Hiukkasfysiikkaa kaarevassa avaruudessa

Pro Gradu
Turun yliopisto
Fysiikka
2023
Fil. yo. Miko Lönnroth
Tarkastajat:
Dos. Iiro Vilja
FM. Jesse Huhtala

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan laitos

Lönnroth, Miko Hiukkasfysiikkaa kaarevassa avaruudessa

Pro Gradu, 63 s., 6 liites.
Fysiikka
Syyskuu 2023

Tämän hetkisen teoreettisen tietämyksen mukaan universumi voidaan kuvata kahden teorian pohjalta. Suurten objektien kuten planeettojen liike voidaan selittää Albert Einsteinin vuonna 1915 julkaiseman yleisen suhteellisuusteorian (GR) avulla, kun taas atomitason fysiikka on selitettävissä kvanttikenttäteorialla (QFT). Nämä kaksi modernin fysiikan kulmakiveä on vuosien varrella todistettu useita kertoja kokeellisesti todeksi.

Teoreettiset fyysikot uskovat silti, että nämä teoriat ovat keskeneräisiä. GR hajoaa, jos tarkastellaan esimerkiksi mustien aukkojen singulariteettia ja selitykseksi tälle on esitetty, ettei GR pysty kuvaamaan gravitaatiota pienissä skaaloissa. Toisaalta QFT, joka pystyy selittämään vahvan, heikon ja sähkömagneettisen voiman, ei pysty selittämään gravitaatiota. Tämän vuoksi usea teoreettinen fyysikko uskoo, että yhdistämällä nämä teoriat saadaan kaiken kattava teoria, kvanttigravitaatio-teoria. Vuosien varrella tällaiseksi teoriaksi on esitetty monia kandidaatteja kuten säieteoria (string theory), muttei täydellistä teoriaa olla saatu vielä kehitettyä.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tarkastella kvanttikenttäteoriaa kaarevassa avaruudessa. Kaareva avaruus pidetään klassisena taustana QFT:lle, jolloin saadaan "välimaaston" teoria kvanttigravitaation ja Minkowskin avaruuden QFT:n välille. Luvussa 1 esitetään käytettävä malli ja sen käyttökelpoisuus. Luvussa 2 lukija perehdytetään added-up -menetelmään, jolla kaarevan avaruuden hiukkasfysiikan suureita voidaan laskea. Luvussa 3 esitetään jo laskettuja tuloksia skalaarihiukkasen hajoamiselle skalaari- ja fermionihiukkasiksi ja luvussa 4 lasketaan hajoaminen vektorihiukkasiksi. Pyrkimyksenä on luoda kattava ymmärrys kaarevan avaruuden hiukkasfysiikasta.

Asiasanat: Hiukkasfysiikka kaarevassa avaruudedssa, Skalaarihiukkanen, Fermionihiukkanen, Vektorihiukkanen, Added-up -menetelmä

Sisällys

Johdanto **1**

1 Kvanttikenttäteoriaa kaarevassa avaruudessa **1**

1.1 Kvanttikenttäteoria 1

1.2 Gravitaatio kvanttikenttäteoriassa 3

1.3 Bogoliubov-muunnos 8

1.4 Hiukkanen kaarevassa avaruudessa 10

1.5 Konformaalinen kytkentä 12

2 Added-up -menetelmä **15**

2.1 Kenttien vuorovaikukset kaarevassa avaruudessa 15

2.2 Perturbaatioteoriaa ja muutostodennäköisyyksiä 18

2.3 Added-up todennäköisyys 21

3 Skalaarikentän hajoaminen kaarevassa avaruudessa **25**

3.1 Hajoaminen skalaarikanavaan 25

3.2 Hajoaminen fermionikanavaan 34

4 Skalaarikentän hajoaminen vektorikanavaan **44**

4.1 Vektorikentän kvantisointi 44

4.2 Hajoaminen vektorikanavaan 50

4.3 Lopputulokset 53

5 Yhteenveto **55**

A 4-ulotteinen konformaalinen kytkentä, sekä liikeyhtälön muunnos **58**

B Liikeyhtälön ja mittaehtojen muuntuminen **60**

C Sisätulon ominaisuuksia **62**

Johdanto

Koko esityksen ajan käytetään luonnollisia yksiköitä, eli $\epsilon_0 = \mu_0 = \hbar = 1$, ellei toisin mainita. Kreikkalaiset indeksit $\mu,\ \nu, ...$ saavat arvot $0,\ 1,\ 2, ...,\ d-1$ ja latinalaiset indeksit $i,\ j, ...$ saavat arvot $1,\ 2, ...,\ d-1$, missä d kuvaa kyseisen avaruuden dimensiota. Käytetään Einsteinin summausta ja Minkowskin metriikalle käytetään signatuuria, jossa aikakomponentti on positiivinen, ja muut komponentit ovat negatiivisia, $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, ..., -1)$. Koordinaateissa käytetään yläindeksiä $x = (x^\mu)$, derivaatoille käytetään lyhennettyä merkintää $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ja kovarianttia derivaattaa merkitään ∇_μ. Merkinnällä $\Box$ tarkoitetaan d'Alembertin operaattoria, joka on kombinaatio joko derivaattaoperaattorista $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$ tai kovariantista derivaattaoperaattorista.

1 Kvanttikenttäteoriaa kaarevassa avaruudessa

Tämän luvun tarkoituksena on perehdyttää lukija menetelmään, jolla Minkowskin avaruuden kvanttikenttäteoria voidaan yleistää kaarevaan avaruuteen. Tämän lisäksi pohditaan esitetyn menetelmän ongelmia, sekä kappaleessa 1.5 esitetään konformaalinen muunnos, joka tulee olemaan avainasemassa koko tutkielman ajan. Luku aloitetaan esittämällä Minkowskin avaruuden kvanttikenttäteoriasta tutut tulokset.

1.1 Kvanttikenttäteoria

Kaikkien kenttäteorioiden, myös kvanttikenttäteorian, lähtökohtana on vaikutus. Vaikutus S saadaan integraalina yli Lagrangen tiheyden $\mathcal{L}$. Kvanttikenttäteoria on määritelty d-ulotteisessa Minkowskin avaruudessa, jolloin vaikutukseksi saadaan

$$S[\phi] = \int_V \mathcal{L}(\partial\phi,\ \phi,\ x) d^d x, \tag{1.1}$$

missä Lagrangen tiheys $\mathcal{L}$ on riippuvainen kentästä ϕ (skalaari, spinori tai vektori), sen derivaatoista, sekä avaruusajan pisteestä. Varioimalla vaikutusta jokaisen kentän komponentin ϕ_a suhteen saadaan Eulerin-Lagrangen yhtälö

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} = 0. \tag{1.2}$$

Edellä mainitut määritelmät ovat tuttuja jo klassisesta kenttäteoriasta. Klassisista kentistä saadaan kvanttikenttiä kanonisella kvantisaatiolla. Aloitetaan määrittämällä kanoninen konjugoitu liikemäärä π^a:

$$\pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_a)}. \tag{1.3}$$

Kanonisessa kvantisaatiossa kenttä ϕ ja kanoninen konjugoitu liikemäärä π^a muutetaan operaattoreiksi, joille postuloidaan saman ajan kommutaatio- tai antikommutaatiorelaatiot

$$\begin{aligned} [\phi_a(t,\mathbf{x}), \pi_b(t,\mathbf{y})]_\pm &= i\delta_{a,b}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\ [\phi_a(t,\mathbf{x}), \phi_b(t,\mathbf{y})]_\pm &= 0, \\ [\pi_a(t,\mathbf{x}), \pi_b(t,\mathbf{y})]_\pm &= 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

missä $[A,B]_-$ on bosoneille käytettävä kommutaattori ja $[A,B]_+$ on fermioneille käytettävä antikommutaattori. Kanonisen konjugoidun liikemäärän avulla voidaan määritellä myös Hamiltonin funktio ja tähän liittyvät kommutaattorit

$$\begin{aligned} H &= \int \left(\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}\right) d^{d-1}x, \\ i[H, \phi_a(x)] &= \dot{\phi}_a(x), \\ i[H, \pi^a(x)] &= \dot{\pi}^a(x), \end{aligned} \tag{1.5}$$

missä piste tarkoittaa aikaderivaattaa.

1.2 Gravitaatio kvanttikenttäteoriassa

Tässä kappaleessa tarkastellaan yksinkertaisinta vapaata, reaalista, m-massaista skalaarikenttää, jonka vaikutus on muotoa

$$S = \int \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2)d^dx. \tag{1.6}$$

Pyrkimyksenä on löytää yksinkertaisin yleistys kaarevaan avaruuteen, joka redusoituu vaikutukseksi (1.6), kun avaruus lähestyy litteää. Tässä kappaleessa käydyt asiat yleistyvät myös spinori- ja vektorikentille. Yksinkertaisin yleistys saadaan [2]

1) muuttamalla Minkowskin metriikka yleiseksi metriseksi tensoriksi $\eta^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu}$,
2) muuttamalla tavallinen derivaatta kovariantiksi derivaataksi $\partial_\mu \to \nabla_\mu$,
3) vaihtamalla tavallinen tilavuuselementti kovariantiksi tilavuuselementiksi $d^dx \to \sqrt{-g}d^dx$, missä $g = \det(g_{\mu\nu})$,
4) kytkemällä gravitaatio $\mathcal{R}$-lineaarisella termillä $\mathcal{R}\phi^2$ vaikutukseen, missä $\mathcal{R}$ on Ricci-skalaari,

Näin saatu vaikutus on muotoa

$$S = \int \sqrt{-g}\frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2 - \xi\mathcal{R}\phi^2\right)d^dx, \tag{1.7}$$

missä ξ on gravitaation kytkentävakio ja skalaarikentille $\partial_\mu\phi = \nabla_\mu\phi$. Huomataan, että avaruuden lähestyessä litteää $\mathcal{R} \to 0$, $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$, sekä $\sqrt{-g} \to 1$, jolloin saadaan alkuperäinen vaikutus (1.6).

Yleistys (1.7) voidaan kuitenkin jakaa vielä kytkennän perusteella. Minimaalisessa kytkennässä gravitaatio tuodaan vaikutukseen lisäämättä $\mathcal{R}$-lineaarista termiä, eli $\xi = 0$. Tämä kytkentämalli on välitön seuraus yleisestä kovarianssiperiaatteesta, sekä vahvasta ekvivalenssiperiaatteesta, jonka vuoksi se esiintyy yleisesti kirjallisuudessa. Kytkentää, jossa $\xi \neq 0$, kutsutaan ei-minimaaliseksi kytkennäksi. Ei-minimaalisen kytkennän erikoistapauksena on konformaalinen kytkentä, jossa massaksi valitaan

$m = 0$ ja vakio $\xi = \frac{d-2}{4d-4}$ riippuu avaruuden dimensiosta [3]. Konformaalinen kytkentä on avainasemassa tässä tutkielmassa, joten tähän palataan vielä tarkemmin kappaleessa 1.5.

Seuraavaksi lasketaan Eulerin-Lagrangen liikeyhtälö vaikutukselle (1.7) ja saadaan

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + \sqrt{-g}(m^2 + \xi\mathcal{R})\phi = 0, \tag{1.8}$$

joka voidaan esittää kovariantissa muodossa [2]

$$\Box\phi + (m^2 + \xi\mathcal{R})\phi = 0, \tag{1.9}$$

missä $\Box = \nabla_\mu\nabla^\mu$. Nyt liikeyhtälöstä (1.9) voidaan ratkaista ϕ. Jotta teoria olisi matemaattisesti johdonmukainen, ratkaistaan liikeyhtälö L-särmäisessä laatikossa, jonka tilavuutta merkitään $V = L^3$, sekä asetetaan periodiset reunaehdot. Kun fysikaaliset suureet on laskettu voidaan ottaa raja, jossa V lähestyy ääretöntä [4]. Jos liikeyhtälöllä on täydellinen ratkaisujoukko merkitään sitä $\{u_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}), u^*_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x})\}$, missä ratkaisujoukko indeksoidaan liikemäärän $\mathbf{k}$ avulla, sillä ratkaisut ovat verrannollisia liikemäärään.

Ratkaisujoukon pitää olla ortonormaali sisätulon suhteen, jotta se määrittää kannan liikeyhtälöiden ratkaisuavaruuteen. Sisätulon valinta on mielivaltainen, mutta sen on omattava tietyt ominaisuudet. Esimerkiksi sisätulon on oltava riippumaton integrointipinnan valinnasta[1]. Koska (1.9) on kaarevan avaruuden Kleinin-Gordonin yhtälö, käytetään Kleinin-Gordonin sisätuloa. Koska ratkaisujoukko on kompleksi-

[1] Tosiasiassa kyseessä ei ole sisätulo, koska kuten tullaan pian huomaamaan $\langle u^*_{\mathbf{k}}|u^*_{\mathbf{k}'}\rangle < 0$. Tarkempi nimitys määriteltävälle kuvaukselle voisi olla ratkaisujoukon pseudonormi, mutta sisätulo nimitystä käytetään useasti kirjallisuudessa, minkä vuoksi tätä nimitystä käytetään myös tässä tutkielmassa.

nen, käytetään kompleksista Kleinin-Gordonin sisätuloa, joka Minkowskin avaruudessa voidaan määritellä Kleinin-Gordonin yhtälön ratkaisuavaruuteen varaustiheyden $Q = -i \int_t \phi \overleftrightarrow{\partial_0} \phi^* d^{d-1}x$ avulla. Merkintä $\overleftrightarrow{\partial_0}$ tarkoittaa $\phi \overleftrightarrow{\partial_0} \phi^* = \phi \partial_0 \phi^* - (\partial_0 \phi)\phi^*$. Tämä yleistyy kaarevaan avaruuteen kahdelle ratkaisujoukon alkiolle $u, \tilde{u}$ seuraavasti [2]

$$\langle u|\tilde{u}\rangle = -i \int \sqrt{-g_\Sigma}[u\partial_\mu \tilde{u}^* - (\partial_\mu u)\tilde{u}^*]d\Sigma^\mu, \tag{1.10}$$

missä $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$, missä $d\Sigma$ on paikanluonteisen hyperpinnan tilavuuselementti ja n^μ on kyseisen hyperpinnan ortogonaalinen tulevaisuuteen osoittava yksikkövektori [4]. g_Σ on hyperpinnalle indusoitu metriikka. Hyperpinta Σ on Cauchyn pinta, jos avaruus on globaalisti hyperbolinen.

Näitä käsitteitä tullaan käyttämään tässä tutkielmassa, joten määritellään ne seuraavaksi [5]. Lorentz-moniston M alimonistoa S kutsutaan Cauchyn pinnaksi, jos jokainen laajenematon differentioituva ajanluonteinen käyrä $c : (a, b) \to M$ leikkaa S vain kerran. Laajenematon differentioituva ajanluonteinen käyrä on käyrä, jolle välillä (a, b): $c(t)$ on differentioituva ja $c'(t)$ on ajanluonteinen[3]. Jos Lorentz-monistolla on alimonisto S kutsutaan sitä globaalisti hyperboliseksi ja M on homeomorfinen karteesisen tulon $\mathbb{R} \times S$ kanssa $M \cong \mathbb{R} \times S$. Toisin sanoen Lorentz-monisto voidaan ajatella koostuvan aika-akselista $\mathbb{R}$ ja jokaiseen aikaan liitetystä Cauchyn pinnasta S_t. Täten Cauchyn pinnat määrittävät moniston aikajärjestyksen eli foliaation.

[2] Kyseinen sisätulo toimii klassisella reaalisella kentällä vain ratkaisujoukolle $\{u_\mathbf{k}(t, \mathbf{x}), u^*_\mathbf{k}(t, \mathbf{x})\}$, sillä jos sisätulo määritettäisiin yleisesti ratkaisujoukon lineaarikombinaatiolle, kaava (1.12), saataisiin klassisen skalaarikentän sisätuloksi $\langle\phi|\phi\rangle = 0 \ \ \forall\phi$. Kvantisoidulle reaalisella skalaarikentälle $\hat{\phi}$ sisätulo voidaan määrittää kaavan (1.10) mukaisesti, sillä vakiot $a_\mathbf{k}, a^\dagger_\mathbf{k}$ ollaan muutettu operaattoreiksi, joiden kommutaatiosääntöjen takia sisätulo kentän itsensä kanssa ei ole identtisesti nolla. Kompleksiselle skalaarikentälle sisätulo on määritelty (1.10) sekä klassiselle, että kvantisoidulle kentälle.

[3] $c'(t)$ tarkoittaa käyrän tangenttia.

Nyt ratkaisuille $\{u_{\mathbf{k}}, u^*_{\mathbf{k}}\}$ voidaan määritellä ortonormaalisuus[4]

$$\langle u_{\mathbf{k}}|u_{\mathbf{k}'}\rangle = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \quad \langle u^*_{\mathbf{k}}|u^*_{\mathbf{k}'}\rangle = -\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \quad \langle u_{\mathbf{k}}|u^*_{\mathbf{k}'}\rangle = 0. \tag{1.11}$$

Jos ratkaisujoukko on määriteltävissä, ratkaisuja jotka ovat jonkin ajanluonteisen killingvektorikentän θ suuntaisen Lien derivaatan ominaisvektoreita seuraavasti $\mathscr{L}_\theta u_{\mathbf{k}} = -i\omega u_{\mathbf{k}}$, missä $\omega > 0$, kutsutaan positiivisiksi moodeiksi. Nimitys syntyy sisätulosta sillä näin määritellyille positiivisille moodeille $\langle u_{\mathbf{k}}|u_{\mathbf{k}}\rangle > 0$. Negatiivisille moodeille ominaisarvo on $i\omega$, ja tämäkin nimitys syntyy sisätulosta, sillä negatiivisille moodeille $\langle u^*_{\mathbf{k}}|u^*_{\mathbf{k}}\rangle < 0$.

Näiden avulla skalaarikenttä ϕ voidaan esittää muodossa

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \sum_k [a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + a^*_{\mathbf{k}} u^*_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})], \tag{1.12}$$

missä $a_{\mathbf{k}}, a^*_{\mathbf{k}}$ ovat kompleksisia funktioita. Nyt kenttä voidaan kvantisoida kanonisen kvantisaation mukaisesti. Muuttamalla $\phi, a_{\mathbf{k}}, a^*_{\mathbf{k}}$ operaattoreiksi $\hat{\phi}, \hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$, laskemalla kanoninen konjugoitu liikemäärä, sekä postuloimalla saman ajan kommutaatiorelaatiot (1.4), saadaan operaattoreille $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ ja $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ kommutaatiorelaatio

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \tag{1.13}$$

mistä voidaan identifioida $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ hävitysoperaattoriksi ja $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ luomisoperaattoriksi[5]. Näiden avulla voidaan määritellä vakuumitila $|0\rangle$, sekä hiukkastilat $|1_{\mathbf{k}}\rangle$, jne. seuraavasti

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}|0\rangle &= 0 \quad \forall\, \mathbf{k}, \\ a^\dagger_{\mathbf{k}}|0\rangle &= |1_{\mathbf{k}}\rangle, \\ a^\dagger_{\mathbf{k_1}} a^\dagger_{\mathbf{k_2}} ... a^\dagger_{\mathbf{k_j}} &= |1_{\mathbf{k_1}}, 1_{\mathbf{k_2}}, ..., 1_{\mathbf{k_j}}\rangle, \end{aligned} \tag{1.14}$$

[4] $u_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})$.

[5] Jätetään operaattorimerkintä pois, sillä tästä eteenpäin $a, a^\dagger$ voidaan olettaa aina operaattoreiksi, ellei toisin mainita.

missä kaikki $\mathbf{k_j}$ ovat erisuuria. Jos jotain $\mathbf{k_j}$ on n kappaletta saadaan tila, joka normalisoidaan seuraavasti

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger_{\mathbf{k_j}})^n|0\rangle = |n_{\mathbf{k_j}}\rangle. \tag{1.15}$$

Nyt ollaan saatu kvantisoitua kaarevaan avaruuteen yleistetty skalaarikenttä (1.7). Menettely on ollut lähes täysin samanlainen kuin Minkowskin avaruudessa. Avaruuksilla on kuitenkin suuri ero, jonka pitäisi näkyä kvantisoinnissa. Tämä ero syntyy positiivisten moodien $u_\mathbf{k}$ valinnasta, sillä kaarevassa avaruudessa, toisin kuin Minkowskin avaruudessa, ratkaisujoukko $\{u_\mathbf{k}, u^*_\mathbf{k}\}$ ei ole välttämättä yksikäsitteinen [4].

Minkowskin avaruudessa ratkaisujouksi $\{u_\mathbf{k}, u^*_\mathbf{k}\}$ saadaan funktiot, jotka ovat verrannollisia $e^{-i\omega t}$ ja $e^{i\omega t}$, missä $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Minkowskin avaruudessa ∂_t on globaali ajanluonteinen Killing vektori, jolloin positiivisten moodien määritelmä on muotoa $\partial_t u_\mathbf{k} = -i\omega u_\mathbf{k}$. Täten funktiot jotka ovat verrannollisia $e^{-i\omega t}$ ovat positiivisia moodeja. Sisätulo (1.10) yksinkertaistuu, sillä metriikan perusteella tulevaisuuteen osoittava yksikkövektori voidaan valita $n^\mu = (1, 0, 0, 0)^T$. Nyt voidaan tarkistaa, että positiivisille moodeille $\langle u_\mathbf{k}|u_\mathbf{k}\rangle > 0$. Toisaalta koska Minkowskin avaruudessa ∂_t on globaali ajanluonteinen Killing-vektori, positiiviset moodit jotka ovat määritelty tällä Poincarén invariantilla tavalla pysyvät positiivisina koko avaruudessa [4]. Kaarevassa avaruudessa Poincarén ryhmä ei kuitenkaan enää ole avaruusajan symmetria, joten on mahdollista ettei avaruudella ole ajanluonteista Killing-vektoria, jolla positiiviset moodit voidaan määritellä. Toinen mahdollisuus on, että positiiviset moodit voidaan määritellä vain tietyssä avaruusajan osassa [4]. Tämän takia erilaisia ratkaisujoukkoja $\{u_\mathbf{k}, u^*_\mathbf{k}\}$ saattaa olla koko avaruudessa ääretön määrä, jotka kaikki ovat yhtä käyttökelpoisia määrittämään ϕ kaavan (1.12) mukaisesti. Näillä eri ratkaisujoukoilla saattaa kuitenkin olla lineaarinen relaatio toisiinsa, jota kutsutaan Bogoliubov-muunnokseksi, joka käsitellään seuraavaksi.

1.3 Bogoliubov-muunnos

Oletetaan, että liikeyhtälölle (1.9) on olemassa kaksi ratkaisujoukkoa, joilla on olemassa kommutaattorirelaation (1.13) mukaiset hävitys- ja luomisoperaattorit. Jos ratkaisuja on enemmän, voidaan tässä luvussa käydyt asiat laskea erikseen kullekin ratkaisujoukkoparille. Merkitään $\{u_{\mathbf{k}}, u^*_{\mathbf{k}}\}$, jolla on operaattorit $\{a^\dagger_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}\}$ ja $\{v_{\mathbf{k}}, v^*_{\mathbf{k}}\}$, jolla on operaattorit $\{b^\dagger_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}\}$. Koska hävitysoperaattori määrittää vakuumitilan, on ratkaisujoukoilla eri vakuumit

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}|0_a\rangle &= 0, \\ b_{\mathbf{k}}|0_b\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Hiukkastilat saadaan tutulla tavalla, kun $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ ja $b^\dagger_{\mathbf{k}}$ operoivat omaan vakuumitilaansa. Koska kyseessä on liikeyhtälön (1.9) ratkaisujoukko, voidaan ϕ esittää kahdella eri tavalla

$$\begin{aligned} \phi_u &= \sum_k [a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + a^\dagger_{\mathbf{k}} u^*_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})], \\ \phi_v &= \sum_{k'} [b_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x}) + b^\dagger_{\mathbf{k}'} v^*_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x})]. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Jos esitykset ovat ekvivalentit $\phi_u = \phi_v$, joka yleisessä avaruusajassa ei välttämättä päde [6], voidaan olettaa operaattorien $a_{\mathbf{k}}$ ja $b_{\mathbf{k}'}$ olevan lineaarikombinaatioita toisistaan. Määritellään lineaarikombinaatio seuraavasti

$$a_{\mathbf{k}} = \sum_{k'} [\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}'} + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} b^\dagger_{\mathbf{k}'}]. \tag{1.18}$$

Tätä muunnosta kutsutaan Bogoliubov-muunnokseksi, missä $\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ ja $\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ ovat Bogoliubov-kertoimia. Nyt käyttämällä hävitys- ja luomisoperaattorien kommutaatiorelaatioita, saadaan Bogoliubov-kertoimille relaatiot, jotka määrittävät onko Bogoliubov-muunnos hyvin käyttäytyvä

$$\sum_s [\alpha_{\mathbf{ks}}\alpha^*_{\mathbf{k's}} - \beta_{\mathbf{ks}}\beta^*_{\mathbf{k's}}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k'}},$$
$$\sum_s [\alpha_{\mathbf{ks}}\beta_{\mathbf{k's}} - \beta_{\mathbf{ks}}\alpha_{\mathbf{k's}}] = 0. \tag{1.19}$$

Jos Bogoliubov-kertoimet täyttävät kyseiset relaatiot, voidaan kirjoittaa moodi $v_{\mathbf{k}}$ moodin $u_{\mathbf{k}}$ lineaarikombinaationa sijoittamalla kentän ϕ_u määritelmään (1.17) operaattorit (1.18), sekä näiden kompleksikonjugaatit. Näin saadaan

$$v_{\mathbf{k'}} = \sum_k [\alpha_{\mathbf{kk'}}u_{\mathbf{k}} + \beta^*_{\mathbf{kk'}}u^*_{\mathbf{k}}]. \tag{1.20}$$

Tämän jälkeen voidaan laskea myös käänteismuunnokset. Lopulta saadaan operaattorien, sekä moodien muunnoksiksi

$$a_{\mathbf{k}} = \sum_{k'} [\alpha_{\mathbf{kk'}}b_{\mathbf{k'}} + \beta_{\mathbf{kk'}}b^\dagger_{\mathbf{k'}}],$$
$$b_{\mathbf{k'}} = \sum_k [\alpha^*_{\mathbf{kk'}}a_{\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{kk'}}a^\dagger_{\mathbf{k}}],$$
$$u_{\mathbf{k}} = \sum_{k'} [\alpha^*_{\mathbf{kk'}}v_{\mathbf{k'}} - \beta^*_{\mathbf{kk'}}v^*_{\mathbf{k'}}].$$
$$v_{\mathbf{k'}} = \sum_k [\alpha_{\mathbf{kk'}}u_{\mathbf{k}} + \beta^*_{\mathbf{kk'}}u^*_{\mathbf{k}}]. \tag{1.21}$$

Käyttämällä moodien ortogonaalisuutta, sekä sisätuloa (1.10) voidaan Bogoliubov-kertoimet esittää myös seuraavasti

$$\alpha_{\mathbf{kk'}} = \langle v_{\mathbf{k'}}|u_{\mathbf{k}}\rangle, \beta_{\mathbf{kk'}} = -\langle u^*_{\mathbf{k}}|v_{\mathbf{k'}}\rangle.$$

Tämän lisäksi avaruuden symmetriat helpottavat kertoimien esitystä ja esimerkiksi homogeenisessa ja isotrooppisessa avaruudessa kertoimet voidaan esittää moodifunktioiden Wronskin determinantin avulla [2].

Nyt ollaan saatu yhteys eri moodien välille, mutta mitä tämä yhteys tarkoittaa? Tarkastellaan hiukkaslukumäärän odotusarvoa moodeilla $\{u_{\mathbf{k}}, u^*_{\mathbf{k}}\}$, jossa lukumääräoperaattori on muotoa $N^a_{\mathbf{k}} = a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}$. Triviaalisti vakuumitilalle odotusarvoksi saadaan $\langle 0_a | N^a_{\mathbf{k}} | 0_a \rangle = 0$. Samankaltainen triviaaliratkaisu saadaan moodeille $\{v_{\mathbf{k}}, v^*_{\mathbf{k}}\}$, lukumääräoperaattorilla $N^b_{\mathbf{k}} = b^\dagger_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}$, kun tarkastellaan tämän moodin vakuumitilaa $|0_b\rangle$, mutta muuttamalla tämä lukumääräoperaattori Bogoliubov-muunnoksen (1.21) avulla voidaan tarkastella odotusarvoa moodin $u_{\mathbf{k}}$ kannalta ja saadaan

$$\langle 0_b | N^a_{\mathbf{k}} | 0_b \rangle = \sum_{k'} |\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2. \tag{1.22}$$

Tästä huomataan, että vakuumitila $|0_b\rangle$ sisältää keskimäärin $\sum_{k'} |\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2$ moodin $u_{\mathbf{k}}$ hiukkasta. Tämän vuoksi Bogoliubov-kertoimet määrittävät kuvauksen ratkaisujoukkojen välille, ja kappaleessa 2.2 tullaan huomaamaan, että kertoimet kuvaavat hiukkasten syntymistä laajenevassa avaruusajassa [8, 9].

1.4 Hiukkanen kaarevassa avaruudessa

Kuten on huomattu, skalaarikentän kvantisoinnissa syntyvät ongelmat johtavat luonnollisesti Bogoliubov-muunnokseen. Kuitenkin (1.22) johtaa seuraavaan ongelmaan, sillä vakuumi $|0_b\rangle$ joka on tyhjä b-hiukkasista, voi sisältää muiden moodien hiukkasia. Kysymys kuuluukin, miten määritellään hiukkanen kaarevassa avaruudessa. Yksinkertaisin ja ehkä loogisin tapa löytää kysymykseen vastaus on määrittää hiukkanen objektina, jonka hiukkasdetektori voi tunnistaa. Tässä määrittelyssä on kuitenkin ongelmia jo litteässä avaruudessa, sillä vapaasti putoava detektori ja ei-inertiaalinen, kiihtyvässä liikkeessä oleva detektori voivat antaa erilaisia mittaustuloksia, jopa Minkowskin avaruudessa [3]. Tätä ilmiötä kutsutaan Unruh-ilmiöksi. Tämän vuoksi tätä määrittelytapaa ei käytetä tässä tutkielmassa.

Toinen mahdollinen määrittely, jota käytetään myös tässä tutkielmassa, on lähempänä Minkowskin avaruuden kvanttikenttäteorian käyttämää in-out -formalismia.

In-out -formalismissa hiukkanen määritellään aaltopakettina. Toisaalta tämän tyyppistä aaltopakettimäärittelyä ei voida suoranaisesti yleistää kaikkiin kaareviin avaruuksiin, sillä aaltopakettien määrityksessä tarvitaan hyvin määritellyt positiiviset moodit, jotka eivät välttämättä ole määriteltävissä kaikissa avaruuksissa. Mutta jos tarkastellaan vain niitä avaruuksia, joissa gravitaation vaikutus häviää avaruuden in- ja out-osissa, voi olla mahdollista määritellä fysikaalisesti motivoiduin kriteerein positiiviset moodit ja samalla hiukkaset [4].

Yhtenä erikoistapauksena tällaisestä avaruudesta on spatiaalisesti litteä ja avoin Robertson-Walker -avaruus[6] [7]. Tässä avaruudessa metriikka on konformaalisesti litteää muotoa $ds^2 = a(\eta)^2(d\eta^2 - d\mathbf{x}^2)$. Tutkittava vaikutus on muotoa (1.7), missä kytkentävakioksi valitaan $\xi = \frac{1}{6}$, joka neliuloitteisessa avaruudessa on konformisen kytkentävakion arvo. Konformaalinen muunnos käsitellään tarkemmin seuraavassa kappaleessa, sekä kappaleessa 3.1 tullaan käymään myös yksityiskohtaisesti läpi tässä kappaleessa tapahtuvat laskut. Aloitetaan laskemalla positiiviset moodit ja vertaillaan moodeja Bogoliubov-muunnoksen avulla. Merkitään avaruuden in-osan moodeja $\{u^{\text{in}}_{\mathbf{k}}, u^{\text{in}*}_{\mathbf{k}}\}$, joilla on operaattorit $\{a^{\text{in}\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{\text{in}}_{\mathbf{k}}\}$ ja out-osan moodeja $\{u^{\text{out}}_{\mathbf{k}}, u^{\text{out}*}_{\mathbf{k}}\}$, joilla operaattorit $\{a^{\text{out}\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{\text{out}}_{\mathbf{k}}\}$. Operaattorit $a^{\text{in}}_{\mathbf{k}}$ ja $a^{\text{out}}_{\mathbf{k}}$ toteuttavat kommutaatiorelaatiot (1.13) omissa avaruuden in- ja out-osissa. Vakuumitila sekä hiukkastilat saadaan (1.14) mukaisesti taas omilla avaruuden osilla. Tässä avaruudessa liikeyhtälön ratkaisut ovat muotoa

$$u_{\mathbf{k}} = a(\eta)^{-1} f(\eta, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \tag{1.23}$$

missä $f(\eta, \mathbf{p})$ toteuttaa yleistetyn harmonisen oskillaattorin differentiaaliyhtälön $\partial_\eta^2 f + (a^2(\eta)m^2 + \mathbf{p}^2)f = 0$. Sisätulo (1.10) redusoituu $\langle u_{\mathbf{k}} | u_{\mathbf{k}'} \rangle = -i f_{\mathbf{k}} \overleftrightarrow{\partial}_\eta f^*_{\mathbf{k}'} V \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$, missä V on normalisaatiotilavuus.

[6] Tässä avaruudessa fysikaalinen kriteeri joka toteutuu ja mahdollistaa in- ja out-vakuumien määrityksen adiabaattisina vakuumeina on avaruuden hidas muuttuminen. Adiabaattinen vakuumi ja avaruuden hidas muuttuminen käydään tarkemmin läpi kappaleessa 3.1.

Nyt koska Bogoliubov-kertoimet voidaan määritellä liikeyhtälön ratkaisun (1.23) ja sisätulon avulla, huomataan että kertoimille $\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \alpha_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$, sekä $\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \beta_{\mathbf{k}}\delta_{-\mathbf{k},\mathbf{k}'}$. Nyt (1.21) mukaisesti saadaan moodien välille Bogoliubov-muunnokset

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{k}}^{\text{in}} &= \alpha_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^{\text{out}} - \beta_{\mathbf{k}}^* u_{-\mathbf{k}}^{\text{out}*}, \\ u_{\mathbf{k}}^{\text{out}} &= \alpha_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + \beta_{\mathbf{k}}^* u_{-\mathbf{k}}^{\text{in}*}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

sekä operaattorien välille muunnokset

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} &= \frac{1}{\alpha_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} + \frac{\beta_{\mathbf{k}}^*}{\alpha_{\mathbf{k}}} a_{-\mathbf{k}}^{\text{in}}, \\ a_{\mathbf{k}}^{\text{out}} &= \frac{1}{\alpha_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} - \frac{\beta_{\mathbf{k}}}{\alpha_{\mathbf{k}}} a_{-\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

ja huomataan, että (1.25) määrittää kaikki in- ja out-operaattorit valittujen in- ja out-operaattorien avulla [7]. Tämän vuoksi valitaan nämä in- ja out-moodit määrittämään vakuumitila ja näille operaattoreille saadaan kommutaatiorelaatiot

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}^{\text{out}}, a_{\mathbf{k}'}^{\text{in}}] &= \beta_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}, \qquad & [a_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^{\text{in}}] &= -\alpha_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \\ [a_{\mathbf{k}}^{\text{out}}, a_{\mathbf{k}'}^{\text{in}\dagger}] &= \alpha_{\mathbf{k}}^*\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \qquad & [a_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^{\text{in}\dagger}] &= -\beta_{\mathbf{k}}^*\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Tämä ei kuitenkaan ole ainut tapa valita vakuumitila [4], mutta nyt vakuumitilan valinnalle on fysikaalinen perusta.

1.5 Konformaalinen kytkentä

Yleistettyä skalaarikenttää johdettaessa esitettiin ohimennen ei-minimaalisen kytkennän erikoistapaus, konformaalinen kytkentä. Konformaalinen kytkentä tarkoittaa gravitaation lisäämistä vaikutukseen, niin että konformaalisessa muunnoksessa vaikutus on invariantti. Konformaalinen muunnos on metriikan muunnos, jossa metriikka skaalataan lokaalisti funktion $\Omega(x) > 0$ avulla. Hiukkasia, joita kuvataan konformaalisesti invariantilla vaikutuksella, kutsutaan konformaaliseti invarianteiksi

hiukkasiksi. Parker osoitti 60-70-luvun vaihteessa, että konformaalisesti invariantteja hiukkasia ei synny avaruuden laajetessa [8–10]. Tämä tarkoittaa, että Bogoliubov-kertoimet $\beta_{\mathbf{kk'}} = 0$, jolloin in- ja out-osissa moodifunktiot ovat samaa muotoa. Tämän vuoksi konformaalinen kytkentä on tärkeässä asemassa, ja tätä tulosta tullaan käyttämään hyväksi added-up -menetelmää määriteltäessä. Ensin täytyy kuitenkin tietää minkälainen Lagrangen tiheys antaa vaikutuksen, joka on invariantti konformaalisessa muunnoksessa.

Tarkastellaan 4-uloitteista avaruutta, jossa metriikka muuntuu konformaalisesti $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}$, ja skalaarikenttä muuntuu $\tilde{\phi} = \Omega(x)^q \phi$, missä parametria q kutsutaan skalaarikentän konformaaliseksi painoksi. Vaikutus on invariantti kun $S = \tilde{S}$. Invarianttiuden todistaminen on pitkähkö lasku, joten se on kokonaisuudessaan esitetty liitteessä A. Aloitetaan tarkastelu Lagrangen muunnetusta tiheydestä (1.7)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} =& \sqrt{-\tilde{g}}\frac{1}{2}(\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial_\nu\tilde{\phi} - m^2\tilde{\phi}^2 - \xi\tilde{\mathcal{R}}\tilde{\phi}^2) \\ =& \sqrt{-g}\frac{1}{2}(\Omega^{2q+2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + q^2\Omega^{2q}\phi^2 g^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega\partial_\nu\Omega + 2q\Omega^{2q+1}\phi g^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega\partial_\nu\phi \\ & - m^2\Omega^{2q+4}\phi^2 - \xi\Omega^{2q+2}\phi^2\mathcal{R} - 6\xi\Omega^{2q+1}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\Omega).\end{aligned} \tag{1.27}$$

Ensimmäisestä termistä huomataan, että $q = -1$. Valitsemalla $\xi = \frac{1}{6}$ ja osittaisintegroimalla saadaan

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{-g}\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{6}\mathcal{R}\phi^2 - \nabla_\mu(\phi^2\Omega^{-1}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Omega) - m^2\Omega^2\phi^2). \tag{1.28}$$

Nyt kolmas termi katoaa vaikutuksen integroinnissa, sillä se on esitettävissä pintaintegraalina. Jos valitaan $m = 0$, saadaan konformaalisesti invatiantti vaikutus

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{6}\mathcal{R}\phi^2). \tag{1.29}$$

Massan valinta $m = 0$ on toki helposti nähtävissä yhtälöistä (1.28), mutta sen voi ymmärtää myös toisella tavalla. Koska konformaalinen muunnos skaalaa metriikkaa

ja samalla kenttää lokaalisti, mikäli kentän Lagrangen tiheydessä on termejä, jotka sisältävät mittayksiköitä kuten pituus tai massa, muuttavat myös näiden mittayksiköiden skaalat lokaalisti. Toisin sanoen kentän massa voi muuttua siirryttäessä avaruusajan pisteestä toiseen, koska näissä eri avaruusajan pisteissä konformaalinen muunnos skaalaa metriikkaa eri tavalla. Tämän vuoksi on helposti arvattavissa ettei vaikutus, joka sisältää mittayksiköitä omaavia termejä, voi säilyä invarianttina.

Jos tarkastellaan d-uloitteista avaruutta, konformaalisesti invariantti skalaarikenttä saadaan parametrein $m = 0$, $\xi = \frac{d-2}{4d-4}$ ja $q = \frac{2-d}{2}$ [3]. Muillekkin kenttätyypeille, kuten spinoreille, voidaan laskea konformaalisesti invariantti vaikutus, mutta vain skalaarikentillä kytkentävakio ξ voi saada nollasta poikkeavan arvon. Esimerkiksi 4-uloitteisessa avaruudessa spinorikenttä on konformaalisesti invariantti jos $m = 0$ ja spinorikentän konformaalinen paino on $q = -\frac{2}{3}$ [11].

Tarkastellaan viimeisenä d-ulotteisen avaruuden muuntunutta liikeyhtälöä

$$(\tilde{\Box} + \frac{d-2}{4(d-1)}\tilde{\mathcal{R}})\tilde{\phi} = 0. \tag{1.30}$$

Nyt pitkähköjen laskujen jälkeen, jotka esitetty myös liitteessä A, saadaan

$$(\tilde{\Box} + \frac{d-2}{4(d-1)}\tilde{\mathcal{R}})\tilde{\phi} = \Omega^{-\frac{d+2}{2}}(\Box + \frac{d-2}{4(d-1)}\mathcal{R})\phi, \tag{1.31}$$

jolloin huomataan, että jos alkuperäinen kenttä ϕ toteuttaa liikeyhtälönsä, niin myös muunnettu kenttä $\tilde{\phi}$ toteuttaa omansa. Tämä voidaan todistaa myös toisinpäin, olettamalla kentän $\tilde{\phi}$ liikeyhtälö todeksi ja laskemalla siitä muuntunut liikeyhtälö kentälle ϕ [4].

2 Added-up -menetelmä

Nyt on saatu kvantisoitua vapaa reaalinen skalaarikenttä kaarevassa avaruudessa, sekä ollaan käyty läpi kvantisoinnissa syntyviä ongelmia. Vaikka vapaan kentän kvantisointi itsessään on jo tuonut esiin uusia ilmiöitä, kuten gravitaation takia syntyvät hiukkaset, seuraava looginen askel, kuten Minkowskilaisessa kvanttikenttäteoriassa, on tarkastella kenttien välisiä vuorovaikutuksia.

Toisin kuin Minkowskin avaruudessa, kaarevan avaruusajan dynaaminen luonne mahdollistaa uusia ilmiöitä vuorovaikutuksiin. Uudet ilmiöt, jotka eivät ole mahdollisia litteässä avaruudessa, tulevat mahdollisiksi kaarevassa avaruudessa säilymislakien, kuten energian säilymisen, puuttumisen vuoksi [12]. Tämän lisäksi vuorovaikutukset voivat rikkoa kentän konformaalisen invarianssin. Tämä voi johtaa kyseisen hiukkasen gravitationaaliseen syntymiseen [13]. Vuorovaikutukset voivat myös rikkoa globaalin Lorentz-invarianssin, joka saattaa johtaa jopa CPT-invarianssin rikkoutumiseen [14, 15]. Näiden syiden vuoksi olettaa saattaa, että fysikaaliset suureet, kuten hajoamisnopeus ja vaikutusala, tulevat muuttumaan samoihin litteän avaruuden suureisiin verrattuna.

Tässä luvussa tarkoituksena on käydä läpi Minkowskin avaruudessa vuorovaikutuksien tarkasteluun käytettävän formalismin yleistys kaarevaan avaruuteen, sekä esittää yksi menetelmä, added-up menetelmä, jolla on mahdollista laskea kaarevan avaruuden suureita. Tekniset yksityiskohdat[7], sekä teorian renormalisaatio jätetään tässä tutkielmassa taka-alalle.

2.1 Kenttien vuorovaikukset kaarevassa avaruudessa

Yleisesti kenttien vuorovaikutusten huomioiminen lisää ei-lineaarisia termejä vapaan kentän kenttäyhtälöihin. Jo Minkowskin avaruuden kvanttikenttäteoriassa näiden uusien kenttäyhtälöiden tarkka ratkaiseminen on lähes mahdotonta. Gravitaation

[7] Tekniset yksityiskohdat on esitetty esimerkiksi viitteessä [16].

lisääminen ei tule myöskään helpottamaan asiaa. Yleisin tapa ratkaista vuorovaikutusten luoma muutos on olettaa kaksi avaruusajan osaa, in- ja out-osat, joissa vuorovaikutus kytketään adiabaattisesti pois [4]. Tällöin in- ja out-osissa kenttäyhtälöt redusoituvat vapaan kentän kenttäyhtälöiksi, joille voidaan laskea ratkaisut ϕ_{in} ja ϕ_{out}, ja ratkaisut voidaan kvantisoida luvussa 1 esitetyllä tavalla.

Vuorovaikutuksissa mielenkiinnon kohteena on S-matriisi, jota käytetään muutosamplitudin, kuten

$$\langle \text{out}, 1_{\mathbf{p}_1}, 1_{\mathbf{p}_2}, ..., 1_{\mathbf{p}_j} | S | 1_{\mathbf{k}_i}, ..., 1_{\mathbf{k}_2}, 1_{\mathbf{k}_1}, \text{in} \rangle \tag{2.1}$$

määrityksessä, sillä S-matriisialkoiiden itseisarvon neliö määrittää tilan todennäköisyyden muuttua toiseksi tilaksi. Tämän perusteella muutosamplitudi kuvaa miten hiukkastila muuttuu tilasta toiseen, ja muutosamplitudin itseisarvon neliö kertoo muutoksen todennäköisyyden. Esimerkiksi massiivisen ϕ hiukkasen hajoaminen kahdeksi massattomaksi ψ hiukkaseksi kuvataan muutosamplitudilla $\langle \text{out}, 1^{\psi}_{\mathbf{p}_1}, 1^{\psi}_{\mathbf{p}_2} | S | 1^{\phi}_{\mathbf{k}}, \text{in} \rangle$.

Pyrkimyksenä on siis löytää S-matriisi ja laskea muutosamplitudi[8]. Minkowskin avaruudessa muutosamplitudille (2.1) voidaan määritellä reduktiokaava, kuten LSZ-reduktiokaava, jonka avulla muutosamplitudi voidaan esittää aikajärjestettyjen kenttäoperaattorien vakuumitilan odotusarvona. Osoittautuu, että LSZ-reduktiokaava voidaan yleistää myös kaarevaan avaruuteen [17]. Tätä lähestymistapaa ei kuitenkaan käytetä tässä tutkielmassa, vaan käytetään amplitudien laskemiseen added-up -menetelmää. Aloitetaan tarkastelu vuorovaikutuskuvan, tai Diracin kuvan, avulla jotta löydetään sopivaa muotoa oleva S-matriisi.

Oletetaan, että vuorovaikutuskuvassa Hamiltonin tiheys $\mathcal{H}$ voidaan jakaa vapaaseen osaan $\mathcal{H}_0$, sekä vuorovaikutus osaan $\mathcal{H}_I$. Nyt koko tiheys voidaan kirjoittaa

[8] Tässä tutkielmassa oletetaan, että S-matriisi on olemassa. Olemassaolo vaatii, että in- ja out-tiloissa hiukkasen käsite on määriteltävissä ja tilat ovat unitaarisesti ekvivalentit, eli toisin sanoen Bogoliubov-muunnos on olemassa ja hyvin määritelty. Tarkempi tarkastelu S-matriisin olemassaololle on tehty viitteessä [6].

muodossa $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I$. Nyt vuorovaikutuskuvan tilavektori toteuttaa vuorovaikutuskuvan Schrödingerin yhtälön

$$\mathcal{H}_I(x)|\Psi[\Sigma]\rangle = i\frac{\delta|\Psi[\Sigma]\rangle}{\delta\Sigma(x)}, \tag{2.2}$$

missä $\frac{\delta}{\delta\Sigma(x)}$ tarkoittaa funktionaalista derivaattaa ja $\Sigma(x)$ on paikanluonteinen Cauchyn pinta, joka yleensä on aikaan t oleva paikka-avaruuden pinta $\mathbb{R}^3$. Yhtälön (2.2) ratkaisu saadaan unitaarioperaattorin U avulla

$$|\Psi[\Sigma]\rangle = U[\Sigma, \Sigma_0]|\Psi[\Sigma_0]\rangle, \tag{2.3}$$

missä Σ_0 on alkuperäinen Cauchyn pinta jollain kiinnitetyllä ajanhetkellä. Tästä huomataan, että unitarioperaattorin on toteutettava alkuehto $U[\Sigma_0, \Sigma_0] = 1$. Sijoittamalla (2.3) kaavaan (2.2) saadaan unitaarioperaattorille rajoitus

$$\mathcal{H}_I(x)U[\Sigma, \Sigma_0] = i\frac{\delta U[\Sigma, \Sigma_0]}{\delta\Sigma(x)}. \tag{2.4}$$

Tämän ja alkuehdon perusteella U voidaan kirjoittaa muodossa

$$U[\Sigma, \Sigma_0] = 1 - i\int_{\Sigma_0}^{\Sigma} \mathcal{H}_I(x')U[\Sigma', \Sigma_0]d^dx', \tag{2.5}$$

missä integraali lasketaan kahden Cauchy pinnan välillä. Kaavassa (2.5) esiintyvä uusi unitaarioperaattori $U[\Sigma', \Sigma_0]$ toteuttaa myös alkuehdon, sekä yhtälön (2.4), joten se voidaan myös kirjoittaa (2.5) mukaisesti

$$U[\Sigma', \Sigma_0] = 1 - i\int_{\Sigma_0}^{\Sigma'} \mathcal{H}_I(x'')U[\Sigma'', \Sigma_0]d^dx'', \tag{2.6}$$

missä $\Sigma \geqslant \Sigma' \geqslant \Sigma''$. Sijoittamalla tämä (2.5) saadaan

$$U[\Sigma,\Sigma_0] = 1 - i\int_{\Sigma_0}^{\Sigma} \mathcal{H}_I(x')d^dx' + (-i)^2\int_{\Sigma_0}^{\Sigma}\int_{\Sigma_0}^{\Sigma'} \mathcal{H}_I(x')\mathcal{H}_I(x'')U[\Sigma'',\Sigma_0]d^dx'd^dx''. \tag{2.7}$$

Nyt $U[\Sigma'',\Sigma_0]$ voidaan määritellä unitaarioperaattorin $U[\Sigma''',\Sigma_0]$ avulla kaavan (2.5) mukaisti, mikä voidaan sijoitta (2.7). Jatkamalla tätä menettelytapaa saadaan lopulta $U[\Sigma,\Sigma_0]$. Koska Cauchyn pinnat määrittävät aikajärjestyksen $\Sigma \geqslant \Sigma' \geqslant \Sigma'' \geqslant ...$ voidaan käyttää hyväksi aikajärjestysoperaattoria $\hat{T}$, jotta rekursiokaavasta saadaan kompaktimpi. Kuten Minkowskin avaruudessa, myös kaarevassa avaruudessa integraatiovälit voidaan symmetrisoida [3] ja saadaan lopulta

$$\begin{aligned} U[\Sigma,\Sigma_0] &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-i)^m}{m!}\int_{\Sigma_0}^{\Sigma}\hat{T}(\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)...\mathcal{H}_I(x_m))d^dx_1d^dx_2...d^dx_m \\ &\equiv \hat{T}\exp[-i\int_{\Sigma_0}^{\Sigma}\mathcal{H}_I(x')d^dx']. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nyt S-matriisi voidaan määritellä unitaarioperaattorina, joka kuvaa tilavektorin muutoksen alkuperäisestä in-tilasta lopulliseen out-tilaan seuraavasti

$$S \equiv U[\Sigma_{\text{out}},\Sigma_{\text{in}}], \tag{2.9}$$

jolloin tilavektorin muutos voidaan antaa

$$|\Psi[\Sigma_{\text{out}}]\rangle = S|\Psi[\Sigma_{\text{in}}]\rangle \tag{2.10}$$

2.2 Perturbaatioteoriaa ja muutostodennäköisyyksiä

Nyt kun S-matriisi ollaan määritelty, tarkastellaan sitä perturbaatioteorian puitteissa. Oletetaan, että vuorovaikutustermi ei sisällä derivaattoja, jolloin $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I$ ja avaruusaika oletetaan globaalisti hyperboliseksi. Alkuperäinen tilavektori voi olla

usean hiukkasen tila $|\Psi[\Sigma_{\text{in}}]\rangle = |1_{\mathbf{k}_1}, 1_{\mathbf{k}_2}, ..., 1_{\mathbf{k}_i}, \text{in}\rangle$ ja S-matriisi määritellään (2.8) ja (2.9) mukaisesti

$$S = \lim_{\beta \to 0^+} \hat{T} \exp[i \int_{\Sigma_0}^{\Sigma} e^{-\beta|x^0|} \mathcal{L}_I(x') d^d x'], \tag{2.11}$$

missä termi $e^{-\beta|x^0|}$ on vuorovaikutuksen poiskytkentätermi, joka varmistaa kaavan (2.11) suppenemisen[9][4]. Nyt S-matriisi on esitettävissä perturbaatiosarjana ja oletetaan toisen ja korkeampien kertalukujen termit pieniksi, jolloin tarkastellaan vain nollannen ja ensimmäisen kertaluvun termejä. Kaavan (2.8) perusteella nollannen kertaluvun termi kuvaa tilannetta, jossa ei ole vuorovaikutusta, joten tämä termiä ei huomioida. Tarkastellaan siis vain ensimmäisen kertaluvun termiä, joka antaa muutosamplitudin

$$\mathcal{A} = \langle \text{out}, 1_{\mathbf{p}_1}, 1_{\mathbf{p}_2}, ..., 1_{\mathbf{p}_j} | A | 1_{\mathbf{k}_i}, ..., 1_{\mathbf{k}_2}, 1_{\mathbf{k}_1}, \text{in}\rangle, \tag{2.12}$$

missä

$$A = i \lim_{\beta \to 0^+} \int_{\Sigma_0}^{\Sigma} \hat{T} e^{-\beta|x^0|} \mathcal{L}_I(x) d^d x. \tag{2.13}$$

Periaatteessa tämän jälkeen muutosamplitudin laskeminen tapahtuu samaan tapaan kuin litteässä avaruudessa, eli sijoittamalla nyt kaarevan avaruuden vapaan kentän ratkaisu vuorovaikutus termiin $\mathcal{L}_I$ [3], mutta kuitenkin tullaan huomaamaan, että kaarevan avaruuden dynaaminen luonne luo ongelmia laskuihin.

Jos laskut tehtäisiin täysin samalla tavalla kuin litteässä avaruudessa tarkasteltaisiin alkutilaa, jossa on äärellinen määrä hiukkasia ja S-matriisin avulla vertailtaisiin tätä lopputilaan, missä on myös äärellinen määrä hiukkasia. Kaarevassa avaruudessa tällainen yksinkertainen menetelmä ei toimi, sillä vuorovaikutusten lisäksi

[9] Mikäli integroinnin aikaväli on äärellinen termiä ei tarvita [4].

in-tilan muuttuessa out-tilaksi syntyy hiukkasia gravitaation takia, jolloin vertailussa ei ole järkeä. Parker osoitti tämän tyylisen menetelmän luoman ongelman kaarevan avaruuden vakuumitilan muutosamplitudin neliön avulla [9]. Muutosamplitudin neliö saadaan laskemalla muutosaplitudi kentälle, joka on L-särmäisessä laatikossa, johon on asetettu periodiset reunaehdot ja ottamalla raja-arvo, jossa laatikon särmän pituus $L \to \infty$, jolloin $\sum_k \to \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3p$. Näin saadaan

$$\begin{aligned} |\langle \text{out}, 0|0, \text{in}\rangle|^2 &= \exp[-\sum_k \log|\alpha_{\mathbf{p}}|^2] \\ &\to \exp\left[-\frac{V}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \log|\alpha_{\mathbf{p}}|^2 d^3p\right], \end{aligned} \tag{2.14}$$

missä $\alpha_{\mathbf{p}}$ on Bogoliubov-kerroin ja $V = L^3$ on normalisaatiotilavuus. Nyt raja-arvon $L \to \infty$ takia myös $V \to \infty$ ja lauseke (2.14) lähestyy nollaa. Tämä osoittaa, että vakuumitilan todennäköisyys pysyä vakuumitilana laajenevassa avaruudessa lähestyy nollaa hiukkasten gravitationaalisen synnyn vuoksi [4].

Tarkastellaan nyt yleistä, kaavan (2.1) kaltaista muutosamplitudia, jossa on äärellinen määrä hiukkasia. Tässä tarkastelussa tullaan huomaamaan Parkerin tuloksen (2.14) tärkeys. Oletetaan, että in-tilassa on c kappaletta massallisia ϕ-hiukkasia ja r kappaletta massattomia konformaalisesti kytkettyjä ψ-hiukkasia. Oletetaan myös, että out-tilassa on samoja hiukkasia d ja s kappaletta. Nyt muutosamplitudiksi saadaan $\langle \text{out}, d^\phi s^\psi|S|c^\phi r^\psi, \text{in}\rangle$, missä $|c^\phi r^\psi\rangle = |1^\phi_{\mathbf{p}_1}, ..., 1^\phi_{\mathbf{p}_c}, 1^\psi_{\mathbf{k}_1}, ..., 1^\psi_{\mathbf{k}_r}\rangle$. Koska hiukkastilat muodostavat omassa vakuumissaan täydellisen kannan voidaan identiteettioperaattori esittää summana kaikkien hiukkastilojen yli $\mathbf{1} = \sum_{g,t} |g^\phi t^\psi, \text{in}\rangle\langle \text{in}, g^\phi t^\psi|$. Sijoittamalla tämä muutosamplitudiin saadaan

$$\langle \text{out}, d^\phi s^\psi|S^{(z)}|c^\phi r^\psi, \text{in}\rangle = \sum_{g,t} \langle \text{out}, d^\phi s^\psi|g^\phi t^\psi, \text{in}\rangle\langle \text{in}, g^\phi t^\psi|S^{(z)}|c^\phi r^\psi, \text{in}\rangle, \tag{2.15}$$

missä z merkitsee S-matriisin perturbaatiosarjan kertalukua, eli esimerkiksi nollannes kertaluku $z = 0$ tarkoittaa $S^{(0)} = 1$ jne. Audretsch ja Spangehl osoittivat [7], että

käyttämällä relaatioita (1.25) ja (1.26) yhtälön oikean puolen ensimmäinen termi on esitettävissä muodossa

$$\langle \text{out}, d^{\phi} s^{\psi} | g^{\phi} t^{\psi}, \text{in} \rangle = \langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle f(\alpha, \beta), \tag{2.16}$$

missä $f(\alpha, \beta)$ on äärellinen Bogoliubov-kertoimista, sekä hiukkasluvuista d ja g riippuva funktio. Nyt selkeästi, mikäli tarkastellaan muutosamplitudin (2.15) neliötä, saadaan ongelmallinen vakuumitilan muutosamplitudin neliö, jolloin kaikkien kertalukujen vuorovaikutusten muutostodennäköisyydet lähestyvät nollaa kun $V \to \infty$, Parkerin todistaman [9] yhtälön (2.14) nojalla. Syy tähän on jälleen hiukkasten gravitationaalinen synty, sillä hiukkasia syntyy koko liikemääräspektrin p laajuudella jo vuorovaikutuksen nollannessa kertaluvussa [4]. Tämän vuoksi suoraviivainen Minkowskin avaruuden laskutavan yleistäminen kaarevaan avaruuteen ei tule toimimaan, sillä litteän avaruuden in-out tyylinen muutosamplitudi menettää fysikaalisen merkityksensä kaarevassa avaruudessa [4]. Siksi erilainen lähestymistapa on tarpeen, ja onneksi on mahdollista määrittää yleistys, jolla on samantyylinen tulkinta kaarevassa avaruudessa kuin in-out -muutosamplitudilla Minkowskin avaruudessa.

2.3 Added-up todennäköisyys

Edellisessä kappaleessa huomattiin, että kaarevassa avaruudessa hiukkasten syntyminen tuottaa ongelmia muutosamplitudien määrityksessä. Toisaalta, koska hiukkasen määrittäminen kaarevassa avaruudessa on hankalaa, käy järkeen, että myös hiukkasten väliset vuorovaikutukset ovat hankalia määrittää. Huomattiin myös, ettei litteän avaruuden muutosamplitudien laskuun käytettävää menetelmää voida suoranaisesti yleistää kaarevaan avaruuteen, joten tarvitaan uusi menetelmä, jotta pystytään laskemaan kaarevan avaruuden suureita. 80-luvun alussa osoitettiin [18, 19], että kaarevassa avaruudessa ongelmallinen hiukkasten syntyminen vakuumitilasta voitaisiin

esittää modifioimalla standardeja Feynmanin diagrammeja, jolloin näitä modifioitua diagrammeja voitaisiin käyttää selittämään kaarevan avaruuden vuorovaikutukset.

Kuten edellisen kappaleen perusteella olettaa saattaa, muutosamplitudin laskujen ongelmat pohjautuvat siihen, ettei vakuumia voida määrittää yksikäsitteisesti. Tällöin, vaikka muutosamplitudi $\langle \text{out}, 0|P|0, \text{in}\rangle$ voitaisiin laskea jollekin muutosoperaattorille P, muutosamplitudi ei tule sisältämään samaa fysikaalista informaatiota kuin litteän avaruuden amplitudi $\langle \text{in}, 0|P|0, \text{in}\rangle$. Tämän vuoksi on kehitetty menetelmiä kuten in-in -formalismi, jota joskus kutsutaan myös closed-time-path tai Schwinger-Keldysh -formalismiksi.

Ongelmana näissä formalismeissa on, että laskut vaikeutuvat todella nopeasti ja tämän lisäksi formalismi lisää myös uusia Feynmanin diagrammeja [20]. Toisaalta in-in -formalismin hyvä puoli on, että se poistaa automaattisesti hiukkasten synnyn takia tulevat äärettömään hajaantuvat termit [19].

In-in -formalismiin pohjautuen Audretsch ja Spangehl esittivät menetelmän, jota he kutsuivat added-up -menetelmäksi, muutosamplitudien laskemiseen kaarevassa avaruudessa [7]. Menetelmä pyrkii ratkaisemaan esitetyt ongelmat fysikaalisesti motivoiduin kriteerein määritellyn laskumallin avulla, ja lähestyykin ongelmia detektoriongelman pohjalta.

Aloitetaan muodostamalla kaarevan avaruuden detektoriongelma. Kaarevassa avaruudessa sitä lähestytään samalla tavalla kuin litteässä avaruudessa, eli hiukkasdetektorin ajatellaan tunnistavan hiukkasia out-tilassa. Litteässä avaruudessa lähestymistapa on suoraviivainen, sillä kiinnittämällä in-tila voidaan sitä verrata out-tilaan ja hiukkasmäärien erot voidaan sanoa syntyneen vuorovaikutuksissa. Kaarevassa avaruudessa ongelmaksi tulee hiukkasten gravitationaalinen syntyminen, sillä jos detektori tunnistaa out-hiukkasia, joita voi syntyä gravitationaalisesti, detektori ei pysty erottelemaan mitkä hiukkasista ovat syntyneet vuorovaikutuksissa ja mitkä gravitaation takia. Tämän vuoksi tarvitaan indikaattori, johon gravitaation

aiheuttama muutos on mahdollisimman pieni.

Aikaisempien tarkasteluiden perusteella tiedetään, että konformaalisesti kytkettyjä massattomia hiukkasia ei synny gravitaation takia, jolloin tämä hiukkastyyppi on järkevä indikaattoriksi. Tämä indikaattorivalinta on järkevä, sillä kiinnittämällä in-tilassa olevat massattomat hiukkaset[10] ja vertailemalla näiden lukumäärän eroa out-tilassa oleviin massattomiin hiukkasiin, tiedetään että ero on syntynyt vain vuorovaikutuksen takia.

Nyt kun indikaattori on selvillä muotoillaan added-up todennäköisyys seuraavan kysymyksen pohjalta: millä todennäköisyydellä tietty massattoman hiukkasen tila $|s^\phi, \mathrm{out}\rangle$ löydetään out-tilasta, välittämättä massallisista hiukkasista [7]. Matemaattisesti vastaus saadaan summaamalla muutostodennäköisyys kaikkien massallisten hiukkastilojen yli ja tämän perusteella saadaan

$$\begin{aligned} w^{\mathrm{add}}(s^\psi|c^\phi r^\psi) &= \sum_d |\langle \mathrm{out}, d^\phi s^\psi|S|c^\phi r^\psi, \mathrm{in}\rangle|^2 \\ &= \sum_d \langle \mathrm{in}, c^\phi r^\psi|S^\dagger|d^\phi s^\psi, \mathrm{out}\rangle\langle d^\phi s^\psi, \mathrm{out}|S|\mathrm{in}, c^\phi r^\psi\rangle \end{aligned} \tag{2.17}$$

Koska massattomia hiukkasia ei synny gravitationaalisesti $|s^\psi, \mathrm{out}\rangle = |s^\psi, \mathrm{in}\rangle$ ja massallisten hiukkasten tilat muodostavat täydellisen kannan in- ja out-alueissa voidaan käyttää jälleen identiteettioperaattoria

$$\sum_d |d^\phi, \mathrm{out}\rangle\langle \mathrm{out}, d^\phi| = \sum_g |g^\phi, \mathrm{in}\rangle\langle \mathrm{in}, g^\phi| = \mathbf{1}. \tag{2.18}$$

Sijoittamalla (2.18) kaavan (2.17) ja vaihtamalla $|s^\psi, \mathrm{out}\rangle\langle \mathrm{out}, s^\psi| = |s^\psi, \mathrm{in}\rangle\langle \mathrm{in}, s^\psi|$ saadaan

[10] Massattomilla hiukkasilla tarkoitetaan tästä eteenpäin konformaalisesti kytkettyjä massattomia hiukkasia, ellei toisin mainita.

$$w^{\mathrm{add}}(s^{\psi}|c^{\phi}r^{\psi}) = \sum_{g} |\langle \mathrm{in}, g^{\phi}s^{\psi}|S|c^{\phi}r^{\psi}, \mathrm{in}\rangle|^2. \tag{2.19}$$

Tämän tyylisessä muunnosamplitudissa voidaan käyttää hyväksi in-in Feynmanin diagrammeja [7]. Toisaalta kaavan (2.18) avulla yhtälö (2.17) voitaisiin kirjoittaa myös out-out tiloille, sillä kaava (2.17) on esitettävissä muodossa

$$w^{\mathrm{add}}(s^{\psi}|c^{\phi}r^{\psi}) = \sum_{d} \langle d^{\phi}s^{\psi}, \mathrm{out}|S|\mathrm{in}, c^{\phi}r^{\psi}\rangle\langle \mathrm{in}, c^{\phi}r^{\psi}|S^{\dagger}|d^{\phi}s^{\psi}, \mathrm{out}\rangle.$$

3 Skalaarikentän hajoaminen kaarevassa avaruudessa

Ensimmäisen kahden luvun aikana ollaan käyty läpi yleisellä tasolla, miten litteän avaruuden kvanttikenttäteoria voidaan yleistää kaareviin avaruuksiin, miten kentät voidaan kvantisoida, sekä ollaan huomattu minkälaisia ongelmia kaareva avaruus luo kvanttikenttäteorialle. Tämän lisäksi tarkasteltiin, miten vuorovaikutukset saadaan sisällytettyä kaarevan avaruuden kvanttikenttäteoriaan, ja esiteltiin added-up -menetelmä, jonka avulla voidaan laskea kaarevan avaruuden suureita.

Teoreettinen tausta on siis kasassa ja tässä luvussa päästään tarkastelemaan konkreettisia esimerkkejä. Pyrkimyksenä on esittää J. Lankisen ja I. Viljan johtamat tulokset skalaarikentän hajoamiselle skalaari- [21–23] ja fermionikanavaan [24].

3.1 Hajoaminen skalaarikanavaan

Aloitetaan yksinkertaisimmasta esimerkistä ja tarkastellaan m-massaisen, reaalisen skalaarikentän ϕ, joka on kytketty gravitaatioon kytkentävakiolla ξ, hajoamista skalaarikentäksi φ. Added-up -menetelmän käyttäminen laskuissa vaatii kentän φ olevan konformaalisesti invariantti, jolloin kentän on oltava massaton ja sen kytkentä gravitaatioon on oltava konformaalinen, eli kentän φ kytkentävakioksi valitaan $\tilde{\xi} = \frac{1}{6}$. Näin Lagrangen tiheydeksi saadaan

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2 - \xi\mathcal{R}\phi^2 + \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{\mathcal{R}}{6}\varphi^2\right] + \mathcal{L}_I. \tag{3.1}$$

Vuorovaikutustermiksi valitaan

$$\mathcal{L}_I = -\sqrt{-g}\lambda\phi\varphi^2, \tag{3.2}$$

missä $\lambda \neq 0$ on dimension 1 omaava kytkentävakio.

Tarkastellaan hajoamista kappaleen 1.4 tavoin spatiaalisesti litteässä ja avoimessa Robertson-Walker -avaruudessa, jossa matriikka voidaan esittää konformaalisesti litteässä muodossa $ds^2 = a(\eta)^2(d\eta^2 - d\mathbf{x}^2)$, missä konformaalinen aikakoordinaatti $\eta \in (0, \infty)$. Kappaleessa 1.5 määriteltiin konformaalinen muunnos metriikan muunnokseksi $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}$. Konformaalisesti litteä metriikka tarkoittaa siis metriikkaa, joka on konformaalinen muunnos litteästä avaruudesta. Kappaleessa 1.4 ei esitetty, miten kaarevan avaruuden liikeyhtälön (1.9) ratkaisuna saadaan kaava (1.23) mukainen moodifunktio. Käydään johto läpi seuraavaksi kentälle ϕ, koska tämä kenttä on yleisimmässä muodossa, jolloin kaava (1.23), sekä kentän φ liikeyhtälöt ovat tämän erikoistapauksia.

Aloitetaan käyttämällä hyväksi RW-avaruuden konformaalista litteyttä $g^{RW}_{\mu\nu} = a(\eta)^2\eta^{Mink}_{\mu\nu}$ ja muunnetaan kentän ϕ Lagrangen tiheys Minkowskin avaruuteen. Kappaleen 1.5 mukaisesti skalaarikentät muuntuvat konformaalisessa muunnoksessa konformaalisella painolla $q = -1$, eli $\phi^{RW} = a(\eta)^{-1}\phi^{Mink}$ ja Riccin skalaari kaavan (A.1) mukaisesti, missä tietysti litteän avaruuden kaarevuus katoaa $\mathcal{R}^{Mink} = 0$. Näin muunnoksen ja osittaisintegroinnin jälkeen Lagrangen tiheydeksi saadaan

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi^{Mink}\partial^\mu\phi^{Mink} - a(\eta)^2m^2(\phi^{Mink})^2 - \left(\xi - \frac{1}{6}\right)6a(\eta)^{-1}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu a(\phi^{Mink})^2\right]. \tag{3.3}$$

Viimeinen termi voidaan esittää RW-avaruuden Riccin skalaarin avulla ja liikeyhtälöksi saadaan

$$\Box\phi + \left[a(\eta)^2m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6}\right)a(\eta)^2\mathcal{R}^{RW}\right]\phi = 0. \tag{3.4}$$

Tämän jälkeen käytetään hyväksi RW-avaruuden spatiaalista homogeenisyyttä, minkä vuoksi moodifunktiot ovat separoituvaa muotoa [3]

$$u_{\mathbf{p}}^{Mink}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\chi_p(\eta), \tag{3.5}$$

missä kerroin $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$ on valittu käytännöllisistä syistä. Sijoittamalla tämä liikeyhtälöön (3.4), saadaan aikaosan $\chi_p(\eta)$ määrittävä differentiaaliyhtälö

$$\chi_p(\eta)'' + \left[p^2 + a(\eta)^2 m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6}\right) a(\eta)^2 \mathcal{R}\right] = 0, \tag{3.6}$$

missä pilkku tarkoittaa derivattaa konformaalisen ajan η suhteen. Kaavan (1.11) perusteella ratkaisut ovat ortogonaalisia, jos $\chi_p'\chi_p^* - \chi_p\chi_p'^* = i$.

Tämän jälkeen muunnetaan saatu Minkowskin avaruuden ratkaisu takaisin RW-avaruuteen ja saadaan lopulliseksi moodifunktioksi

$$u_{\mathbf{p}}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} a(\eta)}\chi_p(\eta), \tag{3.7}$$

missä $\chi_p(\eta)$ on oltava ratkaisu liikeyhtälölle (3.6). Nyt huomataan, että valitsemalla $\xi = \frac{1}{6}$, saadaan kaavan (1.23) mukainen moodifunktio, pois lukien mielivaltaisesti valittu kerroin $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$. Huomataan myös, että valitsemalla vielä $m = 0$ saadaan kentän φ liikeyhtälö, jonka ratkaisu tunnetaan

$$v_{\mathbf{k}}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} a(\eta)} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - ik\eta}}{\sqrt{2k}}. \tag{3.8}$$

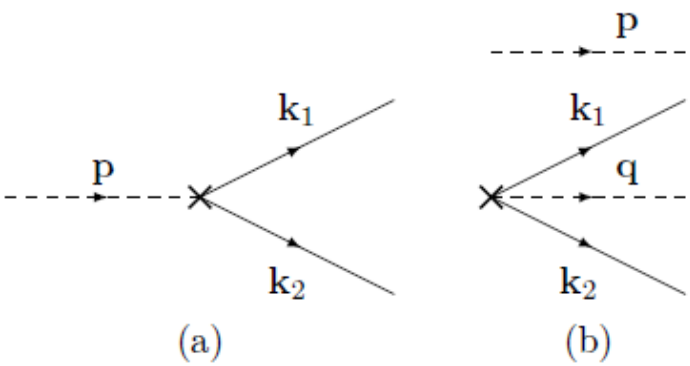
Viimeisenä määritetään vielä laskuissa käytettävä S-matriisi. Tarkastellaan vain perturbaatiosarjan ensimmäisen kertaluvun termiä, jolloin $S = 1 - i\lambda A + \mathcal{O}(\lambda^2)$, missä

$$A = \lim_{\beta \to 0^+} \int \hat{T} e^{-\beta\eta} \phi \varphi^2 \sqrt{-g} d^4x \tag{3.9}$$

Tämän tyyppisessä hajoamisessa added-up todennäköisyydeksi saadaan [7]

$$w^{\text{add}} = \lambda^2 \left[|\langle \text{in}, 1^{\varphi}_{\mathbf{k}_1}, 1^{\varphi}_{\mathbf{k}_2} | A | 1^{\phi}_{\mathbf{p}}, \text{in} \rangle|^2 + \sum_{\mathbf{q}} |\langle \text{in}, 1^{\phi}_{\mathbf{p}}, 1^{\phi}_{\mathbf{q}}, 1^{\varphi}_{\mathbf{k}_1}, 1^{\varphi}_{\mathbf{k}_2} | A | 1^{\phi}_{\mathbf{p}}, \text{in} \rangle|^2 \right]. \quad (3.10)$$

Näihin todennäköisyyksiin liittyvät Feynmanin diagrammit on esitetty kuvassa 1.



Kuva 1. Ensimmäisen kertaluvun hajoamisen Feynmanin diagrammit. Katkoviiva kuvaa massiivista ϕ hiukkasta ja yhtenäinen viiva massatonta φ hiukkasta [4].

Diagrammi 1b tulee kaarevassa avaruudessa mahdolliseksi energian säilymisen puuttumisen vuoksi [4]. Tähän diagrammiin liittyvä amplitudi voidaan myös yksinkertaistaa, sillä liikemäärän $\mathbf{p}$ omaava hiukkanen kulkee vain hajoamisesta ohi, eli esiintyy amplitudissa kahdesti, joten $\langle \text{in}, 1^{\phi}_{\mathbf{p}}, 1^{\phi}_{\mathbf{q}}, 1^{\varphi}_{\mathbf{k}_1}, 1^{\varphi}_{\mathbf{k}_2} | A | 1^{\phi}_{\mathbf{p}}, \text{in} \rangle = \langle \text{in}, 1^{\phi}_{\mathbf{q}}, 1^{\varphi}_{\mathbf{k}_1}, 1^{\varphi}_{\mathbf{k}_2} | A | 0, \text{in} \rangle$. Koska RW-avaruus on symmetrinen paikka-avaruuden siirroissa kolmiliikemäärä säilyy [25].

Tämän vuoksi $\mathbf{p} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ ja valitsemalla $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$ lopulliseksi added-up todennäköisyydeksi saadaan

$$w^{\text{add}} = \lambda^2 \left[|\langle \text{in}, 1^{\varphi}_{\mathbf{k}}, 1^{\varphi}_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} | A | 1^{\phi}_{\mathbf{p}}, \text{in} \rangle|^2 + |\langle \text{in}, 1^{\phi}_{-\mathbf{p}}, 1^{\varphi}_{\mathbf{k}}, 1^{\varphi}_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} | A | 0, \text{in} \rangle|^2 \right]. \quad (3.11)$$

Kokonaishajoamistodennäköisyys saadaan summaamalla yli mielivaltaisten liikemäärien, eli tässä tapauksessa liikemäärän $\mathbf{k}$,

$$w^{\text{tot}} = \sum_{\mathbf{k}} w^{\text{add}}. \tag{3.12}$$

Tämän perusteella tarkastellaan kummankin Feynmanin diagrammin muutosamplitudia erikseen.

Kuten kappaleessa 2.3 todettiin added-up todennäköisyys voidaan esittää myös out-out -amplitudien avulla, joten määritellään diagrammia 1a vastaava amplitudi $\mathcal{A}^a(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \equiv -i\lambda\langle \text{out}, 1^{\varphi}_{\mathbf{k}_1}, 1^{\varphi}_{\mathbf{k}_2}|A|1^{\phi}_{\mathbf{p}}, \text{out}\rangle$, sekä diagrammia 1b vastaava amplitudi $\mathcal{A}^b(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}) \equiv -i\lambda\langle \text{out}, 1^{\phi}_{\mathbf{q}}, 1^{\varphi}_{\mathbf{k}_1}, 1^{\varphi}_{\mathbf{k}_2}|A|0, \text{out}\rangle$. Syy muutosamplitudien esitykselle out-out -muodossa on se, että out-moodifunktio on helpommin löydettävissä, kuten tullan pian huomaamaan.

Käyttämällä hyväksi moodifunktioita (3.7) ja (3.8), sekä kommutaatiorelaatioita, 1a diagrammin muutosamplitudiksi saadaan

$$\mathcal{A}^a(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) = \frac{-i\lambda\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2\sqrt{k_1 k_2}} \lim_{\beta \to 0^+} \int_0^{\infty} e^{-\beta\eta} a(\eta) e^{i(k_1+k_2)\eta} \chi_p(\eta) d\eta. \tag{3.13}$$

Diagrammin 1b muutosamplitudi saadaan vaihtamalla $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \to \delta(\mathbf{q} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$, sekä $\chi_p(\eta) \to \chi_p^*(\eta)$. Kokonaismuutostodennäköisyys saadaan vaatimalla kolmiliikemäärän säilyminen, siirtymällä jatkuvalle rajalle ja integroimalla yli mielivaltaisen liikemäärän $\mathbf{k}_2$

$$w^{\text{tot}} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \left(|\mathcal{A}^a(k, |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)|^2 + |\mathcal{A}^b(k, |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)|^2 \right). \tag{3.14}$$

Kyseinen integraali on todella vaikea laskea yleisellä liikemäärällä $\mathbf{p}$ ja yleisellä $\chi_p(\eta)$ integraalia ei välttämättä pystytä ratkaisemaan. Tämän vuoksi siirrytään hajoavan hiukkasen lepokoordinaatistoon $\mathbf{p} = 0$ ja käytetään hyväksi symmetriaa $|\mathcal{A}^a(k, |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)|^2 = |\mathcal{A}^b(-k, |-\mathbf{p} - \mathbf{k}|)|^2$, sekä integroimalla $\mathbf{k}$ pallokoordinaatistossa saadaan integraali muotoon

$$w^{\mathrm{tot}} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left| \int_0^T a(\eta) e^{2ik\eta} \chi_{p=0}(\eta) d\eta \right|^2, \tag{3.15}$$

jossa ollaan otettu käyttöön katkaisu $\eta = T$ ja β-raja-arvo on otettu jo huomioon. Integraalin alaraja on hyvin käyttäytyvä, joten integrointi voidaan aloittaa nollasta [4]. Mikäli integraali hajaantuisi singulariteetissa voitaisiin alarajaksi valita mt_0, missä t_0 on singulariteetin ympäristössä. Integraalin yläraja on katkaistu, sillä aikaintegraali hajaantuu tietyissä avaruuksissa, kuten jäykän materian[11] dominoivassa avaruudessa [4]. Tässä muodossa k integraalia voidaan pitää jakaumana [4], jolloin kokonaismuutosamplitudiksi saadaan

$$w^{\mathrm{tot}} = \frac{\lambda^2}{8\pi} \int_0^T a(\eta)^2 |\chi_{p=0}(\eta)|^2 d\eta. \tag{3.16}$$

Seuraavaksi vuorossa on moodifunktion $\chi_{p=0}(\eta)$ laskeminen. Liikeyhtälö (3.6) ei ole kuitenkaan ratkaistavissa mille tahansa skaalatekijälle $a(\eta)$, joten määritetään skaalatekijä $a(\eta) = b\eta^{\frac{n}{2}}$, missä b on positiivinen vakio[12]. Tämä skaalatekijä kuvaa jäykän materian dominoivaa avaruutta $n = 1$, säteilyn dominoivaa avaruutta $n = 2$, materian dominoivaa avaruutta $n = 4$, sekä De Sitterin avaruutta $n = -2$. Tässä skaalatekijän valinnassa on kuitenkin ongelmia. Kuten kappaleessa 1.4 mainittiin, yleisessä avaruudessa hiukkasen käsite on ongelmallinen. Koska in- ja out-vakuumit määritellään normaalisti, eli asymptoottisina tulevaisuutena ja menneisyytenä, eli $\eta \to \pm\infty$, kysymykseksi tulee, voidaanko näissä vakuumeissa määritellä stabiilia hiukkasta. Jos avaruus redusoituisi asymptoottisesti Minkowskin avaruudeksi, olisi selkeästi nähtävissä että in- ja out-vakuumeissa olisi määritelty stabiili hiukkasen käsite, mutta nyt valittu avaruus ei selkeästi redusoidu Minkowskin avaruudeksi, sillä $a(\eta)$ ei lähesty asymptoottisesti vakioarvoa.

[11] Stiff matter.

[12] Konformaalisen ajan avulla annettu skaalatekijä voidaan laskea standardin aikakoordinaatin avulla annetusta skaalatekijästä ratkaisemalla differentiaaliyhtälö $d\eta = a(t)^{-1}dt$.

Kuitenkin osoittautuu, että jos avaruus on hitaasti muuttuva[13], voidaan konstruoida asymptoottisesti adiabaattinen vakuumi, missä hiukkasen käsite on määriteltävissä, sillä hiukkasmäärä on näissä vakuumeissa adiabaattinen vakio[14] [3]. Tarvitaan siis moodifunktio, joka redusoituu asymptoottisessa tulevaisuudessa ja menneisyydessä adiabaattisen vakuumin määrittäväksi moodifunktioksi. Tämä niin sanottu adiabaattinen moodifuktio saadaan laskettua liikeyhtälöstä (3.6) WKB-tyyppisenä ratkaisuna [3]. Tämän tyylinen laskumalli on kuitenkin työlästä ratkaista, mutta osoittautuu, että mikäli liikeyhtälöllä (3.6) on eksakti ratkaisu, redusoituu tämä asymptoottisesti adiabaattiseksi moodifunktioksi [3]. Tämän vuoksi eksaktia ratkaisua voidaan käyttää kaavassa (3.16).

Seuraavaksi ongelmaksi tulee in-vakuumin määritys asymptoottisena menneisyytenä, $\eta, t \to -\infty$. Tämä määritys on toimiva Minkowskin avaruudessa, mutta kun skaalatekijä $a(\eta)$ tulee mukaan liikeyhtälöihin $\eta \to -\infty$ on ei fysikaalinen vaatimus, sillä fysikaalisessa mallissa $\eta \in (0, \infty)$, kuten kappaleen alussa määriteltiin. Tämä ongelma voidaan kuitenkin kiertää, sillä singulariteetin $\eta = 0$ ympäristössä on mahdollista määrittää stabiili hiukkanen [26]. Tässä ympäristössä $\chi_p(\eta)$ on tasoaalto ratkaisu. Huomioitavaa on, että tämän tyylinen määritys ei ole mahdollista singulariteetissa $\eta = 0$, vain pelkästään singulariteetin ympäristössä, missä skaalatekijä $a(\eta_0) \neq 0$, missä η_0 on $\eta = 0$ ympäristössä.

Skaalatekijän $a(\eta) = b\eta^{\frac{n}{2}}$ valinnalla on myös hyviä puolia, sillä tällä skaalatekijällä liikeyhtälö (3.6) on eksaktisti ratkaistavissa lepokoordinaatistossa $p = 0$. Moodifunktion lasku on esitetty viitteessä [23] ja lopputulos voidaan esittää Hankelin funktioiden $H_\alpha^{(1,2)}$ avulla. Indeksi α riippuu täysin avaruuden valinnasta, sekä massallisen moodin gravitationaalisen kytkennän voimakkuudesta

[13] Hitaasti muuttuva avaruus voidaan määritellä skaalatekijän avulla $\frac{d^l}{d\eta^l}\frac{C(\eta)'}{C(\eta)} \xrightarrow{\eta \to \pm\infty} 0, \ \ \forall l \geq 0$.

[14] Tarkempi tarkastelu adiabaattisesta vakuumista ja tämän konstruoinnista löytyy viitteestä [3] kappaleesta 3.5.

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - n(n-2)(6\xi - 1)}}{2+n}. \tag{3.17}$$

Mikäli α on reaalinen, normalisoitu positiivinen moodifunktio on muotoa

$$\chi_{p=0}(\eta) = \sqrt{\frac{\pi\eta}{2(2+n)}} e^{-\frac{i\pi}{4}(1-2\alpha)} H_{\alpha}^{(2)}\left(\frac{2bm\eta^{\frac{2+n}{2}}}{2+n}\right), \tag{3.18}$$

ja kun α on imaginäärinen

$$\chi_{p=0}(\eta) = \sqrt{\frac{\pi\eta}{2(2+n)}} e^{-\frac{i\pi}{4}+\frac{\pi\tilde{\alpha}}{2}} H_{i\tilde{\alpha}}^{(2)}\left(\frac{2bm\eta^{\frac{2+n}{2}}}{2+n}\right), \tag{3.19}$$

missä $\tilde{\alpha} = \frac{\sqrt{n(n-2)(6\xi-1)-1}}{2+n}$. Moodifunktiot (3.18) ja (3.19) eivät ole määriteltyjä $n = -2$, joka kuvaa De Sitterin avaruutta. Liikeyhtälö (3.6) on kyllä ratkaistavissa tällä arvolla, mutta positiivista moodia ei voida identifioida [4].

Sijoittamalla lasketut positiiviset moodit kaavaan (3.16), sekä reaalisella, että imaginäärisellä indeksillä α, saadaan sama kokonaismuutostodennäköisyys

$$w^{\text{tot}} = \frac{\lambda^2}{32m^2} \int_0^{mt} u H_{\alpha}^{(1)}(u) H_{\alpha}^{(2)}(u) du, \tag{3.20}$$

missä ollaan tehty muuttujanvaihto $u = \frac{2bm\eta^{\frac{2+n}{2}}}{2+n}$ ja t on standardi aikakoordinaatti. Integraali (3.20) voidaan ratkaista eksaktisti Besselin funktioiden avulla ja reaaliselle indeksille α

$$\begin{aligned} w_{Re} =& \frac{\lambda^2}{64m^2}\{(mt)^2[J_{\alpha}(mt)^2 - J_{\alpha-1}(mt)J_{\alpha+1}(mt) + Y_{\alpha}(mt)^2 \\ &- Y_{\alpha-1}(mt)Y_{\alpha+1}(mt)] - \frac{4\alpha\cot(\pi\alpha)}{\pi}\}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

mikä suppenee[15] kun $\alpha < 1$ ja saa pienimmän arvonsa $\frac{2}{\pi^2}$ kun $\alpha = 0$. Imaginäärisen indeksin ratkaisuksi saadaan

[15] Tarkempi tarkastelu miten suppenemisehto rajoittaa ξ, n on tehty viitteessä [23].

$$
\begin{aligned}
w_{Im} =& \frac{\lambda^2}{64m^2}\{(mt)^2[J_\alpha(mt)^2 - J_{\alpha-1}(mt)J_{\alpha+1}(mt) + Y_\alpha(mt)^2 \\
& - Y_{\alpha-1}(mt)Y_{\alpha+1}(mt)] - \frac{4\tilde{\alpha}\coth(\pi\tilde{\alpha})}{\pi}\},
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

samalla suppenemisehdolla $\alpha < 1$.

Jotta lopputulosta voidaan verrata Minkowskin avaruuden hajoamiseen, pitää kokonaismuutostodennäköisyyttä tarkastella asymptoottisella rajalla. Esittämällä ratkaisu asymptoottisena sarjana johtavaksi termiksi saadaan [4]

$$
w^{\text{tot}} \sim \frac{\lambda^2}{16\pi m}\left(t - \frac{|\alpha|\cot(\pi|\alpha|)}{m}\right). \tag{3.23}
$$

Kvanttikenttäteoriassa hajoamisnopeus saataisiin jakamalla tämä kokonaismuutostodennäköisyys ajalla t. Nyt kuitenkin ongelmaksi syntyy kaavassa (3.23) esiintyvä vakiotermi. Audretsch ja Spangehl esittivät tähän ongelmaan mahdollisen ratkaisun [7]. Hajoamista voidaan tarkastella kahden aikaskaalan pohjalta: hiukkasten keskinäinen vuorovaikutus ja gravitaation vuorovaikutus.

Ensimmäinen näistä on karakterisoitavissa äärettömällä ajalla, sillä hiukkanen voi hajota milloin vain, ja toinen on karakterisoitavissa ajalla kun gravitaatiokenttä vuorovaikuttaa hiukkasen kanssa, mikä tapahtuu in- ja out-vakuumien välillä. Näin voidaan määritellä gravitaation vaikutusaika $t_{grav} := t_f - t_i$, missä t_i on aika kun gravitaatio alkaa vuorovaikuttaa ja t_f aika jolloin vuorovaikutus loppuu. Koska kaavassa (3.23) esiintyvä vakiotermi syntyy gravitaation takia, jaetaan tämä t_{grav}, jolloin asymptoottiseksi hajoamisnopeudeksi saadaan

$$
\Gamma_{\phi\to\varphi\varphi} \sim \frac{\lambda^2}{16\pi m}\left(1 - \frac{|\alpha|\cot(\pi|\alpha|)}{m t_{grav}}\right). \tag{3.24}
$$

Huomioitavaa on, ettei t_{grav} pystytä määrittelemään eksaktisti [7], mutta tämän tyylinen määrittely antaa hajoamisnopeudelle kvantitatiivisen ajatuksen, miten gravitaatio vaikuttaa hajoamiseen.

Tämän jälkeen pääsään vertailemaan tulosta Minkowskin avaruudessa saatavaan hajoamisnopeuteen. Minkowskin avaruuden raja saadaan kun avaruudesta tulee staattinen, eli $a(\eta) = 1$, mikä saadaan valitsemalla $n = 0$ ja $b = 1$. Näin hajoamisnopeudeksi saadaan

$$\Gamma^{Mink}_{\phi\to\varphi\varphi} = \frac{\lambda^2}{16\pi m}, \tag{3.25}$$

joka on sama kuin kvanttikenttäteorialla laskettu hajoamisnopeus. Tarkastellessa mahdollisia n:n ja ξ:n arvoja huomataan, että positiiviselle gravitaatiokytkennälle ξ säteilyn, materian ja jäykän materian dominoivissa avaruuksissa, pois lukien minimaalisella kytkennällä oleva kenttä materian dominoivassa avaruudessa, vakio kaavassa (3.24) on negatiivinen [4]. Tämän vuoksi gravitaatio pienentää hajoamisnopeutta Minkowskin avaruuteen verrattuna. Syvempää pohdintaa tästä tuloksesta kappaleessa 4.3. Tämä päättää tarkastelun hajoamisesta skalaarikanavaan.

3.2 Hajoaminen fermionikanavaan

Seuraavaksi tarkastellaan skalaarihiukkasen hajoamista fermionikanavaan. Tämän vuoksi tarvitaan siis kaarevaan avaruuteen yleistetty kvantisoitu spinorikenttä. Vaikka spinorikentän yleistys ja kvantisointi tapahtuu periaatteessa luvussa 1 osoitetulla tavalla, spinorien monimutkainen luonne luo ongelmia skalaarikentän kvantisointiin nähden. Aloitetaan spinorikentän yleistäminen kappaleen 1.2 mukaisesti vaihtamalla Minkowskin avaruuden suureet niiden kaarevan avaruuden vastineilla. Tämän lisäksi käytetään minimaalista kytkentämallia, sillä $\mathcal{R}$-lineaarinen termi ei ole dimensionaalisesti mahdollinen spinorikentällä. Tämän tyylinen menetelmä toimii kuitenkin vain kentille jotka muuttuvat Lorentz muunnoksissa kuten tensorit [27]. Tämän vuoksi, jotta spinorit voidaan yleistää kaarevaan avaruuteen, joudutaan käyttämään vierbein-formalismia.

Vierbein-formalismissa käytetään hyväksi ekvivalenssiperiaatetta ja jokaiseen avaruusajan pisteeseen liitetään lokaali inertiaalikoordinaatisto $\theta^{(a)}$, joka määrittää veirbeinkentän $e^{(a)}_{\mu}$

$$d\theta^{(a)} = \frac{\partial \theta^{(a)}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} = e^{(a)}_{\mu} dx^{\mu}. \tag{3.26}$$

Käytetään merkintää, jossa latinalaiset indeksit ovat lokaalin inertiaalikoordinaatiston Lorentz-indeksejä ja kreikkalaiset indeksit yleisen kaarevan koordinaatiston Lorentz-indeksejä. Vierbein-kentälle voidaan määritellä myös käänteiskenttä $e^{\mu}_{(a)}$

$$dx^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \theta^{(a)}} d\theta^{(a)}. \tag{3.27}$$

Vierbeinien avulla yleinen metriikka voidaan esittää muodossa $g_{\mu\nu} = \eta_{(ab)} e^{(a)}_{\mu} e^{(b)}_{\nu}$. Vierbein-kenttä voidaan siis ajatella olevan kuvaus lokaalin inertiaalikoordinaatiston $\theta^{(a)}$ ja yleisen koordinaatiston x^{μ} välillä. Vierbein-kenttää voidaan käyttää hyväksi spinorikentän yleistämisessä kaarevaan avaruuteen, sillä vierbein-kenttä muuttuu kuten yleisen avaruuden vektori (1. luokan tensori) indeksin μ suhteen ja kentällä voidaan kuvata inetriaalikoordinaatiston objekti $A^{(a)}$ yleiseksi vektoriksi $A^{\mu} = A^{(a)} e^{\mu}_{(a)}$. Tämän avulla identifioimalla spinorit A^{a} voidaan ne kuvata yleisiksi vektoreiksi ja kappaleen 1.2 mukaista yleistysmenetelmää voidaan käyttää hyväksi.

Näin Minkowskin avaruuden m-massainen spinorikenttä ψ voidaan yleistää kaarevaan avaruuteen ja Lagrangen tiheydeksi saadaan

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^{\mu} \nabla_{\mu} \psi - (\nabla^{\mu} \bar{\psi}) \gamma^{\mu} \psi \right] - m \psi \bar{\psi}, \tag{3.28}$$

missä $\bar{\psi}$ on Diracin konjugoitu spinori $\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^{0}$ ja kaarevan avaruuden gammamatriisit saadaan Minkowskin avaruuden gammamatriiseista $\gamma^{(a)}$ vierbein-kentän avulla $\gamma^{\mu} = \gamma^{(a)} e^{\mu}_{(a)}$. Kaarevan avaruuden gammamatriisit toteuttavat antikommutaatiorelaation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \tag{3.29}$$

ja Lagrangen tiheydessä esiintyvä kovariantti derivaatta on määritelty spin-konnektion Γ_μ avulla

$$\nabla_\mu := \partial_\mu + \Gamma_\mu, \tag{3.30}$$

missä, olettaen yleinen avaruus torsiottomaksi kuten yleisessä suhteellisuusteoriassa oletetaan,

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{8}[\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)}]e^\nu_{(a)}\partial_\mu e_{(b)\nu}. \tag{3.31}$$

Varioimalla Lagrangen tiheyttä saadaan kentälle ψ liikeyhtälöksi

$$i\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - m\psi = 0. \tag{3.32}$$

Kentälle $\bar{\psi}$ saadaan samanlainen liikeyhtälö. Spinorikentän kanoninen kvantisaatio tapahtuu kuten Minkowskin avaruudessa, eli määritellään saman ajan antikommutaatiorelaatiot

$$\begin{aligned} \{\psi_c(t,\mathbf{x}), \psi_d(t,\mathbf{x}')\} &= 0, \\ \{\pi_c(t,\mathbf{x}), \pi_d(t,\mathbf{x}')\} &= 0, \\ \{\psi_c(t,\mathbf{x}), \pi_d(t,\mathbf{x}')\} &= i\delta_{cd}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \end{aligned} \tag{3.33}$$

missä konjugoitu liikemäärä π_d on määritelty kaavan (1.3) mukaisesti ja kaavoissa käytetyt indeksit c ja d kuvaavat spinorien sekä konjugoidun liikemäärän komponenttia, eivätkä inertiaalikoordinaatiston Lorentz-indeksiä. Spinorien ψ ja ϕ sisätulo voidaan määritellä globaalin U(1)-symmetrian takia syntyvän säilyvän virran $Q = \bar{\psi}\gamma_0\psi$ avulla hyperpinnalla Σ, joka on vakioajan pinta

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_t d^{n-1}x\bar{\psi}(t,\mathbf{x})\gamma_0\psi(t,\mathbf{x}'). \tag{3.34}$$

Kumpikin spinorikenttä ψ ja $\bar{\psi}$ voidaan esittää kaavan (1.12) mukaisesti huomioiden spinien kaksi arvoa

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \sum_{\pm s}\sum_{\mathbf{k}} b^s_{\mathbf{k}} u^s_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}) + d^{s\dagger}_{\mathbf{k}} v^s_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}), \tag{3.35}$$

$$\bar{\psi}(t,\mathbf{x}) = \sum_{\pm s}\sum_{\mathbf{k}} d^s_{\mathbf{k}} \bar{v}^s_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}) + b^{s\dagger}_{\mathbf{k}} \bar{u}^s_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}). \tag{3.36}$$

Tämän perusteella spinorit ovat normalisoituja jos

$$u(\mathbf{k},s)^\dagger u(\mathbf{k},s') = v(\mathbf{k},s)^\dagger v(\mathbf{k},s') = 2|\mathbf{k}|\delta_{ss'}. \tag{3.37}$$

Nyt ollaan valmiita laskemaan skalaarikentän hajoaminen fermionikanavaan. Lasku on lähes samanlainen, kuin hajoaminen skalaarikanavaan, eli aluksi etsitään normoidut moodifunktiot, taas Robertsonin-Walkerin -avaruudessa, ja käytetään added-up -menetelmää hajoamisnopeuden laskemiseksi. Jotta tuloksia, jotka johdettiin skalaarikanavaan hajoamisen yhteydessä, voitaisiin käyttää hyväksi, pidetään hajoava skalaarihiukkanen taas lepokoordinaatistossaan. Tämän lisäksi, jotta added-up -menetelmää voitaisiin käyttää hyväksi pitää syntyvien fermionien olla konformaalisesti invariantteja, eli massattomia.

Hajoamista voidaan tarkastella myös symmetrian näkökulmasta. Oletetaan skalaarikentän olevan kompleksinen, jolla on nollasta poikkeava varaus. Fermionien oletetaan olevan kiraalisia, niin että ψ_L varaus on yhtä suuri, mutta erimerkkinen kuin hajoavan skalaarikentän ja ψ_R varaus on nolla. Näillä oletuksilla saadaan U(1)-symmetrinen teoria, sillä vain massatermi, jota nyt käytettävässä mallissa ei ole,

rikkoo U(1)-symmetrian [28]. Tämän vuoksi hajonnassa syntyvät hiukkaset omaavat globaalin U(1)-symmetrian. Jos tämän lisäksi oletetaan skalaarikentän ϕ olevan SU(2) dubletti ja määritellään globaali U(1)-varaus sopivalla tavalla, hajoamisessa syntyviä fermioneja voidaan pitää standardimallin fermioneina [28].

Nyt käytettävä malli on määritetty ja päästään tarkastelemaan Lagrangen tiheyttä. Jaetaan se kolmeen osaan, jotka ovat skalaariosa $\mathcal{L}_\phi$, spinoriosa $\mathcal{L}_\psi$, sekä vuorovaikutusosa $\mathcal{L}_I$. Lopullinen Lagrangen tiheys saadaan näiden summana. Skalaariosan Lagrangen tiheys on muotoa

$$\mathcal{L}_\phi = \sqrt{-g}\left[\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi - \xi\mathcal{R}\phi^*\phi\right]. \tag{3.38}$$

Koska kompleksinen skalaarikenttä voidaan hajottaa kahteen reaaliseen kenttään $\phi = \frac{\phi_1+\phi_2}{\sqrt{2}}$ voidaan laskuissa käyttää vain reaalista kenttä, jotta viime kappaleen tuloksia voidaan käyttää hyväksi. Tämä otetaan huomioon muutosamplitudeissa kertomalla nämä kahdella [4].

Spinoriosan Lagrangen tiheydeksi saadaan kaavan (3.28) mukaisesti

$$\mathcal{L}_\psi = \sqrt{-g}\frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - (\nabla^\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right], \tag{3.39}$$

ja viimeisenä vuorovaikutusosaksi valitaan

$$\mathcal{L}_I = -\sqrt{-g}h\phi\psi\bar{\psi}, \tag{3.40}$$

missä h on dimensioton kytkentävakio. Tarkastellaan jälleen vain perturbaatiosarjaa (2.11) ensimmäiseen kertalukuun asti, jolloin $S = 1 - ihA + \mathcal{O}(h^2)$, missä

$$A = \lim_{\beta\to 0^+}\int \hat{T}e^{-\beta\eta}\phi\psi\bar{\psi}\sqrt{-g}d^4x. \tag{3.41}$$

Seuraavana vuorossa on spinorien moodifunktioiden ratkaiseminen kaarevassa avaruudessa. Tämä on kuitenkin paljon hankalampaa kuin edellisessä kappaleessa esitetty skalaarin moodifunktion ratkaiseminen ja eksaktin ratkaisun löytäminen liikeyhtälölle (3.32) on mahdotonta, jopa massattomalle kentälle, ellei skaalatekijää määritetä heti laskun alussa [4]. Käytetään taas potenssilain mukaista skaalatekijää, mutta tällä kertaa esitetään se standardin aikakoordinaatin t avulla, sillä tämä helpottaa laskuja. Näin skaalatekijäksi voidaan valita $a(t) = b't^{n'}$, missä $n' \in (0,1)$. Tämä skaalatekijä kuvaa jäykän materian, sätteilyn ja materian dominoivaa avaruutta n' arvoilla $n' = \frac{1}{3}$, $n' = \frac{1}{2}$ ja $n' = \frac{2}{3}$. Huomioitavaa on, että parametrit b' ja n' eivät ole samoja kuin viime kappaleessa käytetyt parametrit b ja n. Näiden välille voidaan laskea yhteys differentiaaliyhtälöstä $a(\eta)d\eta = dt$ ja saadaan [4]

$$n' = \frac{n}{n+2}, \qquad b' = b\left(\frac{n+2}{2b}\right)^{\frac{n}{n+2}}. \tag{3.42}$$

Spinorien moodifunktiot voidaan ratkaista kiraalisessa esityksessä, missä

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.43}$$

missä σ_0 on identiteettimatriisi ja σ_i ovat Paulin matriiseja.

Tässä esitysmuodossa Diracin yhtälö (3.32) jakaantuu toisen asteen differentiaaliyhtälöpariksi, joille eksakti ratkaisu on löydettävissä massattomalle kentälle [4]. Massattoman spinorin moodifunktiot on ratkaistu viitteessä [24] ja lopputulokseksi saadaan

$$u^s_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{[2\pi a(t)]^{\frac{3}{2}}\sqrt{2k}} u(\mathbf{k},s) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \frac{ik}{b'(1-n')}t^{1-n'}}, \quad s = \pm 1, \tag{3.44}$$

$$v^s_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{[2\pi a(t)]^{\frac{3}{2}}\sqrt{2k}} v(\mathbf{k},s) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \frac{ik}{b'(1-n')}t^{1-n'}}, \quad s = \pm 1, \tag{3.45}$$

ja positiivisen ja negatiivisen energian spinorit normalisoitiin kaavan (3.37) mukaisesti ja saadaan

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{k},+) &= \begin{pmatrix} \sqrt{k-k_3} \\ \frac{-k_+}{\sqrt{k-k_3}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v(\mathbf{k},+) = \begin{pmatrix} \sqrt{k+k_3} \\ \frac{-k_+}{\sqrt{k-k_3}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
u(\mathbf{k},-) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{k+k_3} \\ \frac{k_+}{\sqrt{k+k_3}} \end{pmatrix}, \qquad v(\mathbf{k},-) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{k-k_3} \\ \frac{k_+}{\sqrt{k+k_3}} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

missä $k \equiv |\mathbf{k}|$, $k_\pm \equiv k_1 \pm ik_2$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)^T$ ja spin on z-akselin suuntainen. Näiden ratkaisujen avulla ψ ja $\bar{\psi}$ voidaan esittää kaavojen (3.35) ja (3.36) mukaisesti. Skalaarikentän moodifunktiona käytetään edellisessä kappaleessa saatuja tuloksia, mutta parametrit b ja n on vaihdettava b' ja n', sekä vaihdetaan $\eta \to t$.

Koska vuorovaikutustermi (3.40) on samaa muotoa kuin edellisessä kappaleessa voidaan kuvan 1 mukaisia Feynmanin diagrammeja käyttää hyväksi määrittämällä toinen yhtenäinen viiva kuvaamaan ψ ja toinen $\bar{\psi}$. Tämän vuoksi myös added-up todennäköisyydet (3.10) ja (3.11) ovat käyttökelpoisia vaihtamalla toinen $\varphi \to \psi$ ja toinen $\varphi \to \bar{\psi}$. Kokonaismuutostodennäköisyys määritellään myös kaavan (3.12) mukaisesti. Tarkastellaan jälleen vain diagrammin 1a muutosamplitudia, sillä diagrammin 1b muutosamplitudi saadaan taas yksinkertaisilla muuttujien vaihdoilla diagrammin 1a muutosamplitudista. Kommutaatiorelaatioilla diagrammin 1a muutosamplitudiksi saadaan [24]

$$
-ih\langle \text{out}, 1^{\psi}_{\mathbf{k}_1}, 1^{\bar{\psi}}{}_{\mathbf{k}_2} | A | 1^{\phi}_{\mathbf{p}}, \text{out}\rangle = -ih \int d^4x \sqrt{-g}\, \bar{u}^s_{\mathbf{k}_2}(t,\mathbf{x}) v^{s'}_{\mathbf{k}_1}(t,\mathbf{x}) w_{\mathbf{p}}(t,\mathbf{x}), \tag{3.47}
$$

missä $w_{\mathbf{p}}(t,\mathbf{x})$ on massallisen skalaarikentän moodifunktio (3.7), joka on muunnettu standardiin koordinaattiaikaan. Diagrammin 1b muutosamplitudi saadaan vaihtamalla $w_{\mathbf{p}}(t,\mathbf{x}) \rightarrow w^*_{\mathbf{p}}(t,\mathbf{x})$. Integroimalla $\mathbf{x}$ saadaan muutosamplitudiin a $\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)$ ja b $\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)$ [24]. Tämän jälkeen integroimalla yli $\mathbf{k}_2$ voidaan identifioida diagrammin 1a muutosamplitudin neliöksi

$$\begin{aligned} |-ih\langle \text{out}, 1^{\psi}_{\mathbf{k}}, 1^{\bar{\psi}}{}_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}|A|1^{\phi}_{\mathbf{p}}, \text{out}\rangle|^2 =& \frac{h^2}{8(2\pi)^2|\mathbf{k}|\mathbf{p}-\mathbf{k}||}|\bar{u}(\mathbf{p}-\mathbf{k},s)v(\mathbf{k},s')|^2 \\ &\times \left|\int_{T_0}^{T} \frac{\chi_p(t)}{a(t)} e^{\frac{i(k+|\mathbf{p}-\mathbf{k}|)}{b'(1-n')}t^{1-n'}} dt\right|^2, \end{aligned} \tag{3.48}$$

missä ollaan otettu käyttöön katkaisut T, T_0, sillä integraali hajaantuu sekä ylä-, että alarajalla lähes kaikissa avaruuksissa [24]. Samalla tavalla voidaan laskea diagrammin 1b muutosamplitudin neliö.

Lopputuloksena saadaan kaavan (3.48) tapainen kaava, mutta $\chi_p(t) \rightarrow \chi^*_p(t)$ ja $\mathbf{p}-\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{p}-\mathbf{k}$. Tämän jälkeen siirrytään massallisen skalaarihiukkasen lepokoordinaatistoon $\mathbf{p}=0$, jotta jo laskettuja tuloksia (3.18) ja (3.19), jotka ovat muutettu standardiin aikakoordinaattiin t, voidaan käyttää hyväksi. Tämän jälkeen summataan yli spin-indeksien s, s' käyttämällä hyväksi identiteettiä [24]

$$\sum_{s,s'} |\bar{u}(-\mathbf{k},s)v(\mathbf{k},s')|^2 = 8k^2. \tag{3.49}$$

näin voidaan vihdoin diagrammien 1a ja 1b muutosamplitudien neliöt yhdistää yhdeksi k-integraaliksi, joka voidaan identifioida kokonaismuutostodennäköisyydeksi

$$w^{\text{tot}} = \frac{h^2}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} k^2 dk \left|\frac{\chi_{p=0}(t)}{a(t)} e^{\frac{2ik}{b'(1-n')}t^{1-n'}} dt\right|^2. \tag{3.50}$$

K integrointia voidaan taas pitää jakaumana ja lopulliseksi kokonaismuutostodennäköisyydeksi saadaan

$$w^{\mathrm{tot}} = \frac{h^2}{32} \int_{mt_0}^{mt} \left| \frac{d}{ds} \left(s^{\frac{1-n'}{2}} H_\alpha^{(2)}(s) \right) \right|^2 s^{n'} ds, \tag{3.51}$$

missä s on dimensioton muuttuja, t on standardi aikakoordinaatti ja skalaarikentän moodifuktiosta tulevan Hankelin funktion indeksi α on määritelty

$$\alpha = \frac{\sqrt{(1-n')^2 - 4n'(2n'-1)(6\xi - 1)}}{2}. \tag{3.52}$$

Toisin kuin hajonnassa skalaarikanavaan, kokonaismuutostiheys (3.51) hajaantuu integraalin ylä-, sekä alarajalla $t_0 \to 0$, paitsi jos kyseessä on Minkowskin avaruus, säteilyn dominoiva avaruus tai jos gravitationaalinen kytkentä ξ on konformaalinen [4].

Menemällä staattisen avaruuden rajalle valitsemalla $n' = 0$ ja $b' = 1$ saadaan Minkowskin avaruuden kokonaismuutostodennäkisyys, mistä voidaan laskea Minkowskin avaruuden hajoamisnopeudeksi [4]

$$\Gamma^{Mink}_{\phi \to \psi\bar{\psi}} = \frac{h^2 m}{16\pi}, \tag{3.53}$$

joka on sama kuin kvanttikenttäteorialla laskettu hajoamisnopeus [24].

Kuten viime kappaleessa huomattiin, skalaarikentän hajoamisnopeus skalaarikanavaan on kaarevassa avaruudessa erilainen Minkowskin avaruuteen verrattuna. Tämän eron synnyttää kaavassa (3.23) oleva vakiotermi. Kyseinen vakiotermi syntyy integraalin alarajan, joka skalaarikentällä voitiin valita 0, takia. Tämän takia olettaa saattaa, että samantyylinen vakiotermi syntyy myös hajonnassa fermionikanavaan, mikäli integraali on laskettavissa alarajalla. Toki integraali voitaisiin laskea pitämällä integraalin alaraja mt_0, mutta tällä lähestymistavalla saatava lopputulos olisi kombinaatio Besselin funktioista, joiden argumenttina olisi yläraja mt, joista vähennettäisiin samat Besselin funktiot, joiden argumentti olisi alaraja mt_0. Tämän

vuoksi tarkastellaan seuraavaksi konformaalisesti kytketyn massallisen skalaarihiukkasen hajoamista, sillä kuten juuri todettiin tämän kokonaismuutostodennäköisyys on laskettavissa kun $t_0 \to 0$. Tällä kytkennän arvolla ja alarajan lähestyessä nollaa kokonaismuutostodennäköisyydeksi saadaan [4]

$$\begin{aligned} w^{\text{tot}} =& \frac{h^2}{64}\{(mt)^2[J_{-\frac{1+n'}{2}}(mt)^2 - J_{-\frac{3+n'}{2}}(mt)J_{\frac{1-n'}{2}}(mt) + Y_{-\frac{1+n'}{2}}(mt)^2 \\ & - Y_{-\frac{3+n'}{2}}(mt)Y_{\frac{1-n'}{2}}(mt)] + \frac{2(1+n')}{\pi}\tan(\frac{n'\pi}{2})\}, \end{aligned} \tag{3.54}$$

missä, kuten oletettiin, vakiotermi syntyy alarajan $t_0 \to 0$ takia [4]. Siirtymällä taas asymptoottisen sarjan avulla asymptoottiselle rajalle saadaan kokonaismuutostodennäköisyyden (3.54) johtaviksi termeiksi [4]

$$w^{\text{tot}} \sim \frac{h^2 m}{16\pi}\left(t + \frac{(1+n')}{2m}\tan(\frac{n'\pi}{2})\right), \tag{3.55}$$

mistä edellisen kappaleen mukaisesti saadaan laskettua kaarevan avaruuden hajoamisnopeus käyttämällä hyväksi t_{grav}

$$\Gamma_{\phi\to\psi\bar{\psi}} \sim \frac{h^2 m}{16\pi}\left(1 + \frac{(1+n')}{2mt_{grav}}\tan(\frac{n'\pi}{2})\right). \tag{3.56}$$

Mikäli verrataan skalaarikanavan hajoamisnopeutta (3.24) fermionikanavan hajoamisnopeuteen (3.56), huomataan hajoamisten suurin ero. Kuten edellisessä kappaleessa puhuttiin, positiivisella kytkentävakiolla, kuten konformaalisella kytkentävakiolla $\xi = \frac{1}{6}$, vakiotermi kaavassa (3.24) on kaikissa avaruuksissa negatiivinen, kun taas tällä kytkentävakiolla vakiotermi kaavassa (3.56) on positiivinen kaikissa avaruuksissa. Toisin sanoen gravitaatio pienentää hajoamisnopeutta skalaarikanavaan ja kasvattaa hajoamisnopeutta fermionikanavaan! Syvempää pohdintaa tuloksesta kappaleessa 4.3.

4 Skalaarikentän hajoaminen vektorikanavaan

Edellisen luvun innoittaman tämän luvun pyrkimyksenä on laskea skalaarihiukkasen hajoaminen vektorikanavaan. Laskuissa tarkastellaan vain hajoamista U(1) mittabosoniksi. Tämän vuoksi valittava malli muistuttaa läheisesti Minkowskin avaruuden skalaari-QED mallia. Aloitetaan kvantisoimalla vektorikenttä taas RW-avaruudessa, jonka jälkeen käytetään added-up -menetelmää kaarevan avaruuden hajoamisnopeuden laskemiseen. Tämän jälkeen tullaan vertailemaan saatuja tuloksia Minkowskin avaruudessa saatuihin tuloksiin.

4.1 Vektorikentän kvantisointi

Tunnetusti vektorikentän Lagrangen tiheys voidaan Minkowskin avaruudessa antaa kenttätensorin $F_{\mu\nu}$ avulla ja on yleisimmässä muodossaan

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{4.1}$$

missä $F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}V_{\nu]} - ig[V_\mu, V_\nu]$, missä $[V_\mu, V_\nu]$ tarkoittaa vektorien kommutaattoria ja g on kytkentävakio. Kenttätensori voidaan myös esittää komponenttimuodossa vektorikentän generoivan Lien algebran generaattorien T^i avulla

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}V^i_{\nu]} + gf^{jki}V^j_\mu V^k_\nu, \tag{4.2}$$

missä f^{jki} on Lien ryhmän rakennevakio[16].Nyt käyttämällä generaattoreille T^i tunnettuja identiteettejä $\mathrm{Tr}T^iT^j = T_R\delta^{ij}$, $T^2 \equiv T^iT^i = C_R\mathbf{1}$ ja $T_Rd(G) = C_Rd(R)$, missä C_R, T_R ovat vakioita ja $d(G)$ on Lien ryhmän G dimensio ja $d(R)$ on Lien ryhmän esitysmuodon dimensio, voidaan generaattorit normoida niin, että $T_R = 1$ [1] jolloin Lagrangen tiheydeksi saadaan

[16]Structure constant.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{i\mu\nu}F^{i}_{\mu\nu} \tag{4.3}$$

On kuitenkin selkeästi nähtävissä, että Lagrangen tiheydestä (4.3) saatavat liikeyhtälöt ovat vahvasti epälineaarisia. Tämän vuoksi valitaan laskuja helpottaakseen tarkasteluun $U(1)$ symmetrian generoima, esimerkiksi sähkömagneettista kenttää ja samalla fotonia kuvaava vektorikenttä A^μ. Koska $U(1)$ on yksidimensioinen Abelin ryhmä, sen rakennevakio $f^{jki} = 0$ [1], joten Lagrangen tiheydeksi saadaan

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu][\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] \tag{4.4}$$

Kappaleessa 3.2 todettiin, että kappaleen 1.2 mukainen yleistys kaarevaan avaruuteen toimii vain kentille, jotka muuntuvat Lorentz-muunnoksissa kuten vektori [27]. Tämän perusteella voidaan Lagrangen tiheys (4.4) yleistää suoraviivaisesti kaarevaan avaruuteen ja saadaan

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-g}\frac{1}{4}[\nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu][\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu]. \tag{4.5}$$

Huomioitavaa on, että vaikka dimensionaalisesti $\mathcal{R}$-lineaarinen termi $\mathcal{R}A^\mu A_\mu$ olisi mahdollinen, tämä kombinaatio rikkoo Lagrangen tiheyden mittainvarianssin. Mittainvarianssi on Lagrangen tiheyden invarianssi mittamuunnoksissa, jotka määritellään vektorikentän A^μ muunnoksena

$$\bar{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \phi, \tag{4.6}$$

missä ϕ on riittävän säännöllinen funktio [29].

Nyt kun kaarevaan avaruuteen yleistetty Lagrangen tiheys tunnetaan, voidaan tarkastella sen ominaisuuksia. Aloitetaan konformaalisen invarianssin tarkastelulla,

sillä added-up -menetelmän käyttö vaatii syntyvän vektorihiukkasen olevan konformaalisesti invariantti. Kappaleen 1.5 perusteella tiedetään, että koska Lagrangen tiheys (4.5) ei sisällä mittakaavaa omaavaa termiä, eli esimerkiksi massatermiä, on oletettavissa, että on olemassa vektorikentän muunnos, jolla vaikutus on konformaalisesti invariantti. Tämän takia tarkastellaan konformaalista muunnosta $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega(x) g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{g}^{\nu\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \Omega(x)^4 \Omega(x)^{-4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

mistä huomataan, että mikäli kenttätensori muuntuu $\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ vaikutus on konformaalisesti invariantti. Tämän vuoksi vektorikenttä muuntuu $\tilde{A}_\mu = A_\mu$. Nyt voidaan laskea vektorikentän $\tilde{A}^\mu$ muunnos, sillä toisin kuin spinori- ja skalaarikentille $\tilde{A}^\mu$ ja $\tilde{A}_\mu$ eivät muunnu samalla konformaalisella painolla q, sillä vektorikentän indeksien nosto ja lasku tapahtuu metriikan $\tilde{g}_{\mu\nu}$ avulla. $\tilde{A}^\mu$ muunnos saadaan seuraavasti

$$\tilde{A}^\mu = \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{A}_\nu = \Omega(x)^{-2} g^{\mu\nu} A_\nu = \Omega(x)^{-2} A^\mu.$$

Tämän perusteella vektorikenttä ja kenttätensori muuntuvat konformaalisessa muunnoksessa seuraavasti

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\mu &= A_\mu, & \tilde{A}^\mu &= \Omega(x)^{-2} A^\mu, \\ \tilde{F}_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}, & \tilde{F}^{\mu\nu} &= \Omega(x)^{-4} F^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

mitkä on todettu myös viitteessä [30].

Tämän jälkeen lasketaan liikeyhtälöt, joiksi saadaan

$$\Box A^\nu - \nabla_\mu \nabla^\nu A^\mu = 0, \tag{4.9}$$

missä $\Box \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu$. Vektorikentillä on tunnetusti ylimääräisiä epäfysikaalisia vapausasteita [31], jotka syntyvät mittainvarianssin takia, joten on kiinnitettävä jokin mitta, jossa liikeyhtälöt ratkaistaan. Sähkömagneettista kenttää kuvaavalla vektorikentällä on tunnetusti vain kaksi vapausastetta, jolloin liikeyhtälöillä (4.9) on myös kaksi epäfysikaalista vapausasteetta. Ensimmäinen epäfysikaalinen vapausaste on tunnistettavissa jos tarkastellaan kanonista konjugoitua liikemäärää (1.3), joka kentälle A_μ on

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = \sqrt{-g}[F^{0\mu} - F^{\mu 0}]. \tag{4.10}$$

Tästä huomataan, että π^0 häviää identtisesti, jonka vuoksi A^0 on epäfysikaalinen vapausaste. Tämän vuoksi valitaan mittaehto $A^0 = 0$, joka toimii vain tyhjässä avaruudessa. Tätä mittaa kutsutaan aksiaaliseksi mitaksi.

Toinen epäfysikaalinen vapausaste tunnetaan sähkö ja magnetismiopista, sillä tiedetään, että sähkömagneettinen kenttä oskilloi vain kulkusuuntaansa nähden kohtisuorasti. Mitta, joka poistaa oskilloinnin $\mathbf{k}$ suuntaan on Minkowskin avaruudessa $\partial_i A^i = 0$ ja tämä on yksinkertaisesti yleistettävissä kaarevaan avaruuteen $\nabla_i A^i = 0$.

Nämä mittaehdot yhdessä muodostavat säteilymitan. Säteilymitassa mittaehdot ja liikeyhtälöt muodostavat ratkaistavan differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} A^0 = 0, \\ \nabla_i A^i = 0, \\ \nabla_\mu \nabla^\mu A^i = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Tässä mitassa on kuitenkin ongelmansa, sillä se ei ole enää konformaalisesti invariantti. Tämän vuoksi ei voida olettaa, että mitta muuntuu Minkowskin säteilymitaksi, jos differentiaaliyhtälöryhmä muunnetaan konformaalisella muunnoksella Minkowskin avaruuteen. Koska mittoja on monia, ja eri mitat antavat mittainvarianssin nojalla saman lopputuloksen, yhtenä ratkaisuna olisi etsiä mitta, joka on

konformaalisesti invariantti. Viitteessä [11] ollaan käytetty light-cone mittaa, jossa $l_\mu A^\mu = 0$, missä l_μ on ajanluonteinen vektori. Koska vektori on ajanluonteinen voidaan laskea, että se muuntuu konformaalisessa muunnoksessa painolla $1 = \frac{1}{2}$ ja huomataan, että mitta on konformaalisesti invariantti[17].

Tässä esityksessä kuitenkin käytetään säteilymittaa ja käytetään hyväksi mittainvarianssia mitan palauttamiseksi säteilymitaksi konformaalisen muunnoksen jälkeen. Valitaan jo tässä vaiheessa tarkasteltavaksi avaruudeksi konformaalisesti litteä Robertson-Walker -avaruus. Tekemällä konformaalinen muunnos $g_{\mu\nu} = a(\eta)^2\eta_{\mu\nu}$ differentiaaliyhtälöryhmälle (4.11) saadaan

$$\begin{cases} \tilde{A}^0 = 0, \\ \partial_i \tilde{A}^i = 0, \\ \Box \tilde{A}^i - \tilde{A}^i a(\eta)^{-1}\partial_0\partial_0 a(\eta) = 0, \end{cases} \tag{4.12}$$

Tämä on osoitettu liitteessä B. Nyt tekemällä mittamuunnos $\tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu\phi$, palautuu yhtälöryhmä muotoon

$$\begin{cases} A^0 = 0, \\ \partial_i A^i = 0, \\ \partial_\mu\partial^\mu A^i = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Mittamuunnoksen olemassaolo on myös esitetty liitteessä B. Tämän differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisu tunnetaan ja se on [29]

$$A^i(\eta, \mathbf{x}) = \int d^3p C(p) \sum_{s=1,2} [a^{(s)}(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x} + a^{(s)*}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}]\epsilon^i_s(\mathbf{p}), \tag{4.14}$$

[17] Tämä mitta postaa vain yhden vapausasteen ja redusoituu aksiaaliseksi mitaksi Minkowskin avaruudessa. Jotta toinen epäfysikaalisista vapausasteista saadaan poistettua pitää liikeyhtälöiden ratkaisun jälkeen käyttää hyväksi jotain muuta fysikaalista rajoitetta kuten div$\mathbf{E} = 0$, jota ollaan käytetty myös [11].

missä $C(\mathbf{p})$ on normalisointivakio ja polarisaatiovektorit $\epsilon_s^i(\mathbf{p})$ valitaan niin, että ne ovat ortonormaaleja yksikkövektoreita ja $\boldsymbol{\epsilon}_3 = \hat{p}$. Mittainvarianssin vuoksi tämä ratkaisu on myös yhtälöryhmän (4.12) ratkaisu, jolloin käyttämällä konformaalista muunnosta saadaan kaarevan avaruuden ratkaisu. Kaarevassa avaruudessa positiiviseksi moodifunktioksi saadaan

$$u_{s,p}^i(\eta, \mathbf{x}) = \frac{C(\mathbf{p})}{a(\eta)^2} e^{-ip\cdot x} \epsilon_s^i(\mathbf{p}). \tag{4.15}$$

Jotta moodit voidaan normalisoida täytyy määrittää sisätulo, jonka avulla moodien ortonormaalisuus saadaan kaavaa (1.11) vastaavilla, ehdoilla huomioiden polarisaatio

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_{s,p} | \mathbf{u}_{s',p'} \rangle &= \delta_{s,s'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ \langle \mathbf{u}_{s,p}^* | \mathbf{u}_{s',p'}^* \rangle &= -\delta_{s,s'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ \langle \mathbf{u}_{s,p} | \mathbf{u}_{s',p'}^* \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Sisätulon määrityksessä voidaan käyttää hyväksi sitä, että moodifunktio (4.15) voidaan ajatella olevan tulo polarisaatiovektorin ja moodifunktion, joka muistuttaa skalaarikentän moodifunktiota, välillä. Tämän perusteella modifioimalla skalaarikentän moodifunktiden sisätuloa (1.10) voidaan määritellä vektorikentän moodifunktioiden sisätulo seuraavasti

$$\langle \mathbf{u}_{s,p} | \mathbf{v}_{s',p'} \rangle = -i \int d\Sigma^\mu \sqrt{-g_\Sigma} \left[\mathbf{u}_{s,p} \cdot (\partial_\mu \mathbf{v}_{s',p'}^*) - (\partial_\mu \mathbf{u}_{s,p}) \cdot \mathbf{v}_{s',p'}^* \right], \tag{4.17}$$

missä käytetään hyväksi pistetulon määritelmää $\mathbf{u}_{s,p} \cdot (\partial_\mu \mathbf{v}_{s',p'}^*) = g_{\alpha\beta} u_{s,p}^\alpha (\partial_\mu v_{s',p'}^{*\beta})$. Liitteessä C on osoitettu, että sisätulo on hyvin määritelty.

Normoimalla moodifunktiot saadaan kaarevan avaruuden moodifunktioiksi

$$
\begin{aligned}
u^i_{s,p}(\eta,\mathbf{x}) &= \frac{e^{-ip\cdot x}\epsilon^i_s(\mathbf{p})}{a(\eta)^2(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2p_0}},\\
u_{i,s,p}(\eta,\mathbf{x}) &= \frac{e^{-ip\cdot x}\epsilon^i_s(\mathbf{p})}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2p_0}}.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Nyt korottamalla kaavassa (4.14) esiintyvä $A^i(x)$ operaattoriksi, joka tapahtuu korottamalla funktiot $a^{(s)}(\mathbf{p})$ ja $a^{(s)*}(\mathbf{p})$ operaattoreiksi $\hat{a}^{(s)}(\mathbf{p})$ ja $\hat{a}^{(s)\dagger}(\mathbf{p})$, voidaan käyttää kanonista kvantisointia ja postuloidaan saman ajan kommutaatiorelaatioksi

$$
[A^i(\eta,\mathbf{x}),\pi^j(\eta,\mathbf{x}')] = i\delta^{i,j}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{4.19}
$$

Relaatio toteutuu jos operaattorit $\hat{a}^{(s)}(\mathbf{p})$ ja $\hat{a}^{(s)\dagger}(\mathbf{p})$ toteuttavat kommutaatiorelaatiot

$$
\begin{gathered}
[\hat{a}^{(s)}(\mathbf{p}),\hat{a}^{(s')\dagger}(\mathbf{p}')] = \delta^{s,s'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'),\\
\text{Muut nollia.}
\end{gathered}
\tag{4.20}
$$

Vektorikenttä on saatu kvantisoitua.

4.2 Hajoaminen vektorikanavaan

Nyt kun vektorikenttä on kvantisoitu päästään tarkastelemaan skalaarikentän hajoamista vektorikanavaan. Edellisten kappaleiden mukaisesti valitaan vuorovaikutustermi, joka on muotoa

$$
\mathcal{L}_I = -\sqrt{-g}\gamma\phi A_\mu A^\mu, \tag{4.21}
$$

missä γ on dimension 1 omaava kytkentävakio. Vuorovaikutustermi voi syntyä skalaari-QED mallista suoraan heikon symmetriarikon avulla, sillä skalaari-QED malli sisältää U(1) symmetrian perusteella mittasymmetrisen termin $D_\mu\varphi(D^\mu\varphi)^\dagger$, missä

$D_\mu = \partial_\mu - i\tilde{\gamma}A_\mu$. Tästä yhdeksi vuorovaikutustermiksi saadaan $\varphi\varphi^\dagger\tilde{\gamma}^2 A_\mu A^\mu$ ja jos symmetria rikkoutuu heikosti $\varphi = \varphi_0 + \phi$, missä φ_0 on vakio jolle $\varphi_0^2 \approx 0$, eli mittabosonin massa voidaan jättää huomioimatta, saadaan kaavan (4.21) mukainen vuorovaikutustermi. On myös mahdollista, että vuorovaikutustermi tulee toisesta teoriasta, kuten supersymmetrisestä teoriasta.

Tarkastellaan jälleen vain perturbaatiosarjan ensimmäisen kertaluvun termiä ja koska vektorikenttä on konformaalisesti invariantti voidaan käyttää added-up -menetelmää. Koska skalaarikentän ei tarvitse olla konformaalisesti invariantti käytetään edellisten kappaleiden mukaisesti positiivista moodia (3.7). Vuorovaikutustermin ollessa myös samaa muotoa kuin edellisissä kappaleissa voidaan käyttää added-up todennäköisyyttä (3.10) ja todennäköisyydeksi saadaan

$$w^{\text{add}} = \gamma^2 \left[|\langle \text{out}, 1^{A,(m)}_{\mathbf{k}_1}, 1^{A,(n)}_{\mathbf{k}_2} | A | 1^{\phi}_{\mathbf{p}}, \text{out}\rangle|^2 + \sum_{\mathbf{q}} |\langle \text{out}, 1^{\phi}_{\mathbf{q}}, 1^{A,(m)}_{\mathbf{k}_1}, 1^{A,(n)}_{\mathbf{k}_2} | A | 0, \text{out}\rangle|^2 \right], \tag{4.22}$$

missä $(m), (n)$ kuvaavat polarisaatioita ja

$$A = \lim_{\beta \to 0^+} \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\beta\eta} \hat{T} \phi A_\mu A^\mu. \tag{4.23}$$

Vaatimalla kolmiliikemäärän säilyminen saadaan added-up todennäköisyydestä (4.22) kaavan (3.11) mukainen todennäköisyys, ja tämän jälkeen aikaisimpien kappaleiden tapaisesti päästään käyttämään kokonaismuutostodennäköisyydelle kaavaa (3.12).

Nimetään amplitudit taas $\mathcal{A}^a(\mathbf{k}_1^{(m)}, \mathbf{k}_2^{(n)}, \mathbf{p}) \equiv -i\gamma\langle \text{out}, 1^{A,(m)}_{\mathbf{k}_1}, 1^{A,(n)}_{\mathbf{k}_2} | A | 1^{\phi}_{\mathbf{p}}, \text{out}\rangle$ ja $\mathcal{A}^b(\mathbf{k}_1^{(m)}, \mathbf{k}_2^{(n)}, \mathbf{q}) \equiv -i\gamma\langle \text{out}, 1^{\phi}_{\mathbf{q}}, 1^{A,(m)}_{\mathbf{k}_1}, 1^{A,(n)}_{\mathbf{k}_2} | A | 0, \text{out}\rangle$. Käyttämällä kommutaatiorelaatioita saadaan

$$\mathcal{A}^a(\mathbf{k}_1^{(m)}, \mathbf{k}_2^{(n)}, \mathbf{p}) = \frac{-i\gamma\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\delta^{mn}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2\sqrt{k_1 k_2}} \lim_{\beta \to 0^+} \int a(\eta) e^{-\beta\eta} e^{i(k_1+k_2)\eta} \chi_p(\eta) d\eta. \tag{4.24}$$

Tästä huomataan, että muutosamplitudi on delta-funktiota vaille sama kuin skalaarikanavaan hajoamisen muutosamplitudi (3.13). Myös 1b diagrammin muutosamplitudi saadaan samalla tavalla kuin kappaleessa 3.1, eli vaihtamalla $\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) \to \delta(\mathbf{q}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)$, sekä $\chi_p(\eta) \to \chi_p^*(\eta)$. Tämä ei ole yllätys, sillä kuten sisätuloa (4.17) määriteltäessä todettiin, vektorikenttä voidaan ajatella skalaarikentän ja polarisaatiovektorin tulona.

Kappaleen 3.1 perusteella tiedetään myös, että siirtymällä jatkuvalle rajalle ja integroimalla yli liikemäärän $\mathbf{k}_2$ saadaan kaavaa (3.14) vastaava kokonaismuutostodennäköisyys. Tämän jälkeen siirtymällä skalaarihiukkasen lepokoordinaatistoon $\mathbf{p}=0$, integroimalla $\mathbf{k}$ pallokoordinaatistossa, pitämällä k integraalia jakaumana ja huomioiden katkaisu $\eta = T$, saadaan (3.16) mukaisesti kokonaismuutostodennäköisyydeksi

$$w^{\text{tot}} = \frac{\gamma^2|\delta^{nm}|^2}{8\pi}\int_0^T a(\eta)^2|\chi_{p=0}(\eta)|^2 d\eta. \tag{4.25}$$

Seuraavaksi kuten spinorikanavaan hajonnassa, jossa summattiin yli spin-indeksien, summataan kokonaismuutostodennäköisyys (4.25) yli mahdollisten polarisaatiotilojen, jolloin $\sum_{mn}|\delta^{nm}|^2 = 4$. Tämän jälkeen käyttämällä skalaarikentälle laskettuja moodifunktioita (3.18) ja (3.19) voidaan laskea kokonaismuutostodennäköisyydelle kaavojen (3.20-3.22) mukaiset tulokset huomioiden polarisaatiotilojen takia suntynyt kerroin 4. Tämän jälkeen menemällä asymptoottiselle rajalle saadaan

$$w^{\text{tot}} \sim \frac{\gamma^2}{4\pi m}\left(t - \frac{|\alpha|\cot(\pi|\alpha|)}{m}\right), \tag{4.26}$$

ja määrittelemällä taas gravitaation vaikutusaika $t_{grav} = t_f - t_i$ saadaan asymptoottiseksi hajoamisnopeudeksi

$$\Gamma_{\phi\to AA} \sim \frac{\gamma^2}{4\pi m}\left(1 - \frac{|\alpha|\cot(\pi|\alpha|)}{m t_{grav}}\right), \tag{4.27}$$

ja staattisella rajalla saadaan Minkowskin avaruuden hajoamisnopeudeksi

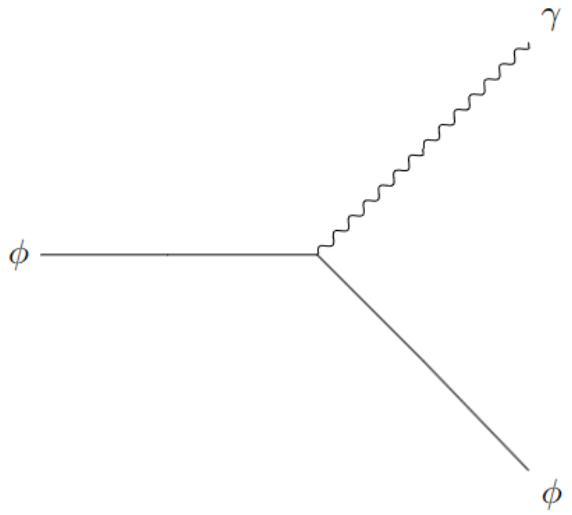
$$\Gamma^{Mink}_{\phi\to AA} = \frac{\gamma^2}{4\pi m}. \tag{4.28}$$

4.3 Lopputulokset

Tässä luvussa ollaan kvantisoitu konformaalisesti kytketty vektorikenttä, sekä laskettiin skalaarihiukkasen hajoaminen vektorikanavaan. Lopputuloksena ollaan saatu asymptoottinen hajoamisnopeus (4.27), joka muistuttaa skalaarikanavaan hajoamisen hajoamisnopeutta (3.24). Kuten luvun aikana huomattiin tämä ei ole yllätys, sillä vektorikenttä ja skalaarikenttä ovat saman luonteisia kenttiä. Tulosten samankaltaisuuden vuoksi J. Lankisen julkaisun [23] tulokset ovat käyttökelpoisia myös vektorikanavaan hajoamiselle. Samoin julkaisua [33] voidaan käyttää selittämään vektorikanavaan hajoamisen tuottama vaikutus universumin uudelleenlämpenemisessä.

Vaikka saatu lopputulos on antiklimaattinen työ ei ole ollut turhaa, sillä kvantisoitua vektorikenttää voidaan käyttää hyväksi myös muissa paljon mielenkiintoisimmissa kaarevan avaruuden hiukkasprosesseissa ja niiden laskuissa. Yhdeksi esimerkiksi nostan prosessin, joka on esitetty kuvassa 2, jossa vektorihiukkanen absorboituu/emittoituu toisesta hiukkasesta. Kyseinen prosessi on mielenkiintoinen, sillä se on mahdollinen vain kaarevassa avaruudessa energian säilymisen puuttumisen takia. Kvantisoitua vektorikenttää voidaan käyttää hyväksi myös tunnettujen prosessien, kuten Comptonin sironnan laskemisessa kaarevassa avaruudessa.

Lopputulos mahdollistaa syvemmän pohdinnan kaarevan avaruuden hiukkasfysiikan luonteesta. Kuten asymptoottisista hajoamisnopeuksista (3.24), (3.56) ja (4.27) huomataan, skalaari- ja vektorikanavaan hajoaminen on pienempää kuin Minkowskin avaruudessa, ja fermionikanavaan hajoaminen on suurempaa kuin Minkowskin avaruudessa. Ero laskuissa syntyy vuorovaikutustermin konformisen painon takia,



Kuva 2. Feynmanin diagrammi vektorihiukkasen absorboitumisesta/emittoitumisesta.

sillä $\widetilde{\sqrt{g}\phi\varphi^2} = \Omega\sqrt{g}\phi\varphi^2$, $\widetilde{\sqrt{g}\phi A^\mu A_\mu} = \Omega\sqrt{g}\phi A^\mu A_\mu$ ja $\widetilde{\sqrt{g}\phi\psi\bar{\psi}} = \Omega^{-1}\sqrt{g}\phi\psi\bar{\psi}$. Näistä huomioista voitaisiin tehdä arvaus, että jos vuorovaikutustermi muuntuu konformaalisessa muunnoksessa $\tilde{\mathcal{L}} = \Omega^q\mathcal{L}$ niin, että jos $q > 0$ hajoamisnopeus on pienempi Minkowskin avaruuteen verrattuna ja jos $q < 0$ hajoamisnopeus on suurempi. Tämä on tietysti vasta pohdintaa ja tarkempia laskuja tarvittaisiin todistamaan, onko kyseinen arvaus tosi. Mikäli kyseinen arvaus olisi tosi, kertoisi tämä paljon kaarevan avaruuden hiukkasfysiikan luonteesta, ja tämä mahdollistaisi mahdollisen syyn spekuloimisen.

5 Yhteenveto

Tässä tutkielmassa ollaan esitetty kaarevan avaruuden hiukkasfysiikan perusteet, sekä ollaan laskettu skalaarihiukkasen hajoaminen vektorikanavaan. Laskuihin ollaan käytetty added-up -menetelmää, joka on yksi esimerkki CTP-menetelmistä. Vaikka tulokset ovat mielenkiintoisia ja teoreettisesti järkeviä, pitää muistaa, että tämän tyyppiset menetelmät ovat vielä vain teorioita ja täten eivät kokeellisesti vielä todennettuja. Tämä ei kuitenkaan ole pysäyttänyt teoreettisia fyysikoita tutkimasta näitä välimaaston teorioita siinä toivossa, että ne antaisivat paremman kuvan fysiikan suurimmista kysymyksistä kuten mustien aukkojen toiminnasta ja alkuräjähdyksestä. Toiveena on toki myös löytää vihjeitä siitä minkälainen todellinen kvanttigravitaatioteoria voisi olla, minkä vuoksi tämän tyylisten välimaaston teorioiden tutkimus on tärkeää ja tutkielman lukija on varmasti saanut tarpeelliset työkalut näiden teorioiden ymmärtämiseen sekä tutkimiseen.

Viitteet

[1] I. Vilja, *Quantum Field Theory 1 & 2*, Turun yliopisto, Fysiikan laitos (2019).

[2] V. Mukhanov, S Winitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity*, Cambridge university Press (2007).

[3] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum Field Theory in Curved space*, Cambridge university Press (1982).

[4] J. Lankinen, *Particle decay in the early universe*, Väitöskirja, Turun yliopisto, Luonnontieteiden ja tekniikan tiedekunta, Fysiikan laitos (2020).

[5] A. N. Bernal, M. Sánchez, Commun. Math. Phys. **243**, 461 (2003).

[6] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, The University of Chigaco Press (1973).

[7] J. Audretsch, P. Spangehl, Classical Quantum Gravity **2**, 733 (1985).

[8] L. Parker, Phys. Rev. Lett. **21**, 562 (1968).

[9] L. Parker, Phys. Rev. **183**, 1057 (1969).

[10] L. Parker, Phys. Rev. D. **3**, 346 (1971).

[11] M. Castagnino, J. Sztrajman, J. Math. Phys. **27**, 1037 (1986).

[12] L. I. Tsaregorodtsev, V. V. Tsaregorodtseva, Gen. Rel. Grav. **36**, 1679 (2004).

[13] N. D. Birrell, L. H. Ford, Ann. Phys. **122**, 1 (1979).

[14] K. H. Lotze, Class. Quant. Grav. **4**, 1437 (1987).

[15] L. H. Ford, Nucl. Phys. B **204**, 35 (1982).

[16] S. Hollands, R. M. Wald, Phys. Rept. **574**, 1 (2015).

[17] N. D. Birrell, J. G. Taylor, J. Math. Phys. **21**, 1740 (1980).

[18] I. L. Buchbinder, R. S. Fradkin, D. M. Gitman, Fortschr. Phys. **29**, 187 (1981).

[19] B. S. Kay, Commun. Math. Phys. **71**, 29 (1980).

[20] E. Calzetta, B. L. Hu, Phys. Rev. D **35**, 495 (1987).

[21] J. Lankinen, I. Vilja, Phys. Rev. D **96**, 105026 (2017).

[22] J. Lankinen, I. Vilja, Phys. Rev. D **97**, 065004 (2018).

[23] J. Lankinen, I. Vilja, Phys. Rev. D **98**, 045010 (2018).

[24] J. Lankinen, J. Malmi, I. Vilja, Eur. Phys. J. C **80**, 502 (2020).

[25] E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley Publishing Company (1990).

[26] J. Lankinen, I. Vilja, J. Cosmol. Astropart. Phys. **85**, 025 (2017).

[27] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons (1972).

[28] M. Peskin, D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press (2016).

[29] I. Vilja, *Sähködynamiikka*, Turun yliopisto, Fysiikan laitos (2020).

[30] J. Côté, V. Faraoni, A. Giusti, Gen. Rel. Grav. **51**, 117 (2019).

[31] E. Fradkin, *Quantum Field Theory: An Integrated Approach*, Princeton University Press (2021).

[32] I. Vilja, *Yleinen suhteellisuusteoria*, Turun yliopisto, Fysiikan laitos (2022).

[33] J. Lankinen, O. Kerppo, I. Vilja, Phys. Rev. D **101**, 063529 (2020).

A 4-ulotteinen konformaalinen kytkentä, sekä liikeyhtälön muunnos

Muunnetaan 4-uloitteisen avaruuden Lagrangen tiheys (1.7) käyttämällä konformaalista muunnosta $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$, $\tilde{\phi} = \Omega^q \phi$. Näin saadaan

$$\tilde{\mathcal{L}} = \Omega^4 \frac{\sqrt{-g}}{2}(\Omega^{-2} g^{\mu\nu}\partial_\mu(\Omega^q\phi)\partial_\nu(\Omega^q\phi) - m^2\Omega^{2q}\phi^2 - \xi(\Omega^{-2}\mathcal{R} + 6\Omega^{-3}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\mu\Omega)\Omega^{2q}\phi),$$

missä Ricci-skalaarin muunnos on [3]

$$\tilde{\mathcal{R}} = \Omega^{-2}\mathcal{R} + 2(d-1)\Omega^{-3}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\Omega + (d-1)(d-4)\Omega^{-4}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega\partial_\nu\Omega \tag{A.1}$$

Tarkastellaan ensimmäistä termiä

$$\begin{aligned}\Omega^{-2}g^{\mu\nu}\partial_\mu(\Omega^q\phi)\partial_\nu(\Omega^q\phi) =& \Omega^{2q-2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + q^2\Omega^{2q-4}\phi^2 g^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega\partial_\nu\Omega \\ &+ 2q\Omega^{2q-3}\phi g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\Omega.\end{aligned}$$

Nyt siis muunnos on muotoa (1.27)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} = \frac{\sqrt{-g}}{2}(&\Omega^{2q+2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + q^2\Omega^{2q}\phi^2 g^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega\partial_\nu\Omega + 2q\Omega^{2q+1}\phi g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\Omega \\ &- m^2\Omega^{2q+4}\phi^2 - \xi\Omega^{2q+2}\mathcal{R}\phi^2 - 6\xi\Omega^{2q+1}\phi^2 g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\Omega).\end{aligned}$$

Valitsemalla $q = -1$ ja $\xi = \frac{1}{6}$ saadaan

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} =& \frac{\sqrt{-g}}{2}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{6}\mathcal{R}\phi^2 - m^2\Omega^{-2}\phi^2 \\ &- 2\phi\Omega^{-1}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\Omega + \phi^2\Omega^{-2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega\partial_\nu\Omega - \phi^2\Omega^{-1}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\Omega),\end{aligned}$$

ja tunnistamalla toisen rivin termi

$$\nabla_\mu(\phi^2\Omega^{-1}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Omega) = 2\phi\Omega^{-1}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\Omega - \phi^2\Omega^{-2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega\partial_\nu\Omega + \phi^2\Omega^{-1}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\Omega,$$

saadaan lopulta (1.28).

Seuraavaksi käydään läpi liikeyhtälön muuntuminen d-uloitteisessa avaruudessa. Käytetään Ricci-skalaarin muuntosääntöä (A.1), sekä kovariantin d'Alembertin operaattorin määritelmää $\Box\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi)$ [3]. Kentän muunnoksessa tiedetään, että konformaalinen paino on $q = \frac{2-d}{2}$. Nyt liikeyhtälöä

$$\tilde{\Box}\tilde{\phi} + \frac{d-2}{4(d-1)}\tilde{\mathcal{R}}\tilde{\phi},$$

voidaan tarkastella kahdessa osassa. Ensimmäinen termi saadaan muotoon

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Box}\tilde{\phi} &= \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\partial_\mu(\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\tilde{\phi}) \\
&= \Omega^{-d}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\Omega^d\sqrt{-g}\Omega^{-2}g^{\mu\nu}\partial_\nu(\Omega^{\frac{2-d}{2}}\phi)) \\
&= \Omega^{-d}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\Omega^{d-2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\frac{2-d}{2}\Omega^{\frac{-d}{2}}\phi\partial_\nu\Omega + \Omega^{\frac{2-d}{2}}\partial_\nu\phi)) \\
&= \Omega^{-d}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Omega)\frac{2-d}{2}\Omega^{\frac{d-4}{2}}\phi \\
&\quad + \Omega^{-d}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Omega\frac{2-d}{2}\frac{d-4}{2}\Omega^{\frac{d-6}{2}}\partial_\mu(\Omega)\phi \\
&\quad + \Omega^{-d}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Omega\frac{2-d}{2}\Omega^{\frac{d-4}{2}}\partial_\mu\phi \\
&\quad + \Omega^{-d}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi)\Omega^{\frac{d-2}{2}} \\
&\quad + \Omega^{-d}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\frac{d-2}{d}\Omega^{\frac{d-4}{2}}\partial_\mu\Omega,
\end{aligned}
$$

ja käyttämällä kovariantin d'Alembertin operaattorin määritelmää toisinpäin saadaan

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Box}\tilde{\phi} &= \frac{2-d}{2}\Omega^{-\frac{d+4}{2}}\Box\Omega\phi + \Omega^{-\frac{d+2}{2}}\Box\phi \\
&\quad + \frac{(2-d)(d-4)}{4}\Omega^{-\frac{d+6}{2}}\phi g^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega\partial_\nu\Omega \\
&\quad + \frac{2-d}{2}\Omega^{-\frac{d+4}{2}}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\Omega \\
&\quad + \frac{d-2}{2}\Omega^{-\frac{d+4}{2}}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\Omega,
\end{aligned}
$$

missä viimeiset termit kumoavat toisensa. Toinen termi muuntuu

$$
\begin{aligned}
\frac{d-2}{4(d-1)}\tilde{\mathcal{R}}\tilde{\phi} &= \frac{d-2}{4(d-1)}(\Omega^{-2}\mathcal{R} + 2(d-1)\Omega^{-3}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\Omega \\
&\quad + (d-1)(d-4)\Omega^{-4}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega\partial_\nu\Omega)\Omega^{\frac{2-d}{2}}\phi \\
&= \frac{d-2}{4(d-1)}\Omega^{-\frac{d+2}{2}}\mathcal{R}\phi + \frac{d-2}{2}\Omega^{-\frac{d+4}{2}}\Box\Omega\phi \\
&\quad + \frac{(d-2)(d-4)}{4}\Omega^{-\frac{d+6}{2}}\phi g^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega\partial_\nu\Omega.
\end{aligned}
$$

Nyt summaamalla termit päästään lopputulokseen (1.31)

B Liikeyhtälön ja mittaehtojen muuntuminen

Mittaehdot ja liikeyhtälö ovat kaarevassa avaruudessa muotoa

$$\begin{cases} \tilde{A}^0 = 0, \\ \nabla_i \tilde{A}^i = 0, \\ \nabla_\mu \nabla^\mu \tilde{A}^i = 0, \end{cases}$$

RW-avaruuden konformaalisessa muunnoksessa $\tilde{g}_{\mu\nu} = a(\eta)^2 \eta_{\mu\nu}$ vektorikenttä muuntuu $\tilde{A}_\mu = \bar{A}_\mu$ ja $\tilde{A}^\mu = a(\eta)^{-2}\bar{A}^\mu$. Tämän perusteella mittaehdot muuntuvat

$$0 = \tilde{A}^0 = a(\eta)^{-2}\bar{A}^0 \quad \Rightarrow \quad \bar{A}^0 = 0,$$

ja viitteen [11] mukaisesti

$$0 = \widetilde{\nabla_i A^i} = a^{-2}[\partial_i \bar{A}^i + 2a(\eta)^{-2}\bar{A}^i \partial_i a(\eta)] \quad \Rightarrow \quad \partial_i \bar{A}^i = 0.$$

Liikeyhtälö voidaan esittää muodossa

$$0 = \widetilde{\nabla_\mu \nabla^\mu A^i} = \partial_\mu(\widetilde{\nabla^\mu A^i}) + \Gamma^\mu_{\mu\delta}\widetilde{\nabla^\delta A^i} + \Gamma^i_{\mu\delta}\widetilde{\nabla^\mu A^\delta}.$$

Käyttämällä identiteettiä $\Gamma^{\tilde{\mu}}_{\mu\delta} = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\partial_\delta(\sqrt{-\tilde{g}})$ [32], sekä mittaehtoa $\tilde{A}^0 = 0$ saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu(\widetilde{\nabla^\mu A^i}) + \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\partial_\delta(\sqrt{-\tilde{g}})\widetilde{\nabla^\delta A^i} + \Gamma^i_{\mu k}\widetilde{\nabla^\mu A^k} \\ &= \partial_\mu(\widetilde{\nabla^\mu A^i}) + \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\partial_\mu(\sqrt{-\tilde{g}}\widetilde{\nabla^\mu A^i}) - \partial_\mu(\widetilde{\nabla^\mu A^i}) + \Gamma^i_{\mu k}\widetilde{\nabla^\mu A^k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\partial_\mu(\sqrt{-\tilde{g}}\widetilde{\nabla^\mu A^i}) + \Gamma^i_{\mu k}\widetilde{\nabla^\mu A^k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\partial_\mu(\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\alpha}\tilde{g}^{ij}\widetilde{\nabla_\alpha A_j}) + \tilde{g}^{\mu\alpha}\tilde{g}^{kj}\Gamma^i_{\mu k}\widetilde{\nabla_\alpha A_j} \end{aligned}$$

Viitteen [11] mukaisesti konformaalisessa muunnoksessa suureet muuntuvat seuraavasti

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla_\alpha A_j} &= \partial_\alpha \bar{A} - \frac{1}{2}\bar{A}_\alpha \partial_j \ln a(\eta)^2 - \frac{1}{2}\bar{A}_j \partial_\alpha \ln a(\eta)^2 + \frac{1}{2}g_{\alpha j}\bar{A}_\delta \partial^\delta ln a(\eta)^2 \\ &= \partial_\alpha \bar{A}_j - \bar{A}_j \partial_\alpha \ln a(\eta), \\ \tilde{\Gamma}^i_{\mu k} &= \frac{1}{2}\left(\delta^i_\mu \partial_k \ln a(\eta)^2 + \delta^i_k \partial_\mu \ln a(\eta)^2 - \eta_{\mu k}\partial^i \ln a(\eta)^2\right) \\ &= \delta^i_k \partial_\mu \ln a(\eta). \end{aligned}$$

Tämän perusteella liikeyhtälö muuntuu

$$
\begin{aligned}
0 &= a(\eta)^{-4}\partial_\mu(\eta^{\mu\alpha}\eta^{ij}[\partial_\alpha\bar{A}_j - \bar{A}_j\partial_\alpha \ln a(\eta)]) \\
&\quad + \delta^i_k\partial_\mu[\ln a(\eta)]a(\eta)^{-4}\eta^{\mu\alpha}\eta^{kj}[\partial_\alpha\bar{A}_j - \bar{A}_j\partial_\alpha \ln a(\eta)] \\
&= a(\eta)^{-4}\{\Box\bar{A}^i - \partial_\mu[\bar{A}^i]\partial^\mu[\ln a(\eta)] - \bar{A}^i\Box[\ln a(\eta)] \\
&\quad + \partial_\mu[\bar{A}^i]\partial^\mu[\ln a(\eta)] - \bar{A}^i\partial_\mu[\ln a(\eta)]\partial^\mu[\ln a(\eta)]\} \\
&= a(\eta)^{-4}\{\Box\bar{A}^i - \bar{A}^i(\Box[\ln a(\eta)] + \partial_\mu[\ln a(\eta)]\partial^\mu[\ln a(\eta)])\} \\
&= a(\eta)^{-4}\{\Box\bar{A}^i - \bar{A}^i a(\eta)^{-1}\partial_0\partial_0 a(\eta)\} \\
&\Rightarrow \Box\bar{A}^i - \bar{A}^i a(\eta)^{-1}\partial_0\partial_0 a(\eta) = 0
\end{aligned}
$$

Tehdään seuraavaksi mittamuunnos $\bar{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu\phi$ ja nimetään $\partial^\mu\phi = \Phi^\mu$. Mittamuunnosfunktion on toteutettava seuraavat ehdot jotta saadaan palautettua Minkowskin avaruuden säteilymitta (4.13)

$$
\begin{cases}
\Phi^0 = 0, \\
\partial_i\Phi^i = 0, \\
\Box\Phi^i - (A^i + \Phi^i)a(\eta)^{-1}\partial_0\partial_0 a(\eta) = 0.
\end{cases}
$$

Differentiaaliyhtälöryhmälle tiedetään olevan ratkaisu, sillä konformaalisen invatianssin perusteella riedetään, että liikeyhtälö $\nabla_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ on invariantti siirryttäessä konformaalisella muunnoksella konformaalisesti litteään avaruuteen $\partial_\mu\bar{F}^{\mu\nu} = 0$. Jälkimmäisen liikeyhtälön ratkaisuna saadaan $\bar{A}^\mu$, jonka erikoistapaus saatu ratkaisu (4.14) on. Tämän perusteella tiedetään, että ratkaisemalla jälkimmäinen liikeyhtälö ja muuntamalla ratkaisu $\bar{A}^\mu$ konformaalisella muunnoksella yleiseen avaruuteen $\tilde{A}^\mu = a(\eta)^{-2}\bar{A}^\mu$, jonka jälkeen määrittämällä yleisen avaruuden mittaehdot $\tilde{A}^0 = 0$, $\nabla_i\tilde{A}^i = 0$ saatava tulos on sama kuin ratkaisemalla liikeyhtälöt Minkowskin avaruuden säteilymitassa (4.13), jonka jälkeen muuntamalla saatu ratkaisu yleiseen avaruuteen konformaalisen muunnoksen avulla, sillä edellämainitut mittaehdot ovat kaarevan avaruuden akvivalentti Minkowskin avaruuden mittaehdoille (4.13). Tämän perusteella tiedetään, että mittamuunnosfunktio on olemassa ja kvantisointi voidaan toteuttaa säteilymitassa (4.13).

C Sisätulon ominaisuuksia

Aloitetaan tarkastelu konformaalisesta invarianssista. Pintaelementti $d\sigma_\mu = d\Sigma_\mu\sqrt{-g_\Sigma}$ muuntuu $\tilde{d\sigma}_\mu = \Omega(x)^4 d\sigma_\mu$ [11]. Tämän perusteella sisätulo joka voidaan esittää myös muodossa

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{\mathbf{u}_{s,p}|\mathbf{v}_{s',p'}}\rangle &= -i\int \tilde{d\sigma}_\nu \tilde{g}^{\mu\nu}\left[\tilde{u}^\alpha_{s,p}(\partial_\mu\tilde{v}^*_{\alpha,s',p'}) - (\partial_\mu\tilde{u}_{\alpha,s,p})\tilde{v}^{*\alpha}_{s',p'}\right]\\ &= -i\int d\sigma_\nu\Omega(x)^4\Omega(x)^{-2}g^{\mu\nu}\Omega(x)^{-2}\left[u^\alpha_{s,p}(\partial_\mu v^*_{\alpha,s',p'}) - (\partial_\mu u_{\alpha,s,p})v^{*\alpha}_{s',p'}\right]\\ &= \langle\mathbf{u}_{s,p}|\mathbf{v}_{s',p'}\rangle,\end{aligned}$$

on konformaalisesti invariantti.

Tämän jälkeen todistetaan, että sisätulo on pinnasta riippumaton. Ehto tälle saadaan Gaussin lauseesta sillä

$$\begin{aligned}&-i\int_\sigma \tilde{d\sigma}^\mu\left[\tilde{u}^\alpha_{s,p}(\partial_\mu\tilde{v}^*_{\alpha,s',p'}) - (\partial_\mu\tilde{u}_{\alpha,s,p})\tilde{v}^{*\alpha}_{s',p'}\right]\\ &= -i\int_V dv\tilde{\nabla}^\mu\left[\tilde{u}^\alpha_{s,p}(\partial_\mu\tilde{v}^*_{\alpha,s',p'}) - (\partial_\mu\tilde{u}_{\alpha,s,p})\tilde{v}^{*\alpha}_{s',p'}\right],\end{aligned}$$

missä dv on koko avaruuden tilavuuselementti ja integrointi tapahtuu koko avaruuden yli. Mikäli divergenssi on nolla, tiedetään että pinnasta riippumatta sisätulo antaa saman tuloksen. Toisin sanoen vektorikenttä $\tilde{Q}_\mu = \left[\tilde{u}^\alpha_{s,p}(\partial_\mu\tilde{v}^*_{\alpha,s',p'}) - (\partial_\mu\tilde{u}_{\alpha,s,p})\tilde{v}^{*\alpha}_{s',p'}\right]$ on virtaukseton. Kuten konformaalista invarianssia tutkittaessa huomattiin konformaalisessa muunnoksessa $\tilde{Q}_\mu = \Omega(x)^{-2}Q_\mu$. Tarkastellaan divergenssiehtoa RW-avaruudessa, eli konformaalisesti litteässä avaruudessa. Käytetään taas viiteessä [11] esitettyjä muunnoksia

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla_\mu Q^\mu} &= \partial_\mu\tilde{Q}^\mu + \widetilde{\Gamma^\mu_{\mu\delta}Q^\delta}\\ &= \partial_\mu[\Omega(x)^{-4}Q^\mu] + 4\Omega(x)^{-4}\partial_\delta\ln(\Omega(x))Q^\delta\\ &= \Omega(x)^{-4}\partial_\mu Q^\mu\\ &= \Omega(x)^{-4}\partial_\mu\left[u^\alpha_{s,p}(\partial^\mu v^*_{\alpha,s',p'}) - (\partial^\mu u_{\alpha,s,p})v^{*\alpha}_{s',p'}\right].\end{aligned} \tag{C.1}$$

Seuraavaksi käytetään tietoa, että moodifunktiot voidaan esittää muodossa $u^\alpha_{s,p} = u_p(x)\epsilon^\alpha_s(p)$ ja $v^{*\alpha}_{s',p'} = v^*_{p'}(x)\epsilon^\alpha_{s'}(p')$. Selkeästi, koska polarisaatiovektorit eivät ole verrannollisia koordinaatista x jäljelle jää

$$\Omega(x)^{-4}\partial_\mu\left[u_p(\partial^\mu v^*_{p'}) - (\partial^\mu u_p)v^*_{p'}\right].$$

Mikä tiedetään skalaarin sisätulosta olevan nolla, jotta skalaarin sisätulo on pinnasta riippumaton. Tämä voidaan todistaa myös Noetherin lauseen avulla, sillä vektorikentän liikeyhtälön takia skalaarifunktiot v^* ja u toteuttavat liikeyhtöälöt $\Box v^* = \Box u =$

0. Kentät, jotka toteuttavat nämä liikeyhtälöt, omaavat virran $\mathcal{G}^\mu = -i\phi^* \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi$. Tämä seuraa siitä, että skalaarikentän Lagrangen tiheys $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi (\partial^\mu \phi)^*$, joka redusoituu kyseisiksi liikeyhtälöiksi, omaa U(1) symmetrian, jonka takia saadaan kyseinen virtatiheys [1] ja Noetherin lauseen perusteella tiedetään, että $\partial_\mu \mathcal{G}^\mu = 0$.