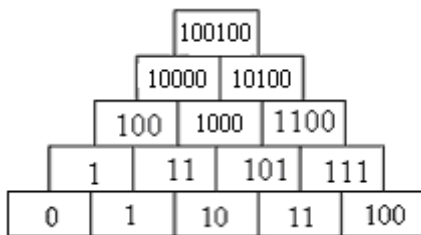
**187.**

- a) 2
- b) 4
- c) 10
- d) 17

**188.**

- a) 15
- b) 19
- c) 27
- d) 33

**189.**



**190.**

- a) 30
- b) 224

**191.**

-

**192.**

- a)  $13_{10}$
- b)  $104_{10}$
- c)  $19_{10}$

**193.**

- a) 138.203.44.61
- b) 232.106.41.9

**194.**

- a) 10000000.00001010.00000010.00011110
- b) 11001001.00101101.01010111.10000001

**195.**

- a) ei
- b) on
- c) on
- d) ei

**196.**

- a) vingt-huit
- b) quatre-vingt-trois

c) quatre-vingt-dix-sept

**197.**

-

**198.**

- a) 282
- b) 144
- c) -

**199.**

Kertolaskusäännöt ovat:  $0 \cdot 0 = 0$ ,  $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ ,  $1 \cdot 1 = 1$

Lasketaan allekkain:

$110 + 1011$ :

$$\begin{array}{r} 111 \\ 1011 \\ + 110 \\ \hline 10001 \end{array}$$

$11 \cdot 101$ :

$$\begin{array}{r} 101 \\ \cdot 11 \\ \hline 101 \\ + 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

Vastaus:  $0 \cdot 0 = 0$ ,  $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ ,  $1 \cdot 1 = 1$  ja  $110 + 1011 = 10001$ ,  $11 \cdot 101 = 1111$

**200.**

$$2 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 1334$$

**201.**

- a)  $347^\circ\text{F}$
- b)  $32^\circ\text{F}$
- c)  $-459,4^\circ\text{F}$

**202.**

918 miljoonaa  $^\circ\text{F}$

**203.**

- a)  $32^\circ\text{C}$
- b)  $-18^\circ\text{C}$
- c)  $-28^\circ\text{C}$

**204.**

- a) 8
- b) 6
- c) 2
- d) 12



- f)  $\frac{x}{2}$
- g)  $\frac{3}{x}$
- h)  $x^2$

**213.**

- a) 2
- b) -6
- c) 5
- d) -5
- e) -7
- f)  $-\frac{1}{2}$
- g) -3
- h) 1

**214.**

- a)  $n - 2$
- b)  $n - 5$
- c) 0

**215.**

- a)  $ab - 9$
- b)  $\frac{a}{b} + 3$
- c)  $\frac{a+b}{a-b}$
- d)  $\frac{9-a}{b}$

**216.**

- a) -17
- b) 1
- c)  $\frac{1}{3}$
- d)  $6\frac{1}{2}$

**217.**

- a)  $24a$
- b) 240

**218.**

- a) kuonojen määrää, häntien määrää
- b) silmien määrää, korvien määrää
- c) jalkojen määrää

**219.**

- a)  $y = 1$   
 b)  $y = 3$   
 c)  $y = -2$   
 d) Sijoitetaan saadut koordinaattipisteet (0,1), (2,3) ja (-3,-2) koordinaatistoon ja piirretään niiden kautta suora.

**220.**

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) : (x+y) = \left(\frac{\frac{7}{3} - \frac{3}{7}}{\frac{7}{3} + \frac{3}{7}}\right) : \left(\frac{7}{3} + \frac{3}{7}\right) = \left(\frac{\frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} - \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{7}{3} + \frac{3}{7}}\right) : \left(\frac{49}{21} + \frac{9}{21}\right)$$

$$= \left(\frac{49}{9} - \frac{9}{49}\right) : \frac{58}{21} = \left(\frac{2401}{441} - \frac{81}{441}\right) : \frac{58}{21} = \frac{2320}{441} \cdot \frac{21}{58} = \frac{40}{21} = 1\frac{19}{21}$$

**221.**

Sijoitetaan  $a$ :n ja  $x$ :n arvo lausekkeeseen.

$$\frac{ax}{b} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{b}{3}}{b} = \frac{2 \cdot b}{5 \cdot 3 \cdot b} = \frac{2}{15}$$

**222.**

termi	kerroin	muuttujaosa	asteluku
$7x^5$	7	$x^5$	5
$xyz$	1	$xyz$	1
$-5b^3$	-5	$b^3$	3
$-x^4$	-1	$x^4$	4
$6z$	6	$z$	1
$a^7$	1	$a^7$	7

**223.**

- a) trinomi  
 b) monomi  
 c) binomi  
 d) binomi

**224.**

- a) -5  
 b) 6  
 c) -3  
 d) -10

**225.**

- a) -0,3  
 b)  $-\frac{3}{2}$



- c) -3000
- d) 12

**226.**

- a) 4
- b) 1
- c) 32
- d)  $n$

**227.**

- a) -16
- b) 72

**228.**

- a) -40
- b) -1

**229.**

- a) kyllä
- b) ei
- c) kyllä
- d) ei. Jos kerroin on yksi, sitä ei merkitä näkyviin.
- e) kyllä

**230.**

- a) trinomi
- b) monomi
- c) binomi
- d) binomi

**231.**

-

**232.**

- a)  $2a^3, 8a, 3ab, -4b^2, -6$
- b) 2, 8, 3, -4, -6
- c) -6

**233.**

$x$	$-2x + 4$
2	0
1	2
0	4
-1	6
2	8

**234.**

-

**235.**

- a) 1
- b) 5
- c) 25

**236.**

- a) -7
- b) -24
- c) 1

**237.**

- a) 12,8 cm
- b) 160 mm

**238.**

- a) 1
- b) 2
- c) 1
- d) 3

**239.**

nolla

**240.**

- a) 2
- b) 3
- c) 5
- d) -2,5

**241.**

- a) -3
- b) -40
- c) -8

**242.**

- a) 5
- b) 8
- c) 4

**243.**

- a) 6
- b) 6
- c) 3

**244.**

$x = 8$  ja  $y = 2$

**245.**

$x = 3$

**246.**

- a)  $-3$
- b)  $2$
- c)  $-5$
- d)  $4$

**247.**

- a)  $12$
- b)  $-37$
- c)  $-12$
- d)  $60$
- e)  $10$

**248.**

- a)  $16 \text{ kg}$
- b)  $57 \text{ €}$
- c)  $15 \frac{m}{s}$
- d)  $17x$

**249.**

- a)  $9 \text{ koiraa} + 4 \text{ kissaa}$
- b)  $6 \text{ km} + 4 \text{ min}$
- c)  $3 \text{ cm} + 10 \text{ €}$
- d)  $8x + 13y$

**Huom!** Kissat ja koirat voidaan periaatteessa laskea yhteen, jos halutaan tietää paljonko eläimiä on yhteensä. Sen sijaan kilometrejä ja minutteja eikä senttimetrejä ja euroja voida laskea yhteen. Viime vuodelta tulisi muistaa, että eri suureita voidaan ainoastaan kertoa ja jakaa keskenään. Vaikka kohdan b ja c lausekkeet voidaan sieventää, ei niissä ole käytännössä järkeä.

**250.**

- a)  $6 \text{ €}$
- b)  $(30 - x) \text{ €}$
- c)  $(x - 23) \text{ €}$
- d)  $3x \text{ €}$

**251.**

$$2b + 2b + 3a + 3a = 6a + 4b$$

**252.**

- a)  $14x$
- b)  $11a$
- c)  $24c$
- d)  $17x^2$

**253.**

- a)  $5a$

- b)  $-b$
- c)  $-c + 5$
- d) ei sievene

**254.**

- a)  $5x$
- b)  $-6x$
- c)  $-8a$
- d)  $-4c$

**255.**

- a)  $-a - 4b + 2c + 6$
- b)  $2x - y + 3z + 4$
- c)  $-x + y + 2$
- d)  $2t - 7u + v + 8$

**256.**

- a)  $x^2 - x + 7$
- b)  $y^3 + 4y^2 - 2y - 5$
- c)  $5u^4 + u^3 + u^2 - 9u$
- d)  $-x^4 + 5x + 7$

**257.**

- a)  $12x + 12y$
- b)  $2a^2 - 13a + 6$
- c)  $8x - 2xy + 7y$
- d)  $5ab$

**258.**

- a)  $4s + 8t$
- b)  $a + 3b$
- c)  $12m + 2n$
- d)  $16x$
- e)

**259.**

- a)  $3a, \frac{3a}{5}, -7a$
- b)  $x^2y, \frac{7x^2y}{5}, -4x^2y$

**260.**

- a)  $2ab$
- b)  $2xy$
- c)  $5x^2 - x$
- d)  $2m^2 - m$

**261.**

a)  $\frac{1}{15}x$

b)  $-4\frac{1}{3}x^2$

c)  $-\frac{1}{3}x^3$

**262.**

a)  $2a$

b)  $-3a + 6b$

c)  $3a + 2b - c$

**263.**

a)  $-10x^2y + 3xy^2$

b)  $-12x^2 - 5x$

**264.**

-

**265.**

$2a + 8b + 2c$

**266.**

a)  $-4x + 3$

b)  $2x + y$

c)  $y - 5$

d)  $8x - 2y + 4$

**267.**

a)  $2x + 6$

b)  $-6$

c)  $0$

d)  $-8x - 12$

**268.**

a)  $-x$

b)  $3a$

c)  $-5x - 4y$

d)  $-a + 7b - 2c$

**269.**

a)  $12a + 8$

b)  $15a + 4$

c)  $a + 8$

d)  $-3a - 8$

**270.**

- a)  $7x+4$
- b)  $-8x-3$
- c)  $7x+4$
- d)  $-8x-7$

**271.**

- a)  $12a^2 - 11b$
- b)  $15a^2 - 5b - 2$
- c)  $11a^2 - b + 8$

**272.**

- a) 10
- b) 22
- c) -8

**273.**

- a) -2
- b)  $4a$

**274.**

- a) 0
- b)  $4x - 2y$

**275.**

$$5x^2 + 7x - 3$$

**276.**

- a) 21
- b) -3

**277.**

- a)  $43a^5 - 7a^2 - 6b + 2$
- b)  $-43a^5 + 7a^2 + 6b - 2$
- c)

**278.**

- a)  $4x^2 - 5x - 10$
- b)  $6x^2 + 5x$

**279.**

- a)  $-6a + b$
- b)  $x - y$
- c)  $16x - y - 9$

**280.**

- a) 7
- b) -12
- c) -26

**281.**

- a) 14
- b) -26

**282.**

- a)  $7x+1$
- b)  $-11x^2-8$
- c)  $5x^3-7x^2$

**283.**

$$4m^2 + 4n^2$$

**284.**

- a)  $-4\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{7}x$
- b)  $-6\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{5}{7}x$

**285.**

- a) 2844
- b) -200
- c)  $1\frac{3}{5}$

**286.**

- a) 20
- b) -42
- c) -72
- d) 88

**287.**

- a)  $3b$
- b)  $7g$
- c)  $15f^2$
- d)  $18ef$

**288.**

- a)  $a^6$
- b)  $2b^4$
- c)  $12c^7$
- d)  $-18d^7$

**289.**

- a)  $3x + (-2x) = x$
- b)  $3x - (-2x) = 5x$
- c)  $3x \cdot (-2x) = -6x^2$

**290.**

- a)  $6x^3$
- b)  $4x$
- c)  $-10x$
- d)  $4x^4$

**291.**

- a)  $3x \cdot 2x = 6x^2$
- b)  $-6y \cdot y^5 = -6y^6$
- c)  $-9x \cdot (-1) = 9x$
- d)  $y^6 \cdot 2y^2 = 2y^8$

**292.**

- a)  $6ab$
- b)  $2a^2b$
- c)  $10ab$
- d)  $-4ab$

**293.**

- a)  $5 \text{ €}$
- b)  $2x \text{ €}$
- c)  $4x \text{ €}$
- d)  $xy \text{ €}$

**294.**

- a)  $xy$
- b)  $-3x^4y$
- c)  $4x^2y^4$
- d)  $-x^6y^2$

**295.**

- a)  $m^4n^3$
- b)  $2a^4b^2$
- c)  $6s^3t^4$
- d)  $-12p^4$

**296.**

- a)  $2x$
- b)  $7x^2$
- c)  $-9$
- d)  $-4x^2$

**297.**

-

**298.**

- a)  $6x$



- b) 0
- c)  $-17xy$
- d)  $-y^2 + 6yz$

**299.**

- a)  $-9x - 5xy$
- b)  $14xy^2$
- c)  $-22xy^2$
- d)  $13y^2$

**300.**

- a)  $16x$
- b)  $15x^2$

**301.**

- a)  $22x^2$
- b)  $55x^2$

**302.**

- a)  $-4a$
- b)  $-2ab$
- c)  $2a^{-1}b$
- d)  $2a^{-4}$

**303.**

- a)  $60a^7$
- b)  $-14b^6$
- c)  $16c^2d$
- d)  $16g^2h^8$

**304.**

- a)  $\frac{1}{2}a^3$
- b)  $\frac{1}{12}ab^4$
- c)  $4\frac{2}{5}c^4$

**305.**

- a)  $-12x^{2a}y^{2+a}$
- b)  $-k^2x^{2b}y^2$

**306.**

- a)  $3x + 9$
- b)  $4y + 20$

c)  $z^2 + 2z$

**307.**

a)  $6(3x+5) = 18x+30$

b)  $4(x+2y+5) = 4x+8y+20$

c)  $3y(x+4y) = 3xy+12y^2$

**308.**

a) 66

b) 52

c) 126

**309.**

a)  $3x^2 + 3x$

b)  $6x - 8y$

c)  $-2y^2 - 2y$

d)  $10x - 2y$

**310.**

a)  $6m+12$

b)  $-5s-15$

c)  $12t-4v$

d)  $25b-10$

**311.**

a)  $x^2 + 4x$

b)  $-3x^2 + 2x$

c)  $3x^2 - 18$

d)  $10x^2 - 14x$

**312.**

a) -4

b) -16

c) -6

d) 68

**313.**

a)  $3x$

b)  $4x-9y$

c)  $3x^2 - 6x$

d)  $-5x+7y$

**314.**

a)  $2x+6$

b)  $-x^2 + x$

c)  $2x-6$

d)  $2x+6$

**315.**

- a) 15
- b)  $2r^2 - 4r$
- c)  $-8r + 11s$
- d)  $-8w^2 - 8w$

**316.**

- a)  $5x + 8$
- b)  $x^2 + 3x + 6$
- c)  $-4x + 7$
- d)  $8x^2 - 11x$

**317.**

- a)  $12e$
- b)  $f^2 + 8f$
- c)  $-u^2 - u$
- d)  $7g^2 - 27g$

**318.**

- a)  $x, y$
- b)  $2x, y$
- c)  $3x, 4y$
- d)  $x, 3$

**319.**

- a)  $3x$
- b)  $2y$
- c)  $-2$

**320.**

- a)  $3x - 1$
- b)  $x - \frac{1}{3}y$
- c)  $-2x + 3y$

**321.**

- a)  $x - 2$
- b)  $x + 3(x - 2) = 4x - 6$

**322.**

$-2n - 1$

**323.**

- a)  $2(2x^4 - 4x) = 4x^4 - 8x$
- b)  $-(-3x^2)(-3x^2) = -9x^4$
- c)  $-3x^2[-(2x^4 - 4x)] = 6x^6 - 12x^3$

- d)  $-3x^2 - 3x^2(2x^4 - 4x) = -6x^6 + 12x^3 - 3x^2$   
e)  $-3x^2(-3x^2) - (2x^4 - 4x) = 7x^4 + 4x$   
f)  $-(-3x^2)(2x^4 - 4x) - 3x^2 = 6x^6 - 12x^3 - 3x^2$

**324.**

kun  $x < -4$

**325.**

Merkitään luvun ensimmäistä numeroa  $x$ :llä, jonka paikka vastaa lukua  $100x$ , ja viimeistä  $y$ :llä. Keskimmäinen numero on tällöin  $x + y$ , joka vastaa lukua  $10(x + y)$ . Koko luku voidaan tällöin merkitä muodossa  $100x + 10(x + y) + y$ , joka sievenee muotoon  $100x + 10x + 10y + y = 110x + 11y = 11(10x + y)$ . Jokainen näistä luvuista on siten jaollinen luvulla 11, jolloin osamääräksi tulee  $10x + y$ .

**326.**

- a)  $4x + 10$   
b)  $x^2 + 5x + 6$

**327.**

- a)  $a^2 + 3a + 2$   
b)  $-b^2 - 2b + 15$   
c)  $c^2 - 4c - 12$

**328.**

- a)  $x^2 + 3x + 2$   
b)  $2x^2 - 2$   
c)  $6x^2 - 7x + 2$

**329.**

- a)  $4(y + 6) = 4y + 24$   
b)  $(y + 6)^2 = y^2 + 12y + 36$

**330.**

- a)  $x^2 - 4$   
b)  $x^2 - 4x + 4$   
c)  $x^2 + 4x + 4$

**331.**

- a)  $x^2 + 2x + 1$   
b)  $x^2 - 1$   
c)  $x^2 - 2x + 1$

**332.**

- a)  $5x - 1 + 3x + 4 = 8x + 3$   
b)  $5x - 1 - (3x + 4) = 2x - 5$   
c)  $(5x - 1)(3x + 4) = 15x^2 + 17x - 4$

**333.**

a)  $(2x + 3y)(3y + 5)$

b)  $(4x + 3)(y^2 + 4)$

**334.**

a)  $10x + 6xy + 9y^2 + 15y$

b)  $16x + 4xy^2 + 3y^2 + 12$

**335.**

a)  $-10x + 3$

b)  $-8x^2 - 10x + 3$

c)  $-2x + 3$

**336.**

$-3x^4 - 11x^3 - 10x^2$

**337.**

a)  $4x^2 - 4x + 1$

b)  $4x^2 - 1$

c)  $4x^2 + 4x + 1$

**338.**

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

**339.**

a)  $6x^2 + 11x - 10$

b)  $17x - 10$

c)  $6x^2 + 15x - 10$

**340.**

a)  $4a + 3b + 18$

b)  $a^2 + 9a + ab + 3b + 18$

c)  $c + cd - d^2 - 2d$

d)  $c^2 + 2c - d^2 + 2d$

**341.**

$-4x^2 + 3x + 10$

**342.**

$4t^2 - 37t - 12$

**343.**

a)  $a^2 + 2a + 1$

b)  $a^2 - 2a + 1$

c)  $a^2 + 2ab + b^2$

d)  $a^2 - 2ab + b^2$

**344.**

-

**345.**

a)  $2x^2 + 4xm + 2m^2$

b)  $3x^2 - 12x + 12$

**346.**

$$(6a + 3)(4b + 1) - 5b(2a + 4) = 6a + 14ab - 8b + 3$$

**347.**

$$x^2 + x + 1$$

**348.**

$$(n + 4)^2 - n^2 = (n + 4)(n + 4) - n^2 = n^2 + 4n + 4n + 16 - n^2 = 8n + 16$$

Koska  $8n$  ja  $16$  ovat 8:lla jaollisia, myös niiden summa on 8:lla jaollinen.

**349.**

a) -

b) +

c) +

d) -

**350.**

a)  $(-3)^5 = -243$

b)  $-(-3)^5 = 243$

c)  $(-3)^2 = 9$

d)  $(-3)^3 = -27$

**351.**

a)  $5^9$

b)  $7^{11}$

c)  $a^7$

d)  $b^{12}$

**352.**

a)  $3x^4 \cdot (-x^2) = -3x^6$

b)  $-6x^3 \cdot (-2x) = 12x^4$

c)  $\frac{1}{3}x^4 \cdot 27x^5 = 9x^9$

**353.**

a)  $10x^2$

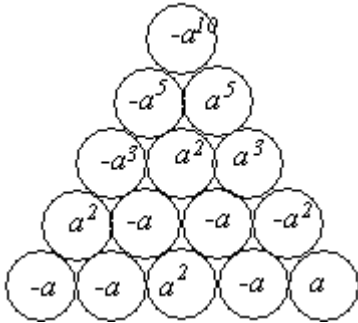
b)  $12xy$

c)  $-88x^2y$

**354.**

- a)  $8x^3$
- b)  $15x^9$
- c)  $35x^9y^2$
- d)  $6x^8y^7$

**355.**



**356.**

- a) 10
- b) 14
- c) 9

**357.**

- a) 8
- b) 7
- c) 16
- d) 9

**358.**

- a) ei ole määritelty
- b) 1
- c)  $-1$
- d) 2
- e)  $a^3$

**359.**

- a)  $4a^2$
- b)  $-3b$
- c)  $4c^7$
- d)  $\frac{d^4}{3}$

**360.**

- a) 8
- b)  $-\frac{1}{2}$

c) -3

**361.**

a)  $\frac{8a^5}{2a^3} = 4a^2$

b)  $8a^5 \cdot 2a^3 = 16a^8$

**362.**

a) -2

b) 4

**363.**

a)  $2a^5$

b)  $40a^5$

c)  $11a^2$

d)  $3a^5$

**364.**

a)  $a^7$

b)  $-\frac{1}{3b}$

c)  $\frac{1}{10c^6}$

**365.**

a)  $6^6$

b)  $3^8$

c)  $12^9$

**366.**

a)  $125x^6$

b)  $27x^{12}$

c)  $a^4x^8$

d)  $x^8$

**367.**

a) 3

b) 3

c) ei mikään

d) 3

**368.**

a)  $10^5 = 100000$

b) 4

c) 1,5

d)  $x^{24}$



**369.**

- a)  $a^{17}$
- b)  $b^{20}$
- c)  $c^{40}$

**370.**

- a)  $z^7$
- b)  $y^{24}$
- c)  $\frac{1}{z^{22}}$

**371.**

- a)  $4^6$
- b)  $5^{16}$
- c)  $8^{18}$

**372.**

- a)  $x^{16}$
- e)  $-x^{12}$
- f)  $-x^{21}$
- g)  $x^{34}$

**373.**

- a)  $\frac{1}{5}$
- b)  $\frac{1}{99}$
- c)  $\frac{1}{a}$
- d)  $\frac{1}{x}$

**374.**

- a)  $\frac{1}{2^4}$
- b)  $\frac{1}{5^3}$
- c)  $\frac{1}{a^6}$
- d)  $\frac{1}{(ab)^3}$
- e)  $\frac{4}{x^5}$

**375.**

- a)  $\frac{1}{25}$
- b)  $\frac{1}{81}$
- c)  $\frac{1}{8}$
- d)  $\frac{1}{64}$

**376.**

- a)  $\frac{3}{4}$
- b)  $\frac{1}{4}$
- c)  $\frac{1}{8}$
- d)  $\frac{1}{8}$

**377.**

- a)  $\frac{1}{2}$
- b)  $\frac{1}{3x}$
- c)  $\frac{1}{5^2}$
- d)  $\frac{1}{17^4}$

**378.**

- a) 1
- b)  $\frac{1}{8}$
- c)  $1\frac{7}{9}$
- d) 6

**379.**

- a) 10
- b)  $10^3$
- c) 1
- d)  $\frac{1}{10}$

**380.**

- a)  $2^{-8}$
- b)  $2^{-6}$

- c)  $2^{-8}$
- d)  $2^0$

**381.**

- a)  $36x^2$
- b)  $8b^3$
- c)  $64a^2$
- d)  $125y^3$

**382.**

- a)  $(6\text{ m})^2 = 36\text{ m}^2$
- b)  $(9\text{ m})^2 = 81\text{ m}^2$

**383.**

- a) 216
- b)  $8x^3$
- c)  $25a^6b^2$
- d)  $4xy^3$

**384.**

- a)  $(3x)^2 = 9x^2$
- b)  $(bcd)^5 = b^5c^5d^5$
- c)  $(-4a)^2 = 16a^2$
- d)  $(5x^2y^7)^3 = 125x^6y^{21}$

**385.**

- a)  $2a$
- b)  $-5a$
- c)  $0,2xy$
- d)  $4ab$
- e)  $3a^2$

**386.**

- a)  $2b$  tai  $-2b$
- b)  $-0,5c$
- c) Mahdoton tapaus
- d)  $2x^2$  tai  $-2x^2$

**387.**

- a)  $(3a)^2$
- b)  $(4b)^3$
- c)  $(9ab)^2$
- d)  $(-5c)^3$

**388.**

- a)  $64x^3$
- b)  $10^6 = 1000000$
- c)  $4a^6$
- d)  $27b^6c^{21}$

**389.**

- a)  $-\frac{5}{6}$
- b) 2
- c) 1
- d)  $\frac{2}{5} - x$

**390.**

- a)  $\frac{9}{16}$
- b)  $\frac{x^2}{36}$
- c)  $\frac{9x^2}{25}$
- d)  $\frac{16a^{20}}{b^{24}}$

**391.**

- a)  $\frac{x^6}{y^6}$
- b)  $\frac{a^2}{81}$
- c) 1

**392.**

- a)  $\frac{9x^2}{16}$
- b)  $\frac{y^2}{9}$
- c)  $\frac{x^2}{25y^2}$

**393.**

$$\left(\frac{8x^3y^4}{4x^2y}\right)^3 = 8x^3y^6$$

**394.**

a)  $\frac{36a^2}{49}$

b)  $-\frac{b^3}{48}$

c)  $\frac{4x^2}{49}$

**395.**

a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^6$

b)  $-\left(\frac{5a}{3}\right)^2$

c)  $\left(-\frac{2x}{y}\right)^3$

d)  $\left(\frac{2a}{b}\right)^4$

**396.**

a)  $\frac{8a^6b^3}{c^6}$

b)  $\frac{9a^{10}b^{14}c^2}{4}$

c)  $\frac{4a^{10}}{b_4c^2}$

**397.**

a)  $10^2$

b)  $10^3$

c)  $10^6$

**398.**

a) 3 000 000

b) 2 500

c) 0,006

d) 0,000 002 15

e) 0,000 000 000 009 81

**399.**

a)  $2,3 \cdot 10^3$

b)  $3,45 \cdot 10^8$

c)  $1,8 \cdot 10^4$

d)  $9,3 \cdot 10^5$

**400.**

- a)  $1,8 \cdot 10^2$
- b)  $5,75 \cdot 10^5$
- c)  $1,2 \cdot 10^4$
- d)  $1,35 \cdot 10^7$

**401.**

- a)  $5 \cdot 10^{-3}$  kg
- b)  $2 \cdot 10^{-6}$  kg
- c)  $7 \cdot 10^{-12}$  kg

**402.**

- a)  $8,0 \cdot 10^6$
- b)  $3,4 \cdot 10^7$
- c)  $7,0 \cdot 10^{-4}$
- d)  $3,65 \cdot 10^{-6}$

**403.**

- a)  $1,75 \cdot 10^5$
- b)  $1,036 \cdot 10^4$
- c)  $5 \cdot 10^2$
- d)  $6,2 \cdot 10^{-3}$

**404.**

$(10^{100})^{100} = 10^{100 \cdot 100} = 10^{10000}$ , joten luvussa on 10 000 nollaa.

**405.**

- a) -729
- b) 1728
- c) -27000
- d) 15325

**406.**

- a) 5000000
- b) 0,0008
- c) 4666,666...
- d) 0,02555...

**407.**

- a)  $7,38 \cdot 10^{19}$
- b)  $-2,99 \cdot 10^6$
- c)  $1,38 \cdot 10^{10}$

d)  $-4,64 \cdot 10^{-14}$

**408.**

- a) 18,5
- b) 0,0281
- c) 4,59
- d) 0,185

**409.**

- a) 24
- b) 12
- c) 22

**410.**

- a) 1200
- b)  $3,6 \cdot 10^7$

**411.**

- a) 7,17
- b) 11900
- c) 35000

**412.**

$$7^{200} = 7^{20 \cdot 10} = (7^{20})^{10} \approx (7,9792266310^{16})^{10} = 7,97922663^{40} \cdot (10^{16})^{10} \approx 104618382910^{160} \approx 1,0 \cdot 10^{169}$$

Vastaus: Likiarvo on  $1,0 \cdot 10^{169}$  ja luvussa on 170 numeroa.

**413.**

- a) 5
- b) 2
- c) -4
- d) 11

**414.**

- a) 2
- b) -2
- c) 4
- d)  $-b + 2$

**415.**

- a)  $n + 4$
- b)  $n - 6$
- c)  $n$
- d)  $n - x$

**416.**

a)

$x$	$-3x$
-2	6
-1	3
0	3
1	-3

b)

$x$	$\frac{x}{5}$
-10	-2
5	1
35	7
125	25

**417.**

- a) -10
- b) -31
- c) 51
- d) -52

**418.**

- a) –
- b) 135 mmHg
- a) 125 mmHg
- b) 159 mmHg

**419.**

$$\frac{-6x}{2} + (x-3)$$

**420.**

5

**421.**

monomi	kerroin	kirjainosa
$-x$	-1	$x$
0	0	$y^9$
$t^6$	1	$t^6$
$8c^{-3}$	8	$c^{-3}$
$18k^3$	18	$k^3$
$5x^{-2}$	5	$x^{-2}$

**422.**

- a)  $2x-6$
- b)  $2x^2+7x+5$
- c)  $-4x-y+4$

**423.**

- a) kaksi
- b) yksi
- c) kolme

**424.**



- a) 3
- b) 1
- c) 12
- d)  $m$

**425.**

- a) 5
- b)  $-7$
- c) 1

**426.**

-

**427.**

- a) 1
- b) 17

**428.**

$$x = \frac{3}{4}$$

**429.**

vastauksen pitäisi olla  $6a$

**430.**

- a)  $4a - b + 2c - 2$
- b)  $3x^3 + 6x^2 - x + 9$

**431.**

- a)  $3x^2 - x + 4$
- b)  $-2y^3 + 4y^2 - 2y - 4$
- c)  $-u^4 + u^3 + 3u^2 - 9u$
- d)  $-x^4 + 7x^3 + 5x$

**432.**

-

**433.**

- a)  $8a$
- b)  $5b$
- c)  $c + 8$
- d)  $5a + b$

**434.**

- a)  $3m$
- b)  $-8y$
- c)  $3n + 1$
- d)  $-15x + 7y$

**435.**

- a)  $-4x$
- b)  $6a$
- c)  $11c$
- d)  $15x^2 + 2$

**436.**

- a)  $3a^2 + a$
- b)  $b^2 - b$
- c)  $-3c^2 + c + 5$
- d)  $4a + b$

**437.**

- a)  $2a - 3$
- b)  $-4a - b$
- c)  $-c + b$
- d)  $7a + b - 3c$

**438.**

- a)  $2x + 2$
- b)  $6$
- c)  $0$
- d)  $-4x - 12$

**439.**

- a)  $6a + 6b + 5$
- b)  $10a + 7b + 3$

**440.**

- a)  $-a - 5$
- b)  $a^2 - 6a + 2$
- c)  $-8a^2 + a - 1$
- d)  $-7a - b + 3c$

**441.**

-

**442.**

$$-4x + x^2 + (-4x - x^2) = -8x$$

**443.**

- a)  $4$
- b)  $5$
- c)  $-10$

**444.**

- a)  $10$
- b)  $-18$

**445.**

- a)  $3x$
- a)  $-3x^2$
- b)  $15x^5$
- c)  $-18x^2y$

**446.**

- a)  $-a^7$
- b)  $10b^4$
- c)  $12c^8$
- d)  $-18d^7$

**447.**

- a)  $24ab$
- b)  $21a^2$
- c)  $6a^2b$
- e)  $-10a^2b^2$

**448.**

- a)  $24a^2$
- b)  $8b^2$
- c)  $15bc$

**449.**

- a)  $5a$
- b)  $6ab$
- c)  $-3ab^3c^4$
- d)  $-9bd^2$

**450.**

-

**451.**

- a)  $9x$
- b)  $0$
- c)  $-4xy$
- d)  $-y^2 + 6yz - 3z$

**452.**

- a)  $-4xy$
- b)  $-2xy^2$
- c)  $-2xy^2$
- d)  $12y^2$

**453.**

- a)  $5a(a-3) = 5a^2 - 15a$

- b)  $4b(2b+1) = 8b^2 + 4b$   
c)  $2c^2(3c-1) = 6c^3 - 2c^2$

**454.**

-

**455.**

- a)  $3a+15$   
b)  $12a^2 - 4a$   
c)  $-6a^3 - 2a^2 + 12a$   
d)  $a^4 + 4a^3$

**456.**

- a)  $2x+13$   
b)  $x^2 + 6x$   
c)  $6a - 6b$   
d)  $-2x^2 + 5xy$

**457.**

- a)  $a+2$   
b)  $6a+12$

**458.**

- a)  $2b, 1$   
b)  $b, 1$   
c)  $1, b$   
d)  $2a, 3$

**459.**

- a)  $-x-4$   
b)  $-x^2 + 6x + 6$   
c)  $-4x+7$   
d)  $3x$

**460.**

- a)  $12a$   
b)  $b^2 + 8b$   
c)  $-c^2 - c$   
d)  $7d^2 - 27d$

**461.**

- a)  $x^2 + 3x + 2$   
b)  $-x^2 - 2x + 15$   
c)  $x^2 - 4x - 12$

**462.**

- a)  $5a^2 + 23a + 12$

b)  $20b^2 + 3b - 2$

**463.**

a)  $a^2 + 8a + 12$

b)  $a^2 - b^2$

c)  $a^2 - 2ab - 3b^2$

d)  $2a^2 + 7ab + 3b^2$

**464.**

a)  $a^2 + 2ab + b^2$

b)  $9a^2 + 6ab + b^2$

c)  $a^2 + 4ab + 4b^2$

**465.**

a)  $4x + 3y + 18$

b)  $x^2 + 9x + xy + 3y + 18$

c)  $x + xy - y^2 - 2y$

d)  $x^2 + 2x - y^2 + 2y$

**466.**

$(x + 2)(x + 3)$

**467.**

a)  $2x^2 + 4a + 4$

b)  $2x^2 - 4x + 4$

c)  $x^2 + 2xy + y^2$

d)  $-x^2 + 2xy - y^2$

**468.**

$(2n + 1)(2n + 3) = 4n^2 + 8n + 3$

## Taulukko-osio

---

### Reaalilukujen laskulait

$$a + b = b + a, ab = ba$$

vaihdantalaki

$$a + (b + c) = (a + b) + c, a(bc) = (ab)c$$

liitântälaki

$$a(b + c) = ab + ac$$

osittelulaki

$$a + (-a) = 0$$

luvun  $a$  vastaluku  $-a$

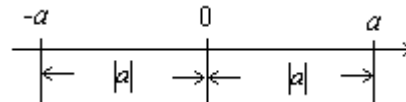
$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

luvun  $a$  käänteisluku  $\frac{1}{a}$  ( $a \neq 0$ )

$$|a|$$

itseisarvo

Graafinen tulkinta:  $|a|$  = luvun  $a$  vastinpisteiden etäisyys nolasta



---

### Murtolukujen laskutoimitukset

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}, \text{ missä } k \neq 0$$

laventaminen ( $\rightarrow$ ) ja supistaminen ( $\leftarrow$ )

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

yhteenlasku (lavennus samannimisiksi)

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

vähennyslasku (lavennus samannimisiksi)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

kertolasku

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

jakolasku

---

### Potenssi

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

$n$  tekijää,  $a$  = kantaluku,  $n$  = eksponentti

$$a^0 = 1$$

$a \neq 0$ ,  $0^0$  ei ole määritelty

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$a \neq 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$$

$a \neq 0$

## Laskusääntöjä

$a^m a^n = a^{m+n}$	samankantaisten potenssien tulo
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	samankantaisten potenssien osamäärä
$(ab)^n = a^n b^n$	tulon potenssi
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	osamäärän potenssi
$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$	potenssin potenssi

---

## Polynomin jakaminen tekijöihin

$ab + ac = a(b + c)$	yhteinen tekijä
$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$	ryhmittely
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	muistikaavat
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	

---

## Neliöjuuri

Jos  $\sqrt{a} = b$ , niin  $b^2 = a$  ja  $b \geq 0$  (pätee myös toisinpäin).

## Laskusääntöjä

$$\begin{aligned}(\sqrt{a})^2 &= a \\ \sqrt{a^2} &= |a| \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\ \sqrt{ab} &= \sqrt{a}\sqrt{b}\end{aligned}$$

---

## Lukujonot

Aritmeettinen lukujono

$$\begin{aligned}d &= a_2 - a_1 && \text{erotusluku} \\ a_n &= a_1 + (n-1)d && \text{yleinen termi}\end{aligned}$$

## Geometrinen lukujono

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{suhdeluku}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{yleinen termi}$$

---

## Toisen asteen yhtälö

Normaalimuoto  $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 1$

Ratkaisukaava:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Paraabelin aukamissuunta ja muoto:

- Jos  $a > 0$ , paraabeli aukeaa ylöspäin.
- Jos  $a < 0$ , paraabeli aukeaa alaspäin.
- Jos  $|a|$  on pieni, paraabeli on leveä.
- Jos  $|a|$  on suuri, paraabeli on kapea.

Vaillinaiset toisen asteen yhtälöt

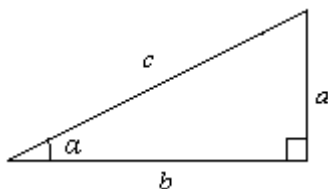
Yhtälön  $ax^2 + c = 0$  ratkaisujen määrä riippuu vakiosta  $c$ :

- $c < 0$ : kaksi ratkaisua, ratkaisut toistensa vastalukuja
- $c = 0$ : ainoa ratkaisu  $x = 0$
- $c > 0$ : ei ratkaisua

Yhtälön  $ax^2 + bx = 0$  ratkaisut:

- aina kaksi ratkaisua, toinen on aina  $x = 0$
- 

## Suorakulmaisen kolmion trigonometria



$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\text{Pythagoraan lause})$$

$$A = \frac{1}{2} ab$$

Trigonometriset funktiot

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

---



## Suora

Pisteiden  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$  kautta kulkevan suoran kulmakerroin:

$$k = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Suora on

- nouseva, jos  $k > 0$
- laskeva, jos  $k < 0$
- $x$ -akselin suuntainen, jos  $k = 0$
- $y$ -akselin suuntainen, jos  $k$ :ta ei voida määrittää.

Tarkastellaan suoria  $s_1$  ja  $s_2$ , joiden kulmakertoimet ovat  $k_1$  ja  $k_2$ .

- Suorat ovat yhdensuuntaiset eli  $s_1 \parallel s_2$ , jos  $k_1 = k_2$  tai suorat ovat  $y$ -akselin suuntaiset.
- Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli  $s_1 \perp s_2$ , jos  $k_1 \cdot k_2 = -1$  tai toinen suora on  $x$ -akselin ja toinen  $y$ -akselin suuntainen.

Suoran yhtälön yleinen muoto:

$$ax + by + c = 0$$

Suoran yhtälön ratkaistu muoto:

$y = kx + b$ , missä  $k$  on kulmakerroin ja  $b$  vakiotermin (suoran ja  $y$ -akselin leikkauspisteen  $y$ -koordinaatti).

$x$ - akselin suuntaisen suoran yhtälö:

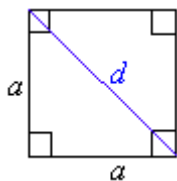
$y = t$ , missä  $t$  on suoran ja  $y$ -akselin leikkauspisteen  $y$ -koordinaatti

$y$ -akselin suuntaisen suoran yhtälö:

$x = u$ , missä  $u$  on suoran ja  $x$ -akselin leikkauspisteen  $x$ -koordinaatti

## Tasokuvioita

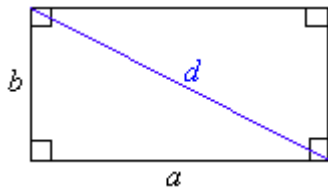
Neliö



$$A = a^2$$

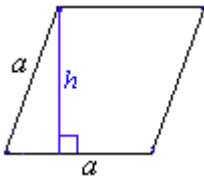
$$d = \sqrt{2}a$$

### Suorakulmio



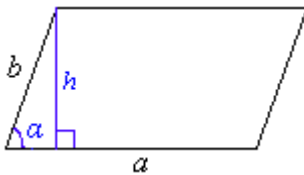
$$A = ab$$
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

### Neljäkäs



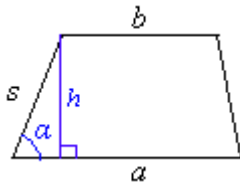
$$A = ah$$

### Suunnikas



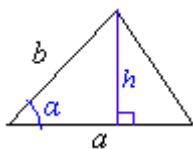
$$A = ah = absin \alpha$$

### Puolisuunnikas



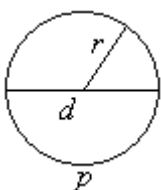
$$A = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2}(a+b)s \sin \alpha$$

### Kolmio



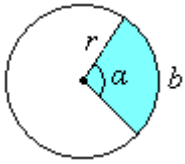
$$A = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

### Ympyrä



$$A = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$$
$$p = 2\pi r = \pi d$$

## Sektori

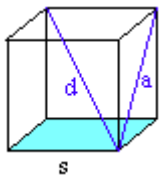


$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r \text{ (kaaren pituus)}$$

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2 = \frac{br}{2}$$

## Avaruuskappaleita

### Kuutio

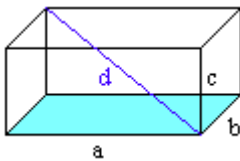


$$a = s\sqrt{2}, d = s\sqrt{3}$$

$$A = 6s^2$$

$$V = s^3$$

### Suorakulmainen särmiö

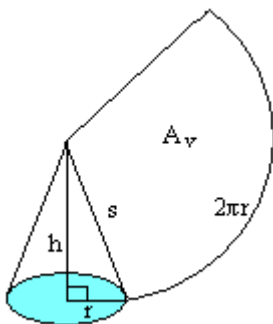


$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

$$V = abc$$

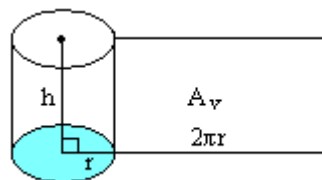
### Suora ympyräkartio



$$A_v = \pi r s$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

### Suora ympyrälieriö

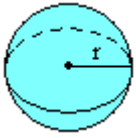


$$A_v = 2\pi r h$$

$$A_{kok} = A_v + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

## Pallo



$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

---

### $\pi$ :n likiarvo 500 ensimmäisen desimaalin tarkkuudella

3,	14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971	69399	37510
	58209	74944	59230	78164	06286	20899	86280	34825	34211	70679
	82148	08651	32823	06647	09384	46095	50582	23172	53594	08128
	48111	74502	84102	70193	85211	05559	64462	29489	54930	38196
	44288	10975	66593	34461	28475	64823	37867	83165	27120	19091
	45648	56692	34603	48610	45432	66482	13393	60726	02491	41273
	72456	70066	06315	58817	48815	20920	96282	92540	91715	36436
	78925	90360	01133	05305	48820	46652	13841	46951	94151	16094
	33057	27036	57595	91953	09218	61173	81932	61179	31051	18548
	07446	23799	62749	56735	188857	52724	89122	79381	83011	94912

---

## Tilastomatematiikka

### Keskilukuja

keskiarvo 
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

painotettu keskiarvo 
$$\bar{x} = \frac{q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n}{q_1 + q_2 + \dots + q_n}$$
, missä  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ovat painokertoimia

Moodi eli tyyppiarvo tarkoittaa yleisintä, useimmin esiintyvää muuttujan arvoa.

Mediaani tarkoittaa keskimmäistä arvoa (tai kahden keskimmäisen arvon keskiarvoa), kun aineisto on järjestetty suuruusjärjestykseen.

### Hajontalukuja

Keskihajonta ilmoittaa, kuinka kaukana muuttujan arvot ovat keskimäärin keskiarvosta.

Vaihteluväli kertoo millä välillä havainnot vaihtelevat.

Vaihteluvälin pituus on muuttujan suurimman ja pienimmän arvon erotus.

---

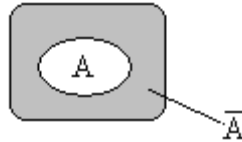
## Todennäköisyytlaskenta

Klassinen todennäköisyys

$$P(A) = \frac{\text{suotuisten tapausten lukumäärä}}{\text{kaikkien t apausten lukumäärä}}$$

Vastatapahtuman todennäköisyys

$$P(\bar{A}) = P(A \text{ ei tapahdu}) = 1 - P(A)$$



Yhteenlaskusääntö

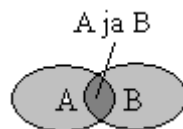
Kun A ja B erillisiä tapauksia

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$$



Kun A ja B eivät ole erillisiä

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$



Kertolaskusääntö

Kun A ja B ovat riippumattomia

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Kun A ja B ovat riippuvia (yleinen kertosääntö)

$$P(\text{ensin } A \text{ ja sitten } B) = P(A) \cdot P(B, \text{ kun } A \text{ on tapahtu nut})$$

## SI-järjestelmä

Kerrannaisyksiköiden etuliitteet					
Nimi	Tunnus	Kerroin	Nimi	Tunnus	Kerroin
eksa	E	$10^{18}$	desi	d	$10^{-1}$
peta	P	$10^{15}$	sentti	c	$10^{-2}$
tera	T	$10^{12}$	milli	m	$10^{-3}$
giga	G	$10^9$	mikro	$\mu$	$10^{-6}$
mega	M	$10^6$	nano	n	$10^{-9}$
kilo	k	$10^3$	piko	p	$10^{-12}$
hehto	h	$10^2$	femto	f	$10^{-15}$
deka	da	$10^1$	atto	a	$10^{-18}$

<b>Lisäyksiköitä</b>			
<b>Suure</b>	<b>Yksikkö</b>	<b>Tunnus</b>	<b>Vastaavuus</b>
aika	minuutti	min	1 min = 60 s
	tunti	h	1 h = 60 min
	vuorokausi	d	1 d = 24 h
	vuosi	a	1 a $\approx$ 365 d
tasokulma	aste	°	1° = 60'
	minuutti	'	1' = 60"
	sekunti	"	
tilavuus	litra	l	1 l = 1 dm <sup>3</sup>
massa	tonni	t	1 t = 1000 kg
	atomimassayksikkö	u	1 u = 1,6605402 · 10 <sup>-27</sup> kg
pituus	tähtitieteellinen yksikkö	AU	1 AU = 0,1495979 · 10 <sup>12</sup> m
	parsek	pc	1 pc = 30,85678 · 10 <sup>15</sup> m

<b>Muuntokertoimia</b>	
<b>Pituus</b>	1" = 1 in = 1 tuuma = 25,40 mm
	1' = 1 ft = 1 jalka = 0,3048 m
	1 yd = 1 jaardi = 0,9144 m
	1 mi = 1 maili = 1,609344 km
	1 mpk = 1 M = 1 meripeninkulma = 1852 m
	1 vv = 1 valovuosi = 9,46055 · 10 <sup>15</sup> m
	1 AU = tähtitieteellinen yksikkö = 149,5979 · 10 <sup>9</sup> m
<b>Massa</b>	1 ka = 1 karaatti = 0,2 g
	1 u = 1,6605402 · 10 <sup>-27</sup> kg
	1 lb = 1 naula = 0,4536 kg
	1 oz = 1 unssi = 28,35 g
<b>Tasokulma</b>	1° = 2π/360 rad
<b>Pinta-ala</b>	1 b = 1 barn = 10 <sup>-28</sup> m <sup>2</sup>
	1 acre = 1 eekkeri = 4,0469 · 10 <sup>3</sup> m <sup>2</sup>
<b>Tilavuus</b>	1 l = 1 dm <sup>3</sup> = 0,001 m <sup>3</sup>
	1 bbl = 1 barreli = 0,1589873 m <sup>3</sup>
	1 gal = 1 gallona (UK) = 4,546092 l
	1 gal = 1 gallona (US) = 3,785412 l
<b>Nopeus</b>	1 solmu = 1 mpk/h = 1,852 km/h = 0,5144 m/s

<b>Luonnonvakioita</b>		
<b>Nimi</b>	<b>Tunnus</b>	<b>Lukuarvo ja yksikkö</b>
putoamiskiihtyvyys	<i>g</i>	9,80665 m/s <sup>2</sup>
valon nopeus	<i>c</i>	2,99792458 · 10 <sup>8</sup> m/s
elektronin massa	<i>m<sub>e</sub></i>	9,1093897 · 10 <sup>-31</sup> kg
protonin massa	<i>m<sub>p</sub></i>	1,6726231 · 10 <sup>-27</sup> kg
neutronin massa	<i>m<sub>n</sub></i>	1,6749286 · 10 <sup>-27</sup> kg