Käyräviivaiset koordinaatit

Emilia Valtomäki

Turun yliopisto
Tarkaskastajat
FT. J.L.

Lokakuu 2025

Sisällys

1 Johdanto **2**

2 Koordinaattien muuntaminen ja ortogonaalisuus **2**

2.1 Koordinaattien muuntaminen 2

2.2 Ortogonaaliset käyräviivaiset koordinaatit 3

3 Yksikkövektorit sekä kaaren pituus- ja tilavuuselementit **7**

3.1 Yksikkövektorit käyräviivaisissa järjestelmissä 7

3.2 Kaaren pituus- ja tilavuuselementit 11

Kirjallisuutta **13**

1 Johdanto

Tässä työssä perehdytään käyräviivaisten koordinaattien perusteisiin ja niitä sovelletaan kahteen käyräviivaiseen koordinaattijärjestelmään. Sylinteri- ja pallokoordinaatistot ovat yleisemmin käytetyt käyräviivaiset koordinaattijärjestelmät ja ne pystyvät esittämään selkeästi käyräviivaisten koordinaattien perusominaisuuksia. Murray R Spiegelin teos [1] esittää myös muita käyräviivaisia koordinaattijärjestelmiä kuten parabolinen sylinterikoordinaatisto, elliptinen sylinterikoordinaatisto ja bipolaarinen koordinaatisto.

Työn alussa määritetään koordinaattien muuntaminen suorakulmaisten koordinaattien ja käyräviivaisten koordinattien välillä. Tässä luvussa käsitellään myös koordinaattipinnat, koordinaattikäyrät ja ortogonaalisuus. Näitä ominaisuuksia havainnollistetaan sylinteri- ja pallokoordinaatiston avulla.

Työssä käsitellään lisäksi yksikkövektoreita käyräviivaisissa järjestelmissä ja osoitetaan esimerkiksi sylinterikoordinaatiston ortogonaalisuus. Lopussa esitetään määritelmät kaaren pituus- ja tilavuuselementeille. Kaaren pituuselementistä käydään soveltava esimerkki.

2 Koordinaattien muuntaminen ja ortogonaalisuus

2.1 Koordinaattien muuntaminen

Määritelmä 2.1. Olkoon mielivaltaisen pisteen suorakulmaiset koordinaatit (x, y, z) funktiona (u_1, u_2, u_3) siten, että

$$x = x(u_1, u_2, u_3),\ \ y = y(u_1, u_2, u_3),\ \ z = z(u_1, u_2, u_3). \tag{1}$$

Oletetaan, että (1) voidaan ratkaista (u_1, u_2, u_3) suhteen (x, y, z), jolloin

$$u_1 = u_1(x, y, z),\ \ u_2 = u_2(x, y, z),\ \ u_3 = u_3(x, y, z). \tag{2}$$

Funktioiden (1) ja (2) oletetaan olevan yksikäsitteisiä ja jatkuvasti derivoitavia, joten (x, y, z) ja (u_1, u_2, u_3) ovat myös keskenään yksikäsitteisiä. On kuitenkin huomioitava, että tämä oletus ei päde kaikissa olosuhteissa.

Kun on annettu piste P, jolla on suorakulmaiset koordinaatit (x, y, z), voidaan yhtälöstä (2) liittää yksikäsitteisen joukon koordinaatteja (u_1, u_2, u_3). Näitä koordinaatteja kutsutaan P:n *käyräviivaisiksi koordinaateiksi.* Yhtälöt (1) ja (2) määrittelevät *koordinaattien muuntamisen.*

Esitetään seuraavaksi kaksi yleisemmin käytettyä erityistä ortogonaalista käyräviivaista koordinaattijärjestelmää koordinaattien muuntamisesta.

Lause 2.2. Sylinterikoordinaatit (ρ, ϕ, z).

$$x = \rho \cos \phi, \;\; y = \rho \sin \phi, \;\; z = z, \tag{3}$$

missä

$$\rho \geqq 0, \;\; 0 \leqq \phi < 2\pi, \;\; -\infty < z < \infty$$

$$h_\rho = 1, \;\; h_\phi = \rho, \;\; , h_z = 1.$$

Lause 2.3. Pallokoordinaatit (r, θ, ϕ).

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \;\; y = r \sin \theta \sin \phi, \;\; z = r \cos \theta, \tag{4}$$

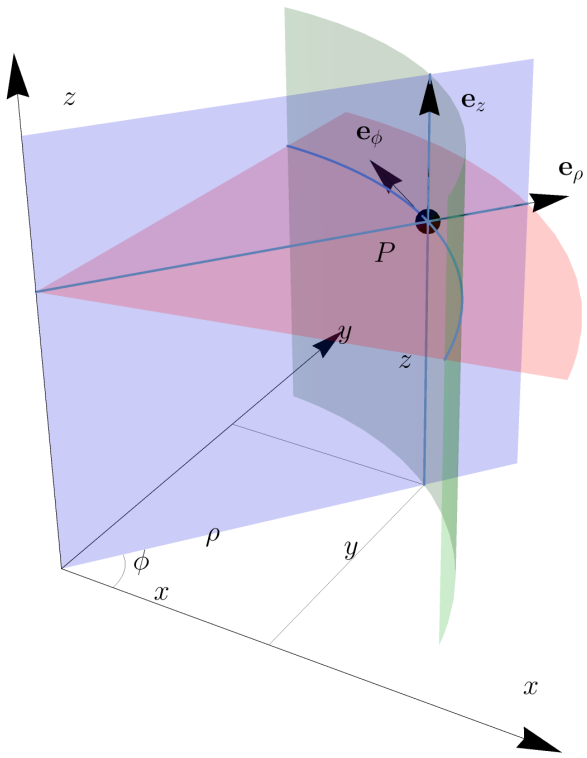
missä

$$r \geqq 0, \;\; 0 \leqq \phi < 2\pi, \;\; 0 \leqq \theta \leqq \pi$$

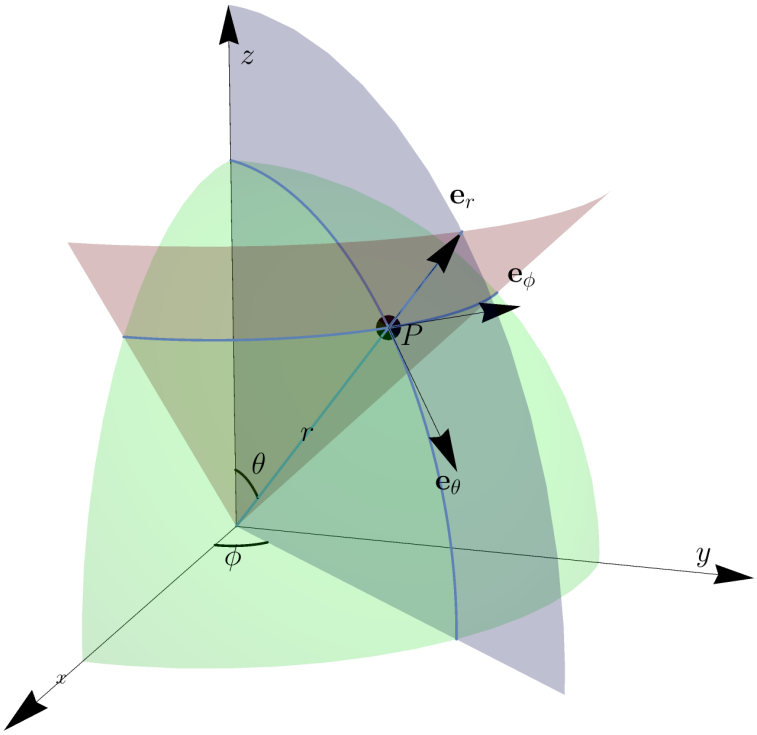
$$h_r = 1, \;\; h_\theta = r, \;\; h_\phi = r \sin \theta.$$

2.2 Ortogonaaliset käyräviivaiset koordinaatit

Määritelmä 2.4. Pintoja $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, $u_3 = c_3$, missä c_1, c_2, c_3 ovat vakioita, kutsutaan *koordinaattipinnoiksi.* Jokainen näiden pintojen pari leikkaa käyriä, joita kutsutaan *koordinaattikäyriksi tai viivoiksi.* Jos koordinaattipinnat leikkaavat suorassa kulmassa, tällöin käyräviivaista koordinaattijärjestelmää kutsutaan *ortogonaaliksi.* Kaarevan koordinaattijärjestelmän u_1-, u_2- ja u_3-koordinaattikäyrät ovat yhdenmukaisia suorakulmaisen koordinaattijärjestelmän x-, y- ja z-koordinaattiakseleiden kanssa.



Kuva 1: Sylinterikoordinaatisto



Kuva 2: Pallokoordinaatisto

Ratkaistaan esimerkkinä kaksi tehtävää, jotka liittyvät ortogonaalisiin käyräviivaisiin koordinaatteihin.

Esimerkki 2.5. Kuvaa koordinaattipinnat ja koordinaattikäyrät a) sylinterikoordinaateille ja b) pallokoordinaateille.

a) Koordinaattipinnat sylinterikoordinaateille :

$$\rho = c_1, \ z\text{-akseli jos } c_1 = 0.$$
$$\phi = c_2, \ \text{tasot } z\text{-akselin läpi.}$$
$$z = c_3, \ \text{tasot ovat kohtisuorassa } z\text{-akselia vastaan.}$$

Koordinaattikäyrät sylinterikoordinaateille:

$\rho = c_1$ ja $\phi = c_2$ (z-käyrä) leikkauspiste on suora.

$\rho = c_1$ ja $z = c_3$ (ϕ-käyrä) leikkauspiste on ympyrä (tai piste).

$\phi = c_2$ ja $z = c_3$ (ρ-käyrä) leikkauspiste on suora.

b) Koordinaattipinnat pallokoordinaateille:

$$r = c_1, \ \text{origo jos } c_1 = 0.$$
$$\theta = c_2, \ \text{viivat jos } c_2 = 0 \text{ tai } \pi, \ \text{ja } xy \text{ taso jos } c_2 = \frac{\pi}{2}.$$
$$\phi = c_3, \ \text{tasot z-akselin läpi.}$$

Koordinaattikäyrät pallokoordinaateille:

$r = c_1$ ja $\theta = c_2$ (ϕ-käyrä) leikkauspiste on ympyrä (tai piste).

$r = c_1$ ja $\phi = c_3$ (θ-käyrä) leikkauspiste on puoliympyrä ($c_1 \neq 0$).

$\theta = c_2$ ja $\phi = c_3$ (r-käyrä) leikkauspiste on suora.

Esimerkki 2.6. Määrittele ja muunna sylinterikoordinaatit suorakulmaisiin koordinaatteihin.

Muuntamista suorakulmaisista koordinaateista sylinterikoordinaatteihin kuvaavat yhtälöt

$$x = \rho \cos \phi, \tag{5}$$

$$y = \rho \sin \phi \tag{6}$$

ja

$$z = z. \tag{7}$$

Kun neliöidään ja lisätään yhteen yhtälöt (5) sekä (6) saadaan

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)$$

tai

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{8}$$

koska $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ ja $\rho \geq 0$. Jaetaan nyt yhtälö (6) yhtälöllä (5), jolloin

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho \sin \phi}{\rho \cos \phi} = \tan \phi$$

tai

$$\phi = \arctan \frac{y}{x}. \tag{9}$$

Tällöin on saatu siis halutut muunnokset (7), (8) ja (9). On huomattava, että ϕ on määritelty z-akselin pisteiden ($x = 0$, $y = 0$) osalta. Tällaisia pisteitä kutsutaan muunnoksen *singulaaripisteiksi.*

3 Yksikkövektorit sekä kaaren pituus- ja tilavuuselementit

3.1 Yksikkövektorit käyräviivaisissa järjestelmissä

Määritelmä 3.1. Olkoon $r = xi + yj + zk$ pisteen P paikkavektori. Tällöin kaavan (1) mukaan voidaan kirjoittaa $r = r(u_1, u_2, u_3)$, ja u_1-käyrän tangenttivektori kohdassa P (missä u_2 ja u_3 ovat vakioita) on $\frac{\partial r}{\partial u_1}$. Siten yksikkötangenttivektori tässä suunnassa on $e_1 = \frac{\partial r}{\partial u_1} / |\frac{\partial r}{\partial u_1}|$ niin, että $\frac{\partial r}{\partial u_1} = h_1 e_1$ missä $h_1 = |\frac{\partial r}{\partial u_1}|$. Vastaavasti, jos e_2 ja e_3 ovat yksikkötangenttivektoreita u_2- ja u_3-käyrille kohdassa P, niin $\frac{\partial r}{\partial u_2} = h_2 e_2$ ja $\frac{\partial r}{\partial u_3} = h_3 e_3$ missä $h_2 = |\frac{\partial r}{\partial u_2}|$ ja

$h_3 = |\frac{\partial r}{\partial u_3}|$. Suureita h_1, h_2 ja h_3 kutsutaan *skaalaustekijöiksi.* Yksikkövektorit e_1, e_2 ja e_3 ovat u_1, u_2 ja u_3 kasvusuunnissa.

Koska ∇u_1 on vektori kohdassa P, joka on normaali pinnan $u_1 = c_1$ suhteen, saadaan yksikkövektori tähän suuntaan $E_1 = \nabla u_1/|\nabla u_1|$. Vastaavasti yksikkövektorit $E_2 = \nabla u_2/|\nabla u_2|$ ja $E_3 = \nabla u_3/|\nabla u_3|$ kohdassa P ovat normaaleja pinnoille $u_2 = c_2$ ja $u_3 = c_3$.

Näin ollen käyräviivaisen järjestelmän jokaisessa pisteessä P on olemassa yleensä kaksi joukkoa yksikkövektoreita e_1, e_2, e_3, jotka ovat tangentteja koordinaattikäyrille, ja E_1, E_2, E_3, jotka ovat normaaleja koordinaattipinnoille. Joukoista tulee identisiä, jos ja vain jos kaareva koordinaatisto on ortogonaalinen. Molemmat joukot ovat analogisia suorakulmaisissa koordinaateissa olevien $i-$, $j-$ ja $k-$yksikkövektorien kanssa, mutta ne eroavat toisistaan siinä, että ne voivat muuttaa suuntaa pisteestä toiseen. Täten voidaan osoittaa, että joukot $\frac{\partial r}{\partial u_1}$, $\frac{\partial r}{\partial u_2}$, $\frac{\partial r}{\partial u_3}$ ja ∇u_1, ∇u_2, ∇u_3 muodostavat käänteisvektoriryhmiä.

Vektori A voidaan esittää yksikkökantavektoreiden e_1, e_2, e_3 tai E_1, E_2, E_3 avulla

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 = a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$$

missä A_1, A_2, A_3 ja a_1, a_2, a_3 ovat A:n vastaavia *komponentteja* kussakin järjestelmässä.

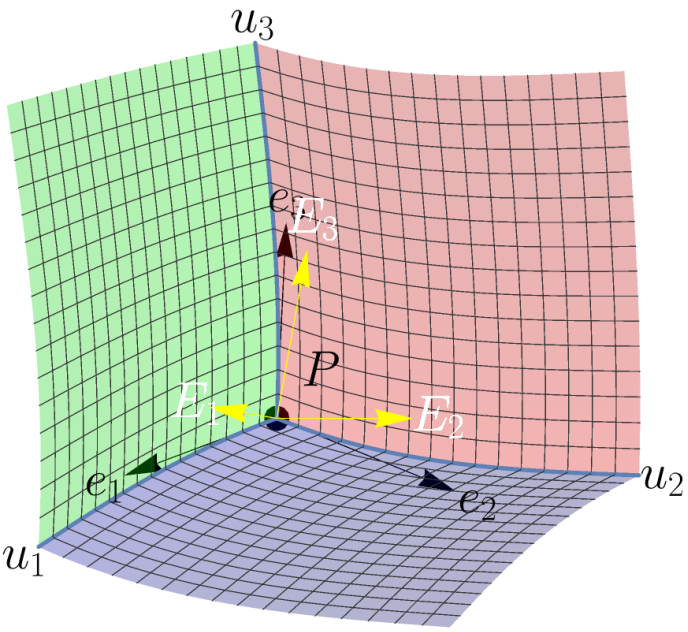
Voimme esittää A:n myös kantavektoreilla $\frac{\partial r}{\partial u_1}$, $\frac{\partial r}{\partial u_2}$, $\frac{\partial r}{\partial u_3}$ tai ∇u_1, ∇u_2, ∇u_3, joita kutsutaan *unitaarisiksi kantavektoreiksi*, mutta jotka eivät ole yleensä yksikkövektoreita. Tällöin

$$A = C_1 \frac{\partial r}{\partial u_1} + C_2 \frac{\partial r}{\partial u_2} + C_3 \frac{\partial r}{\partial u_3} = C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 + C_3 \alpha_3$$

ja

$$A = c_1 \nabla u_1 + c_2 \nabla u_2 + c_3 \nabla u_3 = c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 + c_3 \beta_3$$

missä C_1, C_2, C_3 kutsutaan A:n *kontravariantti komponenteiksi* ja c_1, c_2, c_3 ovat A:n *kovariantteja komponenteja.* Huomaa, että $\alpha_p = \frac{\partial r}{\partial u_p}$, $\beta_p = \nabla u_p$, missä $p = 1, 2, 3$.



Kuva 3: Yksikkövektorit käyräviivaisessa järjestelmässä

Esitetään seuraavaksi kaksi tehtävää, joissa hyödynnetään yksikkövektoreiden ominaisuuksia kaarevissa järjestelmissä.

Esimerkki 3.2. Osoita, että sylinterikoordinaatisto on ortogonaalinen.

Sylinterikoordinaateissa olevan pisteen paikkavektori on

$$r = xi + yj + zk = \rho\cos\phi i + \rho\sin\phi j + zk.$$

ρ-, ϕ- ja z-käyrien tangenttivektorit ovat $\frac{\partial r}{\partial \rho}$, $\frac{\partial r}{\partial \phi}$ ja $\frac{\partial r}{\partial z}$, missä

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \cos\phi i + \sin\phi j,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \phi} = -\rho\sin\phi i + \rho\cos\phi j$$

ja

$$\frac{\partial r}{\partial z} = k.$$

Näiden suuntien yksikkövektorit ovat

$$e_1 = e_\rho = \frac{\frac{\partial r}{\partial \rho}}{|\frac{\partial r}{\partial \rho}|} = \frac{\cos\phi i + \sin\phi j}{\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi}} = \cos\phi i + \sin\phi j, \tag{10}$$

$$e_2 = e_\phi = \frac{\frac{\partial r}{\partial \phi}}{|\frac{\partial r}{\partial \phi}|} = \frac{-\rho\sin\phi i + \rho\cos\phi j}{\sqrt{\rho^2\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi}} = -\sin\phi i + \cos\phi j \tag{11}$$

ja

$$e_2 = e_\phi = \frac{\frac{\partial r}{\partial z}}{|\frac{\partial r}{\partial z}|} = k.$$

Tällöin

$$e_1 \cdot e_2 = (\cos\phi i + \sin\phi j) \cdot (-\sin\phi i + \cos\phi j) = 0,$$

$$e_1 \cdot e_3 = (\cos\phi i + \sin\phi j) \cdot (k) = 0,$$

$$e_2 \cdot e_3 = (-\sin\phi i + \cos\phi j) \cdot (k) = 0$$

ja siten e_1, e_2, e_3 ovat keskenään kohtisuorassa ja koordinaatisto on ortogonaalinen.

Esimerkki 3.3. Esitä vektori $A = zi - 2xj + yk$ sylinterikoordinaateissa. Määritä siis A_ρ, A_ϕ ja A_z.

Ratkaisemalla yhtälöt (10) ja (11) saadaan

$$i = \cos\phi e_\rho - \sin\phi e_\phi$$

ja

$$j = \sin\phi e_\rho + \cos\phi e_\phi.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} A &= zi - 2xj + yk \\ &= z(\cos\phi e_\rho - \sin\phi e_\rho) - 2\rho\cos\phi(\sin\phi e_\rho + \cos\phi e_\phi) + \rho\sin\phi e_z \\ &= (z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\sin\phi)e_\rho - (z\sin\phi + 2\rho\cos^2\phi)e_\phi + \rho\sin\phi e_z \end{aligned}$$

ja

$$A_\rho = z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\sin\phi,$$

$$A_\phi = -z\sin\phi - 2\rho\cos^2\phi,$$

$$A_z = \rho\sin\phi.$$

3.2 Kaaren pituus- ja tilavuuselementit

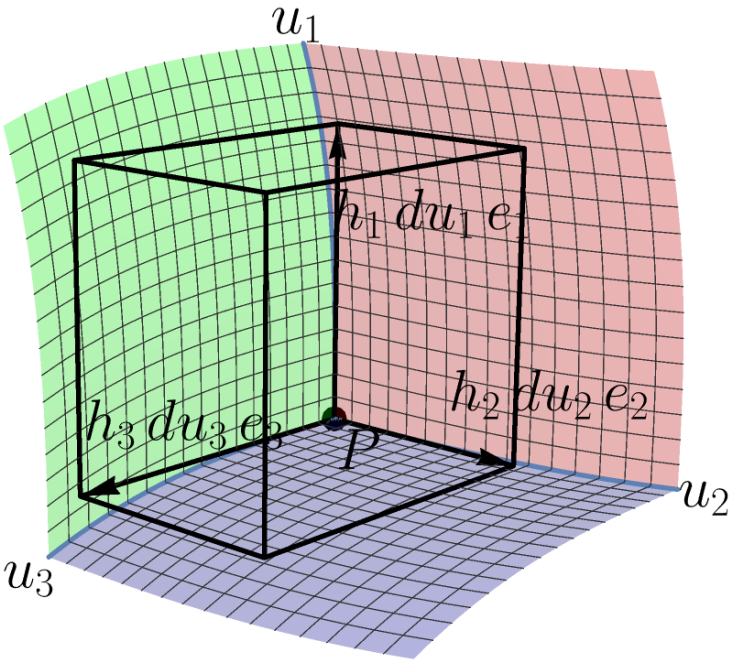
Määritelmä 3.4. Olkoon $r = r(u_1, u_2, u_3)$, jolloin

$$dr = \frac{\partial r}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial r}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial r}{\partial u_3}du_3 = h_1 du_1 e_1 + h_2 du_2 e_2 + h_3 du_3 e_3.$$

Määritetään kaaren pituuden ds differentiaali $ds^2 = dr \cdot dr$. Tällöin ortogonaalisille järjestelmille pätee $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = 0$ ja

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2.$$

Käyrällä u_1, missä u_2 ja u_3 ovat vakioita, $dr = h_1 du_1 e_1$. Tällöin kaaren pituuden ds_1 differentiaali u_1 suuntaisesti pisteessä P on $h_1 du_1$. Vastaavasti



Kuva 4: Ortogonaalisen käyräviivaisen koordinaatiston tilavuuselementti

differentiaalikaaren pituudet u_2 ja u_3 suuntaisesti pisteessä P ovat $ds_2 = h_2 du_2$ ja $ds_3 = h_3 du_3$.

Kuviossa (4) ortogonaalisen käyräviivaisen koordinaatiston tilavuuselementti on

$$dV = |(h_1 du_1 e_1) \cdot (h_2 du_2 e_2) \times (h_3 du_3 e_3)| = h_1 h_2 h_3 u_1 u_2 u_3,$$

koska $|e_1 \cdot e_2 \cdot e_3| = 1$.

Ratkaistaan esimerkki kaaren pituuteen liittyen.

Esimerkki 3.5. Etsi kaaren pituuden alkion neliö a) sylinterikoordinaateille ja b) pallokoordinaateille. Määritä näitä vastaavat skaalauskertoimet.

a) Sylinterikoordinaatteista (3) saadaan

$$dx = -\rho \sin\phi d\phi + \cos\phi d\rho,$$

$$dy = \rho \cos\phi d\phi + \sin\phi d\rho$$

ja

$$dz = dz.$$

Jolloin kaaren pituuden alkion neliö

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (-\rho \sin\phi d\phi + \cos\phi d\rho)^2 + (\rho \cos\phi d\phi + \sin\phi d\rho)^2 + (dz)^2 \\ &= (d\rho)^2 + \rho^2 (d\phi)^2 + (dz)^2 \\ &= h_1^2 (d\rho)^2 + h_2^2 (d\phi)^2 + h_3^2 (dz)^2, \end{aligned}$$

ja skaalauskertoimet $h_1 = h_\rho = 1$, $h_2 = h_\phi = 1$ ja $h_3 = h_z = 1$.

b) Pallokoordinaateista (4) saadaan

$$dx = -r \sin\theta \sin\phi d\phi + r \cos\theta \cos\phi d\theta + \sin\theta \cos\phi dr$$

$$dy = r \sin\theta \cos\phi d\phi + r \cos\theta \sin\phi d\theta + \sin\theta \sin\phi dr$$

ja

$$dz = -r \sin\theta d\theta + \cos\theta dr$$

Jolloin kaaren pituuden alkion neliö

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta (d\phi)^2$$

ja skaalauskertoimet $h_1 = h_r = 1$, $h_2 = h_\theta = r$ ja $h_3 = h_\phi = r \sin\theta$.

Kirjallisuutta

[1] Murray R Spiegel: *Vector analysis and an introduction to tensor analysis*. Great Britain, 1974.