

## Tieto- ja viestintäteknikka matematiikan oppimisessa

Harry Silfverberg, Turun yliopisto  
harry.silfverberg@utu.fi

### Tiivistelmä

Tieto- ja viestintäteknikka on juurtunut luonnolliseksi osaksi kaikkien kouluaineiden opetusta. Matematiikassa digitaalitekniikan pitkään jatkunut kehitys on vähitellen muokannut jopa vähän huomaamattammekin sekä opettajien arkisia työvälineitä ja toimintatapoja että oppimisympäristöjä, joissa oppilaat matematiikan taitojaan kartuttavat. Eri kouluasteilla muutokset näyttäytyvät osin eriluonteisina. Muun opetusteknologisen kehityksen ohella matematiikkaan lisävärinsä on tuonut niin sanotun "hand-held" -tekniikan eli laskinten, näiden ohjelmistojen sekä oheislaitteiden voimakas kehitys. Sekä varsinaiseen laskentaan että matematiikan visualisointiin on kehitetty uusia tehokkaita innovaatioita. Kiinnittämättä kuitenkaan liikaa huomiota ajan myötä vaihtuviin yksittäisiin teknologisiin sovelluksiin koetamme tässä yhteydessä tarkastella pääpiirteittäin sitä, miten teknologinen kehitys on muuttanut ja muuttaa matematiikan opetuksen ja oppimisen kulttuuria kouluissa ja vapaa-aikana.

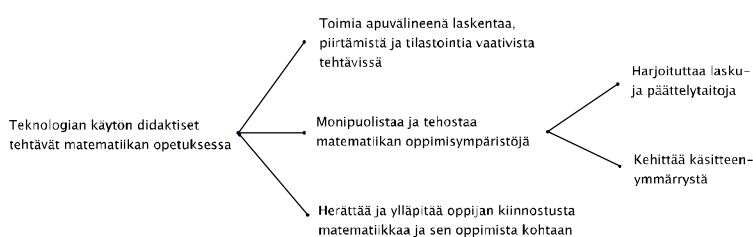
### Tietotekniikan käytön arkipäiväistyminen

Suomessa kuten muissakin vauraissa kehittyneissä maissa tieto- ja viestintäteknikka (tvt) on eri muodoissaan juurtunut kiinteäksi osaksi kansalaisten arkipäivää. Yhä useammassa kodissa on mahdollisuus käyttää nopeaa tietoliikenneyhteyttä kohtuullisella kiinteällä kuukausimaksulla. Älypuhelin ja mobiililaitteiden yleistyttyä tietoliikennepalvelut ovat käytettävissä langattomasti lähes missä tahansa. Samalla jokainen laitteen haltija on saavutettavissa milloin ja mistä tahansa. Tietoliikennepalveluiden edullisuus ja palveluiden moninaisuus on monella tapaa muuttanut arkipäivän käyttäytymistämme: katsomme tv-ohjelmien tallenteita tv:stä tai tietokoneelta, milloin se meille sopii, kuuntelemme musiikkia puoli-ilmaiseksi oman valintamme mukaan lähes rajattomasta tarjonnasta, teemme ostoksia netistä, hoidamme pankkiasiamme nettipankissa, luemme uutiset lehtien sähköisistä versioista,

pidämme yhteyttä tuttaviiimme sosiaalisen median välineillä, pelaamisesta on tullut niin lasten kuin aikuistenkin viihdykettä. Työssä käyvistä yhä useampi käyttää tietotekniikkaa tavalla tai toisella päivittäin työssään ja tähän suhtaudutaan enemmän tai vähemmän itsestään selvyytensä eikä sitä enää pidetä minään erityisenä osaamisena. Monilta osin se, mitä pidettiin etäisenä tavoitteena 15–20 vuotta sitten, on toteutunut: Suomesta on kehittynyt moderni tietoyhteiskunta ja digitalisaation vaikutukset ulottuvat kaikkiin yhteiskunnan toimintasektoreihin myös koulutukseen.

On varsin luonnollista, että sama teknologinen kehitys, joka on muuttanut sekä vapaa-ajan käyttäytymistämme että tapaamme tehdä työtä, vaikuttaa myös käsityksiimme siitä, millaisena näemme koulun roolin lasten ja nuorten kasvattajana nykyaikaisessa nopeasti muuttuvassa mediayhteiskunnassa ja millaiset oppimisen muodot ja oppimisympäristöt tätä tehtävää mielestämme parhaiten palvelevat.

Oppimisteknologialle on muotoutunut yhä vahvempi rooli myös matematiikan opetukseen, missä aikaisemmin on totuttu tulemaan toimeen varsin vähin apuvälinein. Kuva 1 havainnollistaa tv:n keskeisimpiä tehtäviä matematiikan opetuksessa.



Kuva 1. Teknologian tehtävät matematiikan opetuksessa, muunneltu versio Drijversin, Boonin ja van Reeuwijkkin (2010) esittämästä jaottelusta.

Tietoyhteiskunnan rakentuminen on lisännyt merkittävästi informaalin, koulun ulkopuolisen oppimisen osuutta osaamispääoman kartumisessa. Monet taidot, jotka ennen opittiin koulussa, opitaan nyt vapaa-ajan toiminnoissa (Haapasalo ja Siekkinen, 2005). Koulu- ja

oppilaitosverkoston supistuminen on lisännyt tarvetta e-oppimiselle, jossa tieto- ja viestintäteknologian avulla mahdollistetaan kouluoppimisen kanssa mahdollisimman yhdenvertaiset, ajasta ja paikasta riippumattomat oppimismahdollisuudet Tietoa etsitään sekä ohjatusti että omatoimisesti muistakin lähteistä kuin perinteisistä oppimateriaaleista. Samalla vastuu tiedon oikeellisuuden, merkityksen ja käyttökelpoisuuden arvioinnista siirtyy enenemässä määrin tiedon käyttäjälle itselleen, jolloin erilaisia tiedon esittämismuotoja sisältävän tulkitsevan ja arvioivan lukemisen taidon merkitys kasvaa. Kansallisissa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissamme osana tulevaisuuden edellyttämää laaja-alaista osaamista painotetaan vahvasti ns. monilukutaidon merkitystä (POPS 2014, 22). Monilukutaito kattaa erilaiset lukutaidot, esimerkiksi peruslukutaidon, kirjoitustaidon, matemaattisen lukutaidon, kuvanlukutaidon, medialukutaidon ja digitaalisen lukutaidon. Myös kansainvälisissä tutkimuksissa kuten esimerkiksi PISA-arvioinneissa oppimiselle ja opetukselle asetettuja tämän suuntaisia oppiainekohtaisia yleistavoitteita on ryhdytty kutsumaan lukutaidoiksi (literacy). Tosin suomeksi käännettyissä raporteissa (esimerkiksi Sulkunen & Välijärvi, 2010), termille *mathematical literacy* on matemaattisen lukutaidon sijasta käytetty myös suomen kieleen paremmin sopivaa nimitystä matemaattinen osaaminen.

Oman haasteensa digitalisaatiokehityksessä mukana pysymiselle asettaa erilaisten teknisten apuvälineiden tavattoman nopea kehitys: se, mikä tänään on uutta ja kiehtovaa, on jonkun ajan päästä jo korvautunut jollakin muulla. Siksi vältän tässä yhteydessä menemästä kovin syvälle aiheen teknisiin yksityiskohtiin ja tarkastelen sitä, miten teknologian kehitys näyttää muuttavan ja on jo muuttanut matematiikan kouluoppimista ja matematiikan opettajan työtä, astetta yleisemmältä kannalta.

### **Matematiikan opetuksen ja oppimisen kulttuuri muuttumassa**

Viimeisen parin vuosikymmenen aikana digitalisaatio on merkittävästi muuttanut tapamme opettaa matematiikkaa. Uudet tietotekniset välineet, kuten esimerkiksi vuorovaikutteiset ja dynaamiset matematiikkaohjelmistot sekä monipuolistuva oppimisaihoiden, applettien tarjonta ja niiden helppo laadinta, ovat huomattavasti lisänneet mahdollisuuksiamme konkretisoida ja visualisoida matematiikan käsitteitä, sääntöjä ja operaatioita. Jos opettaja ei laadi havainnollistuksia itse, apuna voi käyttää verkkoon koottuja laajoja virtuaalisten havainto- ja toimintamateriaalien kirjastoja, kuten esimerkiksi *The National Library of Virtual*

*Manipulatives, Illuminations – Resources for Teaching Math, Shodor – Interactivate* tai *WisWeb*. Sivustojen materiaali koostuu osaksi perinteisesti käytettyjen toimintamateriaalien visuaalisista vastineista mutta myös sovelluksista, joita oikeilla, konkreettisilla välineillä olisi hankala toteuttaa.

Virtuaalisten materiaalien ja työkalujen etuna on, että ne ovat

- lähes aina saatavilla,
- riittävät kaikille,
- eivät kulu eivätkä rikkoonnu.

Toisaalta teknologian kehittyessä yhä suurempi osa rutiinilaskennasta on siirretty koneella tehtäväksi ainakin sen jälkeen, kun kynällä ja paperilla tehty peruslaskutaito on saavutettu. Peruslaskutoimitukset murto- ja desimaaliluvuilla voidaan laskea tavallisella jokamiehen laskimella, kuvaajat voidaan piirtää graafisella laskimella ja yhtälöt ratkaista symbolisilla laskimilla. Sekä oppilaan että opettajan matemaattinen toiminta ovat yhä suuremmassa määrin ihmisen ja koneen hallittua vuorovaikutusta. Käyttäjän pitää osata viestiä sanottavansa koneelle sen ymmärtämässä muodossa ja tulkita saamansa vastauksen mielekkyys suhteessa toiminnan päämäärään.

Modernit opastavat laskentateknologiat, kuten esimerkiksi matemaattisen hakukoneen *Wolfram|Alpha, Computational Knowledge Engine* (<https://www.wolframalpha.com/>) laaja versio, eivät tarjoa käyttäjälle pelkästään vastauksia laskuihin vaan näyttävät pyydettyä tavallisimpiin laskuihin myös ratkaisujen välivaiheet, jotta käyttäjä paremmin ymmärtäisi, miten ratkaisuun on päädytty. Tämän tyyppiset sovellukset viitoittavat tietä siihen, että tulevaisuudessa käyttäjä voisi valita tason, kuinka yksityiskohtaisesti häntä ratkaisuprosessissa opastetaan. *Wolfram Alpha* yhdistää monipuoliseen matematiikkaohjelmaan hakukoneen, jonka taustalla ovat laajat tietokannat muustakin tiedosta kuin vain matematiikasta. Sovellus tarjoaa käyttäjälle muun muassa oheistietoa siitä, millainen historiallinen tausta käsitteillä ja matemaattisilla faktoilla on. Symbolisen esitysmuodon lisäksi tietokanta sisältää laadukkaita visualisointeja tutkituille asioille. Visualisoinnit ovat siirrettävissä normaaleilla Kopioi - Sijoi -toiminnoilla Microsoft Windows -yhteensopiviin ohjelmiin.

Kehittyneiden grafiikan ja geometrian tuottamisen apuneuvojen ansiosta matematiikasta on tullut entistä ymmärrettävämpää ja monen mielestä myös entistä kiinnostavampaa. Samalla on tullut entistä helpommaksi ja houkuttelevaksi lähestyä matematiikkaa kokeellisesti, problematisoivalla ja uteliaisuutta ruokkivalla otteella. Erinomaisia apuneuvoja tutkivan oppimisen tukemiseen ovat esimerkiksi niin sanotut dynaamisen geometrian ohjelmistot, jotka ”muistavat” kuvioden piirtämistoiminnoissa annetut määritteet ja mahdollistavat kuvioden muuntelun niin, että muunnoksissa kuvioden määrittelevät ominaisuudet säilyvät. Dynaamisuudella viitataan tässä ohjelmien sallimaan geometrinen kuvioden, funktioiden kuvaajien, tilastollisten jakaumien, parametrien ja niin edelleen helppoon muunneltavuuteen ohjelman päivittäessä muutokset näytöllä näkyviin (ja taustalla oleviin) lausekkeisiin ja visuaalisiin elementteihin. Dynaamisia ohjelmia käyttäessään käyttäjä kokee olevansa aidossa interaktiivisessa suhteessa koneen kanssa ja käyvänsä vuoropuhelua koneen kanssa tehtävää suorittaessaan. Hyvä esimerkki tutkivaa lähestymistapaa tukevasta ohjelmistosta on ilmaisohjelma *GeoGebra*, joka sai alkunsa dynaamisen geometrian ohjelmana, mutta on siitä laajentunut monipuoliseksi symbolista laskentaa sisältäväksi koulumatematiikan yleisohjelmistoksi.

Dynaamisilla ohjelmilla opettajan on helppo laatia havainnollistuksia matematiikan tunneilla perinteisesti opiskeltaviin asioihin ja yllyttää oppijoita testaamaan, voidaanko tulokset yleistää. Tutkittaessa vaikka kolmion kulmien summan vakioisuutta voidaan herättää kysymys, löytyykö vastaavaa tulosta nelikulmioille ja ehkä muillekin monikulmioille. Teknologian mahdollistamassa tutkivassa lähestymistavassa matematiikassa käytettävät tehtävät saavat uuden kokeellisuutta ruokkivan luonteen. Kuva 2 havainnollistaa perinteisen ja tutkimuksellisen lähestymistavan eroja matematiikan tehtävien rakenteessa. Tehtävätyypit eivät luonnollisestikaan ole toisiaan poissulkevia vaan ennemminkin tarjoavat toisiaan täydentäviä lähestymistapoja matematiikkaan.

### PERINTEINEN TEHTÄVÄN ASETTELU

Tehtävän anto tekstinä mahdollisesti staattisen mallikuvan kanssa



Tutki, mitä tietoja tekstissä ja kuvassa on annettu



Laske pyydetty asia tai osoita/todista väite todeksi käyttäen annettuja tietoja

### TUTKIMUSTEHTÄVÄN ASETTELU

Laadi ohjeen mukainen muunneltava piirros, taulukko, kuvaaja, ... tai käytä vastaavaa valmiina annettua materiaalia



Kokeile/Tutki



Tee päätelmä



Testaa päätelmän toimivuutta



Perustele havaintosi/väitteesi

(itsellesi, kavereillesi, opettajalle)

Kuva 2. Tehtävän suoritus perinteisessä ja tutkimuksellisessa lähestymistavassa.

Teknologiavusteisesti ratkaistava tutkimustehtävä voisi lukiotasolla olla vaikkapa seuraava.

Tehtävä: Oikoot  $d_1$  ja  $d_2$  suorakulmion ABCD piirillä olevan pisteen P etäisyydet lävistäjistä AC ja BD.

- Piirrä annettuja tietoja vastaava dynaaminen kuvio, jossa voit liikuttaa pistettä P suorakulmion ympäri pitkin suorakulmion piiriä.
- Mitä voit todeta summan  $d_1 + d_2$  arvosta?
- Miten arvo riippuu suorakulmion koosta?
- Perustele havaintosi matemaattisesti.

Tarjonnan lisääntyessä matematiikan opetuksessa käytettävät ohjelmistot ovat tulleet edullisemmiksi hankkia, osin jopa ilmaisiksi. Monet opetukseen mainiosti soveltuvat pelit, havainnollistukset, videot, tutkivaa oppimista palvelevat työkalut ja varsinaiset matematiikkaohjelmat ovat vapaasti käytettävissä joko verkon kautta tai asennettavissa omalle

tietokoneelle, tabletille tai jopa puhelimeen. Tarjolla olevien tuotteiden hintatason lasku, jopa romahdus, on luonnollisesti ratkaisevasti lisännyt opettajien kiinnostusta ja mahdollisuuksia ottaa käyttöön uusia tietoteknisiä sovelluksia matematiikan opetukseensa.

Kehityksessä piilee myös vaaransa. Mahdollistamalla matematiikan algoritmisten toimintojen ulkoistamisen koneille teknologia on myös vaarassa köyhdyttää käyttäjänsä matemaattinen ajattelu mekaaniseksi ”matemaattisen työstökoneen” ohjailuksi, jolla suoritetaan numeeriset laskut, työstetään lauseke toiseen muotoon, puristetaan yhtälöstä irti sen ratkaisut tai derivoidaan ja integroidaan funktiot tietämättä, mitä tämä kaikki matemaattisesti tarkoittaa. Nykyisin saa esimerkiksi tablettiin tai älypuhelimeen maksutta tai enimmillään muutaman euron kertamaksulla ladattua sovelluksen, joka hoitaa numeeristen laskutoimitusten ohella yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemisen, kuvaajien piirrot, derivoinnit ja integroinnit. Samanaikaisesti on siis menossa digitalisaatiokehitys, joka tuo matematiikan entistä useamman ulottuville ja entistä havainnollisempana, ja toisaalta kehitys, joka ulkoistaa yhä useampia matemaattisia suorituksia koneille siirtäen matematiikan taustalle käyttäjältä näkymättömiin niin sanotuksi mustaksi laatikoksi (Heugl, 1996). Uudessa tilanteessa on ratkaistava, millaista matemaattista ymmärrystä oppijoille koetetaan jatkossa opettaa ja millaisia päässä- ja käsinlaskennan taitoja sekä teknisten apuvälineiden käytön taitoja harjaannutetaan, jotta matemaattinen ymmärrys rakentuisi riittävästi, eikä koulumatematiikasta tulisi pelkkää ”matemaattisen työstökoneen” ja käyttäjän välistä mekaanista vuorovaikutusta? Muun muassa tällaiset matematiikan opetuksen periaatteelliset kysymykset ovatkin nykyisessä matematiikan didaktisessa tutkimuksessa vilkkaan tutkimuksen kohteena ja isolta osin myös edelleen ratkaisematta. Haapasalon (Haapasalo, 2004; Haapasalo & Karkkulainen, 2014) sanoin helpon laskennan ja ymmärryksen välisen ongelman didaktinen ydin voidaan kiteyttää kysymykseen ”Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää?” Uuden didaktisen kulttuurin luominen on tärkeää, sillä se, opimme me hyödyntämään tieto- ja viestintätekniiikan matematiikan opetukselle tarjoamat kiistattomat mahdollisuudet ja samalla välttämään sen mukanaan tuomat karikot, pitkälti määrittää sen, millaista matemaattista ymmärryksen pääomaa yhteiskunta koulutusorganisaatioidensa kautta tulevaan käyttöönsä tuottaa.

## Käytetäänkö matematiikan opetuksessa tieto- ja viestintäteknikkaa vieläkin liian vähän?

Opetushallituksen muistiossa Tieto ja viestintäteknikka opetuskäytössä - Välineet, vaikuttavuus ja hyödyt (Oph 2011) tieto- ja viestintäteknikan opetuskäytön arvioitiin olleen silloisen tiedon varassa Suomessa varsin vähäistä. Näin oli etenkin matematiikassa. Vastaavasti SITES 2006 –tutkimuksessa (Kankaanranta & Puhakka 2008, KTL 2008) matematiikan opettajista vain 9 % kertoi käyttävänsä tietotekniikkaa opetuksessaan kerran viikossa tai useammin. Havainto oli linjassa PISA-arviointeihin (Sulkunen & Välijärvi 2012, 67) liittyneiden oppilaskyselyjen kanssa. Oppilaiden vastausten perusteella suomalaisista nuorista vain 18 % käytti matematiikan tunnilla tietokonetta viikoittain ainakin jonkin aikaa. EU:n komission tilaamassa ja Liegen yliopiston sekä European Schoolnetin yhdessä toteuttamassa Euroopan laajuudessa vertailevassa tutkimuksessa ESSIE todettiin, että Suomessa koulujen tietotekninen varustelu oli kyllä suhteellisen hyvässä kunnossa, mutta silti perusopetuksen yläluokilla tietokoneita käytettiin Suomessa vähiten 28 vertailuun osallistuneen maan joukossa. Oppilaat suhtautuivat tässä tutkimuksessa varsin epäilevästi tietokoneiden käytön tarjoamaan hyötyyn matematiikan opiskelussa. (Wastiau ym. 2013). Johtopäätöksenä voidaan todeta, että ainakin vielä 2000-luvun ensimmäisenä vuosikymmenenä tietotekniikan käyttö matematiikan opetuksessa oli jäänyt varsin vähäiseksi. On kuitenkin varsin selvää, että tulevaisuudessa tietoteknisillä sovelluksilla tulee tälläkin alueella olemaan entistä vahvempi rooli. Tähän on moniakin syitä. Opettajien omat tieto- ja viestintäteknikan taidot sekä saatavilla olevien sovellusten tuntemus on parantunut. Lisäksi matematiikan opetuksen tueksi on tarjolla runsaasti ilmaista digitaalista opetusmateriaalia, opetuspelejä, hyötyohjelmia ja ohjeita näiden käyttöön. Lisäksi valtakunnalliset opetussuunnitelman perusteet (POPS 2014) kannustavat ja oikeastaan paremminkin velvoittavat hyödyntämään opetuksessa tieto- ja viestintäteknikkaa ja tutustuttamaan oppilaat erilaisten sovellusten käyttöön. Lukiotasolla merkittävä askel didaktisen kulttuurin muutokseen on ollut päätös sähköisen ylioppilastutkinnon käyttöönotosta myös matematiikan kokeessa sekä symbolisen laskennan (CAS) salliminen laskennan apuvälineeksi lukio-opinnoissa ja ylioppilaskirjoituksissa.

Aiemmin kouluja vaivannut laitteiden puute ei enää oikeastaan ole este tieto- ja viestintäteknikan hyödyntämiselle matematiikan opetuksessa. Mobiiliteknologian yleistyminen on viime aikoina nopeasti muuttanut käsityksiämme siitä, millaisia laitteita

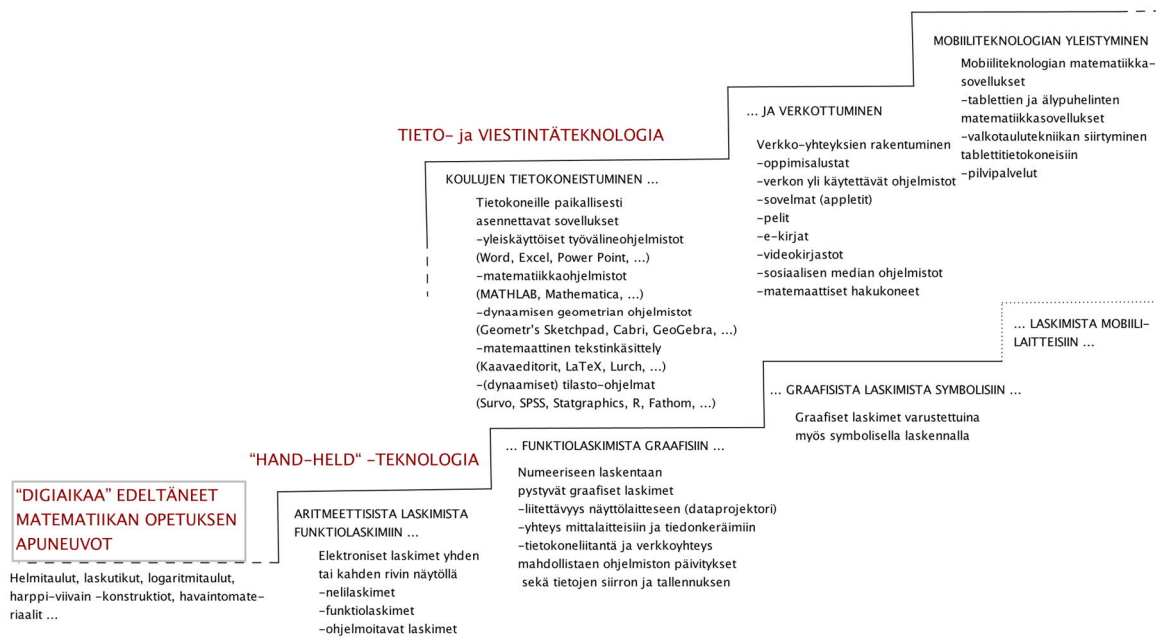


matematiikan opiskelutilanteissa kotona ja koulussa tarvitaan. Kun aiemmin esimerkiksi numeerisen ja symbolisen laskennan, kuvaajien piirron ja taulukkolaskennan apuna käytettiin laskinta tai tietokonetta, nyt vastaavan voi tehdä myös tablet-tietokoneilla tai jopa älypuhelimilla. Laskentaa ja muuta matematiikan tuottamista helpottavien sovellusten ohella vastaava kehitys on tapahtunut myös erilaisten opetusohjelmien ja opetuspelien osalla, joiden saatavuus laajenee nopeasti tietokoneympäristöstä kevyempiin mobiililaitteisiin. Mika Setälä (2012) tähdentää raportissaan, että mobiilioppimisessa oleellista on tähdätä laitekannassa yhden suhde yhteen –asetelmaan siten, että jokaisella oppijalla on käytössään tietokone tai mobiililaitte. Tavoitteeseen päästään oleellisesti helpommin, jos oppilaiden sallitaan käyttää koulussa myös omia laitteitaan, kuten laskimia, padeja ja älypuhelimia BYOD (Bring Your Own Device) –suosituksen mukaisesti.

Miten otsikon kysymykseen, käytetäänkö matematiikan opetuksessa tieto- ja viestintäteknikkaa liian vähän, tulisi siis vastata. Tutkimus ei anna kysymykseen kiistatonta vastausta. On selvää, että uudet teknologiat mahdollistavat monen asian opettamisen paremmin kuin ennen. Monet tutkimukset kuitenkin osoittavat myös, että oppimistulokset eivät välttämättä parane tieto- ja viestintäteknikan käyttöä lisäämällä (OECD 2015). Osasyynä tähän on muun muassa oletettu olleen se, että teknologian käytön ohjeistaminen ja opettelu on vienyt aikaa varsinaiselta matematiikan opiskelulta. Tässä suhteessa ”diginatiiviksi” (Prensky, 2001) kutsuttu sukupolvi, joka on varhaislapsuudesta lähtien tottunut käyttämään teknologiaa apunaan lähes kaikissa toiminnoissaan, on kuitenkin valmiimpi ottamaan haltuunsa uudet teknologiat nopeammin ja tehokkaammin kuin edeltäjänsä. Teknologian käytön hyötyä pitää arvioida myös matematiikan imagon ja oppilaiden motivoitumisen kannalta ja pohtia, millaisena koulussa opetettava matematiikka nykykoululaiselle näyttäytyy muiden oppiaineiden joukossa. Jos oppilaan innostus matematiikkaan saadaan opetusta uudistamalla herätettyä ja asenne luotua myönteiseksi, paljon on voitettu. Kannattaa muistaa, että matematiikan opiskelu opettaa paljon muutakin kuin vain matematiikkaa. Nykyaikaisissa koulumatematiikan oppimisympäristöissä opitaan matematiikan ohella tärkeitä tulevaisuuden taitoja kuten monipuolisia vuorovaikutustaitoja kanssaihminen ja entistä osaavampien koneiden kanssa, suunnittelutaitoja, työn tuotosten kriittistä arviointia jne.

## Matemaattisen ajattelun apuvälineet muutoksessa

Kautta historian ihmiset ovat kulloisenkin tarpeensa mukaan pyrkineet helpottamaan ajan kulumisen seuraamista, laskemista, kirjanpitoa, taulukoimista sekä geometrista suunnittelua kehittämällä apuneuvoja, joilla toiminnot on saatu tehtyä mahdollisimman sujuvasti ja virheettömästi sekä vähällä muistin rasituksella. Abakus eli helmitaulu, jota edelleen käytetään monin paikoin maailmassa laskennan apuna, on tietävästi ollut käytössä jo muinaisessa Babyloniassa. Geometrisen piirtämisen välineet harppi ja viivain ovat olleet geometristen konstruktoiden sallittuja apuvälineitä antiikin ajoista asti. Nykyisissä dynaamisen geometrian ohjelmissa harppi ja viivain –konstruktiot ovat saaneet digitaaliset vastineensa. Koulumatematiikassa siirtyminen digitaalisten apuvälineiden aikaan alkoi 1970-luvun puolivälin jälkeen, kun ns. taskulaskimet alkoivat syrjäyttää käytöstä siihen laskennan apuvälineinä käytetyt laskutikut ja logaritmitaulut. Sen jälkeen opetusteknologinen kehitys on ollut tasaista kahdella rintamalla. Yhtäältä kehitys on ollut nopeata laskinten ja niiden oheislaitteiden eli niin sanotun ”hand-held –tekniikan saralla ja toisaalta tieto- ja viestintätekniikan sovelluksissa. Kuva 3 kokoaa yhteen koulumatematiikan opettamisen kannalta merkittävimmät teknologisen kehityksen vaiheet. Missä määrin mahdollisuudet todellisuudessa on otettu käyttöön oppilaitoksissa ja yksittäisten opettajien opetuksessa, se vaihtelee huomattavasti. Suomalaisilla opettajilla perinteisesti ollut pedagoginen vapaus tehdä opetusmenetelmälliset ratkaisunsa itse koskee pääsääntöisesti myös teknologisten apuvälineiden käyttöä opetuksessa. Valtakunnallisissa opetussuunnitelman perusteissa tätä koskevaa velvoittavaa ohjeistoa on varsin niukasti.



Kuva 3. Teknologia matematiikan kouluopetuksessa. Kaksi rinnakkaista trendiä ”hand-held” –teknologian ja tieto- ja viestintätekniiikan kehityksessä.

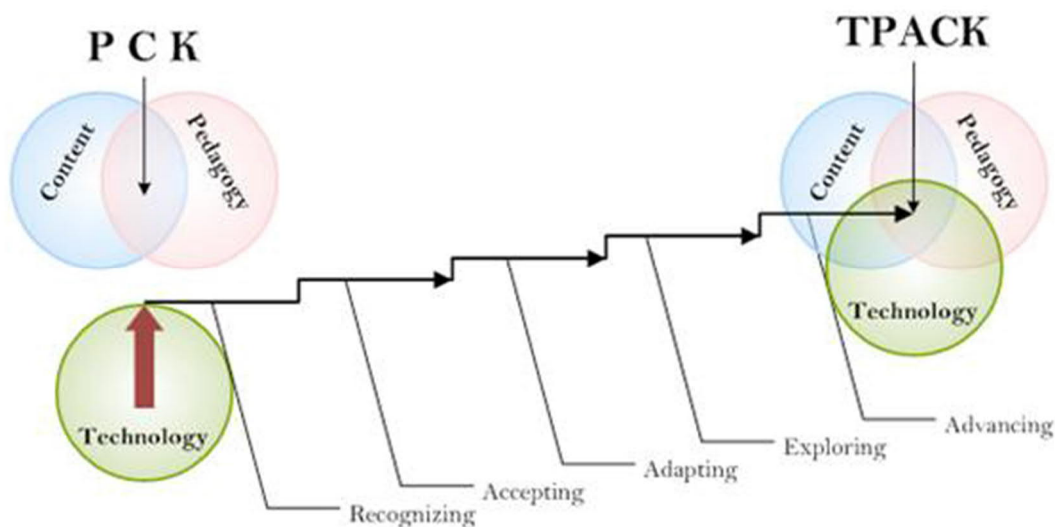
### Haasteita opettajan pedagogiselle kompetenssille

Edellä kuvaamani laskentateknologian ja tieto- ja viestintätekniiikan kehityksestä johtuva matemaattisten oppimisympäristöjen muutos edellyttää matematiikkaa opettavilta opettajilta alan nopean kehityksen seuraamista ja uudenlaista haastetta ammattitaidon säilyttämisen turvaamiseksi. Alan moninaisen teknologian tuntemus ja taito hyödyntää teknologian tuomia mahdollisuuksia oppilaidensa parhaaksi mielekkäällä tavalla omassa opetustyössään on tullut erottamattomaksi osaksi opettajan ammatillista kompetenssia. Valikoinnin taito on tässäkin tärkeää. Se, mikä on sopiva työväline yhdelle, ei välttämättä sovi toiselle.

Tutkijat Mishra ja Koehler (2006) ovat kuvanneet moderneissa oppimisympäristöissä työskentelevältä opettajalta edellytettävää pedagogista kompetenssia niin sanotulla TPACK-mallilla. Mallissa on perustana Schulmanin (1986) klassinen tulkinta opettajalta edellytettävästä pedagogisesta kompetenssista, joka koostuu kolmesta komponentista: (1) opettavien asioiden osaamisesta (sisältötieto, aineenhallinta), (2) pedagogisesta osaamisesta yhdistyneenä kasvatukselliseen näkemykseen (pedagoginen tieto) ja (3) taidosta suhteuttaa opettavien asioiden käsittely opetuksellisiin ja kasvatukselliseen päämääriin (pedagogis-

sisällöllinen tieto). Schulmanin malliin nähden TPACK-mallissa on uutta teknologisen osaamisen tuomin neljänneksi komponentiksi sisällöllisen ja pedagogisen osaamisen rinnalle. Kotimaiseen puhetapaan sopeuttaen mallin voisi sanoa painottavan opettajan ammatillisessa kompetenssissa kolmea tekijää pedagogis-kasvatuksellista osaamista, aineenhallinnallista osaamista ja teknologista osaamista.

TPACK-mallin myöhemmissä tulkinnoissa (esimerkiksi Niess ym., 2009) on korostettu myös sitä, että teknologisen osaamisen hankkiminen ja ylläpito sekä sen tarkoituksenmukainen hyödyntäminen opetus- ja kasvatustyössä perustuu jatkuvaan oppimisprosessiin, joka opettajalla on meneillään koko ajan. Joidenkin mahdollisuuksien käyttöön otossa opettaja on jo pitkällä, joidenkin toisten vasta alkutaipaleella ja monista tulevista hän ei ole vielä tietoinenkaan. Ammatillisen kompetenssin ytimenä on niin sanottu teknologis-pedagoginen sisältötieto. Yhtenä osana tätä ammattitaitoa on taito tunnistaa, mikä on minkäkin sovelluksen ensisijainen pedagoginen käyttötarkoitus ja arvioida sovelluksen tarjoaman tulkinnan sisällöllistä oikeellisuutta (cognitive fidelity) opittavaksi tarkoitettun sisällön kannalta (Bos 2009, Tossavainen 2014). Kuva 4 havainnollistaa tämän tulkinnan mukaista opettajan ammattitaidon uusiutumisprosessia, jonka tyypillisinä vaiheina on ensi vaiheessa uuteen teknologiaan tutustuminen, sen hyväksyntä ja käyttöönotto ja myöhemmin uuden teknologian mukanaan tuomien mahdollisuuksien tutkiminen, teknologian edistynyt omintakeinen soveltaminen ja kyky arvioida sen tarjoaman lähestymistavan pedagogista arvoa suhteessa muihin lähestymistapoihin.



Kuva 4. Opettajan teknologisen osaamisen integroituminen opetus- ja kasvatustyön kehukseen Niess ym. (2009) esittämän mallin mukaan.

Tieto- ja viestintätekniikan kehitys on tuonut ja tuo edelleen opettajille ammatillisesti niin paljon uutta opittavaa, ettei enää voi ajatella, että yhteiskunta huolehtisi opettajien ammattitaidon ylläpitämisestä yksistään järjestämällä täydennyskoulutuskurssien tyyppistä tvtkoulutusta. Muutokset tällä saralla ovat niin nopeita ja koulutettavia niin paljon, että vastuu osaamisen ylläpidosta siirtyy väistämättä opettajille itselleen. Vertaisoppimista tukevat blogit tarjoavat tähän erään ratkaisun. Informaalin oppimisen hyödyntäminen ja autonomisen oppijuuden kehittyminen ovat tavoitteina tärkeitä koko oppivalle koulu yhteisölle. Tieto- ja viestintätekniikalla on tässä kaksoisrooli: yhtäältä tv- taidot ovat niitä, joita kartutetaan, ja toisaalta näiden taitojen ja tekniikan myötä omaehtoinen kouluttautuminen käy mahdolliseksi, pitkälti jopa ajasta ja paikasta riippumatta. Uuden teknologian käyttöönotto

## Lopuksi

Mihin kaikkeen edellä luonnehdittu kehitys johtaa, sitä on mahdoton pitkällä tähtäimellä tietää, mutta joitakin suuntaviivoja voinee arvailla. Erilaisia teknologisia apuneuvoja käytetään matematiikan opetuksessa jatkossakin ja todennäköisesti enenemässä määrin. Oppimateriaalit digitalisoituvat ja siirtyvät verkkoon – niin opettajan laatimat kuin oppikirjatkin. Sähköisen ylioppilaskokeen käyttöönotto on osa digitalisoitumiskehitystä. Opastavat laskennan apuvälineet yleistyvät. Matemaattiset tekstinkäsittelyjärjestelmät oppivat tarkistamaan myös kirjoitetun tekstin matemaattista oikeellisuutta kielentarkistuksen ohella, kuten kehitteillä oleva Lurch-ohjelma. Pelillisyyttä hyödynnetään opetuksessa entistä enemmän. Käänteisestä opetuksesta (flipped classroom) alkanut suuntaus käyttää itse tuotettuja tai esimerkiksi Khan Academyn (<https://www.khanacademy.org>) tarjoamia opetusvideoita luokkaopetuksen täydentäjänä ja jopa korvaavana vahvistuu. Sosiaalista mediaa käytetään entistä enemmän yhteisöllisen oppimisen tukena myös matematiikan oppimisessa. Vaikuttaa myös siltä, että olemme koulumatematiikan osaltakin yhä valmiimpia hyväksymään laskennan tekemisen - sekä aritmeettisten että algebrallisen – koneilla. Vai olemmeko sittenkään? Ja jos olemme, niin missä määrin. Astuuko tässä sittenkin esiin dilemma yhtäältä helpon suorittamisen ja toisaalta

ymmärryksen rakentumisen välillä. Ihmisen ja teknologian välinen vuorovaikutus on vaikutukseltaan kaksisuuntainen (katso lähemmin esimerkiksi Trouche, 2005 ja vuorovaikutussuhdetta kuvaava käsitteistö instrumental genesis, instrumentalism ja instrumentation). Yhtäältä teknologia muuttaa käyttäjänsä tapaa hahmottaa ja ymmärtää todellisuutta. Väline, jolla jotakin tehdään, vähitellen määrittää viitekehyksen, jolla tekemistä hahmotetaan. Toisaalta väline itse saa käyttäjänsä käsissä uusia käyttötarkoituksia, jopa sellaisia, joita sille ei koskaan ollut suunniteltu. On naiivia ajatella, että kehittyneiden teknisten apuneuvojen kuten esimerkiksi symbolisen laskennan (CAS) ja dynaamisen geometrian (DGS) käyttöönotto olisi pelkästään opettajan didaktinen ja opetusmenetelmällinen valinta. Päinvastoin kyse on muutoksesta, joka vaikuttaa syvästi oppijoiden ja opettajien tapaan hahmottaa koulumatematiikkaa, heidän matematiikkäkäsityksiinsä sekä laajemmin koulumatematiikan opettamisen ja oppimisen kulttuuriin (Haapasalo & Silfverberg 2007; Silfverberg, 2006 ja 2007; Silfverberg & Haapasalo 2010).

## Lähteet

Binkley M., Erstad, O., Herman J., Raizen, S. Ripley, M., Miller-Ricci, M., & Rumble, M. 2012. Defining Twenty-First Century Skills. Teoksessa P. Griffin, B. McGaw, & E. Care (toim.) *Assessment and teaching of 21st century skills* (ss. 17–66). New York: Springer.

Bos, B. 2009. Technology with cognitive and mathematical delity: what it means for the math classroom. *Computers in the Schools* 26(2), 107–114.

Drijvers, P., Boon, P., & Van Reeuwijk (2010). Algebra and technology. Teoksessa P. Drijvers (toim.) *Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (ss. 179–202). Rotterdam: Sense.

Haapasalo, L. (2004). Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, P. Ahonen, & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 50–83). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Haapasalo, L., & Karkkulainen, O. (2014). *CAS KUMMAA - oivallan matikkaa teknologian avulla*. Joensuu: MEDUSA-Software.

Haapasalo, L., & Siekkinen, M. (2005). Looking Technology Supported Environments from Conceptual and Procedural Perspectives. Teoksessa H. Ruokamo, P. Hyvönen, M. Lehtonen, & S. Tella (toim.) *Teaching-Studying-Learning (TSL) Processes and Mobile Technologies – Multi-, Inter-, and Transdisciplinary (MIT) Research Approaches. Proceedings of the 12th International NBE Conference*. Publications in Education 11 (ss. 57–66). Rovaniemi: University of Lapland.

Haapasalo, L., & Silfverberg, H. 2007. Technology enriched mathematics education. Teoksessa E. Pehkonen, M. Ahtee, & J. Lavonen, J. (toim.) *How Finns Learn Mathematics and Science* (ss. 166–182). Rotterdam: Sense.

Heugl, H., Klinger, W., & Lechner, J. (1996). *Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen*. Bonn: Addison-Wesley.

[http://www.acdca.ac.at/material/allgem/buch/buch96\\_4didaktik.pdf](http://www.acdca.ac.at/material/allgem/buch/buch96_4didaktik.pdf)

Kankaanranta, M., & Puhakka, E. (2008). *Kohti innovatiivista tietotekniikan opetuskäyttöä, Kansainvälisen SITES 2006 -tutkimuksen tuloksia*. Jyväskylä: Jyväskylän yliopiston Koulutuksen tutkimuslaitos.

Leino, K., & Nissinen, K. (2012). Verkkolukutaito ja tietokoneen käyttö Pisa 2009 – tutkimuksessa. Teoksessa S. Sulkunen, & J. Välijärvi (toim.) *Pisa 2009. Kestääkö osaamisen pohja?* (ss. 62–76). Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2012:12.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A new framework for teacher knowledge. *Teachers College Record* 108(6), 1017–1054.

Niess, M. L., Ronau, R. N., Shafer, K. G., Driskell, S. O., Harper S. R., Johnston, C., Browning, C., Özgün-Koca, S. A., & Kersaint, G. (2009). Mathematics teacher's TPACK

standards and development model. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 4–24.

Norrena, J. (2013). *Opettaja tulevaisuuden taitojen edistäjänä: "Jos haluat opettaa noita taitoja, sinun on ensin hallittava ne itse"*. Jyväskylä Studies in Computing 169. Jyväskylä: University of Jyväskylä.

KTL (2008). *Tiedote 6.3.2008, laaja versio*.

[https://ktl.jyu.fi/img/portal/9378/Tiedote\\_pitka\\_versio.pdf?cs=1204787677](https://ktl.jyu.fi/img/portal/9378/Tiedote_pitka_versio.pdf?cs=1204787677)

OECD (2015). *Students, Computers and Learning: Making the Connection*, OECD Publishing: Paris.

<http://dx.doi.org/10.1787/9789264239555-en>

Oph (2011). *Tieto- ja viestintäteknikka opetuskäytössä – Välineet, vaikuttavuus ja hyödyt. Tilannekatsaus toukokuu 2011*. Muistiot 2011:2.

[http://www.oph.fi/download/132877\\_Tieto\\_ja\\_viestintateknikka\\_opetuskaaytossa.pdf](http://www.oph.fi/download/132877_Tieto_ja_viestintateknikka_opetuskaaytossa.pdf).

Prensky, M. (2001). "Digital Natives, Digital Immigrants". *On the Horizon* 9(5), 1–6.

Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher* 15(2), 4–14.

Seppälä, M. (2012). *Mobiilioppiminen tänään*.

<http://koppa.tampere.fi/alfresco/service/com/eduix/publicDownload/6896a89d-dbda-448a-9040-6a285b83abb1>

Silfverberg, H. 2006. Pohdintaa paradigmatvaihdosten vaikutuksista matematiikan opettamisen kulttuuriin. Teoksessa L. Häggblom, L. Burman, & A.-S. Røj-Lindberg (toim.) *Perspektiv på kunskapens och lärandets villkor. Festskrift tillägnad professor Ole Björkqvist* (ss. 89 – 100). Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi: Vaasa.



Silfverberg, H. 2007. Paradigmavaihdokset ja matematiikan opettamisen kulttuuri – opiskelijoiden käsityksiä pitkästä matematiikasta nyt ja vuonna 2020. In J. Lavonen Tutkimusperustainen opettajankoulutus ja kestävä kehitys. Ainedidaktinen symposiumi Helsingissä 3.2.2006. Osa 1 (ss. 391–402). Helsinki: Helsingin yliopisto.

Silfverberg, H., & Haapasalo, L. (2010). Painful Paradigm Shifts in the Teaching and Learning of Mathematics. Teoksessa B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Palsdottir, B. Dahl & L. Haapasalo (toim.) *The Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education* (ss. 731–746). Charlotte, NC: IAP - Information Age Publishing, Inc..

Sulkunen S., & Välijärvi, J. (toim.) PISA09. Kestääkö osaamisen pohja? Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2012:12.

<http://www.minedu.fi/export/sites/default/OPM/Julkaisut/2012/liitteet/okm12.pdf?lang=fi>

Tossavainen, T. (2014) Onko teknologiasta oppimisen tueksi? Esimerkkejä matematiikasta. *Kasvatus* 45(5), 459–466.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments. Teoksessa D. Guin, K. Ruthven ja L. Trouche (toim.) *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (ss. 137–162). New York: Springer.

Wastiau, P., Blamire, R., Kearney, C., Quittre, V., Van de Gaer, E., & Monseur, C. (2013). The Use of ICT in Education: a survey of schools in Europe. *European Journal of Education* 48(1), 11–27.