

Relativistinen mekaniikka ja relativististen kappaleiden havaitseminen

LuK-tutkielma
Turun yliopisto
Fysiikka
2024
Jaan Isojärvi
Tarkastaja:
Dos. Iiro Vilja

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO

Fysiikan laitos

Isojärvi, Jaan Relativistinen mekaniikka ja relativististen kappaleiden havaitseminen

LuK-tutkielma, 28 s.

Fysiikka

Helmikuu 2024

Tutkielmassa käsitellään relativistista mekaniikkaa ja sen matemaattista muotoilua. Käsitellään myös siihen liittyviä perustavanlaatuisia ilmiöitä sekä suurien makroskooppisten kappaleiden näennäistä ulkomuotoa niiden kulkiessa lähellä valonnopeutta.

Relativistinen mekaniikka perustuu Albert Einsteinin kehittämään erityiseen suhteellisuusteoriaan. Tämä teoria korvaa klassisen mekaniikan, kun nopeudet lähestyvät valonnopeutta. Keskeisiä teorian aiheita ovat koordinaattimuunnokset, energian uudelleenmäärittely sekä ilmiöt kuten aikadilataatio ja pituuskontraktio.

Tutkielmassa esitetään myös suurten kappaleiden havainnointiin tarvittavat yhtälöt sekä niiden johtaminen. Käsitellään myös kappaleiden tarkasteluun vaikuttavia tekijöitä. Näiden avulla muodostetaan visuaalinen kuva neliönmuotoisen kappaleen näennäisen ulkomuodon muutoksesta eri nopeuksilla.

Asiasanat: Lorentz-muunnos, kovariantti muotoilu, relativistiset ilmiöt, Poincarén ryhmä, relativistinen Lagrangen funktio

Sisällys

Johdanto	1
1 Koordinaattimuunnokset	2
1.1 Lorentz ja Poincaré	2
2 Perusperiaatteet ja liikeyhtälöt	4
2.1 Perusoletukset	4
2.2 Minkowskin avaruus	5
2.3 Lagrange ja Hamilton	6
2.3.1 Lagrangen formalismi	7
2.3.2 Hamiltonin formalismi	10
2.4 Kovariantit esitysmuodot voimille	11
3 Poikkeukselliset ilmiöt ja ominaisuudet	14
3.1 Relativistinen kiihtyvyys ja energia	14
3.2 Relativistiset ilmiöt: aikadilataatio ja Lorentz-kontraktio	16
3.3 Esimerkki: relativistinen raketti	19
4 Suuren relativistisen kappaleen havaitseminen ja tarkastelu	20
4.1 Havaintoon ja tarkasteluun vaikuttavat ilmiöt	20
4.2 Näköhavainto relativistisella nopeudella	22
4.2.1 Neliönmuotoinen kappale	25
5 Yhteenveto	27

Johdanto

Mekaniikan tarkastelu sai uuden näkökulman vuonna 1905, kun Albert Einstein julkaisi artikkelin liittyen liikkuvien kappaleiden sähködynamiikkaan. Artikkelissa esitettiin uusia tapoja käsitellä aikaa, liikettä ja tapahtumia avaruudessa. Näiden ajatusten pohjalta syntyi erityinen suhteellisuusteoria, johon myös relativistinen mekaniikka perustuu [1].

Tässä tutkielmassa perehdytään relativistisen mekaniikan muotoiluun ja eroavaisuuksiin klassiseen mekaniikkaan verrattuna. Tarkastellaan aika-avaruuden vaikutusta liikkeen ja tapahtumien kuvaamisessa. Käsitellään myös erityisen suhteellisuusteorian sisältämiä erikoisia ilmiöitä ja niiden vaikutuksia. Näiden lisäksi tutkitaan makroskooppisten kappaleiden ulkomuotoa ja miltä ne näyttäisivät relativististen vaikutusten läsnäollessa.

Teoriaa on myöhemmin laajennettu ja sitä myötä on esitetty yleinen suhteellisuusteoria, joka itsessään laajentaa relativistista mekaniikkaa. Yleiseen suhteellisuusteoriaan pohjatuvaan mekaniikkaan ei tässä tutkielmassa perehdytä enempää vaan tutkitaan mekaniikkaa juurikin erityisen suhteellisuusteorian pohjalta.

Tutkielman tavoitteena on tarjota kokonaisvaltainen katsaus relativistiseen mekaniikkaan ja sen ymmärtämiseen. Tämän avulla luonnon perusilmiöiden tulkitaan saadaan uusia näkökulmia ja saadaan vastauksia kysymyksiin mihin Newtonin mekaniikka ei pysty vastaamaan. Nähdään myös millainen vaikutus relativistisilla ilmiöillä olisi suuriin mahdollisesti havaittavissa oleviin kappaleisiin.

1 Koordinaattimuunnokset

Relativistisen mekaniikan tarkasteluun tarvitaan koordinaattimuunnoksia, jotka auttavat tapahtumien sekä ilmiöiden havainnoinnissa ja käsittelyssä. Koordinaattimuunnokset voidaan luokitella kahteen ryhmään: Lorentz-muunnoksiin sekä Poincarén ryhmään. Jälkimmäinen sisältää Lorentz-muunnokset kokonaisuudessaan. Näiden avulla voidaan liikkua kahden koordinaatiston välillä, jotka liikkuvat toisiinsa nähden tasaisella nopeudella. [2]

1.1 Lorentz ja Poincaré

Tarkastellaan aluksi Lorentz-muunnoksia. Yksinkertaisimmassa tapauksessa, kun liikutaan x -akselin suunnassa, koordinaattimuunnokset saavat muodon [2]

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad (1)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad (2)$$

$$y' = y, \quad (3)$$

$$z' = z, \quad (4)$$

missä c on valonnopeus, $\{t, x, y, z\}$ alkuperäiset koordinaatit, $\{t', x', y', z'\}$ liikkuvan koordinaatiston koordinaatit ja β sekä Lorentz-vakio γ on määritelty [2]

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (5)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6)$$

Muunnokset voidaan vielä esittää matriisimuodossa [2]

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Tätä lineaarista muunnosta kutsutaan nopeussysäykseksi (engl. boost). Sen avulla voidaan määrittää nopeudella v liikkuvan koordinaatiston koordinaatit suhteessa lepokoordinaatistoon. Yhtälön (7) mukaisessa muunnoksessa y sekä z koordinaatit pysyvät muuttumattomina, joten nopeussysäys tapahtuu x -akselin suunnassa. Tilanne voidaan yleistää jokaiselle koordinaattiakselin suunnalle jolloin muunnosmatriisi voidaan kirjoittaa muodossa [2]

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Kyseinen muunnosmatriisi \mathbf{L} kuvaa siis nopeussysäyksiä jokaisen aika-avaruuden koordinaattiakselin suhteen [2, 3]. Nopeussysäyksien lisäksi muunnosmatriisiin kuuluvat rotaatiot eli koordinaattiakselien kierrot [2]. Koordinaattiakselien kiertoja voidaan kuvata rotaatiomatriisien \mathbf{R} avulla. Rotaatiomatriisi saa esimerkiksi z -akselin suhteen muodon [2]

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Kyseisiä koordinaattimuunnoksia, jotka sisältävät vain boosteja ja rotaatioita kutsutaan homogeenisiksi eli rajoitetuiksi Lorentz-muunnoksiksi. Jokainen homogeeninen Lorentz-muunnos voidaan siten kirjoittaa olevan muotoa [2]

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}\mathbf{L}_0, \quad (10)$$

missä \mathbf{L}_0 on ainoastaan boosteja sisältävä muunnosmatriisi [2].

Homogeenisten Lorentz-muunnosten lisäksi koordinaattimuunnoksiin kuuluvat translaatiot eli ajan ja paikan siirtymät. Translaatioiden avulla voidaan muuttaa koordinaatin paikkaa koordinaatistossa siirtämällä origoa. Nämä translaatiot voidaan lisätä yhtälöön (10), jolloin saadaan [2]

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}\mathbf{L}_0 + \mathbf{a}, \quad (11)$$

missä \mathbf{a} on jokin siirto. Tämä koordinaattimuunnos on nimeltään Poincaré-muunnos [2, 3].

2 Peruseriaatteet ja liikeyhtälöt

2.1 Perusoletukset

Relativistinen mekaniikka pohjautuu kahdelle perusoletukselle. Ensimmäisenä oletuksena on fysikaalisten luonnonlakien riippumattomuus havaitsijasta. Kaikki luonnonlait ovat siis samanlaisia kaikille havaitsijoille, jotka liikkuvat tasaisella nopeudella toistensa suhteen. Toisena oletuksena on valonnopeuden absoluuttisuus. Valonnopeus on vakio kaikille havaitsijoille riippumatta liikkeestä suhteessa valon lähteeseen. Nämä oletukset muodostavat pohjan kovariantille esitysmuodolle relativistisesta mekaniikasta, jonka mukaan luonnonlait ovat samoja koordinaatistossa riippumatta koordinaattimuunnoksista. Kyseistä esitysmuotoa voisi siis myös kutsua invariantiksi relativistiseksi mekaniikaksi. [2]

Klassisessa Newtonin mekaniikassa aikaa ja paikkaa käsitellään kahtena toisistaan erillään olevana kokonaisuutena [3]. Mutta perusoletusten täyttämiseksi relativistista mekaniikka käsitellään aika-avaruudessa, jossa on yhdistetty aika sekä paikka yhdeksi kokonaisuudeksi [2]. Tätä varten määritellään aika-avaruusintervalli [2]

$$(ds)^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (12)$$

missä dt kuvaa infinitesimaalista muutosta ajan suhteen sekä dx , dy , dz kuvaa infinitesimaalisia muutoksia paikan suhteen. Tämän avulla huomioidaan se, että eri havaitsijat voivat mitata ajan ja paikan erisuuruiksi, mutta aika-avaruusintervalli pysyy vakiona ja on sama kaikille havaitsijoille [2].

Määritellään myös miten ominaisaika τ sekä koordinaatistaika t eroaa toisistaan. Ominaisaika kertoo ajan kulun kahden tapahtuman välillä riippumatta havaitsijasta, kun taas koordinaatistaika voi olla havaitsijoille eri riippuen heidän välisestä nopeudesta. Ominaisajan sekä koordinaatistaajan infinitesimaalisten muutosten välille saadaan yhteys [3]

$$d\tau = \gamma dt, \quad (13)$$

mitä käsitellään myöhemmin aikadilataation yhteydessä. Yhtälön (12) koordinaatistaajan voi korvata vielä ominaisajalla, jolloin paikkakoordinaattien muutokset häviävät ja saadaan Lorentz-muunnoksille invariantti muoto [3]

$$ds = cd\tau. \quad (14)$$

2.2 Minkowskin avaruus

Aika-avaruuden määrittelyn kautta toimimme nelidimensioisessa vektoriavaruudessa. Tämän seurauksena normaalin kolmivektorin sijaan ilmiöitä ja tapahtumia tarkasteltaessa käytämme nelivektoreita, joilla on neljä koordinaattia [2]. Jokaisella tapahtumalla on siis olemassa täsmällinen paikka sekä aika, jota voidaan kuvata kolmen paikkakoordinaatin ja yhden aikakoordinaatin avulla [2]. Tätä kyseistä vektoriavaruutta kutsutaan Minkowskin avaruudeksi ja se on yleisin käytössä oleva vektoriavaruus, jota käytetään relativististen tapahtumien matemaattisessa tarkastelussa [3]. Minkowskin avaruudessa etäisyydet määrittää Minkowskin metriikka, joka to-

teuttaa yhtälön (12), ja sen metrisen tensori $g_{\mu\nu}$ on muotoa [3]

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Kyseisen metrisen tensorin avulla voidaan muuttaa nelivektoreita kovariantin ja kontravariantin esitysmuodon välillä eli

$$v^\mu = g^{\nu\mu} v_\nu, \quad (16)$$

missä v^μ on kontravariantin vektorin komponentti, jota merkitään yläindeksillä, ja v_ν on kovariantin vektorin komponentti, jota merkitään alaindeksillä [3]. Näiden esitysmuotojen välillä eroavaisuus tulee siitä, että ne muuntuvat eri tavalla vektoriavaruuden kantavektorien mukaan. Tämän lisäksi niiden koordinaatistomuunnokset ovat myös käänteiset toisiinsa verrattuna. Tässä tapauksessa, kuin myös myöhemmin tulevissa merkinnöissä, indeksit käyvät läpi arvot 0-3, ellei toisin mainita. [2]

2.3 Lagrange ja Hamilton

Klassisessa mekaniikassa liikeyhtälöitä tarkasteltaessa ajan suhteellisuutta ei huomioida ja aika toimii vain parametrina systeemin tilan muutokselle. Relativistisessa mekaniikassa tilanne muuttuu ja aikaa ei pidetä absoluuttisena. Tämän vuoksi liikeyhtälöt ja erityisesti Lagrangen sekä Hamiltonin lähestymistapa vaativat muutamia muutoksia klassiseen mekaniikkaan nähden. Tässä kappaleessa esitetyt suureet, joiden yläpuolella on piste, ovat suureen aikaderivaattoja koordinaatistoajan t suhteen eli $\frac{d}{dt}$. [3]

2.3.1 Lagrangen formalismi

Relativistista Lagrangen mekaniikka voidaan lähteä tarkastelemaan Hamiltonin periaatteella eli variaatiointegraalilla S sekä Lagrangen funktiolla L [2]

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (17)$$

$$L = L(\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t}), \mathbf{q}(\mathbf{t}), t), \quad (18)$$

missä $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t}) = \frac{d\mathbf{q}(\mathbf{t})}{dt}$ on nopeusvektori ja $\mathbf{q}(\mathbf{t})$ paikkavektori. Variaatiointegraalin tarkoituksena on saada mahdollisimman pieni arvo funktiolle S . Tämän johdosta yhtälö (17) voidaan kirjoittaa muodossa [2]

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right) dt = 0, \quad (19)$$

joka toteutuu vain, kun [2]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (20)$$

Tämä on klassisesta mekaniikasta tunnettu Eulerin-Lagrangen yhtälö. Tämän avulla voidaan ratkaista likeyhtälöitä myös relativistisessa mekaniikassa kappaleille, joiden Lagrangen funktio tunnetaan. Eroavaisuus klassiseen mekaniikkaan tulee juuri-kin ilmi näistä Lagrangen funktiosta [4]. Klassiselle konservatiivisessa voimakentässä olevalle hiukkaselle Lagrangen funktio koostuu liike-energiasta E sekä potentiaalienergiasta U [3]

$$L = E - U. \quad (21)$$

Tämän yhtälön käyttäminen on ongelmallista relativistisen mekaniikan kannalta, sillä se ei ole Lorentz-invariantti. Tämän vuoksi Lagrangen funktio esitetään relativistiselle hiukkaselle muodossa [3, 5]

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} - V, \quad (22)$$

missä V on potentiaali. Tämä yhtälö on Lorentz-invariantti sekä toteuttaa liikemäärälle p_i tarvittavan yhtälön [2]

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}. \quad (23)$$

Yllä oleva tarkastelu on itsessään toimiva relativistisessa mekaniikassa, mutta siitä on jätetty huomioimatta muutamia yksityiskohtia. Aika sekä paikka on erotettu toisistaan, sillä aikaa on käytetty vain parametrina. Tämän lisäksi käytetyt koordinaatit eivät ole relativistisen Minkowskin avaruuden mukaisia, eikä Lorentz-muunnoksia ole mukana tarkastelussa. Jotta kaikki tämä voidaan huomioida, Eulerin-Lagrangen yhtälö (19) täytyy itsessään muodostaa kovariantissa- eli Lorentz-invariantissa muodossa. Tämän vuoksi yhtälön (16) variaatiointegraalin parametreja täytyy muuttaa [2].

Määritetään aluksi muuttuja θ , joka on Lorentz-invariantti ja toimii parametrina systeemin muutokselle. Tämän avulla variaatiointegraali sekä kovariantti Lagrangen funktio Λ voidaan kirjoittaa muodossa [2]

$$\delta S = \delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Lambda d\theta, \quad (24)$$

$$\Lambda = \Lambda(x^\mu, x'^\mu), \quad (25)$$

missä x^μ ja $x'^\mu = \frac{dx^\mu}{d\theta}$ ovat Lorentz-skalaareja, jotka pysyvät muuttumattomina Lorentz-muunnoksissa. Tämän perusteella Eulerin-Lagrangen yhtälö on [2]

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x'^\mu} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} = 0. \quad (26)$$

Tämän lisäksi kovariantin Lagrangen funktion täytyy toteuttaa seuraava yhtälö Minkowskin avaruudessa, joka on yleistys Newtonin 2. laista, eli [2]

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu, \quad (27)$$

missä p^μ on liikemäärä ja K^μ on Minkowskin voima. Tämän perusteella, jotta kyseinen yhtälö toteutuu voidaan kovariantti Eulerin-Lagrangen yhtälö kirjoittaa yksinkertaisesti ominaisajan suhteen, eli [4]

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\nu} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\nu} = 0, \quad (28)$$

missä $u^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau}$. Kyseisen yhtälön toimivuus voidaan vielä nähdä tarkastelemalla kovarianttia Lagrangen funktiota vapaalle hiukkaselle. Vapaan hiukkasen Lagrangen funktio on samaa muotoa kuin yhtälössä (22), mutta ilman jälkimmäistä termiä potentiaalille. Tämän lisäksi jos huomioidaan nopeuksien yhteys valonnopeuteen saadaan [2]

$$u_\nu u^\nu = c^2, \quad (29)$$

jolloin Lagrangen funktio saa muodon

$$\Lambda = -mc\sqrt{x'_\mu x'^\mu}. \quad (30)$$

Nyt, kun tämä yhtälö sijoitetaan yhtälöön (26) saadaan

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{mcx'}{\sqrt{x'_\mu x'^\mu}} \right) = 0, \quad (31)$$

joka edelleen voidaan vielä muotoilla toisin huomioidessa, että

$$x' = \frac{dx}{d\theta} = \frac{d\tau}{d\theta} u, \quad (32)$$

joten saadaan

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{mcu}{\sqrt{x'_\mu x'^\mu}} \right) = 0, \quad (33)$$

joka toteuttaa yhtälön (27). Täten kovariantin Eulerin-Lagrangen yhtälön voi todella kirjoittaa yhtälön (28) muodossa. Nyt olemme määritelleet Lagrangen muotoilun relativistiselle mekaniikalle klassisessa tapauksessa sekä myös kovariantissa muodossa. Yllä määritetty kovariantti muotoilu ei ole aukoton, sillä se käsittää vain yhden hiukkasen sisältämän systeemin. Tästä syystä systeemit, joissa on monta keskenään vuorovaikuttavaa hiukasta on hankala muotoilla kovariantissa muodossa. Tämä johtuu esimerkiksi siitä, että systeemin jokaisella hiukkasella on oma ominaisaika, joten parametrin valinta on haastavaa. [2]

2.3.2 Hamiltonin formalismi

Hamiltonin mekaniikkaa voidaan myös käyttää relativistisen mekaniikan tarkasteluun. Määritetään aluksi Hamiltonin mekaniikan yhteys Lagrangen mekaniikkaan Legendre-muunnoksen avulla. Klassisessa mekaniikassa tämä saa muodon [3]

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\mu=1}^n p_{\mu} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial t} - L\left(\mathbf{q}, \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}\right), \quad (34)$$

missä H on Hamiltonin funktio ja \mathbf{p} on liikemäärävektori. Yhtälössä esiintyvä liikemäärä p_{μ} on muotoa

$$p_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial q^{\mu}}{\partial t}\right)}. \quad (35)$$

Tämän lisäksi määritellään kanoniset Hamiltonin yhtälöt

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (36)$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (37)$$

Hamiltonin funktion käyttämiseen tarvitaan myös siis Lagrangen funktio. Tämän perusteella Lagrangen funktion relativistisella muodolla saadaan Hamiltonin funktiosta myös toimiva relativistiselle mekaniikalle. Hamiltonin funktion voi myös esittää kovariantissa muodossa sekä ei kovariantissa muodossa. Tarkastellaan aluksi ei kovarianttia muotoa relativistiselle hiukkaselle. Tälle Lagrangen funktio on yhtälön (22) mukainen. Yleisesti Hamiltonin funktion voi esittää muodossa [2]

$$H = E + V, \quad (38)$$

jossa esiintyvän energian E voi kirjoittaa relativistisesti

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (39)$$

Tämän perusteella Hamiltonin funktio on

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + V. \quad (40)$$

Käyttämällä yhtälöitä (36) ja (37) voidaan saadun Hamiltonin funktion avulla ratkaista liikeyhtälöt hiukkaselle. [2]

Hamiltonin mekaniikan kovariantille muotoilulle on samat perustelut kuin Lagrangen mekaniikassa. Hamiltonin yhtälöt yhden hiukkasen sisältävälle systeemille voidaan esittää kovariantissa muodossa

$$\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{\partial H_c}{\partial p^\nu}, \quad (41)$$

$$\frac{dp^\nu}{d\tau} = -\frac{\partial H_c}{\partial x^\nu}, \quad (42)$$

missä H_c on vapaan kentän tapauksessa

$$H_c = \frac{p_\mu p^\mu}{2m}. \quad (43)$$

Tapauksessa, missä hiukkanen ei ole vapaassa kentässä vaan esimerkiksi sähkömagneettisessa kentässä, voidaan H_c kirjoittaa muodossa

$$H_c = \frac{(p_\mu - qA_\mu)(p^\mu - qA^\mu)}{2m}, \quad (44)$$

missä A on potentiaali. Kovarianttien Hamiltonin yhtälöiden muodostamisessa monihiukkassysteemille päädytään samoihin haasteisiin kuin Lagrangen mekaniikassa. Yksikäsitteisen parametrin valinta on hankalaa. Sen lisäksi Lorentz-invariantin potentiaalın määrittäminen vuorovaikuttaville voimille on vaikeaa jopa yhden hiukkasen systeemille. Kaikesta huolimatta määritellyt kovariantit esitysmuodot niin Lagrangen kuin Hamiltonin mekaniikalle ovat hyviä työkaluja ratkaistaessa yksinkertaisia systeemejä relativistisessa mekaniikassa. [2]

2.4 Kovariantit esitysmuodot voimille

Monia klassisesta mekaniikasta tunnettuja voimia voidaan esittää kovarianteissa muodoissa. Lagrangen mekaniikan yhteydessä määriteltiin kovariantti muotoilu Newtonin 2. laille yhtälön (27) mukaan. Tämän lisäksi voimme esimerkiksi muodostaa

Lorentz-invariantin muodon Hooken laille ja Coulombin voimalle liikkeen kuvaamiseksi. [6]

Relativistisessa tapauksessa Lorentz-voima f^μ ilmaistaan yhtälöllä

$$f^\mu = F^{\mu\nu} u_\nu, \quad (45)$$

missä $F^{\mu\nu}$ on Faradayn tensori, joka on yleisesti muotoa

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (46)$$

Yhtälöä (45) käytetään yleensä tarkasteltaessa hiukkaseen vaikuttavia voimia sähkömagneettisessa kentässä. Nyt halutaan kuitenkin yhdistää yhtälössä esiintyvä kenttätensori $F^{\mu\nu}$ Newtonilaisiin voimiin, sillä se vaaditaan itse liikkeen kuvaamiseen. Tämä on mahdollista, jos Faradayn tensori ilmaistaan muodossa

$$F^{\mu\nu} = U^\mu F^\nu - U^\nu F^\mu, \quad (47)$$

missä U^μ on ajanluonteinen vektori. Tämä määritellään Minkowskin avaruudessa olevan

$$U^\mu = \gamma(1, \mathbf{v}), \quad (48)$$

$$U^2 = -1, \quad (49)$$

missä \mathbf{v} on normaali kolmen ulottuvuuden nopeusvektori. [6]

Yhtälön (47) mukaisen määrittelyn avulla voidaan muodostaa kovariantti muotoilu Hooken laille ja Coulombin voimalle. Hooken laki kirjoitetaan klassisessa mekaniikassa muodossa

$$\mathbf{F}_N = -k\mathbf{x}, \quad (50)$$

missä k on jousivakio ja \mathbf{x} on hiukkasen paikka. Kovariantisti voima voidaan esittää olevan

$$F^\mu = -kx^\mu. \quad (51)$$

Tämän perusteella Faradayn tensori on

$$F^{\mu\nu} = k(x^\mu U^\nu - x^\nu U^\mu). \quad (52)$$

Yhtälön (51) ja (52) avulla voitaisiin edelleen ratkaista liikeyhtälöt systeemille. Coulombin voima on myös hyvin yleinen voima, jonka avulla tarkastellaan kahden varauksen välistä vuorovaikutusta. Coulombin laki kirjoitetaan klassisessa mekaniikassa muodossa

$$\mathbf{F}_N = q \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}, \quad (53)$$

missä q on hiukkasen varaus. Kovariantissa muodossa Coulombin voima on siten

$$F^\mu = q \frac{x^\mu}{|x^2 + (Ux)^2|^{\frac{3}{2}}}, \quad (54)$$

jolloin Faradayn tensori saa muodon

$$F^{\mu\nu} = q \frac{U^\mu x^\nu - U^\nu x^\mu}{|x^2 + (Ux)^2|^{\frac{3}{2}}}, \quad (55)$$

missä x^μ ilmaistaan varauksen alkuperäisen paikan \bar{X}^μ avulla, eli

$$x^\mu = x^\mu - \bar{X}^\mu. \quad (56)$$

Molemmat tässä tarkastellut voimat ovat säilyviä eli konservatiivisia. [6]

Myös dissipatiivisia voimia voidaan ilmaista Lorentz-invariantissa muodossa. Yleisesti monet dissipatiiviset voimat saa klassisessa mekaniikassa muodon

$$\mathbf{F}_N = b\mathbf{U}, \quad (57)$$

missä b on jokin kitkakerroin. Kovariantisti esitettynä tämä voima on

$$F^\mu = BU^\mu, \quad (58)$$

missä B on kovariantti kitkakerroin. Tämäkin voidaan kirjoittaa Faradayn tensorin avulla

$$F^{\mu\nu} = B(u^\mu U^\nu - u^\nu U^\mu). \quad (59)$$

Newtonilaisia voimia voidaan täten esittää relativistisessa viitekehyksessä ja vielä Lorentz-invariantissa muodossa. Tässä osiossa mainittujen voimien lisäksi kovariantin muotoilun voisi esittää monelle muullekin voimalle. [6]

3 Poikkeukselliset ilmiöt ja ominaisuudet

3.1 Relativistinen kiihtyvyys ja energia

Tarkastellessa liikettä lähellä valonnopeutta kiihtyvyyden ja energian määrittely on erilainen verrattuna klassiseen mekaniikkaan. Kiihtyvyys voidaan esittää kolmivektorina relativistisesti, jolloin aikakoordinaattia ei huomioida. Tässä tapauksessa kiihtyvyys voidaan esittää koordinaatistoajan t derivaattana kuten klassisessa mekaniikassa, mutta Lorentz-vakio mukaan luettuna. Kuitenkin kiihtyvyys halutaan esittää nelivektorina, kun ollaan Minkowskin avaruudessa. Silloin koordinaatisto aika vaihtuu ominaisaikaan ja derivaatta muuttuu sen mukaisesti. Nelivektorin komponenttina kiihtyvyyden α^μ voi esittää muodossa [7]

$$\alpha^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}, \quad (60)$$

missä u^μ on nopeusnelivektorin komponentti. Nyt kiihtyvyyden komponenteille $(\alpha^0, \vec{\alpha})$ voidaan kirjoittaa

$$\alpha^0 = \gamma_u^4 \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}}{c}, \quad (61)$$

$$\vec{\alpha} = \gamma_u^2 \mathbf{b} + \gamma_u^4 \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}}{c^2}, \quad (62)$$

missä \mathbf{b} on normaali kolmen ulottuvuuden kiihtyvysvektori eli $\mathbf{b} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ [7]. Alaindeksillä u merkitty Lorentz-vakio on määritelty yhtälöiden (5) ja (6) mukaan, mutta koordinaatistonopeus v on korvattu ominaisnopeudella u eli $\frac{dx}{d\tau} = \gamma_u \mathbf{v}$. Tilanteessa, jossa kuljetaan jonkin koordinaattiakselin suunnassa yhtälöt (61) ja (62) menevät yksinkertaiseen muotoon. Liikkeen kuvaaminen ja erityisesti kiihtyvyyden määrittä-

minen muuttuu monimutkaiseksi, kun jokainen koordinaatti pitää tarkastella erikseen. Kiihtyvyys tuo siis lisähaasteita, koska kappaleet tai koordinaatistot eivät liiku toistensa suhteen vakionopeudella. Esimerkiksi kappaleessa 1 esitetyt yksinkertaiset koordinaattimuunnokset on määritelty vain vakionopeuksissa. [7]

Erityisen suhteellisuusteorian tunnetuin yhtälö liittyy energian uudelleenmäärittelyyn. Relativistisen kappaleen energia on suoraan yhteydessä omaan massaansa. Levossa tämän energian E_0 määritellään olevan [3]

$$E_0 = mc^2. \quad (63)$$

Kappaleella on siis myös levossa energiaa, joka on suoraan seuraus relativistisuudesta. Kyseistä energian määrittelyä käytetään ydinfysiikassa, kun muutetaan massaa ja energiaa toisikseen. Yhtälö on myös läsnä, kun tutkitaan massan ja energian yhteyttä hiukkaskiihdyttimissä. Yhtälön (63) lepoenergiaan voidaan vielä lisätä liikeenergia T , jolloin kokonaisenergia E saadaan muotoon [3]

$$E = E_0 + T = \gamma_u mc^2, \quad (64)$$

missä T on määritelty olevan

$$T = mc^2(\gamma_u - 1). \quad (65)$$

Tämä kokonaisenergia on aina säilyvä. Kyseisen energian määrittelystä voidaan todeta myös kappaleen nopeuteen ja valonnopeuteen liittyvä rajoitus. Nopeus ei voi ylittää valonnopeutta, sillä nopeuden kasvattaminen vie Lorentz-vakion lähelle ääretöntä. Tässä tapauksessa itse kiihtyvyys ja sen synnyttävä voima lähenisi kohti ääretöntä, mikä on mahdotonta. [3]

Relativistisella energialla ja liikemäärällä on myös hyvin hyödyllinen yhteys. Kolmiulotteinen lineaarinen relativistinen liikemäärä \mathbf{p} on muotoa

$$\mathbf{p} = \gamma_u m \mathbf{v}. \quad (66)$$

Yhdistämällä yhtälö (64) ja (66) saadaan relativistinen dispersiorelaatio

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2, \quad (67)$$

joka yhdistää energian ja liikemäärän massan avulla. [3]

3.2 Relativistiset ilmiöt: aikadilataatio ja Lorentz-kontraktio

Nopeuden kasvaminen lähelle valonnopeutta tuo esille myös muutaman tärkeän ilmiön. Ajan eteneminen on erilaista kahden kappaleen välillä, jotka liikkuvat toistensa suhteen. Nopeammin kulkevalla kappaleella aika kulkee hitaammin verrattuna levossa olevaan. Tätä ilmiötä kutsutaan aikadilataatioksi. Toinen ilmiö on liikkuvan kappaleen näennäinen ulkomuodon muutos eli Lorentz-kontraktio. Tämä tarkoittaa sitä, että liikkuvan kappaleen pituus on lyhyempi kuin mitä se olisi lepokoordinaatistossa. Molemmat ilmiöt voidaan määrittellä Lorentz-muunnoksista, sillä näissä muunnoksissa ilmiöt todetaan. [1]

Määrittellen aluksi aikadilataatio, jolloin liikkuvan kappaleen ajatellaan mittavan tapahtumien välillä ajan $\Delta t'$. Levossa oleva kappale mittaa ajan Δt . Lorentz-muunnoksia käyttämällä saadaan aikojen välille yhteys

$$\Delta t = \gamma \left(t'_1 + \frac{\beta x'_1}{c} - t'_2 - \frac{\beta x'_2}{c} \right), \quad (68)$$

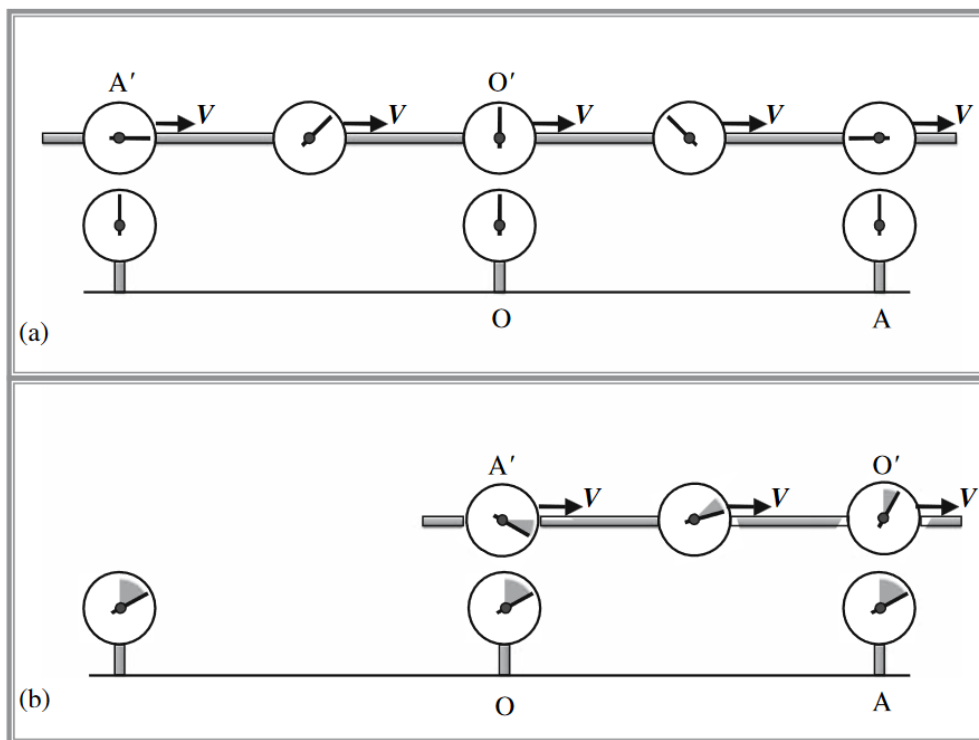
joka yksinkertaistuu muotoon

$$\Delta t = \gamma (t'_1 - t'_2). \quad (69)$$

Nyt liikkuvan koordinaatiston aika t' voidaan vielä korvata ominaisajalla τ , jolloin aikadilataatiolle saadaan yhtälön (13) mukainen muoto

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau. \quad (70)$$

Tässä määrittelyssä voidaan ajatella liikkuvaan koordinaatistoon kiinnitettyjä kelloja verrattuna levossa olevaan. Lepokoordinaatistossa olevat kellot ovat ajassa edellä ja tätä havainnollistetaan kuvassa 1. [1]



Kuva 1. Aikadilataatio ja synkronoidut kellot. [1]

Nähdään, että jokainen kuvan 1 levossa oleva kello on ajassa tietyn verran edellä liikkuvia kelloja. Tässä tapauksessa nopeus pysyy vakiona koordinaatistojen välillä, jolloin myös aikojen erotus liikkuvien ja levossa olevien kellojen välillä pysyy suhteessa samana. Aikadilataation vaikutus kasvaa nopeuden kasvaessa, joka nähdään Lorentz-vakiosta. Tämän lisäksi, jos liikkuva koordinaatisto olisi kiihtyvässä liikkeessä, kellojen välinen suhteellinen erotus ajassa ei pysyisi vakiona. [1]

Tarkastellaan seuraavaksi Lorentz-kontraktiota. Tämä voidaan myös määritellä Lorentz-muunnosten avulla. Ajatellaan liikkuvaan koordinaatistoon kiinnitettyä kappaletta, jonka oikea pituus on L_0 . Nyt levossa oleva koordinaatisto mittaa kappaleen ääripäiden paikat ajanhetkellä t . Tällöin kappaleen ääripäät ovat liikkuvassa

koordinaatistossa paikkakoordinaateissa [1]

$$x'_1 = \gamma(x - \beta ct_1), \quad (71)$$

$$x'_2 = \gamma(x - \beta ct_2), \quad (72)$$

jolloin liikkuvan koordinaatiston paikkakoordinaattien x' ja levossa olevan koordinaatiston paikkakoordinaattien x välille saadaan erotus

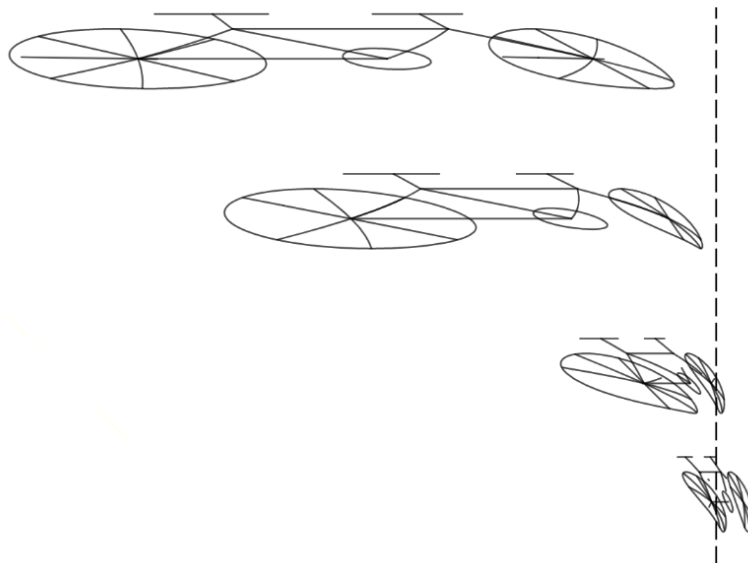
$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1). \quad (73)$$

Paikkakoordinaattien välinen erotus on sama kuin kappaleen pituus tässä tapauksessa [3]. Tämän seurauksena saadaan siis lorentz-kontraktiolle muoto [1]

$$L = \gamma L_0. \quad (74)$$

Tässä käsitelty kappale kokee Lorentz-kontraktion vain x -akselin suunnassa. Havainnollistetaan tilannetta kahdessa dimensiossa kuvan 2 mukaisesti, jossa on tasaisella nopeudella liikkuva polkupyörä. Katkoviivalla on merkitty polkupyörää tarkasteleva havaitsija. Kuvasta nähdään miten pyörä kokee Lorentz-kontraktion ja painuu kasaan. Tällöin pyörän pituus vaakasuunnassa lyhenee ja tiettyjen osien ulkomuoto muuttuu kaarevaksi. Pyörän korkeus pysyy samana ja myös liikkeen suuntaiset pyörän osat pysyvät samansuuntaisina eivätkä koe kaareutumista. Nämä näennäiset muutokset kappaleessa johtuvat valon äärellisestä nopeudesta, mitä tarkastellaan enemmän kappaleessa 4. [8]

Nyt olemme määritelleet ilmiöt, jotka ilmenevät liikkeessä lähellä valonnopeutta. Aikadilataatio ja Lorentz-kontraktio ovat silti läsnä myös pienemmissä nopeuksissa mutta ne ovat hyvin mitättömiä ja niitä ei huomioida klassisessa mekaniikassa liikkeen tarkastelussa. [1]



Kuva 2. Tasaisella nopeudella liikkuvan polkupyörän näennäinen ulkomuodon muutos. [8]

3.3 Esimerkki: relativistinen raketti

Raketin liikettä kuvaava rakettiyhtälö on tarkoin määritelty klassisessa mekaniikassa. Kuitenkin raketin ollessa tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä myös relativististen ilmiöiden vaikutus kasvaa. Tämän perusteella myös likeyhtälö tarvitsee muuttaa relativistiseen muotoon. Tässä käsiteltävä rakettiyhtälö on määritelty lineaariselle liikkeelle. [9]

Tasaisesti kiihtyvä raketti menettää osan massastaan polttoaineen palamisen vuoksi. Polttoaine palaa nopeudella v_s ja raketti kulkee nopeudella u . Raketin alkumassa polttoaineen kanssa on m_0 ja raketin massa itsessään on m [9]. Nyt raketin energian voidaan kirjoittaa olevan [3]

$$\gamma_{u'}(m - dm)c^2 + \gamma_{v_s}m_s c^2 = mc^2, \quad (75)$$

missä m_s on polttoaineen massa. Koska liike on lineaarista, saadaan liikemäärän avulla [3]

$$\gamma_{u'}(m - dm)du' - \gamma_{v_s}v_s dm_s = 0. \quad (76)$$

Nämä kaksi yhtälöä yhdistämällä saadaan

$$mdu' = v_s dm. \quad (77)$$

Muuttamalla nopeus u' takaisin alkuperäiseen nopeuteen u' saadaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{du}{1 - (u/c)^2} = v_s \frac{dm}{m}, \quad (78)$$

jonka ratkaisu on muotoa

$$\frac{u}{c} = \frac{1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2v_s}{c}}}{1 + \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2v_s}{c}}}. \quad (79)$$

Nähdään, että tavanomainen rakettiyhtälö massojen suhteelle relativistisesti on [9]

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}\right)^{\frac{2v_s}{c}}. \quad (80)$$

4 Suuren relativistisen kappaleen havaitseminen ja tarkastelu

4.1 Havaintoon ja tarkasteluun vaikuttavat ilmiöt

Relativistisen mekaniikan ilmiöt vaikuttavat makroskooppisen kappaleen visuaaliseen havaintoon. Valonnopeudella kulkeva kappale kokee Lorentz-kontraktion ja kappaleen ulkomuoto muuttuu. Valonnopeuden tuomat erot kappaleen havaitsejan näköhavainnon ja kappaleen mittaamisen välillä on myös huomioitava. Määritellään aluksi näiden kahden eroavaisuus sekä myös miten äärellinen valonnopeus vaikuttaa tilanteeseen. [10]

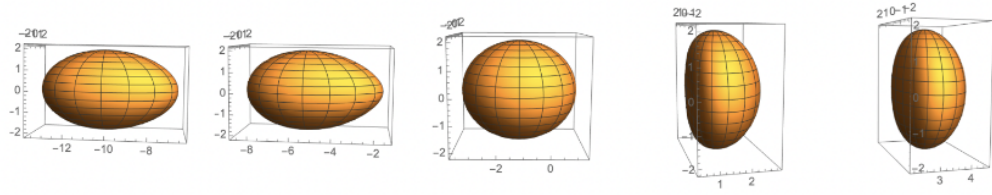
Ajatellaan lähes valonnopeudella liikkuvaa pistettä, joka liikkuu paikallaan olevan havaitsijan koordinaatistossa x -akselin suunnassa. Piste on ohitettu origon havaitsijan koordinaatistossa ajanhetkellä $t = 0$, havaitsija mittaa tietyn paikan pisteelle hetkellä t_h . Nyt pisteen paikaksi tällä ajanhetkellä mitataan olevan x_h havaitsijan mukaan. Havaitsija silti näkee pisteen etäisyydellä, joka on pienempi kuin mitattu paikka x_h . Mitattu paikka on pisteen todellinen sijainti, mutta äärellisestä valonnopeudesta johtuen pisteestä lähtevät valonsäteet ajanhetkellä t_v kohtaavat havaitsijan hieman ennen aikaa t_h . Tästä johtuen näköhavainto pisteen paikasta on eri sen todelliseen paikkaan verrattuna. Tämän perusteella saadaan yhtälö

$$c(t_h - t_v) = |x(t_v)|, \quad (81)$$

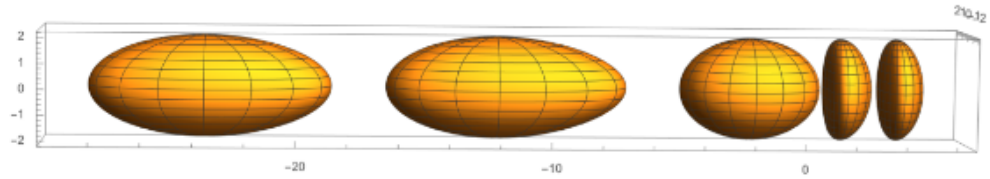
joka kertoo pisteen näköhavaintoon perustuvan sijainnin $x(t_v)$. Tätä havaitsijan ja valonsäteiden erotusta ajassa kutsutaan valon aikaviiveeksi. [10]

Tarkasteltaessa kappaletta pisteen sijaan tilanne on hieman erilainen. Kolmiulotteisen kappaleen tarkasteluun voitaisiin käyttää hyödyksi myös montaa pistettä, joiden jokaisen pisteen muunnos laskettaisiin erikseen. Tämä ei kuitenkaan antaisi täydellistä kuvausta kappaleen ulkomuodosta. Täydellisen kuvauksen saavuttamiseksi voidaan käyttää hyödyksi parametrisoituja käyriä. Kappaleille, joille ei voi muodostaa parametrisoituja käyriä, täytyy käyttää hyödyksi montaa yhdistettyä pistettä. [10]

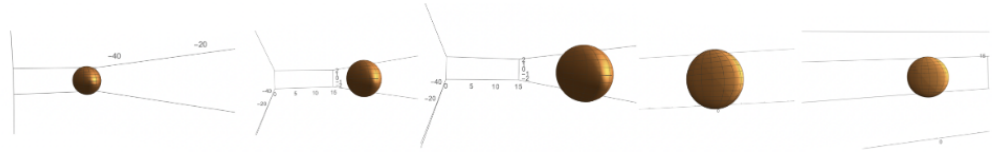
Valon äärellisen nopeuden lisäksi kappaleen ulkomuodon havaitsemiseen vaikuttaa Lorentz-kontraktio. Kuten kappaleessa 3.2 mainittiin, ulkomuoto muuttuu kappaleen kulkiessa lähellä valonnopeutta. Ulkomuodon muutos tapahtuu liikkeen suunnassa ja vielä siten, että aluksi kappale venyy ja sitten painuu kasaan. Tämä voidaan nähdä kuvasta 3 ja 4, kun tarkastellaan pallonmuotoista kappaletta ja sen ulkomuodon muutosta liikkeen suunnassa. Havaitsijan näköhavainto ei todellisuudessa ole kuitenkaan tämä. Havaitsija origossa näkisi, että pallo pyörisi liikkeen suunnassa säilyttäen muotonsa, kuten nähdään kuvassa 5. [10]



Kuva 3. Liikkuvan ympyränmuotoisen kappaleen ulkomuodon näennäinen muutos. [10]



Kuva 4. Kuvan 3. ympyränmuotoisen kappaleen ulkomuodon näennäinen muutos, kun kappaleen nopeus on suurempi. [10]

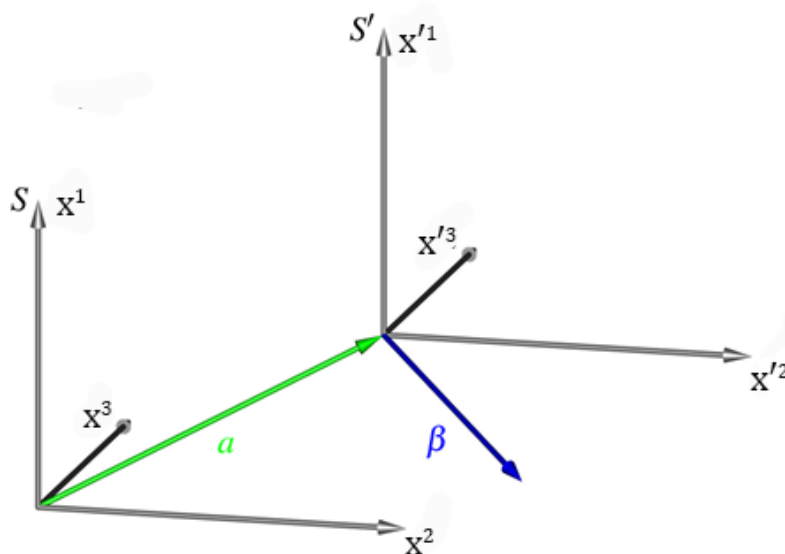


Kuva 5. Ympyränmuotoisen kappaleen ulkomuoto havaitsijan näkökulmasta, joka on origossa. [10]

4.2 Näköhavainto relativistisella nopeudella

Tarkasteltaessa kappaletta, joka kulkee tasaisella relativistisella nopeudella, täytyy määritellä havaitsijan sekä liikkuvan kappaleen koordinaatistojen väliset erot. Tähän voidaan käyttää Poincaré-muunnosta, jolloin huomioidaan myös koordinaatistojen välinen välimatka a yhtälön (11) mukaan. Havaitsija on levossa koordinaatistossa S ja kappale on levossa liikkuvassa koordinaatistossa S' kuvan 6 mukaisesti. Molempien koordinaatistojen kellot on myös synkronoitu, jolloin $x^0 = x'^0$. Nyt Poincaré-muunnos on [11]

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu + a^\mu, \quad (82)$$



Kuva 6. Levossa oleva Koordinaatisto S ja sen suhteen tasaisella nopeudella β liikkuva koordinaatisto S' . Kuvaa muokattu lähteestä [11]

jossa $\Lambda^\mu{}_\nu$ on yhtälön (8) mukaisen muunnosmatriisin komponentti. Erona yhtälöön (8) on se, että jos nopeus on positiivinen, niin matriisin komponentit ovat

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma, \quad (83)$$

$$\Lambda^0{}_i = \gamma\beta_i, \quad (84)$$

$$\Lambda^i{}_0 = \gamma\beta^i, \quad (85)$$

$$\Lambda^i{}_j = \delta_j^i + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\beta^i\beta_j. \quad (86)$$

Yhtälössä (86) esiintyvä Kroneckerin delta δ_j^i saa arvon 1, kun $i = j$ ja arvon 0, kun $i \neq j$. Indeksit i ja j saavat arvon 1-3. Nopeudet β_i ja β^i on määritelty olevan $\beta_i\beta^i = \beta \cdot \beta$. Lisäksi merkitään, että valonnopeuden arvo on $c = 1$. [11]

Nyt ajatellaan pistettä, joka on levossa koordinaatistossa S' , joka itsessään liikkuu tiettyä reittiä pitkin. Tämä reitti voidaan määrittää koordinaatistossa S käyttämällä hyväksi mainittuja Poincaré-muunnoksia. Halutaan siis määrittää milloin pisteestä lähtevä valo saavuttaa havaitsijan. Tämä yhtälö voidaan kirjoittaa olevan

[10]

$$(x_h^0 - x_v^0)^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i(x_v^0))^2. \quad (87)$$

Nyt Poincarén muunnosten mukaan saadaan, että

$$(x_h^0 - \Lambda^0{}_{\nu} x^{\nu})^2 = \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_{\nu} x^{\nu} + a^i)^2. \quad (88)$$

Tämä yhtälö voidaan ratkaista, jolloin saadaan kaksi arvoa muuttujalle x'^0 mutta vain toinen niistä on oikein valon äärellisestä nopeudesta johtuen. Ratkaisuksi x'^0 saadaan siten [10]

$$x'^0 = \gamma(p + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{d}) - \sqrt{2p(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{d}) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{d})^2 + (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta})(p^2 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d})) + \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}}, \quad (89)$$

missä on käytetty apumuuttujia [11]

$$\mathbf{d} = \mathbf{x}' + \frac{\gamma^2 \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}')}{\gamma + 1} + \mathbf{a}, \quad (90)$$

$$p = -x'_h - \gamma(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}'). \quad (91)$$

Nyt siis pisteen paikka voidaan kirjoittaa muodossa [11]

$$\mathbf{x} = \gamma x'^0 \boldsymbol{\beta} + \mathbf{d}. \quad (92)$$

Yhtälöiden (89) ja (92) avulla sekä apumuuttujien avulla saadaan laskettua pisteen näennäinen paikka ajanhetkellä x'_h . Samoja yhtälöitä voidaan käyttää myös erilaisien kappaleiden näennäisen paikan sekä ulkomuodon ratkaisemiseen. Yhtälön (89) neliöjuuren sisällä olevan lausekkeen voisi kirjoittaa eri tavalla, jolloin nähtäisiin suoraan kappaleen alkuperäisestä muodosta riippuva termi. Tämän lisäksi voitaisiin huomioida havaitsijan paikka omassa koordinaatistossaan vektorilla apumuuttujassa \mathbf{d} , mutta tässä tutkielmassa käsitellyissä tapauksissa havaitsija on aina origossa.

[10]

4.2.1 Neliönmuotoinen kappale

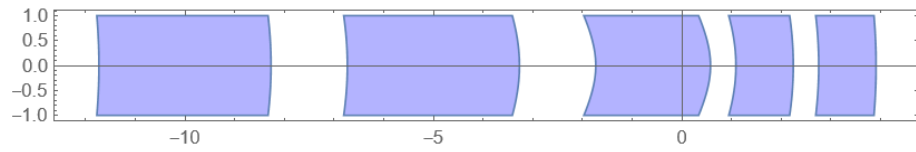
Määritellään neliönmuotoisen kappaleen näköhavainto ja siihen liittyvät yhtälöt, kun kappale on kaksidimensioinen. Käytetään muodostettuja yhtälöitä (89) ja (92). Neliö on koordinaatistossa S' ja koordinaatisto liikkuu x -akselin suunnassa koordinaatistoon S verrattuna nopeudella β ja kokee Lorentz-kontraktion. Kyseinen neliö voidaan parametrizoida koordinaatistossa S' muodossa

$$\mathbf{x}'_n = \left(\frac{l'}{2}n, \frac{l'}{2}m \right) \quad (93)$$

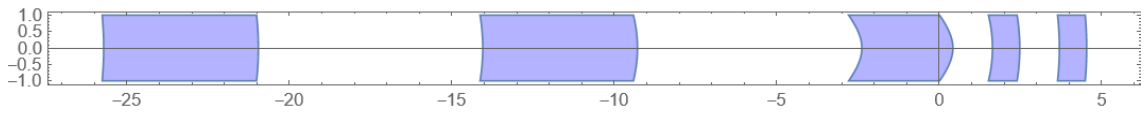
missä $n, m \in [-1, 1]$. Havaittaja sekä kappaleen keskipiste ovat omien koordinaatistojensa origoissa. Koordinaatistojen välinen etäisyys on myös $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Nyt kappaleen näennäinen paikka saadaan ratkaistua sijoittamalla yhtälön (93) mukaiset neliön parametrit yhtälöön (92), jolloin saadaan

$$\mathbf{x} = \left(\gamma x'_0 \beta + \frac{l'}{2}n \left(\frac{\gamma^2 \beta^2}{\gamma + 1} + 1 \right), \frac{l'}{2}m \right). \quad (94)$$

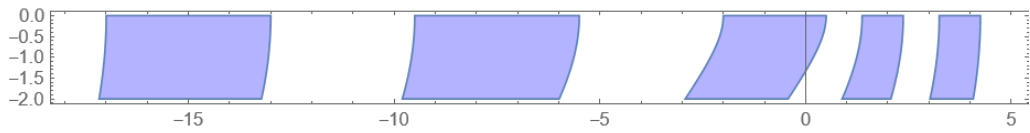
Nähdään, että neliön y -koordinaatti pysyy muuttumattomana. Huomioimalla vielä x'_0 yhtälön (89) mukaisesti voidaan muodostaa kuvat kappaleesta tietyillä ajanhetkillä. Muodostetaan kaksi kuvasarjaa neliöstä ajanhetkillä $x_h^0 = -10$, $x_h^0 = -5$, $x_h^0 = 0$, $x_h^0 = 5$ ja $x_h^0 = 10$ kahdella eri nopeudella, kun $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Neliön ulkomuodon muutos on esitetty kuvissa 7 ja 8. Kuvista nähdään, että nopeuden kasvaessa myös Lorentz-kontraktio pituussuunnassa kasvaa. Pituuskontraktion lisäksi neliön pystysivut ovat hieman kaareutuneet johtuen aikaerosta, jolla sivuista lähtevät valonsäteet kohtaavat havaitsijan. Muodostetaan myös kaksi kuvasarjaa, jossa koordinaatistojen välinen etäisyys on $\mathbf{a} = (0, -1)$. Huomataan eroavaisuus sivujen kaareutumisessa, sillä kappale kulkee havaitsijan alapuolella. Kuvassa 9 neliö on kuvattu samoilla ajanhetkillä kuin kuvissa 7 ja 8. Kuvassa 10 neliö on kuvattu ajanhetkillä $x_h^0 = -3$, $x_h^0 = 0$, $x_h^0 = 3$.



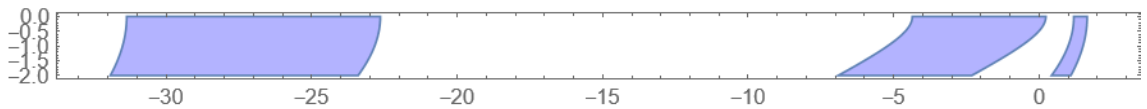
Kuva 7. Neliönmuotoisen kappaleen ulkomuodon muutos sen kulkiessa nopeudella $\beta = 0.5$ ja kun $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.



Kuva 8. Neliönmuotoisen kappaleen ulkomuodon muutos sen kulkiessa nopeudella $\beta = 0.7$ ja kun $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.



Kuva 9. Neliönmuotoisen kappaleen ulkomuodon muutos sen kulkiessa nopeudella $\beta = 0.6$ ja kun $\mathbf{a} = (0, -1)$.



Kuva 10. Neliönmuotoisen kappaleen ulkomuodon muutos sen kulkiessa nopeudella $\beta = 0.9$ ja kun $\mathbf{a} = (0, -1)$.

5 Yhteenveto

Tämän tutkielman kohteena oli relativistinen mekaniikka sekä relativististen kappaleiden havaitseminen. Tuotiin esille relativistisen mekaniikan matemaattinen muotoilu ja myös erityisen suhteellisuusteorian mukaiset ilmiöt ja niiden vaikutukset. Tutkielman loppuosassa tarkasteltiin erityisesti makroskooppisia kappaleita näiden relativististen ilmiöiden vaikutusten alaisina.

Kappaleen 2 ja 3 yhtälöistä nähdään valonnopeuden vaikutus liikkeen kuvaamiseen ja tapahtumien tarkasteluun. Lisäksi voidaan huomata erityisesti eroavaisuus energian määrittelyssä klassisen ja relativistisen mekaniikan välillä, kun energiaa ja massaa käsitellään yhtenä kokonaisuutena. Osa määrittelyistä yhtälöistä muuttuvat myös rajatapauksissa klassisen mekaniikan vastineisiin, kun nopeus pienenee ja Lorentz-vakion arvo lähenee arvoa yksi.

Relativististen kappaleiden näennäistä ulkomuotoa käsiteltiin ja havainnoitiin kappaleessa 4, jossa tuotiin esille myös äärellisen valonnopeuden merkitys. Ulkomuodon havainnointiin käytettyjä yhtälöitä voidaan käyttää myös monen muunlaisen kappaleen tarkasteluun, kuin mitä kappaleessa on esitetty. Lähteistä [10] ja [11] löytyy lisää ulkomuodon havainnointia monelle erilaiselle parametriselle käyrälle ja kappaleelle.

Relativistisen mekaniikan tutkiminen on tärkeää luonnonilmiöiden ymmärtämisessä erityisissä olosuhteissa. Se antaa vastauksia sekä selittää ilmiöitä, mitä ei klassisella mekaniikalla pysty selittämään. Sen tutkiminen mahdollistaa myös käytännön sovellusten toimivuuden, kun kuljetaan suurilla nopeuksilla. Tämän lisäksi energian uudelleenmäärittely on ollut ja on edelleen tärkeässä roolissa esimerkiksi ydinfysikassa. Relativistinen mekaniikka itsessään on myös vahvasti läsnä kosmologiassa ja sen tutkimisessa, vaikkakin yleisen suhteellisuusteorian pohjalta.

Viitteet

- [1] R. Ferraro, *Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity* (Springer New York, New York, NY, 2007), s. 47-80.
- [2] H. Goldstein, C. Poole ja J. Safko, *Classical mechanics, Addison-Wesley series in physics*, 3rd ed. ed. (Addison-Wesley San Francisco, 2002), s. 160, 276-342.
- [3] D. Cline, *Variational Principles in Classical Mechanics*, revised second edition ed. (University of Rochester River Campus Libraries Monroe County, New York, 2019), s. 433-459. Saatavilla [www-muodossa https://open.umn.edu/opentextbooks/textbooks/490](https://open.umn.edu/opentextbooks/textbooks/490), viitattu 13.1.2024.
- [4] G. Wagner ja M. W. Guthrie, Demystifying the Lagrangians of special relativity, 2021, arXiv:2108.07786 [physics].
- [5] S. Chanda ja P. Guha, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics **15**, (2018).
- [6] M. Correia, Physical Review D **105**, (2022).
- [7] G. Koczan, Acta Physica Polonica A **139**, (2021).
- [8] E. A. Cryer-Jenkins ja P. D. Stevenson, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **476**, (2020).
- [9] U. Walter, Acta Astronautica **59**, (2006).
- [10] Utkarsh Bajaj, Visual Appearance of Extended objects in Special Relativity, 2021, arXiv:2104.03908 [gr-qc, physics:physics].
- [11] T. Müller ja S. Boblest, European Journal of Physics **35**, (2014).